# 第四章　复变函数项级数

## 第四讲 洛朗级数

数学与统计学院
吴慧卓

# 主要内容

1 双边幂级数

2 解析函数的洛朗展开定理

3 求解析函数洛朗展开式的方法

# 主要内容

1 双边幂级数

2 解析函数的洛朗展开定理

3 求解析函数洛朗展开式的方法

## 1 双边幂级数

如果$f(z)$在$z_0$处不解析，但在$z_0$的去心邻域内解析，试问$f(z)$在

$0<|z-z_0|<R$或$R_2<|z-z_0|<R_1$ 则能否展开为某种级数呢？

例如，$f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$ 在 $0<|z|<1, 0<|z-1|<1$解析，

(1)$0<|z|<1$, $f(z)=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-z}=\dfrac{1}{z}+1+z+\cdots+z^{n-1}+\cdots$

(2)$0<|z-1|<1$,

$$f(z)=\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-(1-z)}=\frac{1}{1-z}+1+(1-z)+(1-z)^2+\cdots$$

**双边幂级数**　既含有正幂项又含有负幂项的级数

一般形式

负幂项部分　　正幂项部分

$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n}_{\text{收敛}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}}_{\text{主要部分}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n}_{\text{解析部分}}$$

收敛　　同时收敛

主要部分　　解析部分

无首项，不能用部分和来定义收敛和发散.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} \xrightarrow{\text{令}\zeta=(z-z_0)^{-1}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^{n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^{n}$ ↓ 收敛半径 $R$

$|\zeta| < R$ 时,收敛

↓ 收敛域

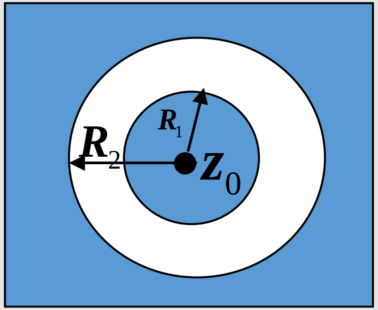
$$|z-z_0| > \frac{1}{R} = R_2$$

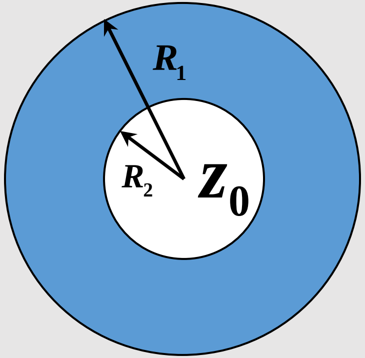
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

↓ 收敛半径 $R_1$

收敛域

$$|z-z_0| < R_1$$



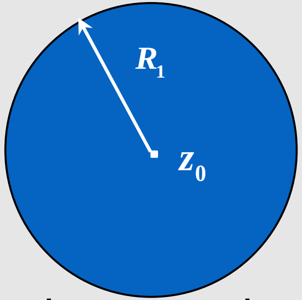

若 (1) $R_1 < R_2$： 两收敛域无公共部分, 双边幂级数发散.

(2) $R_1 > R_2$：两收敛域有公共部分 $R_2 < |z-z_0| < R_1$, 级数绝对收敛.

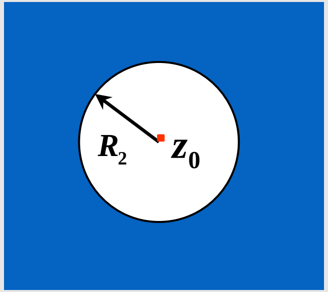
**结论:** 双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛区域为

圆环域 $R_2 < |z-z_0| < R_1.$

常见的特殊圆环域: $R_2 = 0, R_1 = \infty$




$0 < |z-z_0| < R_1$




$R_2 < |z-z_0| < \infty$


$0 < |z-z_0| < \infty$

**可以证明:** 双边幂级数在收敛环域内的和函数是解析函数,
可以逐项求导、逐项积分.

**例1** 求 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} ne^{-|n|}z^n$ 的收敛域.

**解** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} ne^{-|n|}z^n \Rightarrow R_1 = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{e^n}\frac{e^{n+1}}{n+1} = e$

当 $|z| < R_1 = e$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} ne^{-n}z^n$ 收敛.

令 $m = -n,\ \zeta = \frac{1}{z}$

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} ne^{-|n|}z^n = -\sum_{m=1}^{+\infty} me^{-m}z^{-m} = -\sum_{m=1}^{+\infty} me^{-m}\zeta^m \Rightarrow R_2 = e$$

**例1** 求 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} ne^{-|n|}z^n$ 的收敛域.

**解** 当 $|z| < R_1 = e$ 时, $\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-n}z^n$ 收敛.

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} ne^{-|n|}z^n = -\sum_{m=1}^{+\infty} me^{-m}z^{-m} = -\sum_{m=1}^{+\infty} me^{-m}\zeta^m \Rightarrow R_2 = e$$

当 $|\zeta| < R_2 = e$ 时, 即当 $|z| > \dfrac{1}{e}$ 时, $\sum_{n=-1}^{-\infty} ne^{-|n|}z^n$ 收敛.

故原幂级数收敛域为 $\dfrac{1}{e} < |z| < e$.

# 主要内容

1 双边幂级数

2 解析函数的洛朗展开定理

3 求解析函数洛朗展开式的方法

棚拍

对于通常的幂级数，讨论了下面两个问题：

(1) 幂级数的收敛域是圆域, 且和函数在收敛域内解析.

(2) 在圆域内的解析函数一定能展开成幂级数.

对于双边幂级数，已经知道：双边幂级数的收敛域是圆环域.

问题：在圆环域内解析的函数是否可以展开成双边幂级数?

## 2 解析函数的洛朗展开定理

**定理1（Laurent展开定理）** 设 $0 \le R_2 < R_1 \le +\infty$, 函数 $f(z)$ 在圆环域 $R_2 < |z - z_0| < R_1$ 内解析, 则函数 $f(z)$ 在此环域内必能**唯一**地展开为Laurent级数

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \left(R_2 < |z - z_0| < R_1\right),}$$

其中 $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_C \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$

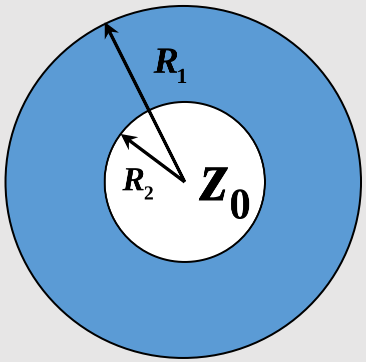
称为**洛朗系数**. $C : |z - z_0| = R \ (R_2 < R < R_1)$, 正向.

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\quad\left(R_2<|z-z_0|<R_1\right),}$$

其中 $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$

**注意：**

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z\neq\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$$




$f(z)$有可能在$z_0$不解析，或$C$内可能有$f(z)$的其他不解析点.

**说明：**

（1）洛朗级数是双边幂级数，泰勒级数只有正幂项；

（2）洛朗级数是泰勒级数的推广，泰勒级数是洛朗级数的特殊情况；

（3）系数公式不同，洛朗系数不能利用高阶导数公式.

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \neq \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

# 主要内容

1 双边幂级数

2 解析函数的洛朗展开定理

3 求解析函数洛朗展开式的方法

## 2 求解析函数洛朗展开式的方法

**1. 直接展开法** $$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\ \left(R_1<|z-z_0|<R_2\right),$$

其中 $$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

积分求系数一般情况下比较复杂.

**2. 间接展开法**

利用洛朗展开式在的唯一性及双边幂级数在收敛圆环域内可以逐项求导和逐项积分的性质.

**例2** 将函数 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^3}$ 在圆环域 $0<|z|<+\infty$ 内展为洛朗级数.

**解 1）直接展开法** $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{e^z-1}{z^{n+4}}dz$

$(1)\, n\le -4, \dfrac{e^z-1}{z^{n+4}}$ 解析，故积分为0；

$$(2)\, n\ge -3, c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^z-1}{z^{n+4}}dz=\frac{1}{(n+3)!}\left(e^z-1\right)^{(n+3)}\Big|_{z=0}$$

$$=\begin{cases}0, & n=-3\\ \dfrac{1}{(n+3)!}, & n\ge -2,\end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 0, & n = -3 \\ \dfrac{1}{(n+3)!}, & n \geq -2, \end{cases}$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

$$= c_{-2} z^{-2} + c_{-1} z^{-1} + c_0 + c_1 z + \cdots c_n z^n + \cdots$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} z + \cdots \qquad 0 < |z| < +\infty.$$

**例2** 将函数 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^3}$ 在圆环域 $0<|z|<+\infty$ 内展为洛朗级数.

**解 （2）间接展开法**

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\left(e^z-1\right)$$

$$=\frac{1}{z^3}\left(z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}z+\cdots+\frac{1}{n!}z^{n-3}+\ldots$$

**例3** 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域内展成洛朗级数.

(1) $0<|z|<1$; (2) $1<|z|<2$; (3) $2<|z|<+\infty$; (4) $0<|z-1|<1$

**解** $$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

(1) $0<|z|<1$; （没有负幂项）

$$f(z)=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}+\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{2^{n+1}}+1\right]z^n$$

**例3** 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域内展成洛朗级数.

(1) $0<|z|<1$; (2) $1<|z|<2$; (3) $2<|z|<+\infty$; (4) $0<|z-1|<1$

**解** $f(z)=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1}$

(2) $1<|z|<2$; （负幂项有无穷多项）

$$f(z)=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

**例3** 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域内展成洛朗级数.

(1) $0<|z|<1$; (2) $1<|z|<2$; (3) $2<|z|<+\infty$; (4) $0<|z-1|<1$

**解** $$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$$

(3) $2<|z|<+\infty$; $\dfrac{2}{|z|}<1, \dfrac{1}{|z|}<1$ （注意：$z=0$不是$f(z)$的奇点）

$$f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

**例3** 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域内展成洛朗级数.

(1) $0<|z|<1$; (2) $1<|z|<2$; (3) $2<|z|<+\infty$; (4) $0<|z-1|<1$

**解** $f(z)=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1}$

(4) $0<|z-1|<1$（负幂项只有有限项）

$$f(z)=\frac{1}{z-1-1}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-(z-1)}-\frac{1}{z-1}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{n}-(z-1)^{-1}$$

**注意：**

（1）给定函数$f(z)$在复平面上的点$z_0$后，函数在各个不同的圆环域中有不同的洛朗展开式.

（2）洛朗展开的唯一性是指在同一个圆环域内解析函数的洛朗展开式是相同的.