

离散数学概论

第六章 特殊的图（二）

课程QQ号： 689423416

金耀 数字媒体技术系

fool1025@163.com

13857104418

知识回顾：哈密顿图的判定

➤ **定理：（必要条件）** 设无向连通图 $G = \langle V, E \rangle$ 是哈密尔顿图， S 是 V 的任意非空真子集，则 $p(G-S) \leq |S|$ ，其中 $p(G-S)$ 是从 G 中删除 S 后所得图的连通分支数。

（注意：此定理只是哈密尔顿图的必要条件，而不是充分条件。可以利用其逆否命题来判断某些图是否不是哈密尔顿图，即下述定理）

➤ **定理：（充分条件）** 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是具有 n 个顶点的简单无向图，若在 G 中每一对不相邻顶点的次数之和大于等于 $n-1$ ，则在 G 中存在一条哈密尔顿路径。

判断是否是哈密顿图

■ 不满足必要条件

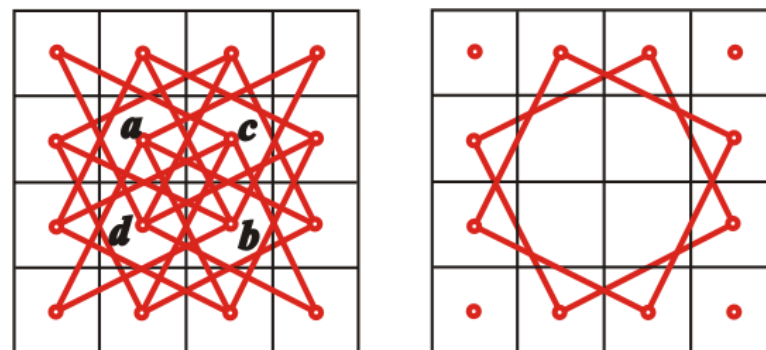
例 4×4国际象棋棋盘上的跳马问题：马是否能恰好经过每一个方格一次后回到原处？

解 每个方格看作一个顶点, 2个顶点之间有边当且仅当马可以从一个方格跳到另一个方格, 得到16阶图 G ,

如左图红边所示. 取 $V_1=\{a, b, c, d\}$, 则 $p(G-V_1) = 6 > |V_1|$, 见右图.

由定理, 图中无哈密顿回路, 故问题无解.

在8×8国际象棋棋盘上, 跳马问题是否有解?



判断是否为哈密顿图是NP完全的

应用实例

例 某次国际会议8人参加，已知每人至少与其余7人中的4人有共同语言，问服务员能否将他们安排在同一张圆桌就座，使得每个人都能与两边的人交谈？

解 作无向图 $G=\langle V, E \rangle$ ，其中 $V=\{v \mid v \text{ 为与会者} \}$ ， $E=\{(u, v) \mid u, v \in V, u \text{ 与 } v \text{ 有共同语言, 且 } u \neq v\}$ 。

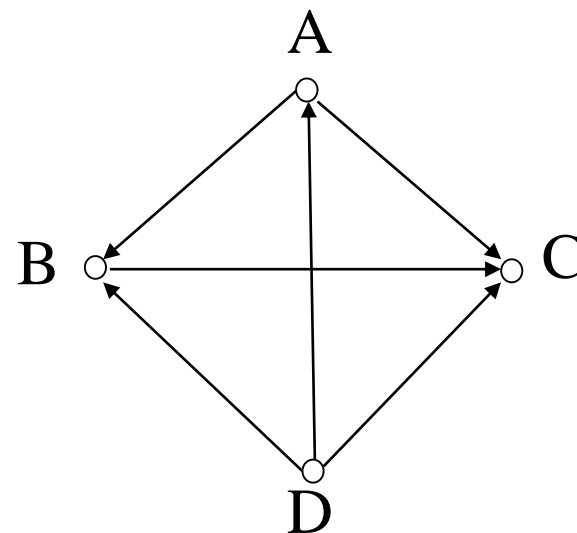
G 为简单图。根据条件， $\forall v \in V, d(v) \geq 4$ 。于是， $\forall u, v \in V$ ，有 $d(u) + d(v) \geq 8$ 。由定理可知 G 为哈密顿图。

服务员在 G 中找一条哈密顿回路 C ，按 C 中相邻关系安排座位即可。

竞赛图

竞赛图: 任意两个顶点之间恰好有一条有向边.

在循环赛中, n 个参赛队中的任意两个队比赛一次, 假设没有平局, 用有向图描述比赛结果: 顶点表示参赛队, A 到 B 有一条边当且仅当 A 队胜 B 队.



竞赛图(续)

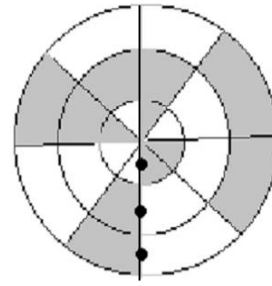
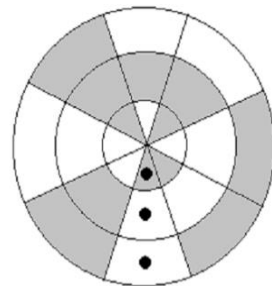
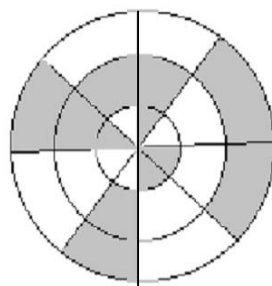
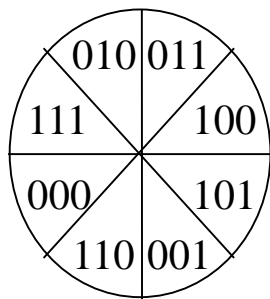
定理 在 $n(n \geq 2)$ 阶有向图 D 中, 如果所有有向边均用无向边代替, 所得无向图中含生成子图 K_n , 则有向图 D 中存在哈密顿通路.

根据定理, 竞赛图中一定有哈密顿通路, 当然也可能有哈密顿回路. 当没有哈密顿回路时, 通常只有一条哈密顿通路, 这条通路给出参赛队的唯一名次.

例如, CABD是一条哈密顿通路, 它没有哈密顿回路, 比赛结果是C第一, A第二, B第三, D第四.

格雷码(gray code)

为了确定圆盘停止旋转后的位置, 把圆盘划分成 2^n 个扇区, 每个扇区分配一个 n 位0-1串. 要用某种电子装置读取扇区的赋值. 当圆盘停止旋转后, 如果电子装置处于一个扇区的内部, 它将能够正确的读出这个扇区的赋值, 如果电子装置恰好处于两个扇区的边界上, 就可能出问题. 如何赋值, 才能将可能出现的误差减少到最小?

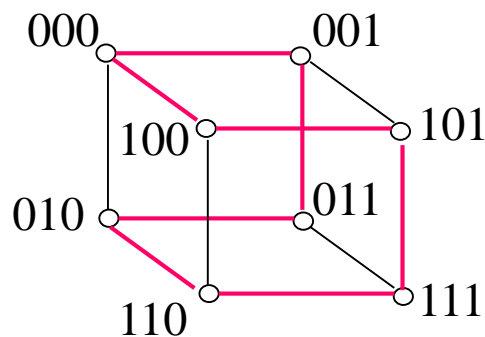
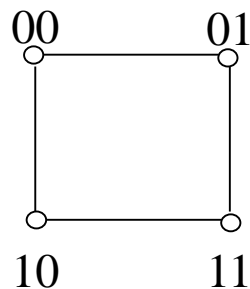


格雷码(续)

格雷码: 相邻的两个以及最后一个和第一个之间只有一位不同的把 n 位0-1串序列

例如, 000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100是一个格雷码

构造 n 维立方体图: 2^n 个顶点, 每个顶点表示一个 n 位串, 两个顶点之间有一条边当且仅当它们的 n 位串仅相差一位. 当 $n \geq 2$ 时, 图中一定存在哈密顿回路.



旅行商问题(TSP)

❖ 一个商品推销员要去若干个城市推销商品，该推销员从一个城市出发，需要经过所有城市后，回到出发地。应如何选择行进路线，以使总的行程最短？

实质是在一个带权完全无向图中，找一个权值最小的Hamilton回路。

第六章 特殊的图

1.1 树

1.2 欧拉图

1.3 哈密尔顿图

1.4 二部图

1.5 平面图



引例

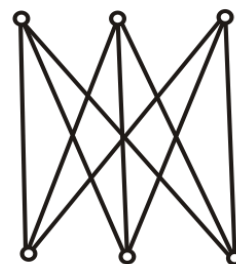
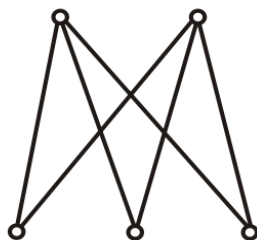
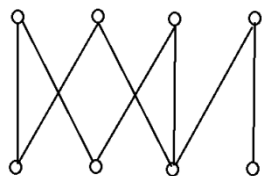
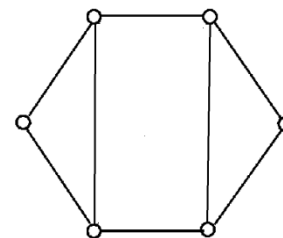
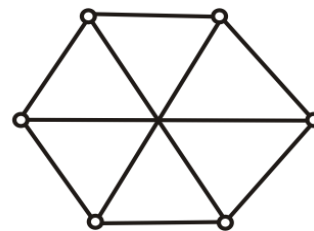
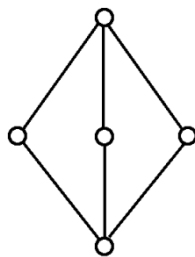
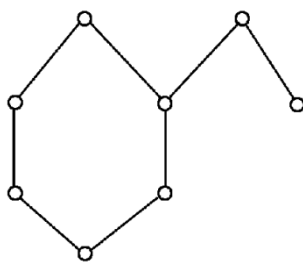
- ❖ 每学年评奖学金，把一等奖（1项），二等奖（2项），三等奖（3项）颁给某班同学，如何描述奖学金与同学之间的关系？
- ❖ 运动会颁奖，如何描述名次与运动员之间的关系？

二部图

- 给定简单无向图 $G=\langle V, E \rangle$, 且 $V=V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ 。使得 G 中任意一条边的两个端点, 一个属于 V_1 , 另一个属于 V_2 , 则称 G 是**二部图**或**偶图**或**二分图**, 并将二部图记作 $G=\langle V_1, E, V_2 \rangle$, 并称 V_1 , V_2 是 V 的**划分**, 也可称 V_1 和 V_2 为**互补结点子集**。
- 在偶图 $G=\langle V_1, E, V_2 \rangle$ 中, 若 V_1 中的每个结点与 V_2 中的每个结点都有且仅有一条边相关联, 则称偶图 G 为**完全偶图**或**完全二部图**或**完全二分图**, 记为 $K_{n,m}$, 其中, $n=|V_1|$, $m=|V_2|$ 。
- 偶图中没有自回路。
- 平凡图和零图可看成特殊的偶图。

二部图(续)

例 下述各图是否是二部图?



不是

定理 无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 是二部图当且仅当 G 中无奇圈

§ 3 二部图

➤ **定理：**无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 为偶图的充分必要条件是 G 的所有回路的长度均为偶数。

➤ **证明：**

必要性：设图 G 是偶图 $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$ ，令 $C = v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ ， v_0 是 G 的一条回路，其长度为 $k+1$ 。假设 $v_0 \in V_1$ ，由偶图的定义知， $v_1 \in V_2$ ， $v_2 \in V_1$ 。由此可知， $v_{2i} \in V_1$ 且 $v_{2i+1} \in V_2$ 。又因为 $v_0 \in V_1$ ，所以 $v_k \in V_2$ ，因而 k 为奇数，故 C 的长度为偶数，必要性得证。

充分性：设 G 中每条回路的长度均为偶数，若 G 是连通图，任选 $v_0 \in V$ ，定义 V 的两个子集如下：

$$V_1 = \{v_i | d(v_0, v_i) \text{ 为偶数} \}$$

$$V_2 = V - V_1$$

§ 3 二部图

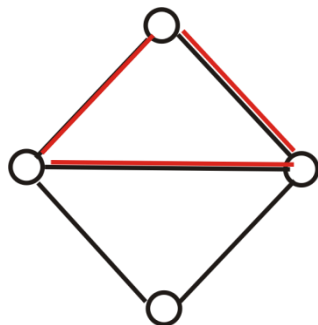
现证明 V_1 中任两结点间无边存在。假若存在一条边 $(v_i, v_j) \in E$ ，其中 $v_i, v_j \in V_1$ ，则由 v_0 到 v_i 间的短程线（长度为偶数）以及边 (v_i, v_j) ，再加上 v_j 到 v_0 间的短程线（长度为偶数）所组成的回路的长度为奇数，与假设矛盾。

同理可证 V_2 中任两结点间无边存在。

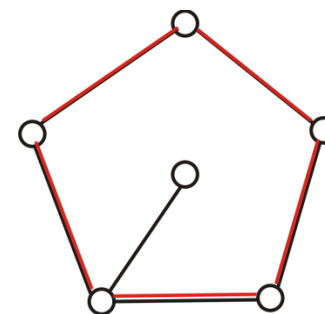
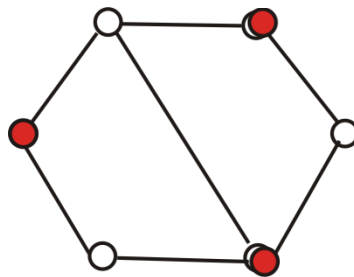
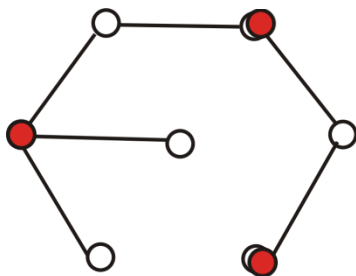
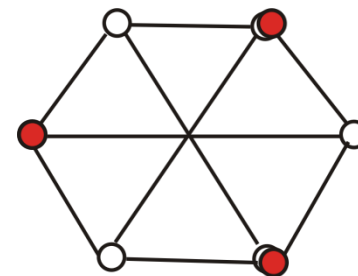
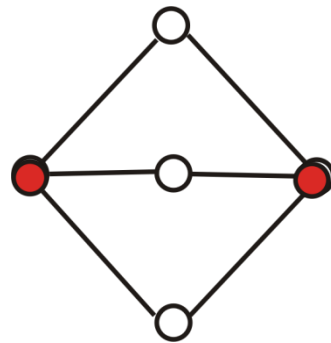
故 G 中每条边 (v_i, v_j) ，必有 $v_i \in V_1, v_j \in V_2$ 或 $v_i \in V_2, v_j \in V_1$ ，因此 G 是具有互补结点子集 V_1 和 V_2 的偶图。

若 G 中每条回路的长度均为偶数，但 G 不是连通图，则可对 G 的每个连通分支重复上述论证，并可得到同样的结论。

二部图(续)



非二部图



非二部图

匹配（单射）

设 $G=\langle V,E\rangle$,

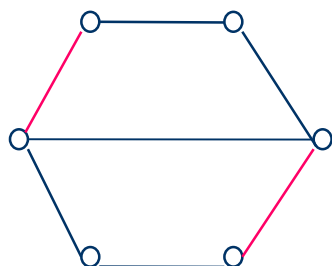
匹配(边独立集): 任2条边均不相邻的边子集

极大匹配: 添加任一条边后都不再是匹配的匹配

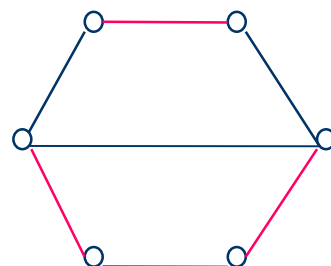
最大匹配: 边数最多的匹配

匹配数: 最大匹配中的边数, 记为 β_1

例



极大匹配



最大匹配 $\beta_1=3$

匹配 (续)

设 M 为 G 中一个匹配

v_i 与 v_j 被 M 匹配: $(v_i, v_j) \in M$

v 为 M 饱和点: M 中有边与 v 关联

v 为 M 非饱和点: M 中没有边与 v 关联

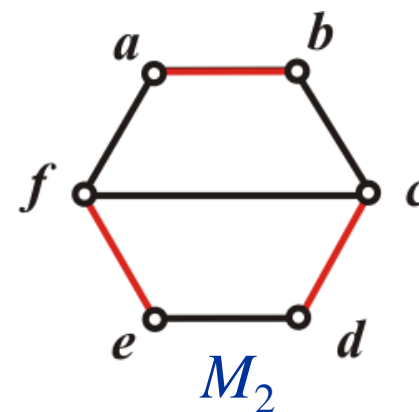
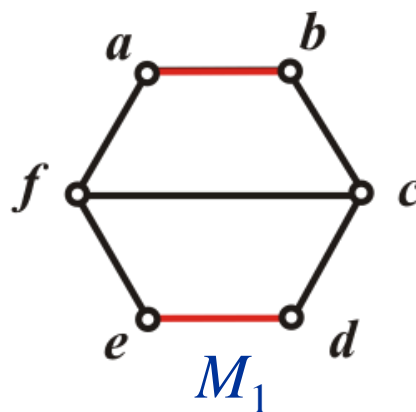
M 为完美匹配: G 的每个顶点都是 M 饱和点

例 关于 M_1 , a, b, e, d 是饱和点

f, c 是非饱和点

M_1 不是完美匹配

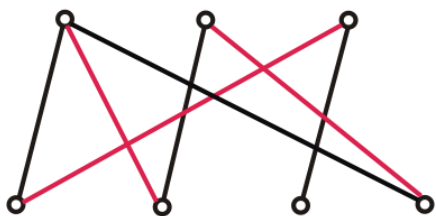
M_2 是完美匹配



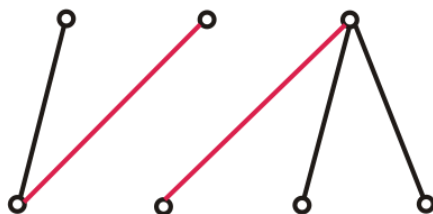
二部图中的匹配

定义 设 $G=\langle V_1, V_2, E \rangle$ 为二部图, $|V_1| \leq |V_2|$, M 是 G 中最大匹配, 若 V_1 中顶点全是 M 饱和点, 则称 M 为 G 中 V_1 到 V_2 的**完备匹配**. 当 $|V_1|=|V_2|$ 时, 完备匹配变成完美匹配.

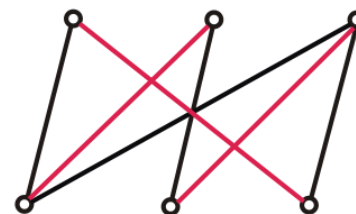
例



完备, 不完美



不完备



完美

匹配

例：在某单位，有6个未婚女青年 $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$ ，有6个未婚男青年 $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$ ，他们都想结婚，但也不是随便一个就可以，他们心中都有一张表，只愿意和表上的人结婚。现在知道 L_1, L_2, \dots, L_6 心中的表分别是：

$L_1: \{ G_1, G_2, G_4 \}; \quad L_2: \{ G_3, G_5 \}; \quad L_3: \{ G_1, G_2, G_4 \};$

$L_4: \{ G_2, G_5, G_6 \}; \quad L_5: \{ G_3, G_6 \}; \quad L_6: \{ G_2, G_5, G_6 \};$

G_1, G_2, \dots, G_6 心中的表分别是：

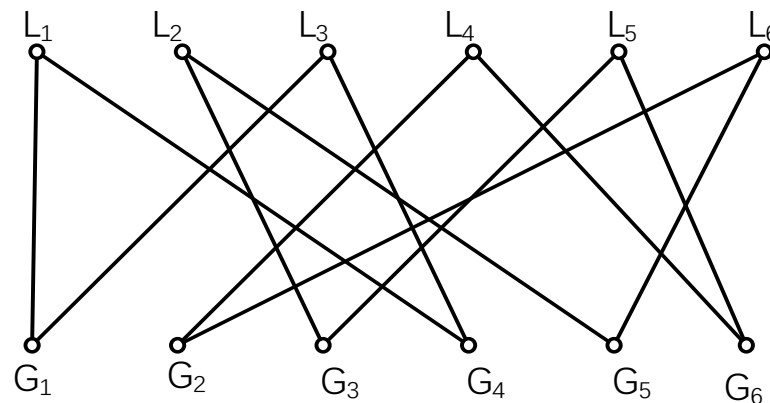
$G_1: \{ L_1, L_3, L_6 \}; \quad G_2: \{ L_2, L_4, L_6 \}; \quad G_3: \{ L_2, L_5 \};$

$G_4: \{ L_1, L_3 \}; \quad G_5: \{ L_2, L_6 \}; \quad G_6: \{ L_3, L_4, L_5 \};$

请问如何匹配，使得男女双方都满意且结婚的对数最多？

匹配

解：令 $X = \{ L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6 \}$, $Y = \{ G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6 \}$, 根据题设中的表作无向二部图 $G = \langle X, E, Y \rangle$, 如下图所示。其中, $\langle L_i, G_j \rangle \in E$ 当且仅当 L_i 与 G_j 愿意结婚, $1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6$ 。



由上图可求得一个最大匹配为：

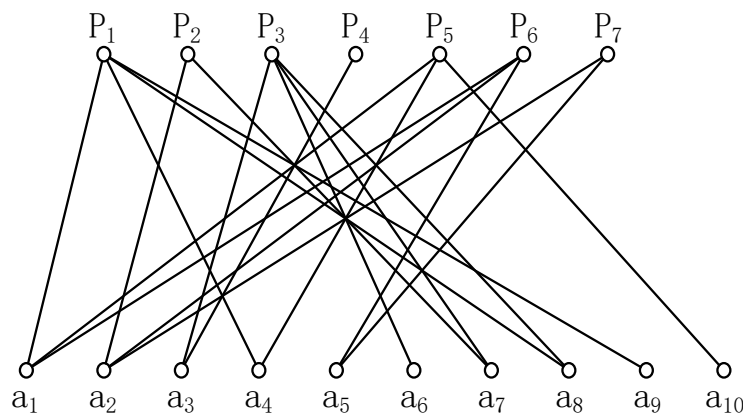
$$M = \{ (L_1, G_1), (L_2, G_3), (L_3, G_4), (L_4, G_2), (L_5, G_6), (L_6, G_5) \}。$$

根据 M 对男女匹配, 能使男女双方都满意且结婚对数最多。

一. 匹配与最大匹配

例：某单位按编制有7个空缺， P_1, P_2, \dots, P_7 。有10个申请者 a_1, a_2, \dots, a_{10} ，他们的合格工作岗位集合依次是： $\{P_1, P_5, P_6\}$, $\{P_2, P_6, P_7\}$, $\{P_3, P_4\}$, $\{P_1, P_5\}$, $\{P_6, P_7\}$, $\{P_3\}$, $\{P_2, P_3\}$, $\{P_1, P_3\}$, $\{P_1\}$, $\{P_5\}$ 。如何安排他们工作使得无工作的人最少？

解：根据题意可绘制下图：



由上图可求得一个最大匹配：

$$M = \{ (P_1, a_9), (P_2, a_2), (P_3, a_6), (P_4, a_3), (P_5, a_4), (P_6, a_1), (P_7, a_5) \}.$$

根据该匹配分配工作能使无工作的人最少。

二. 霍尔定理

➤ **霍尔定理**：在偶图 $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$ 中存在从 V_1 到 V_2 的匹配，当且仅当 V_1 中任意 k 个结点至少与 V_2 中的 k 个结点相邻， $k = 1, 2, \dots, |V_1|$ 。

这个定理中的条件通常称为**相异性条件**。判断一个偶图是否满足相异性条件通常比较复杂，下面给出一个判断偶图是否存在匹配的一个充分条件，对于任何偶图来说，都很容易确定这些条件。因此，在考察相异性条件之前，应首先试用这个充分条件。

t条件：设 $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$ 是一个偶图。如果满足条件

- (1) V_1 中每个结点至少关联 t 条边；
- (2) V_2 中每个结点至多关联 t 条边；

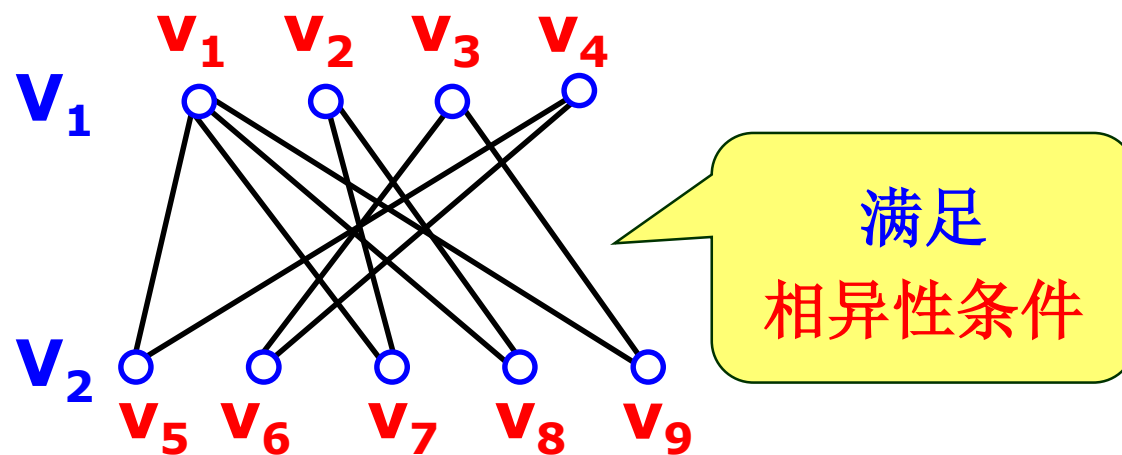
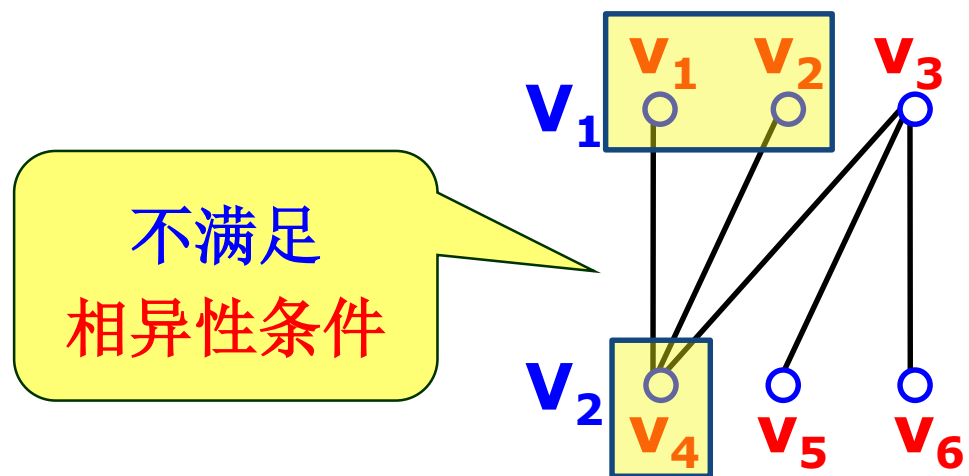
则 G 中存在从 V_1 到 V_2 的匹配。其中 t 为正整数。

证明：由条件 (1) 知， V_1 中 k 个结点至少关联 tk 条边 ($1 \leq k \leq |V_1|$)，由条件 (2) 知，这 tk 条边至少与 V_2 中 k 个结点相关联，于是 V_1 中的 k 个结点至少与 V_2 中的 k 个结点相邻接，因而满足相异性条件，所以 G 中存在从 V_1 到 V_2 的匹配。

霍尔(Hall)定理

二部图 $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$ 中存在从 V_1 到 V_2 的匹配的充分必要条件是 V_1 中任意 k 个结点至少与 V_2 中的 k 个结点相邻, $k = 1, 2, \dots, |V_1|$ 。

该定理也称为**婚姻定理**, 定理中的条件通常称为**相异性条件** (Diversity Condition)。



t条件

设 $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$ 是一个偶图。如果满足条件

(1) V_1 中每个结点至少关联 t 条边;

(2) V_2 中每个结点至多关联 t 条边;

t 条件(t-Condition)

则 G 中存在从 V_1 到 V_2 的匹配。其中 t 为正整数。

证明 由条件 (1) 知 V_1 中每个结点至少关联 t 条边 ($1 \leq t$)

判断 t 条件非常简单，只需要计算 V_1 中结点的最小度数和 V_2 中结点的最大度数即可。

因而满足相异性条件，所以 G 中存在从 V_1 到 V_2 的匹配。

二. 霍尔定理应用

例：现有三个课外小组：物理组，化学组和生物组，有五个学生 s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 。

(1) 已知 s_1, s_2 为物理组成员； s_1, s_3, s_4 为化学组成员； s_3, s_4, s_5 为生物组成员。

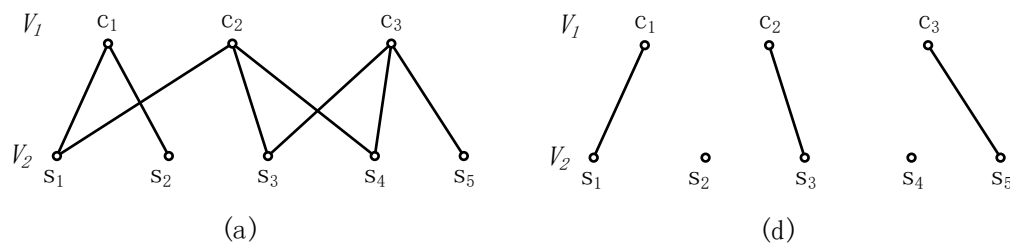
(2) 已知 s_1 为物理组成员； s_2, s_3, s_4 为化学组成员； s_2, s_3, s_4, s_5 为生物组成员。

(3) 已知 s_1 即为物理组成员，又为化学组成员； s_2, s_3, s_4, s_5 为生物组成员。

在以上三种情况的每一种情况下，在 s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 中选三位组长，不兼职，问能否办到？

解：用 c_1, c_2, c_3 分别表示物理组，化学组和生物组， $V_1 = \{c_1, c_2, c_3\}$ ， $V_2 = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ 。以 V_1, V_2 为互补结点子集，若 s_i 在 c_j 中，则 (s_i, c_j) 在 E 中。

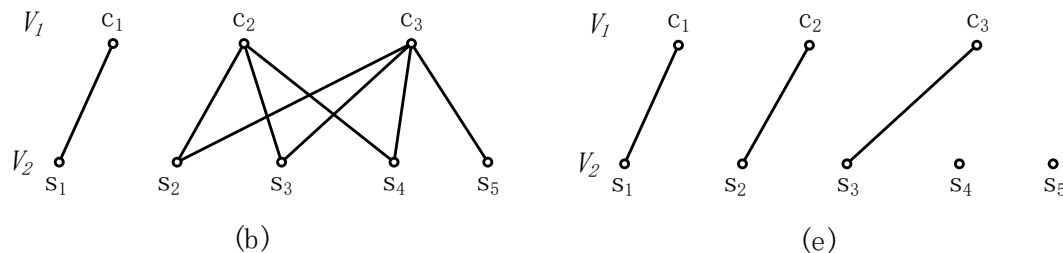
(1) $G_1 = \langle V_1, E, V_2 \rangle$ 如图a所示。



在 G_1 中， V_1 中的每个结点至少关联2条边，而 V_2 中的每个结点至多关联2条边，因此满足条件，故存在从 V_1 到 V_2 的匹配。事实上，选 s_2 为物理组的组长，选 s_3 为化学组的组长，选 s_5 为生物组的组长，它们对应的匹配如图d所示。

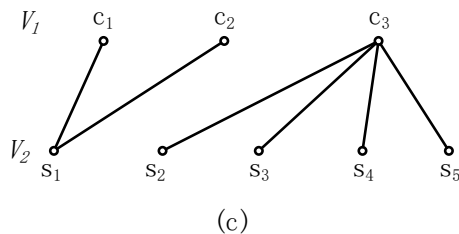
二. 霍尔定理应用

(2) $G_2 = \langle V_1, E_2, V_2 \rangle$ 如图b所示。



所给条件不满足t条件，但是满足相异性条件，因而存在从 V_1 到 V_2 的匹配。一个可能的匹配如图e所示。

(3) $G_3 = \langle V_1, E_3, V_2 \rangle$ 如图c所示。



G_3 既不满足t条件，也不满足相异性条件，所以不存在从 V_1 到 V_2 的匹配，当然三个不兼职的组长从 s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 中选不出来。

应用实例（一）

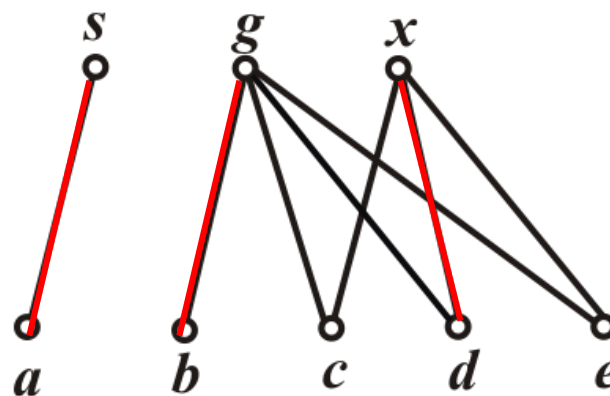
例 某课题组要从 a, b, c, d, e 5人中派3人分别到上海、广州、香港去开会. 已知 a 只想去上海, b 只想去广州, c, d, e 都表示想去广州或香港. 问该课题组在满足个人要求的条件下, 共有几种派遣方案?

解 令 $G=\langle V_1, V_2, E \rangle$, 其中 $V_1=\{s, g, x\}$, $V_2=\{a, b, c, d, e\}$,

$$E=\{(u, v) \mid u \in V_1, v \in V_2, v \text{ 想去 } u\},$$

其中 s, g, x 分别表示上海、广州和香港.

G 满足相异性条件, 红边是一个完备匹配, 对应的派遣方案:
a-上海, b-广州, d-香港

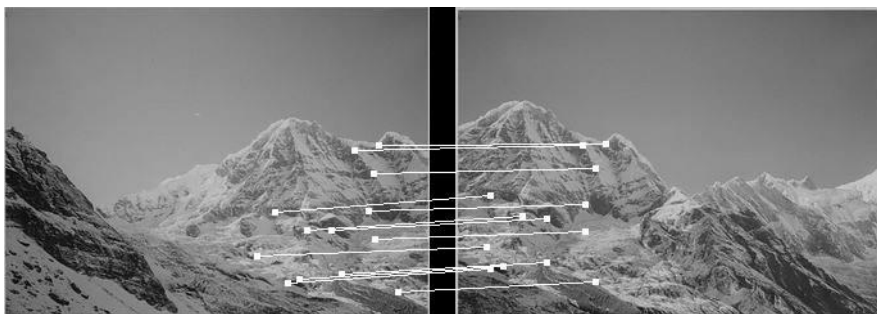


应用实例（二）

例 某中学有3个课外活动小组：数学组，计算机组和生物组。有赵，钱，孙，李，周5名学生，问分别在下述3种情况下，能否选出3人各任一个组的组长？

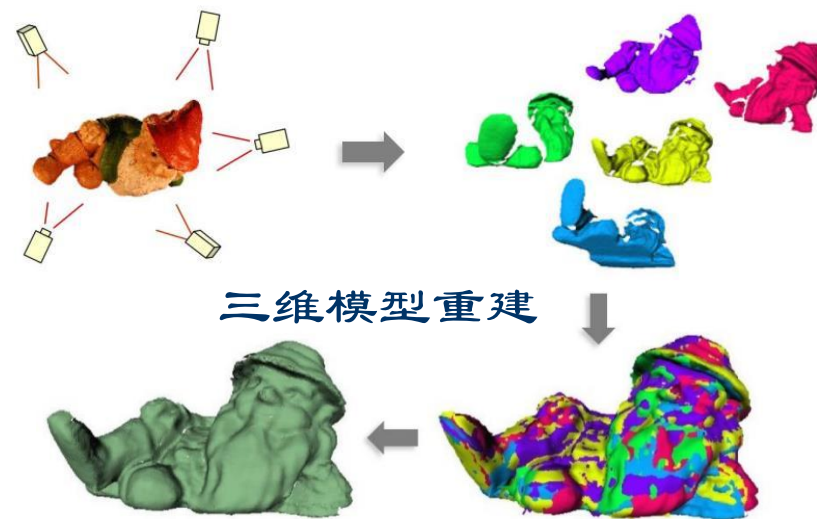
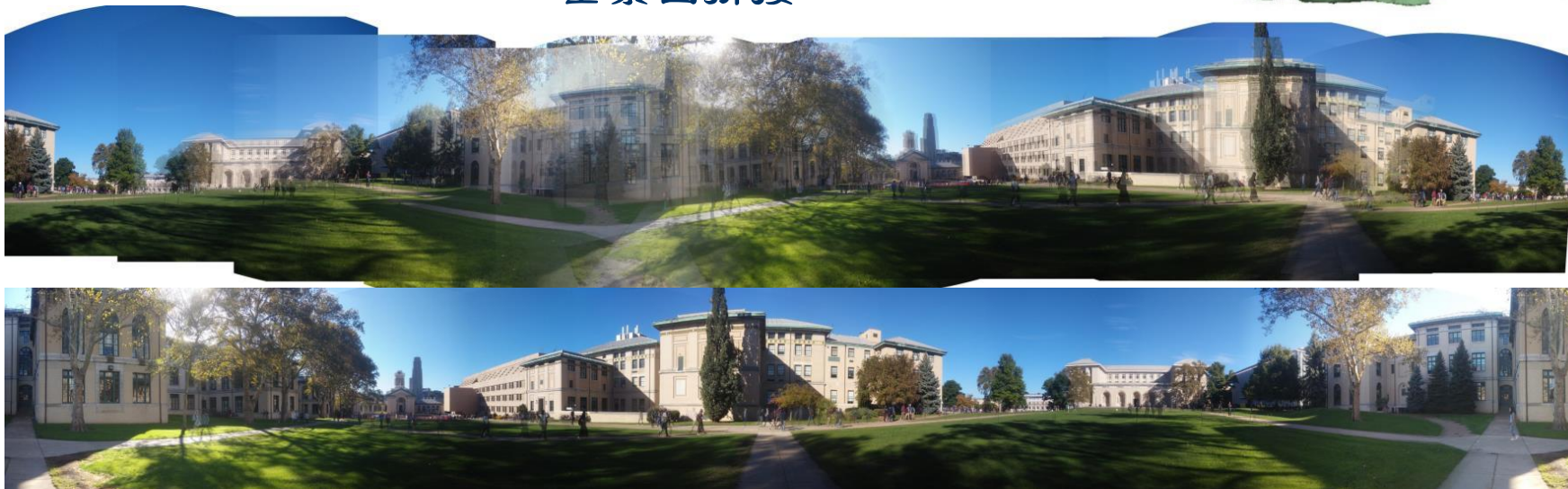
- (1) 赵，钱为数学组成员，赵，孙，李为计算机组成员，孙，李，周为生物组成员。
- (2) 赵为数学组成员，钱，孙，李为计算机组成员，钱，孙，李，周为生物组成员。
- (3) 赵为数学组和计算机组成员，钱，孙，李，周为生物组成员。

图像/网格匹配

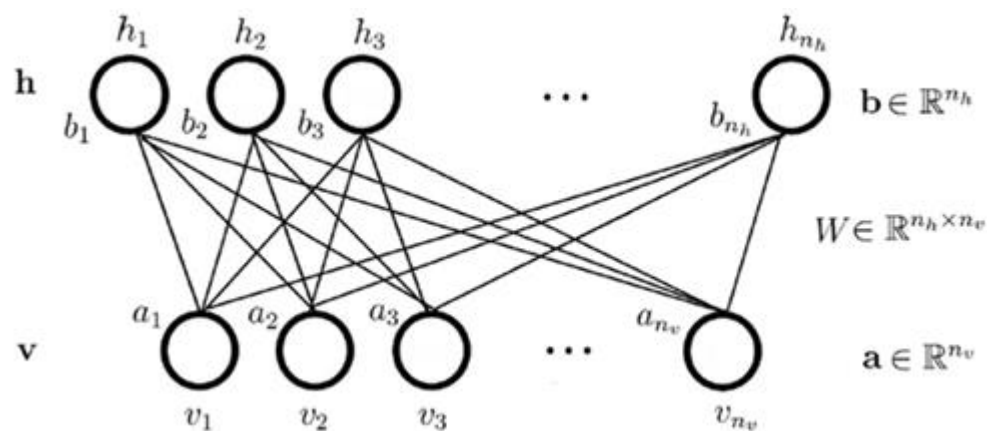


图像配准

全景图拼接



受限玻尔兹曼机RBM



v层: 可见层, 输入特征。(好比黑白图片, v层就是某处是否为白色)

h层: 隐含层

常量: n_v, n_h --> 可见层和隐含层神经元数目 num of visible /hidden

变量: $w_{i,j}$ --> 权值矩阵 \mathbf{a} --> 可见层偏置向量 \mathbf{b} --> 隐含层偏置向量 $\theta = (\mathbf{w}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ --> 把所有变量放到一起

状态: $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots)^T$ $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots)^T$ 可见层和隐含层的状态向量

第六章 特殊的图

1.1 树

1.2 欧拉图

1.3 哈密尔顿图

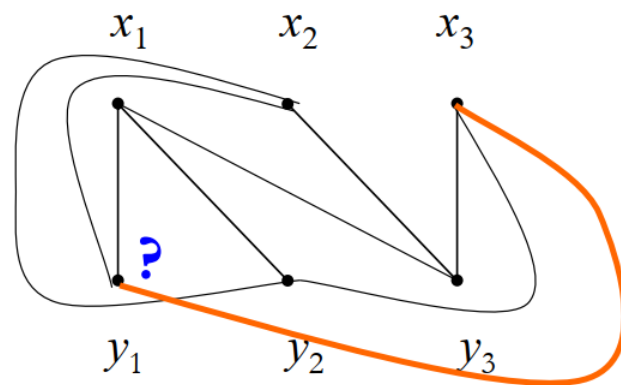
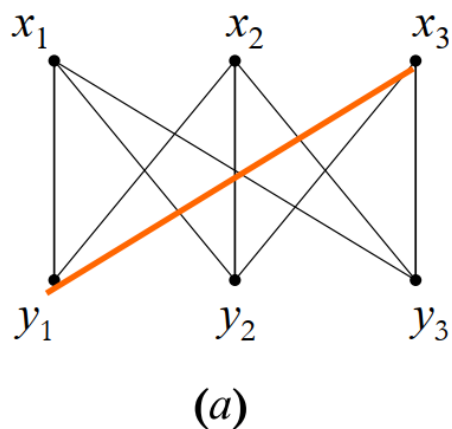
1.4 二部图

1.5 平面图



修建铁路问题

❖ 假定有三个仓库 x_1, x_2, x_3 和三个车站 y_1, y_2, y_3 。为了便于货物运输，准备在仓库与车站间修筑铁路，如图(a)所示，其中边代表铁路。问是否存在一种使铁路不交叉的路线设计方案，以避免修建立立交桥。



如果在 x_3 与 y_1 之间也要修一条铁路，则问题的解答可验证满足要求的方案不存在。

五宫修路问题

相传古代有一位独裁者，临死时留有遗嘱，把土地分给他的五个儿子，这五个儿子在自己的领地上各修筑了一座宫殿，他们还企图修一些道路，使得每两座宫殿之间有一条道路直接相通，又要求道路不能交叉。结果，这五个愚蠢的王子煞费苦心，终告失败。

1930年，波兰数学家库拉图斯基给出平面图的充要条件，严格证明了五宫修路问题是无解的。

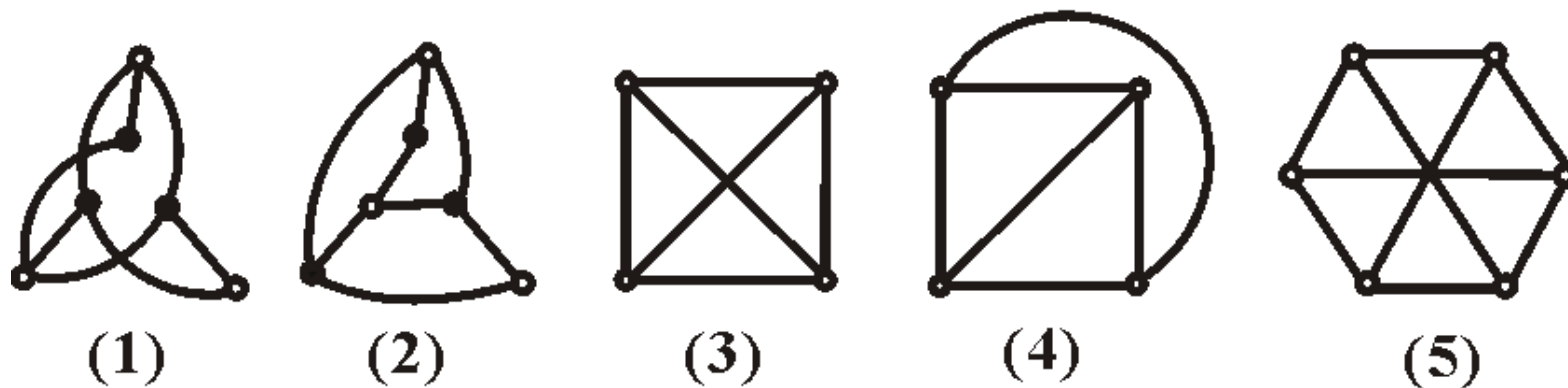
一. 基本概念

- 如果能把一个无向图 G 的所有结点和边画在平面上，使得任何两边除公共结点外没有其他交叉点，则称 G 为**平面图**，否则称 G 为**非平面图**。
- 设 G 是一个平面图，由图中的边所包围的其内部不包含图的结点和边的区域，称为 G 的**一个面**；包围该面的诸边所构成的回路称为这个**面的边界**；面 r 的边界的长度（边数）称为该**面的次数**，记为 $D(r)$ ；区域面积有限的面称为**有限面**，区域面积无限的面称为**无限面**。平面图有且仅有一个无限面。
- 若一条边不是割边，它必是两个面的公共边，割边只能是一个面的边界。两个以边为公共边界的面称为**相邻的面**。

平面图和平面嵌入

定义 如果能将图 G 除顶点外边不相交地画在平面上, 则称 G 是**平面图**. 这个画出的无边相交的图称作 G 的**平面嵌入**. 没有平面嵌入的图称作**非平面图**.

例如 下图中(1)~(4)是平面图, (2)是(1)的平面嵌入, (4)是(3)的平面嵌入. (5)是非平面图.



平面图的面与次数

设 G 是一个平面嵌入

G 的面: 由 G 的边将平面划分成的每一个区域

无限面(外部面): 面积无限的面, 用 R_0 表示

有限面(内部面): 面积有限的面, 用 R_1, R_2, \dots, R_k 表示

面 R_i 的边界: 包围 R_i 的所有边构成的回路组

面 R_i 的次数: R_i 边界的长度, 用 $\deg(R_i)$ 表示

定理 平面图各面的次数之和等于边数的2倍.

证: 每条边可能在两个面的公共边界上, 也可能只在一个面的边界上. 前者, 在每个面的边界上这条边只出现一次, 计算两次. 后者, 它在这个面的边界上出现2次, 也计算两次.

观察法

设 G 是画于平面上的图，并设

$$C = v_1 \dots v_2 \dots v_3 \dots v_4 \dots v_1$$

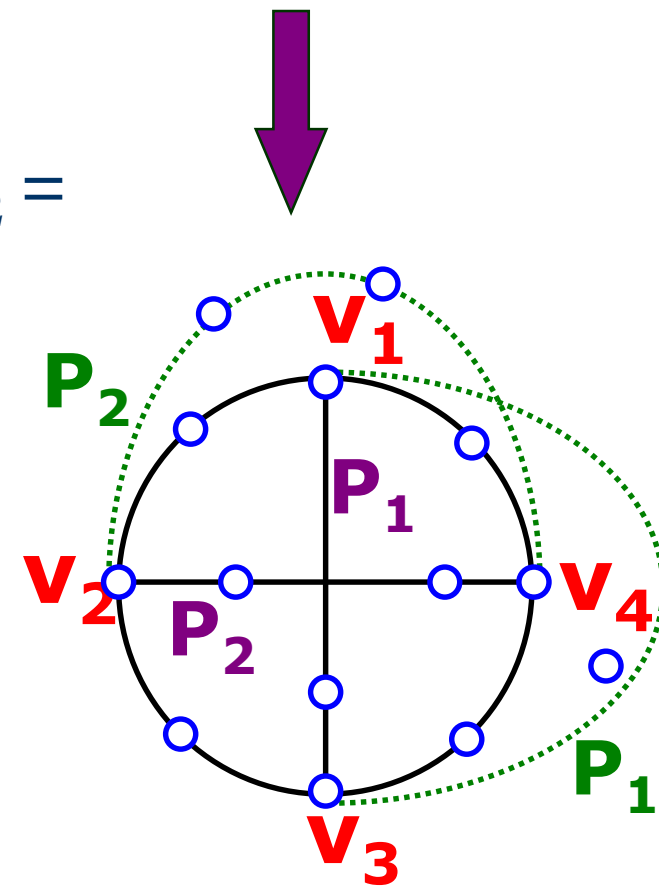
是 G 中的任何基本回路。此外，设 $P_1 = v_1 \dots v_3$ 和 $P_2 =$

$v_2 \dots v_4$ 是 G 中的任意两条无公共结点的基本通路。

解题小贴士 —— 平面图判断

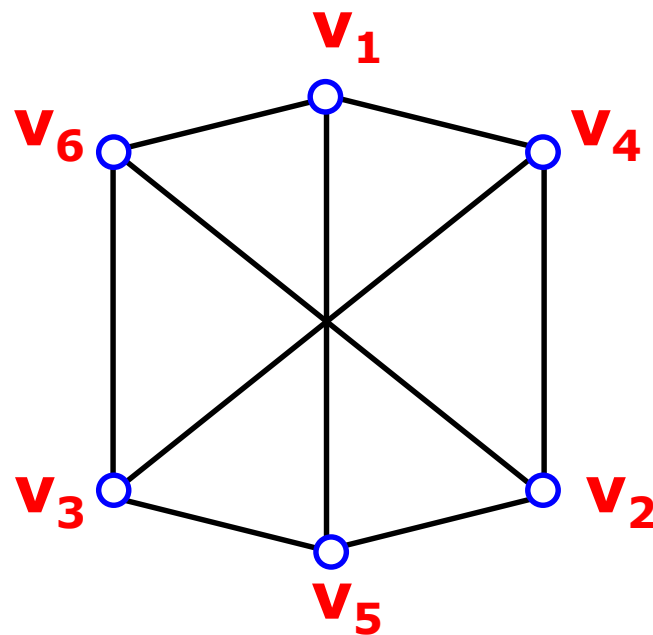
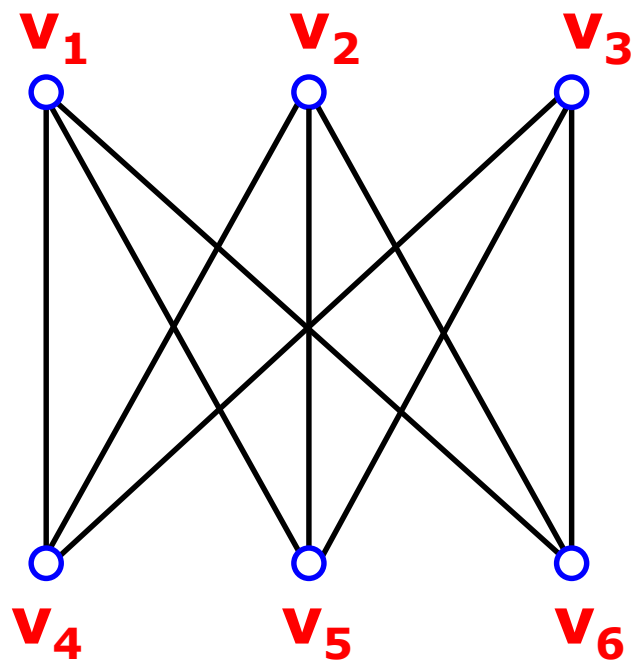
找出基本回路，再看有没有端点在其上的可能交叉的通路，将这些通路分别放到回路的内部或者外部，看看能否避免交叉。

观察法



例7.28

用观察法来判定图 $K_{3,3}$ 为非平面图。



面的形象描述

假设我们把一个平面图的平面表示画在平面上，然后用一把**小刀**，沿着图的**边**切开，那么平面就被切成许多**块**，每一块就是图的一个面。

更确切地说，平面图的一个面就是平面的一块，它用**边作边界线**，且不能再分成子块。

解题小贴士——连通平面图中面和边界的计算

面是由边所包围的其内部不包含图的结点和边的区域，面的边界是包围该面的诸边所构成的回路。

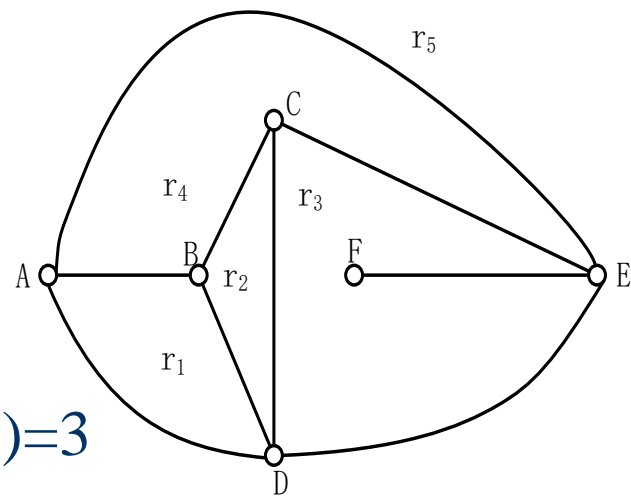
注意：如果图中有**桥**（或割边），桥须在边界中走**两次**。

平面图和平面嵌入(续)

- 今后称一个图是平面图，可以是指定义中的平面图，又可以是指平面嵌入，视当时的情况而定。当讨论的问题与图的画法有关时，是指平面嵌入。
- K_5 和 $K_{3,3}$ 是非平面图
- 设 $G' \subseteq G$, 若 G 为平面图, 则 G' 也是平面图; 若 G' 为非平面图, 则 G 也是非平面图。
- $K_n (n \geq 5)$, $K_{n,m} (n, m \geq 3)$ 都是非平面图。
- 平行边与环不影响图的平面性。

一. 基本概念

例：列出右图各个面的次数。

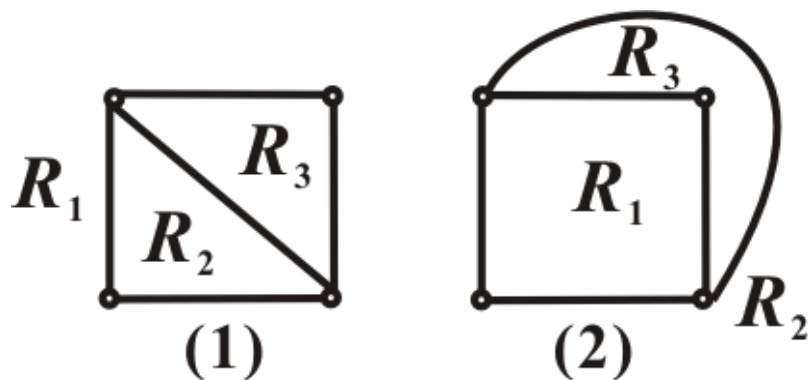
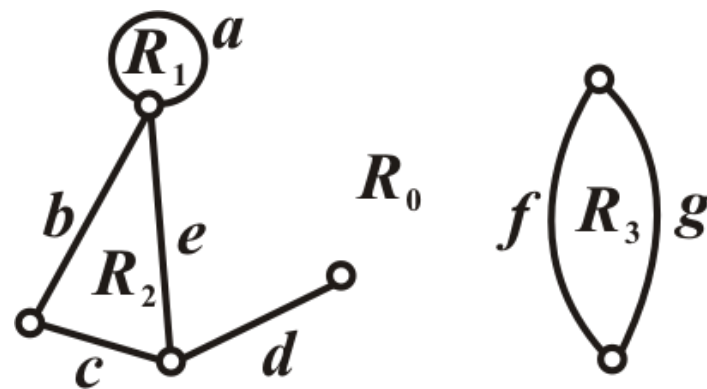


解： $D(r_1)=3$, $D(r_2)=3$, $D(r_3)=5$, $D(r_4)=4$, $D(r_5)=3$

$$3D(r_1)+D(r_2)+D(r_3)+D(r_4)+D(r_5)=18$$

平面图的面与次数(续)

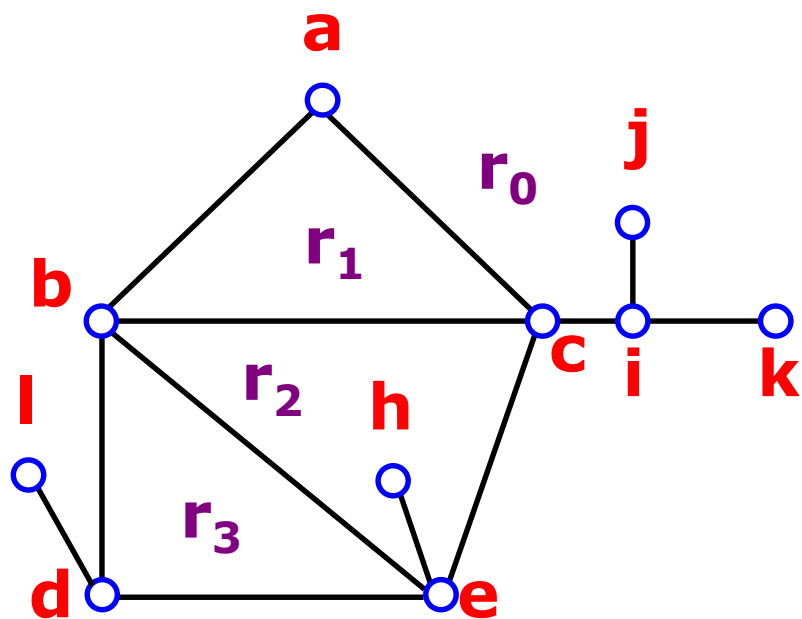
例1 右图有4个面, $\deg(R_1)=1$,
 $\deg(R_2)=3$, $\deg(R_3)=2$,
 $\deg(R_0)=8$.



例2 左边2个图是同一个平面图的平面嵌入. R_1 在(1)中是外部面, 在(2)中是内部面;
 R_2 在(1)中是内部面, 在(2)中是外部面. 其实, 在平面嵌入中可把任何面作为外部面.

例

考察下图所示平面图的面、边界和次数。



平面图把平面分成4个面：

r_0 , 边界为 $abdldecijikica$, $D(r_0)=13$

r_1 , 边界为 $abca$, $D(r_1)=3$

r_2 , 边界为 $behecb$, $D(r_2)=5$

r_3 , 边界为 $bdeb$, $D(r_3)=3$

r_1 、 r_2 和 r_3 是有限面, r_0 是无限面

极大平面图

定义 若 G 是简单平面图, 并且在任意两个不相邻的顶点之间加一条新边所得图为非平面图, 则称 G 为**极大平面图**.

例如, $K_5, K_{3,3}$ 若删去一条边是极大平面图.

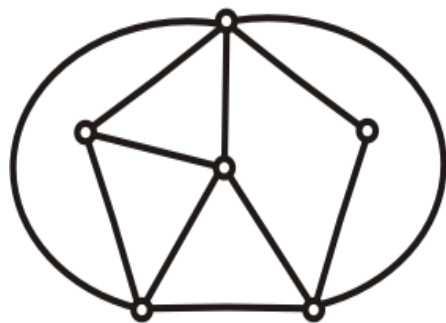
K_1, K_2, K_3, K_4 都是极大平面图(它们已无不相邻顶点).

- 极大平面图必连通.
- 阶数大于等于3的极大平面图中不可能有割点和桥.
- 任何 $n(n \geq 4)$ 阶极大平面图 G 均有 $\delta(G) \geq 3$.

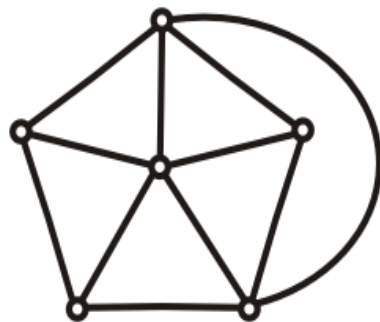
定理 $n(n \geq 3)$ 阶简单平面图是极大平面图当且仅当它连通且每个面的次数都为3.

实例

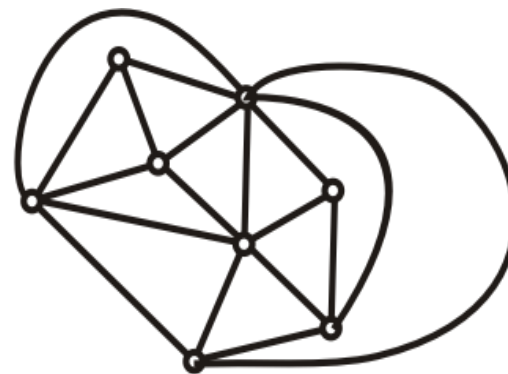
例 是否是极大平面图?



不是



不是



是

极小非平面图

定义 若 G 是非平面图, 并且任意删除一条边所得图都是平面图, 则称 G 为**极小非平面图**.

极小非平面图必为简单图

例如, $K_5, K_{3,3}$ 是极小非平面图

二. 欧拉公式

➤ **定理：**（欧拉公式） 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是连通平面图，有 n 个顶点， m 条边， r 个面，则有 $n - m + r = 2$ 。

➤ **证明：** 我们对 G 的边数 m 进行归纳。

(1) 若 $m = 0$ ，由于 G 是连通图，故必有 $n = 1$ ，这时只有一个无限面，即 $r = 1$ 。所以 $n - m + r = 1 - 0 + 1 = 2$ 。

定理成立。

(2) 若 $m = 1$ ，这时有两种情况：

①该边是自回路，则有 $n = 1$ ， $r = 2$ ，这时 $n - m + r = 1 - 1 + 2 = 2$

②该边不是自回路，则有 $n = 2$ ， $r = 1$ ，这时 $n - m + r = 2 - 1 + 1 = 2$

所以 $m = 1$ 时，定理也成立。

二. 欧拉公式

(3) 假设对少于 m 条边的所有连通平面图，欧拉公式成立。现考虑 m 条边的连通平面图，设它有 n 个结点。分以下两种情况：

①若 G 是树，那么 $m = n - 1$ ，这时 $r = 1$ ，所以 $n - m + r = n - (n - 1) + 1 = 2$ 。

②若 G 不是树，则 G 中必有回路，因此有基本回路，设 e 是某基本回路的一条边，则 $G' = \langle V, E - \{e\} \rangle$ 仍是连通平面图，它有 n 个结点， $m - 1$ 条边和 $r - 1$ 个面，按归纳假设知 $n - (m - 1) + (r - 1) = 2$ ，整理得 $n - m + r = 2$ 。

所以对 m 条边时，欧拉公式也成立。

欧拉公式得证。

欧拉公式(续)

推论(欧拉公式的推广) 设 G 是有 p ($p \geq 2$) 个连通分支的平面图, 则

$$n - m + r = p + 1$$

证 设第 i 个连通分支有 n_i 个顶点, m_i 条边和 r_i 个面.

对各连通分支用欧拉公式,

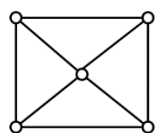
$$n_i - m_i + r_i = 2, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

求和并注意 $r = r_1 + \dots + r_p + p - 1$, 即得

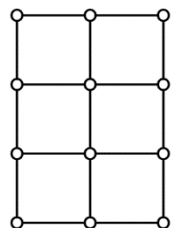
$$n - m + r = p + 1$$

二. 欧拉公式

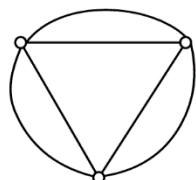
例：求下面各图的顶点数 V ，边数 E 和区域数 R 。并检验欧拉公式。



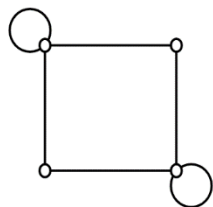
a)



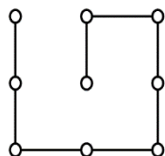
b)



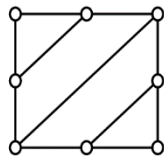
c)



d)



e)



f)

解：欧拉公式： $V-E+R=2$ 。

图(a)： $V=5, E=8, R=5$ ，且 $5-8+5=2$ 。

图(b)： $V=12, E=17, R=7$ ，且 $12-17+7=2$ 。

图(c)： $V=3, E=6, R=5$ ，且 $3-6+5=2$ 。

图(d)： $V=4, E=6, R=4$ ，且 $4-6+4=2$ 。

图(e)： $V=9, E=8, R=1$ ，且 $9-8+1=2$ 。

图(f)： $V=8, E=11, R=5$ ，且 $8-11+5=2$ 。

平面图性质

定理 设 G 为 n 阶 m 条边的连通平面图, 每个面的次数不小于 l ($l \geq 3$), 则

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

设 G 为有 p ($p \geq 2$) 个连通分支的平面图, 且每个面的次数不小于 l ($l \geq 3$), 则

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-p-1)$$

证 由各面次数之和等于边数的2倍及欧拉公式得

$$2m \geq lr = l(2+m-n)$$

可解得所需结论.

对 p ($p \geq 2$) 个连通分支的情况类似可证.

平面图性质(续)

推论 K_5 和 $K_{3,3}$ 不是平面图.

证 用反证法, 假设它们是平面图, 则 $K_5 : n=5, m=10, l=3$

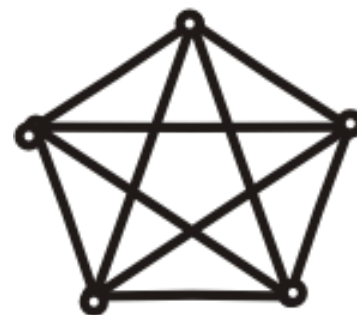
$$10 \leq \frac{3}{3-2} \times (5-2) = 9$$

矛盾.

$$K_{3,3} : n=6, m=9, l=4$$

$$9 \leq \frac{4}{4-2} \times (6-2) = 8$$

矛盾.

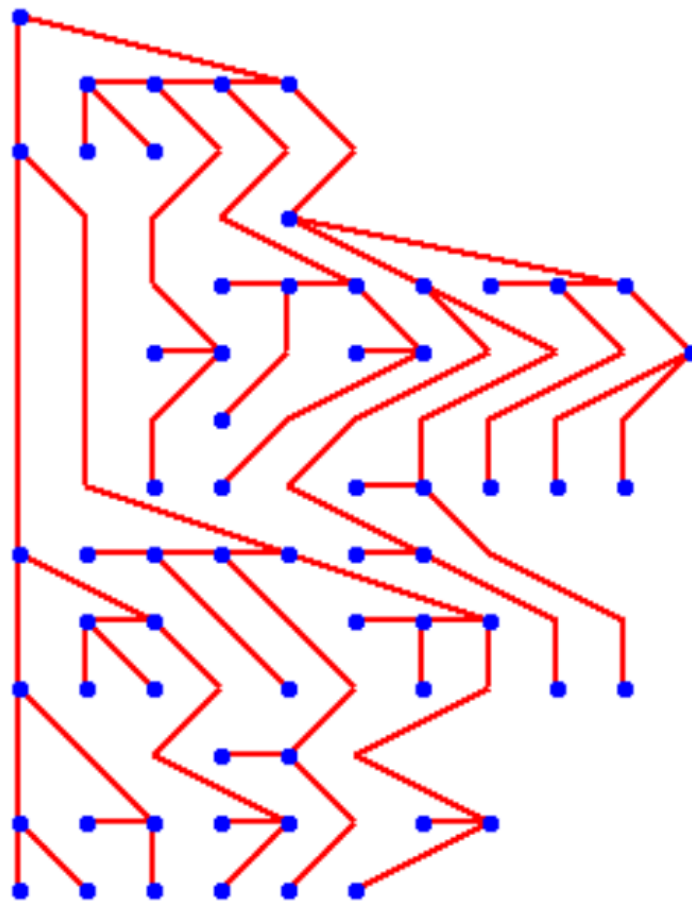
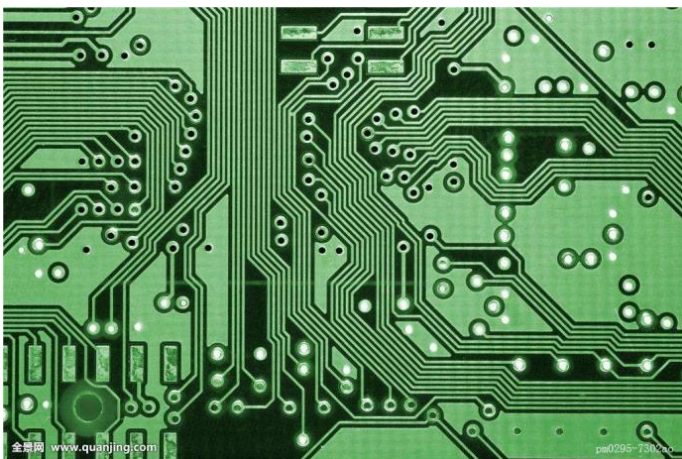


K_5



$K_{3,3}$

平面图（印刷电路板/集成电路）



三. 平面图判定

根据平面的定义，无圈的图显然是平面图。故研究图的平面性问题，只需要限制有圈的一类图即可。

判别方法是：

- (1) 对于有圈的图找出一个长度尽可能大的且边不相交的基本圈。
- (2) 将图中那些相交于非结点的边，适当放置在已选定的基本圈内侧或外侧，若能避免除结点之外边的相交，则该图是平面图；否则，便是非平面图。

三. 平面图判定

定理： 设 G 是一个简单连通平面图 $G(n,m)$ ，若 $m > 1$ ，则有 $m \leq 3n - 6$ 。

证明： 设 G 有 k 个面，因为 G 是平面图，所以 G 的每个面至少由3条边围成，所以 G 所有面的次数之和 $\sum_{i=1}^k D(r_i) \geq 3k$ 。

根据定理在平面图中，所有面的次数之和等于图中边数的二倍，即 $\sum_{i=1}^k D(r_i) = 2m$ ，故 $2m \geq 3k$ ，即 $k \leq 2m/3$ ，代入欧拉公式有

$$2 = n - m + k \leq n - m + \frac{2}{3}m$$

整理得 $m \leq 3n - 6$

定理得证。

推论： 任何简单连通平面图中，至少存在一个其度不超过5的结点。

三. 平面图判定

➤ **定义：** 一个图的**围长**是它包含的最短圈的长度。一个图若不含圈，则规定其围长为无穷大。

➤ **定理：** 设 G 是一个简单连通平面图 $G(n,m)$ ，其围长 $k > 2$ ，则有

$$m \leq \frac{k}{k-2} (n - 2)。$$

➤ **证明：** 设 G 共有 r 个面，各面的次数之和为 T ，

由条件可知 $T \geq k \times r$ ，又因为 $T = 2 \times m$ ，

故利用欧拉公式可以解出面数 $r = 2 - n + m$ 。

联立以上公式得出 $2 \times m \geq k \times (2 - n + m)$ ，

从而有 $(k-2) \times m \leq k \times (n-2)$ 。

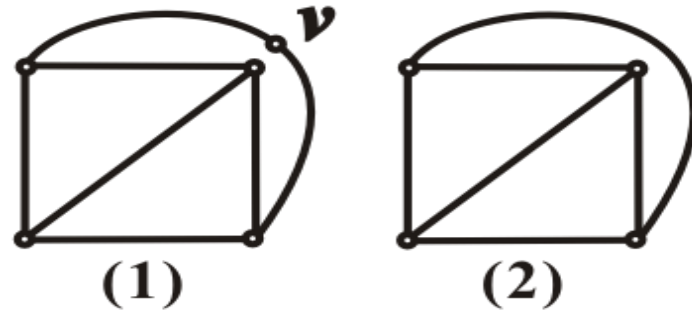
由于 $k \geq 3$ ，因而 $m \leq \frac{k}{k-2} (n - 2)。$

定理得证。

同胚与收缩

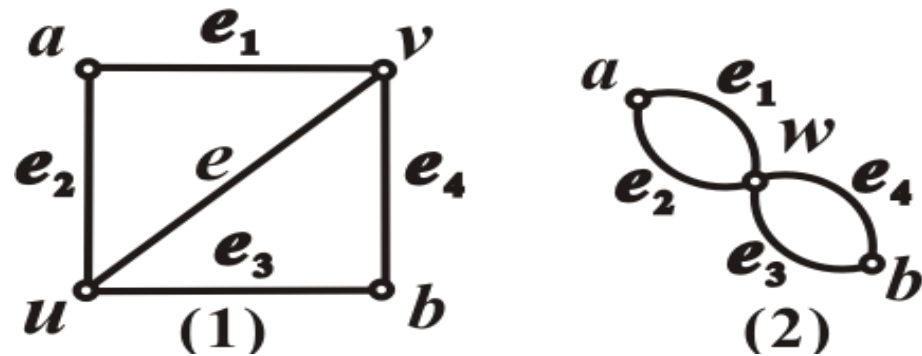
消去2度顶点 v 如上图从(1)到(2)

插入2度顶点 v 如上图从(2)到(1)



G_1 与 G_2 同胚: G_1 与 G_2 同构, 或经过反复插入、或消去2度顶点后同构

收缩边 e 如下图从(1)到(2)



三. 平面图判定

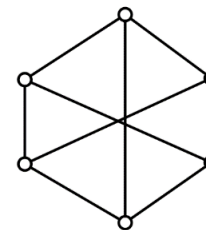
➤ **推论：** 一个简单连通图，若不满足 $m \leq 3n-6$ 或 $m \leq \frac{k}{k-2}(n-2)$ ，则一定是非平面图。而满足上面不等式的简单连通图未必是平面图。

➤ 还可以根据**库拉图斯基定理**来作为判别平面图充要条件。

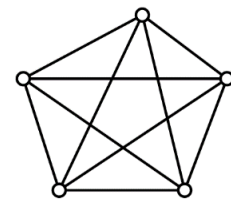
在图论中，称 $K_{3,3}$ 和 K_5 是**库拉图斯基图**。

➤ **定义：** 若图 G_2 可由图 G_1 中的一些边上适当插入或消去度为2的有限个结点后而得到，则称 G_1 与 G_2 **同胚**。

➤ **定理：** 库拉图斯基定理(Kuratowski定理)： 一个图 G 是平面图的充要条件为 G 中不含同胚于 $K_{3,3}$ 或 K_5 的子图。



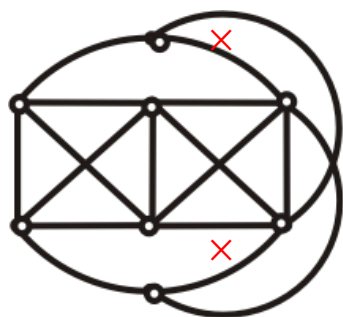
a) $K_{3,3}$



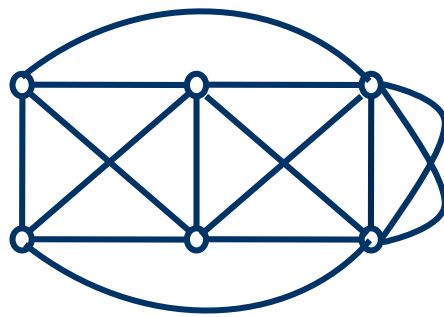
b) K_5

非平面图证明

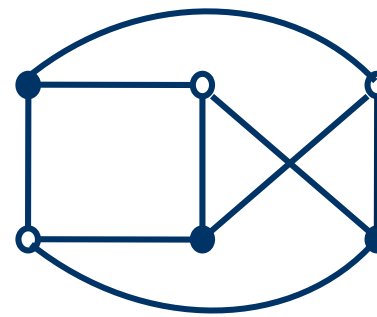
例 证明下述2个图均为非平面图.



\Rightarrow



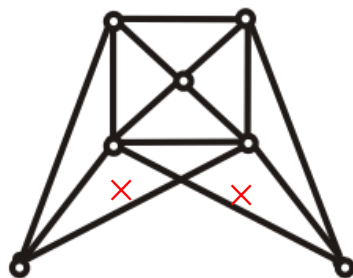
\Rightarrow



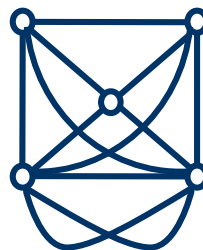
收缩2条边

取子图

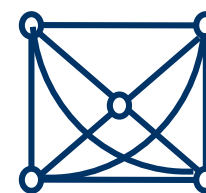
$K_{3,3}$



\Rightarrow



\Rightarrow



收缩2条边

取子图

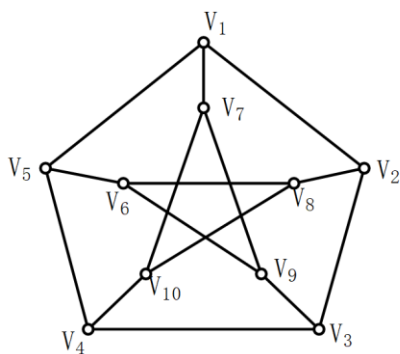
K_5

三. 平面图判定

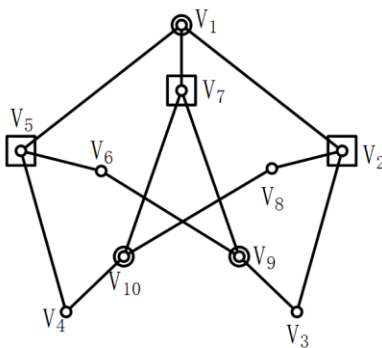
➤ 在图 G 的边 uv 上新增加一个二度结点，称为图 G 的**细分**。一条边上也可以同时增加有限个二度结点，所得的新图称为原来图的**细分图**。

故库拉图斯基定理也可以表述为一个图是平面图的充分必要条件是它不包含与 K_5 和 $K_{3,3}$ 细分图同构的子图。

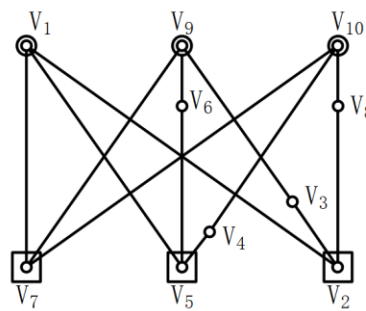
例如，a)图称为彼得森图，该图是非平面图。因为当删去边 $[v_6, v_8]$ 和 $[v_3, v_4]$ 时，它成为含有同胚于 $K_{3,3}$ 的子图，如图b)、c)所示。



a)



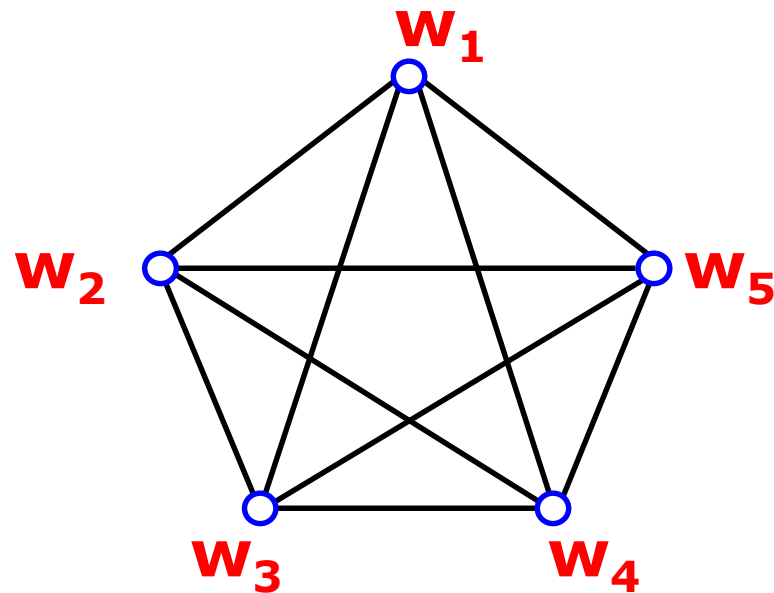
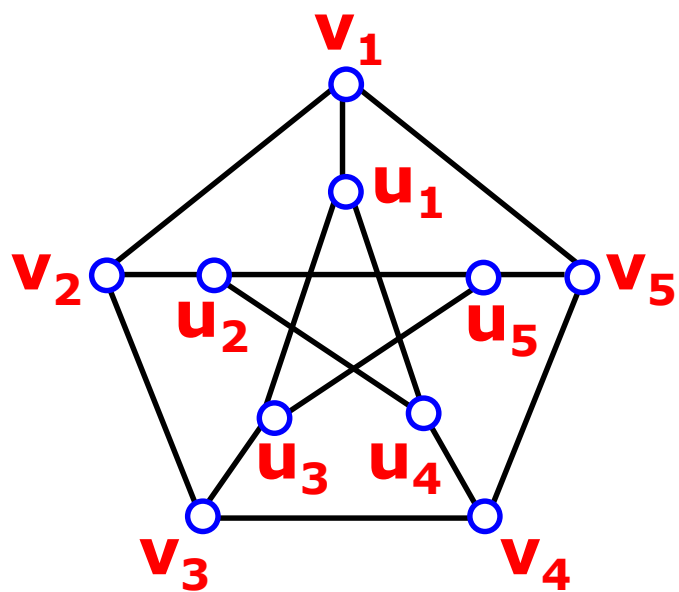
b)



c)

例

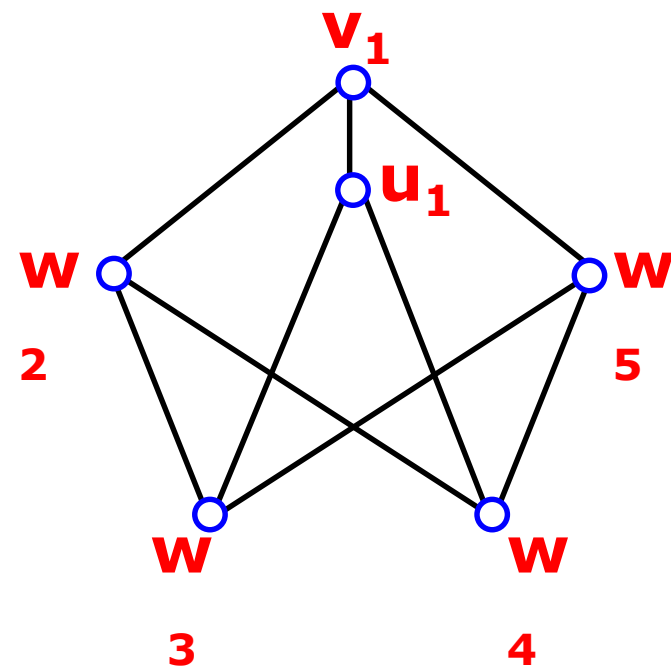
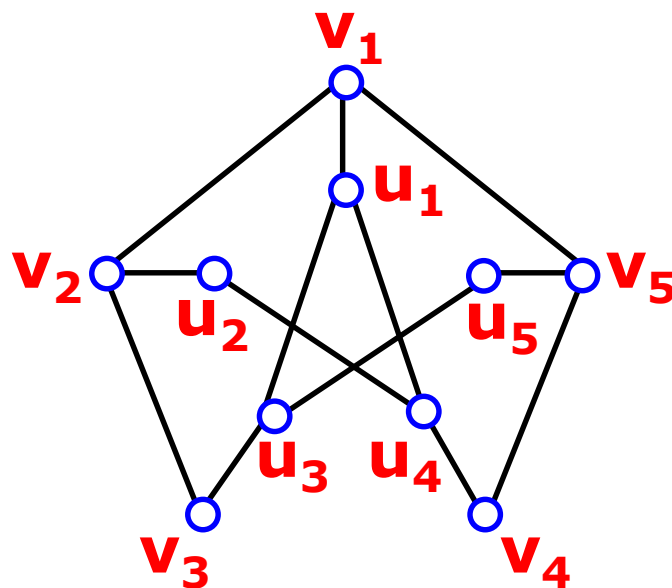
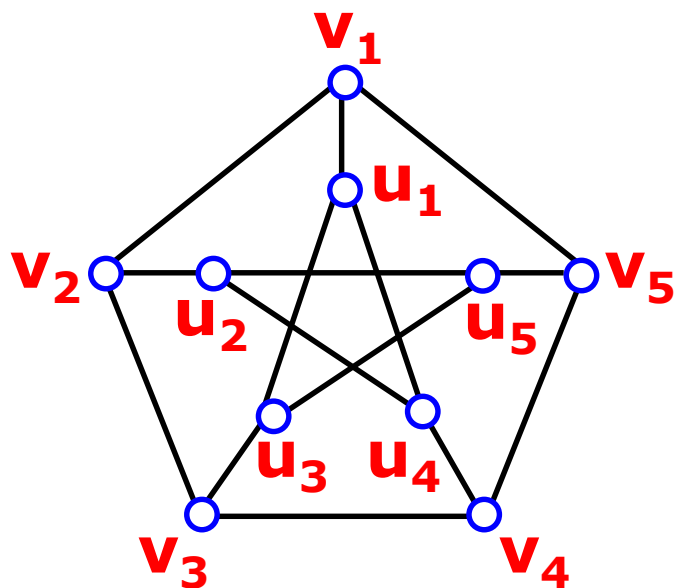
证明下图所示的彼得森图是一个非平面图。



方法一：收缩边 (v_i, u_i) ，用 w_i 代替， $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ，得到图即为 K_5 。

例

证明下图所示的彼得森图是一个非平面图。



方法二：找到子图，

收缩边 (v_i, u_i) ，用 w_i 代替， $i=2,3,4,5$ ，得到图即为 $K_{3,3}$ 。

三. 平面图判定

例：设 G 是有11个顶点或更多顶点组成的无向简单图，证明 G 或者其补图 \bar{G} 是非平面图。

证明：用反证法。若 G 有 m 条边，其补图 \bar{G} 有 m' 条边， G 的顶点数为 n ，则有： $m+m' = n(n-1)/2$ 。

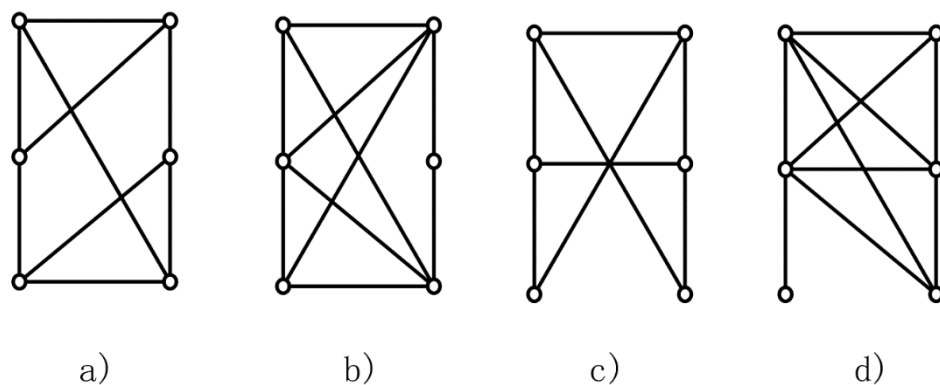
因 G 和 G' 均为平面图，有 $m \leq 3n-6$ 和 $m' = 3n-6$ ，因此 $n(n-1)/2 = m+m' \leq 6n-12$ ，即 $n^2-13n+24 \leq 0$, $(n-11)(n-2)+2 \leq 0$ 。

当 $n \geq 11$ 时， $(n-11)(n-2)+2 > 0$ ，从而产生矛盾。

这说明图 G 或其补图 \bar{G} 是非平面图。

三. 平面图判定 (*)

例：鉴别下图a)b)c)d)中哪些图是平面图。



解：只有a)和b)是平面图。

因为它们可以被画成没有交叉边的图形。

库拉图斯基 (Kuratowski)

学术贡献

- 库拉图斯基闭包公理
- 塔斯基—库拉图斯基算法
- 平面图的库拉图斯基定理
- 库拉图斯基十四集问题
- 佐恩引理的证明



波兰数学家
(1896-1980)

平面图的对偶图

定义 设平面图 G , 有 n 个顶点, m 条边和 r 个面, G 的**对偶图**

$G^* = \langle V^*, E^* \rangle$ 如下:

在 G 的每一个面 R_i 中任取一个点 v_i^* 作为 G^* 的顶点,

$$V^* = \{ v_i^* / i=1, 2, \dots, r \}.$$

对 G 每一条边 e_k , 若 e_k 在 G 的面 R_i 与 R_j 的公共边界上, 则作边

$e_k^* = (v_i^*, v_j^*)$, 且与 e_k 相交; 若 e_k 为 G 中的桥且在面 R_i 的边界上,

则作环 $e_k^* = (v_i^*, v_i^*)$.

$$E^* = \{ e_k^* | k=1, 2, \dots, m \}.$$

对偶图

➤ 将平面图 G 嵌入平面后,通过以下手续(简称D过程):

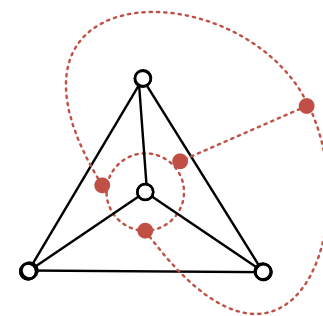
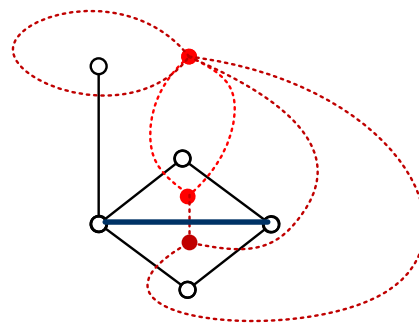
- (1)对图 G 的每个面 D_i 的内部作一顶点且仅作一顶点 v_i^* ;
- (2)经过每两个面 D_i 和 D_j 的每一共同边界 e_k^* 作一条边 $e_k^*=(v_i^*, v_j^*)$ 与 e_k 相交;
- (3)当且仅当 e_k 只是面 D_i 的边界时, v_i^* 恰存在一自回路与 e_k 相交。

所得的图称为图 G 的**对偶图**,记为 G^* 。

如果图 G 的对偶图 G^* 同构于 G ,则称图 G 是**自对偶图**。

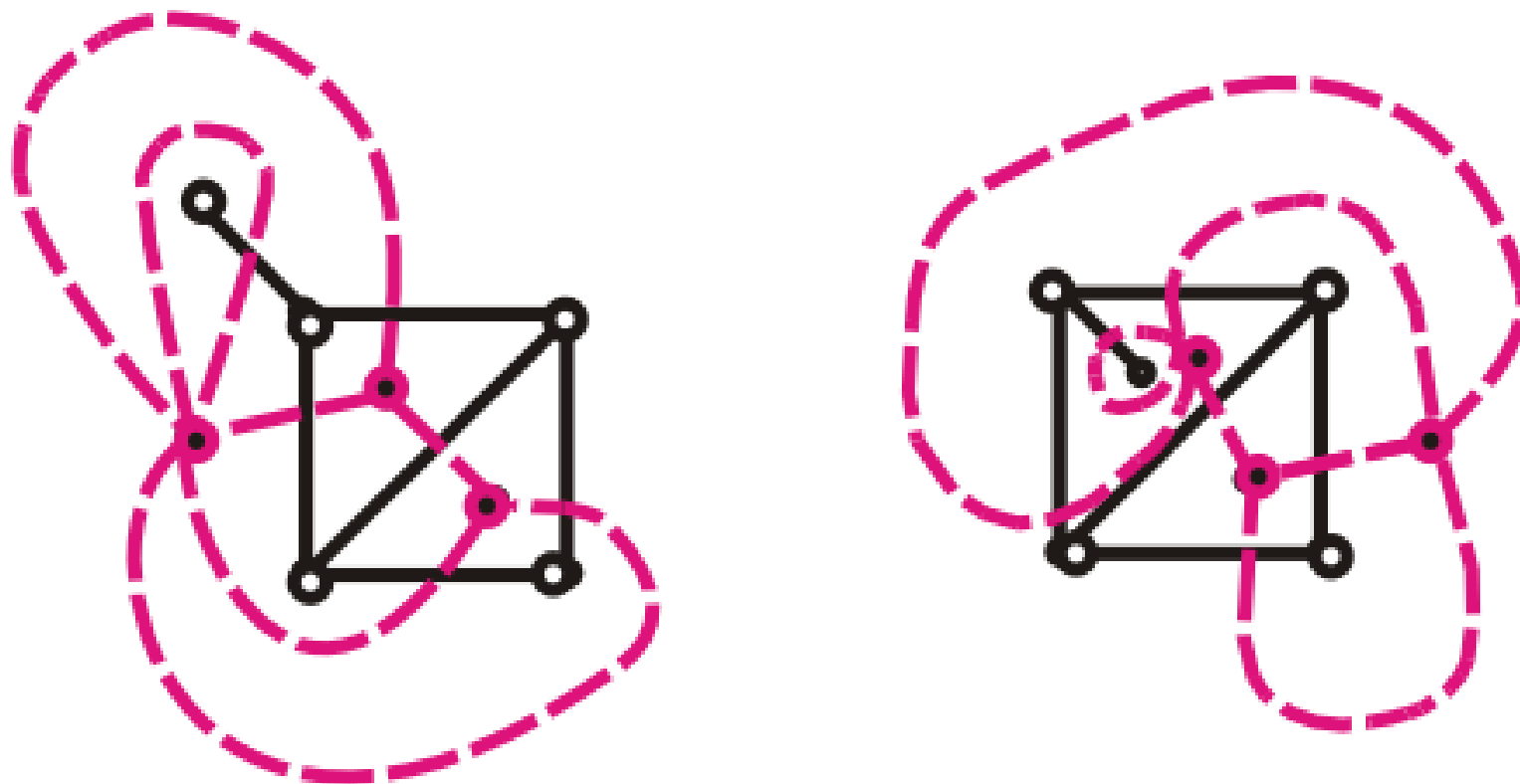
对偶图是相互的。

如下图所示,左图为对偶图,右图为自对偶图。



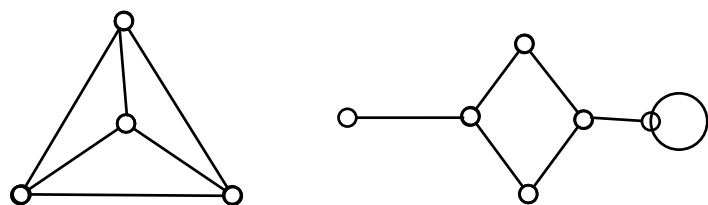
平面图的对偶图的实例

例 黑色实线为原平面图, 红色虚线为其对偶图

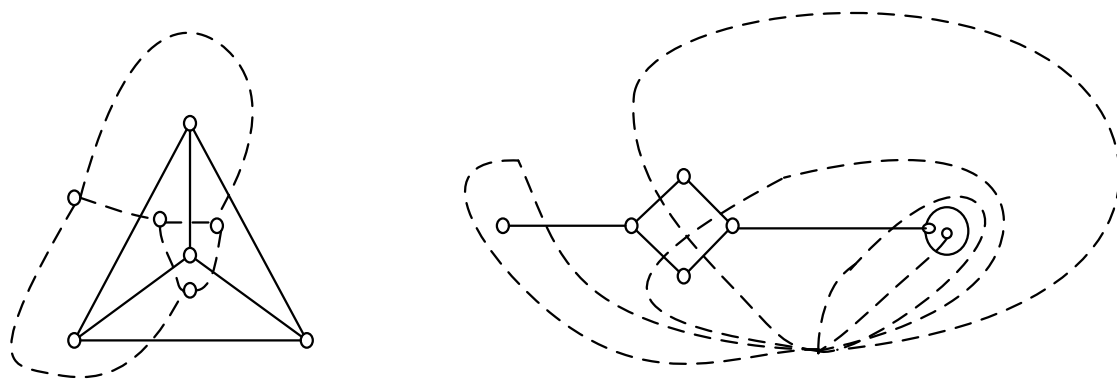


对偶图

例：分别作出下图中两种图的对偶图。

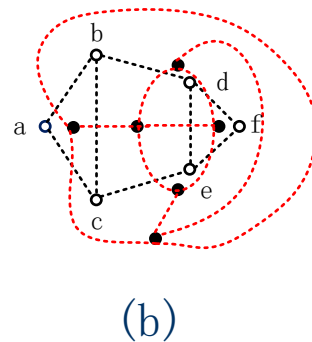
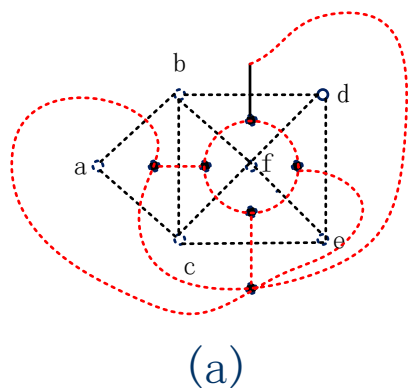


解：作图如下，实线图与虚线图互为对偶图。



对偶图

- 一个平面图可以有多种画法，如下图所示，a)、b)为同一平面图，但(a)中的对偶图有5度结点，(b)中的对偶图却没有。可见一个图的对偶图不是唯一的。



G 与 G^* 的关系：

平面图 G 的对偶图 G^* 是平面图；

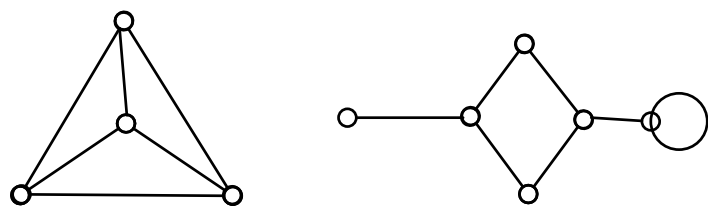
若连通平面图 G 是 (n, m) 图，则它有 $m - n + 2$ 个面，则 G^* 是 $(m - n + 2, m)$ 图，有 n 个面；

G 中面的次数为 G^* 中面中点的度数；

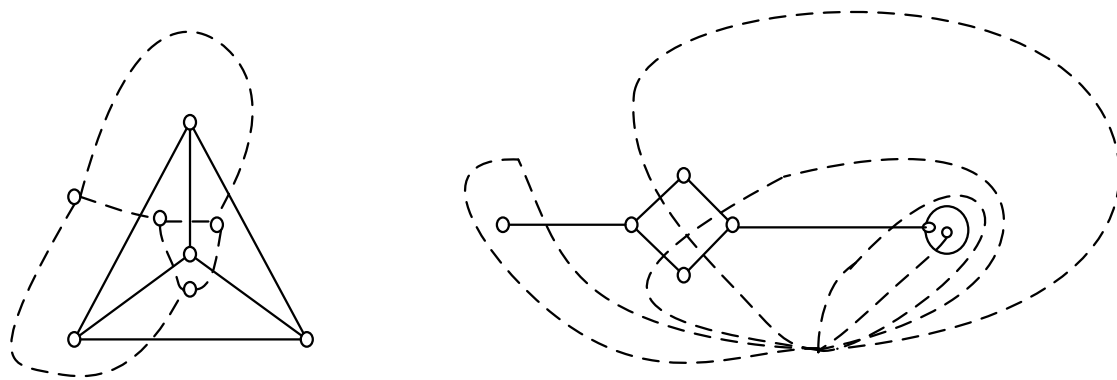
G 的圈对应着 G^* 的割（边）集；

对偶图

例：分别作出下图中两种图的对偶图。



解：作图如下，实线图与虚线图互为对偶图。



三. 平面图面着色

- 平面图着色问题起源于地图的着色，对地域连通且相邻国家有一段公共边界的平面地图 G 的每个国家涂一种颜色，使相邻的国家涂不同的颜色，称为对 G 的一种**面着色**，若能用 k 种颜色给 G 的面着色，就称对 G 的面进行了 **k 着色**，或称 G 是 **k -面可着色的**，若 G 是 k -面可着色的，但不是 $(k-1)$ -面可着色的，就称 G 的**面数**为 k ，记为 $\chi^*(G) = k$ 。
- 定理：地图 G 是 k -面可着色的当且仅当它的对偶图 G^* 是 k -可着色的。
- 定理：在简单连通平面图中至少有一个顶点 v_0 ，其次数 $d(v_0) \leq 5$ 。

证明：用反证法

设 (n, m) 图 G 是简单连通平面图，所有顶点的次数不小于6，则
 $m \leq 3n - 6$ ，又 $2m = \sum d(v) \geq 6n$ ，即 $m \geq 3n$ ，矛盾
故存在 v_0 ，其次数 $d(v_0) \leq 5$ 。

地图着色

地图: 连通无桥平面图的一个平面嵌入, 每一个面是一个国家. 若两个国家有公共边界, 则称它们是相邻的.

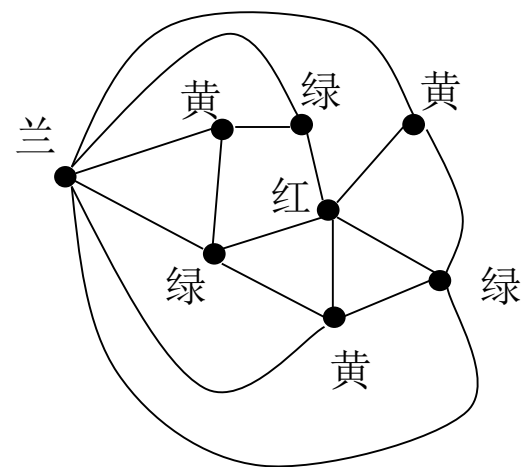
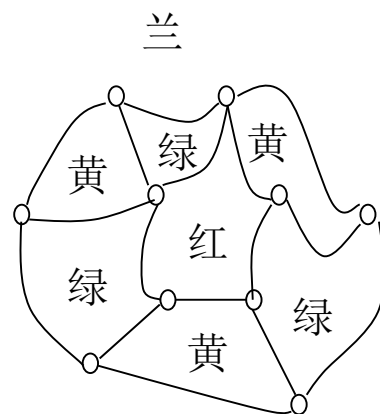
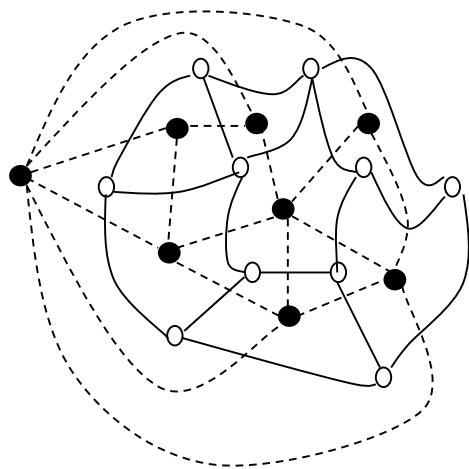
地图着色(面着色): 对地图的每个国家涂一种颜色, 使相邻的国家涂不同的颜色.

地图着色问题: 用尽可能少的颜色给地图着色.

地图着色可以转化成平面图的点着色. 当 G 中无桥时, G^* 中无环. G 的面与 G^* 的顶点对应, 且 G 的两个面相邻当且仅当 G^* 对应的两个顶点相邻, 从而 G 的面着色等同于 G^* 的点着色.

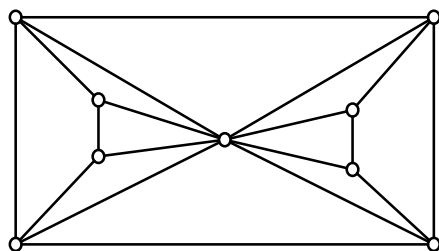
地图着色与平面图的点着色

例

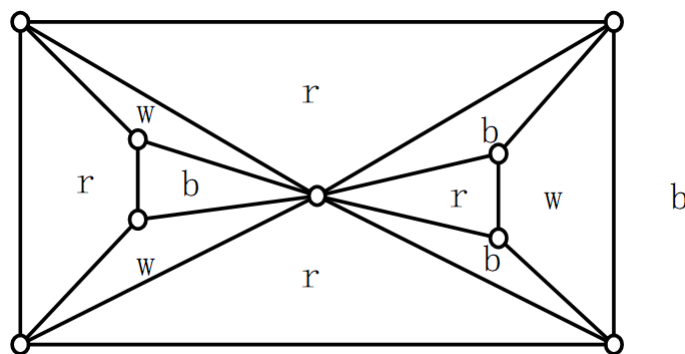


三. 平面图面着色

例：试用3种颜色，给下图所示的平面图着色，使两个邻接的面不会有同样的颜色。



解：用 r, b, w 表示不同的颜色，着色如下图所示。



四色定理

四色猜想(100多年前): 任何地图都可以用4种颜色着色, 即任何平面图都是4-可着色的.

1890年希伍德证明五色定理: 任何平面图都是5-可着色的.

1976年美国数学家阿佩尔和黑肯证明, 如果四色猜想成立, 则存在一个反例, 这个反例大约有2000种可能(后来有人简化到600多种), 他们用计算机分析了所有这些可能, 都没有导致反例.

四色定理 任何平面图都是4-可着色的.

四色猜想

➤ **四色定理**是一个著名的数学定理，通俗的说法是：每个平面地图都可以只用四种颜色来染色，而且没有两个邻接的区域颜色相同。

四色问题又称四色猜想、四色定理，是世界三大数学猜想之一。人们发现，要证明宽松一点的“五色定理”（即“只用五种颜色就能为所有地图染色”，我们在后面会加以证明）很容易，但四色问题却出人意料地异常困难。曾经有许多人发表四色问题的证明或反例，但都被证实是错误的。

1976年，数学家凯尼斯·阿佩尔和沃夫冈·哈肯借助电子计算机首次得到一个完全的证明，四色问题也终于成为四色定理。这是首个主要借助计算机证明的定理。

三. 平面图面着色

➤ **五色定理：**用5种颜色可以给任一简单连通平面图 $G=\langle V,E \rangle$ 正常着色。

证明：对图的顶点数作归纳：

(i) 当 $n \leq 5$ 时,显然成立；

(ii) 假设 k 个顶点时成立,考虑 $k+1$ 阶简单连通平面图 G ；

由引理知图 G 至少存在一顶点 v_0 其次数 $d(v_0) \leq 5$ 。

显然 $G-v_0$ 是 k 阶简单连通平面图，由归纳假设可用5种颜色进行着色。

假设已用红、黄、蓝、绿、黑5种颜色对 $G-v_0$ 着好了色，现在考虑对 G 中顶点 v_0 的着色。

a) 若 $d(v_0) < 5$ ，显然可用它的邻接顶点所着颜色之外的一种颜色对 v_0 进行着色，即 G 可以用5种颜色着色；

b) 若 $d(v_0) = 5$ ，显然只需要考虑与 v_0 邻接的顶点被着以不同的5种颜色的情况进行讨论；

三. 平面图面着色

令 $W_1 = \{x | x \in G, \text{ 且 } x \text{ 着红色或蓝色}\}$, $W_2 = \{x | x \in G, \text{ 且 } x \text{ 着黄色或绿色}\}$, 考虑 W_1 导致的 G 的导出子图 $\langle W_1 \rangle$

① 若 v_1 和 v_3 分属于 $\langle W_1 \rangle$ 的两个不同连通分图, 那么将 v_1 所在分图的红蓝色对调, 并不影响图 $G - v_0$ 的正常着色。然后将 v_0 着上红色, 即得图 G 的正常着色;

② 若 v_1 和 v_3 属于 $\langle W_1 \rangle$ 的同一分图中, 则 v_1 和 v_3 之间必有一条顶点属于红蓝集的路径 P , 它加上 v_0 可构成回路 $C: (v_0, v_1, P, v_3, v_0)$;

由于 C 的存在, 将黄绿集分为两个子集, 一个在 C 内, 另一个在 C 外, 于是黄绿集的导出子图至少有两个分图, 一在 C 内, 一在 C 外。于是问题转化为①的类型, 对黄绿集按①的办法处理, 即得图 G 的正常着色。

证毕。

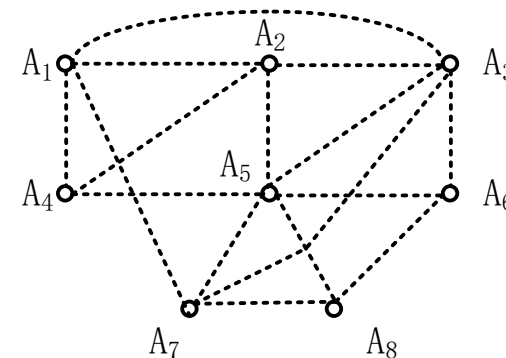
四. 平面图点着色

- 图 G 的**正常着色**（简称**着色**）是指对它的每一个结点指定一种颜色，使得没有两个相邻的结点有同一种颜色。
- 如果图 G 在着色时用了 n 种颜色，称 G 是 **n -色**的。对于图 G 着色时，需要的最少颜色数称为**图 G 的着色数**，记为 $\chi(G)$ 。

下面我们介绍一种图的着色方法，名为韦尔奇·鲍威尔(Welch Powell)方法，过程如下：

- 1) 将图 G 中的结点按照次数的递减次序进行排列。（可能并不是唯一的，有些结点有相同的次数。）
- 2) 用第一种颜色对第一点着色，并且按排列次序，对与前面着色点不邻接的每一点着上同样的颜色。
- 3) 用第二种颜色对尚未着色的点重复第二步，用三种颜色继续这种做法，直到所有的结点全部着上色为止。

四. 平面图点着色



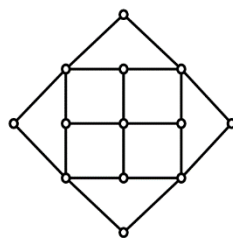
我们以下图为例进行点着色：

- 1) 按次数递减排序结点： $A_5, A_3, A_7, A_1, A_2, A_4, A_6, A_8$;
- 2) 用第一种颜色对 A_5 着色，并对不相邻的结点 A_1 也着同一颜色；
- 3) 对结点 A_3 和它不相邻的 A_4, A_8 着第二种颜色；
- 4) 对结点 A_7 和它不相邻的结点 A_2, A_6 着第三种颜色；

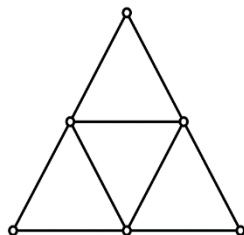
则此图为三色的。 G 不可能是二色的，因为 A_1, A_2, A_3 邻接，必须用三种颜色。所以 $\chi(G)=3$ 。

四. 平面图点着色

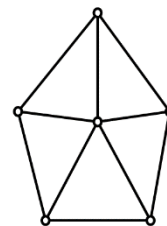
例：给下图所示的3个图的顶点正常着色，问每个图至少需要几种颜色？



a)

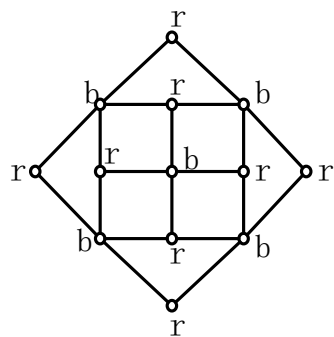


b)

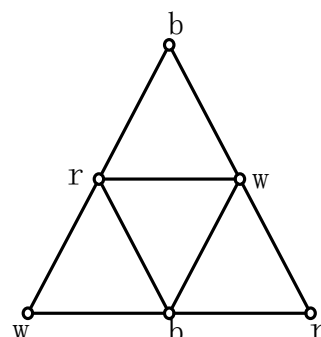


c)

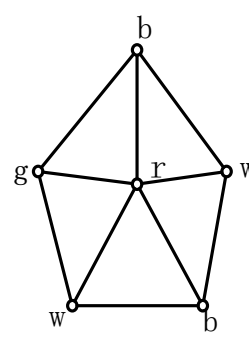
解：用r,b,w,g表示不同的颜色，对图的顶点正常着色如下图所示。可见(a)需要2种颜色，(b)需要3种颜色，(c)需要4种颜色。



(a)



(b)



(c)

平面图的对偶图的性质

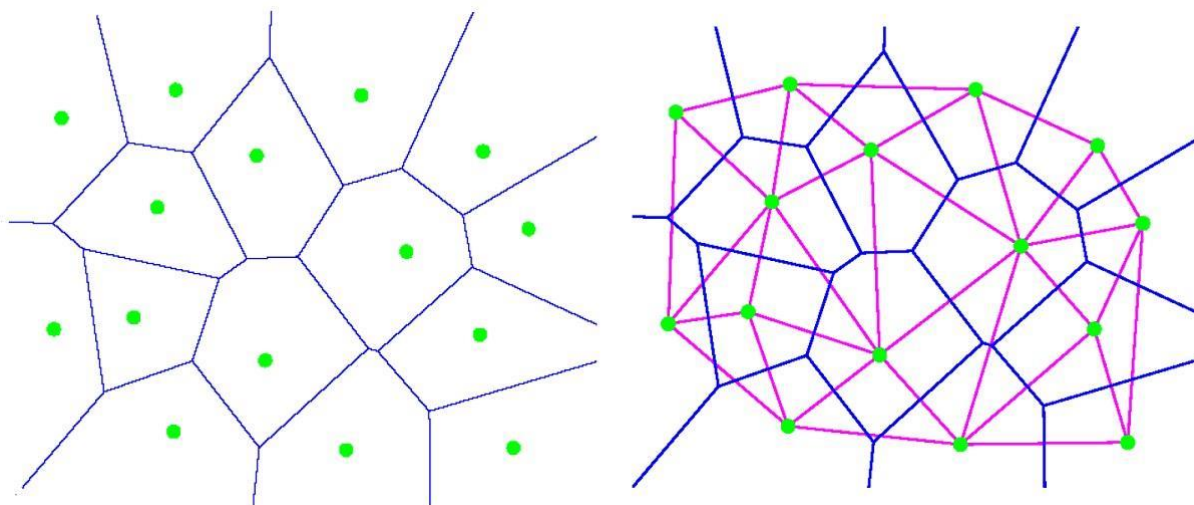
性质：

- 对偶图是平面图，而且是平面嵌入。
- 对偶图是连通图
- 若边 e 为 G 中的环，则 G^* 与 e 对应的边 e^* 为桥；若 e 为桥，则 G^* 中与 e 对应的边 e^* 为环。
- 同构的平面图的对偶图不一定同构。
上页两个平面图同构，它们的对偶图不同构。

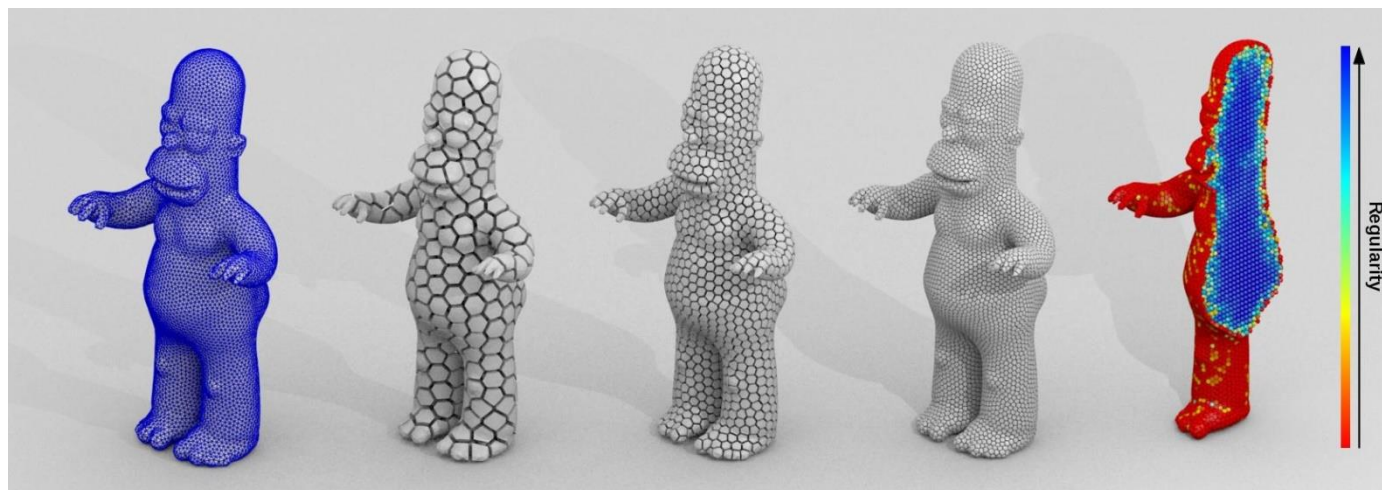
对偶图的应用（1）

❖ Voronoi图和Delaunay三角化

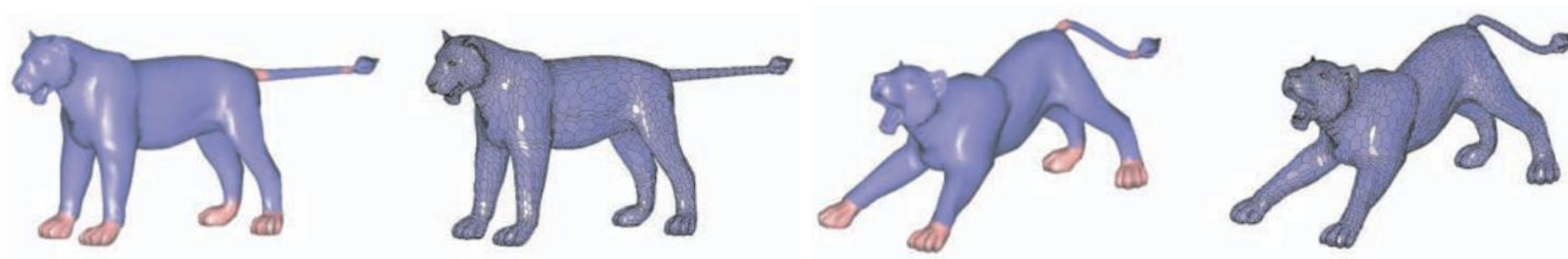
- ✓ 网格中的最小角最大化
- ✓ 任意三角形的外接圆内不含三角形以外的顶点
- ✓ 三角化的网格是点云的凸包
- ✓ 最大化所有三角面片的内切圆的平均值



对偶图的应用（2）



CVT 采样



网格变形

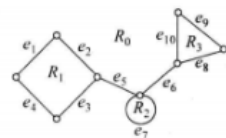
课后习题

❖ 9,10,11

一、简答题

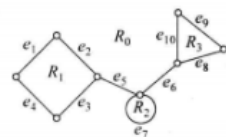
1. 6.20 求下图所示平面图G的对偶图 G^* 。

(15)



2. 6.19 指出下图中所示平面图各面的次数，并验证各面次数之和等于边数的两倍。

(15)



3. 6.18 一座楼房底层的建筑平面图如下图所示。问：能否从南门进入，北门离开，走遍所有的房间并且每个房门恰好经过一次？



4. 6.17 一副骨牌有49张，每张骨牌上有一对数字 $[a,b]$ ， $a,b=0,1,\dots,6$ ，证明可以把骨牌排成一个圆圈使得相邻两张骨牌连接处的数字相同。

二、简答题

5. 6.4 完全二部图 $K_{r,s}$ 的匹配数 β_1 为多少？

6. 6.24 证明彼得森图（见图6-6）不是二部图，也不是欧拉图。

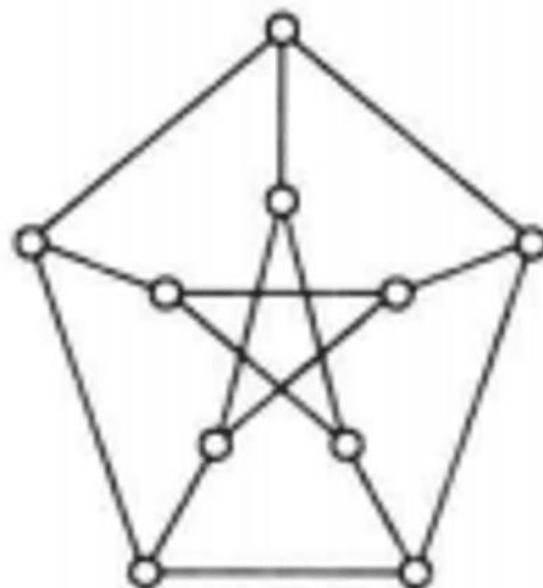


图 6-6