

离散数学概论

第一章 命题逻辑

课程QQ号： 819392514

金耀 数字媒体技术系

fool1025@163.com

13857104418

第一章 命题逻辑

1.1 命题及符号化

1.2 命题等值演算

1.3 范式

1.4 逻辑电路

§ 1 命题及符号化

本讲主要内容

- 基本概念
- 命题符号化
- 真值表
- 命题公式分类

一、基本概念

命题：判断结果**唯一**的**陈述句**。

- $2 + 5 = 7$;
- 我是**中国人**。

真命题：真值为真的命题。

假命题：真值为假的命题。

注意：感叹句、祈使句、疑问句都不是命题
陈述句中的**悖论**以及**判断结果不唯一确定**的也不是命题

例 下列句子中那些是命题？

(1) $\sqrt{2}$ 是无理数.

真命题

(2) $2 + 5 = 8$.

假命题

(3) $x + 5 > 3$.

真值不确定

(4) 你有铅笔吗？

疑问句

(5) 这只兔子跑得真快呀！

感叹句

(6) 请不要讲话！

祈使句

(7) 我正在说谎话.

悖论

(3)~(7)都不是命题

1. 命题的分类

- ❖ 简单命题 (原子命题) : 简单陈述句构成的命题.
- ❖ 复合命题 : 由简单命题与联结词按一定规则复合而成的命题.

2. 命题符号化 – 简单命题

符号化: 用 **小写英文字母** $p, q, r, \dots, p_i, q_i, r_i (i \geq 1)$ 表示.

简单命题

q : 北京是中国首都, 则 q 的真值为 1.

p : $\pi = 3.14$, 则 p 的真值为 0.

祖冲之: 刘徽 “割圆术”

介于: $3.1415926 \sim 3.1415927$

2. 命题符号化—简单命题

符号化: 用小写英文字母 $p, q, r, \dots, p_i, q_i, r_i (i \geq 1)$ 表示.

简单命题

q : $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 = 5050$ 真命题 or 假命题

数学家高斯——数学家之王
与阿基米德、牛顿齐名

2.命题符号化 –联结词与复合命题

❖ 否定式与否定联结词 “ \neg ” :

定义: 设 p 为命题, 复合命题“非 p ”(或“ p 的否定”)称为 p 的**否定式**, 记作 $\neg p$. 符号 \neg 称作**否定联结词**, 并规定 p 为真当且仅当 p 为假.



2.命题符号化 – 联结词与复合命题

❖ 合取式与合取联结词 “ \wedge ” :

定义: 设 p, q 为二命题, 复合命题“ p 并且 q ” (或 “ p 与 q ”) 称 p 与 q 的合取式, 记作 $p \wedge q$. \wedge 称作合取联结词, 并规定 $p \wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真.

例 将下列命题符号化

- (1) 王晓既用功又聪明.
- (2) 王晓不仅聪明, 而且用功.
- (3) 王晓虽然聪明, 但不用功.
- (4) 张辉与王丽都是三好生.
- (5) 张辉与王丽是同学.

解 令 p : 王晓聪明, q : 王晓用功, 则

- (1) $p \wedge q$
- (2) $p \wedge q$
- (3) $p \wedge \neg q$.

例 (续)

令 r : 张辉是三好学生, s : 王丽是三好学生

(4) $r \wedge s$.

(5) 令 t : 张辉与王丽是同学, t 是简单命题.

说明:

(1)~(4)说明描述合取式的灵活性与多样性.

(5) 中“与”联结的是两个名词, 整个句子是一个简单命题.

2.命题符号化 –联结词与复合命题

❖ 析取式与析取联结词 “ \vee ” :

定义: 设 p, q 为二命题, 复合命题“ p 或 q ”称作 p 与 q 的析取式, 记作 $p \vee q$. \vee 称作析取联结词, 并规定 $p \vee q$ 为假当且仅当 p 与 q 同时为假.

2.命题符号化 –联结词与复合命题

(1) 2或4是素数.

解 令 p :2是素数, q :4是素数

符号化为: $p \vee q$

它们的真值分别为 0.

则为**相容或**.

(2) 小元元只能拿一个苹果或一个梨.

解: 令 t :小元元拿一个苹果,

u :小元元拿一个梨,

则符号化为: $(t \wedge \neg u) \vee (\neg t \wedge u)$.

为**排斥或**.

(3) 王晓红生于1975年或1976年

令 v :王晓红生于1975年, w :王晓红生于1976年,

则既可符号化为: $(v \wedge \neg w) \vee (\neg v \wedge w)$, 又可符号化为 $v \vee w$.

2.命题符号化 –联结词与复合命题

❖ 蕴涵式与蕴涵联结词 “ \rightarrow ” :

定义：设 p, q 为二命题，复合命题 “如果 p , 则 q ” 称作 p 与 q 的 **蕴涵式**，记作 $p \rightarrow q$ ，并称 p 是蕴涵式的 **前件**， q 为蕴涵式的 **后件**。 \rightarrow 称作 **蕴涵联结词**，并规定， $p \rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真 q 为假。

联结词与复合命题(续)

$p \rightarrow q$ 的逻辑关系: q 为 p 的必要条件, p 为 q 的充分条件

“如果 p , 则 q ”的不同表述法很多:

- * 若 p , 就 q
- * 只要 p , 就 q
- * p 仅当 q
- * 只有 q 才 p
- * 除非 q , 才 p 或 除非 q , 否则非 p .

当 p 为假时, $p \rightarrow q$ 为真

常出现的错误: 不分充分与必要条件

“只要就”与“只有才”的区别

❖ **只要...就，是充分条件（条件不具有唯一性）。**

例：只要做了课后习题，就能得高分。

❖ **只有...才，是必要条件（条件具有唯一性）。**

例：只有做了课后习题，才能得高分。

2.命题符号化 –联结词与复合命题

例 设 p :天冷, q :小王穿羽绒服, s :肯努力, t :小王就取得好成绩,
将下列命题符号化

(1) 因为天冷, 所以小王穿羽绒服. $p \rightarrow q$

(2) 若小王不穿羽绒服, 则天不冷. $p \rightarrow q$

(3) 只有天冷, 小王才穿羽绒服. $q \rightarrow p$

(4) 只要肯努力, 小王就能取得好成绩. $s \rightarrow t$

注意: $\underline{p \rightarrow q}$ 与 $\underline{\neg q \rightarrow \neg p}$ 等值 (真值相同)

联结词与复合命题（续）

例 设 p :天冷, q :小王穿羽绒服,

将下列命题符号化

(1) 只要天冷, 小王就穿羽绒服.

$$p \rightarrow q$$

(2) 只有天冷, 小王才穿羽绒服.

$$q \rightarrow p$$

(3) 除非天冷, 小王才穿羽绒服.

$$q \rightarrow p$$

(4) 除非小王穿羽绒服, 否则天不冷.

$$p \rightarrow q$$

(5) 如果天不冷, 则小王不穿羽绒服.

$$q \rightarrow p$$

(6) 小王穿羽绒服仅当天冷的时候.

$$q \rightarrow p$$

2.命题符号化 –联结词与复合命题

❖ 等价式与等价联结词 “ \leftrightarrow ” :

定义: 设 p, q 为二命题, 复合命题 “ p 当且仅当 q ”称作 p 与 q 的**等价式**, 记作 $p \leftrightarrow q$. \leftrightarrow 称作**等价联结词**. 并规定 $p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真或同时为假.

说明:

(1) $p \leftrightarrow q$ 的逻辑关系: p 与 q 互为充分必要条件

(2) $p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同真或同假

例

例 求下列复合命题的真值

- | | |
|--|---|
| (1) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 $3 + 3 = 6$. | 1 |
| (2) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 3 是偶数. | 0 |
| (3) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 太阳从东方升起. | 1 |
| (4) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 美国位于非洲. | 0 |
| (5) 函数 $f(x)$ 在 x_0 可导的充要条件是它在 x_0 连续. | 0 |

联结词与复合命题(续)

以上给出了5个联结词： $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ ，组成一个联结词集合 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ，

联结词的优先顺序为： $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ ；如果出现联结词同级，又无括号时，则按从左到右的顺序运算；若遇有括号时，应该先进行括号中的运算。

注意：本书中使用的 括号全为圆括号。

命题变项与合式公式

命题常项：简单命题

命题变项：真值不确定的陈述句

定义 合式公式 (命题公式, 公式) 递归定义如下：

(1) 单个命题常项或变项 $p, q, r, \dots, p_i, q_i, r_i, \dots, 0, 1$

是合式公式

(2) 若 A 是合式公式，则 $(\neg A)$ 也是合式公式

(3) 若 A, B 是合式公式，则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式

(4) 只有有限次地应用(1)~(3)形成的符号串才是合式公式

说明：外层括号可以省去

合式公式的层次

定义

- (1) 若公式 A 是单个的命题变项, 则称 A 为0层公式.
- (2) 称 A 是 $n+1$ ($n \geq 0$) 层公式是指下面情况之一:
 - (a) $A = \neg B$, B 是 n 层公式;
 - (b) $A = B \wedge C$, 其中 B, C 分别为 i 层和 j 层公式, 且
 $n = \max(i, j)$;
 - (c) $A = B \vee C$, 其中 B, C 的层次及 n 同(b);
 - (d) $A = B \rightarrow C$, 其中 B, C 的层次及 n 同(b);
 - (e) $A = B \leftrightarrow C$, 其中 B, C 的层次及 n 同(b).

合式公式的层次 (续)

例如 公式

p

0层

$\neg p$

1层

$\neg p \rightarrow q$

2层

$\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$

3层

$((\neg p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg r \vee s)$

4层

公式的赋值

定义 给公式 A 中的命题变项 p_1, p_2, \dots, p_n 指定一组真值称为对 A 的一个**赋值**或**解释**

成真赋值: 使公式为真的赋值

成假赋值: 使公式为假的赋值

说明:

赋值 $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ 之间不加标点符号, $\alpha_i = 0$ 或 1 .

A 中仅出现 p_1, p_2, \dots, p_n , 给 A 赋值 $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ 是指

$$p_1 = \alpha_1, p_2 = \alpha_2, \dots, p_n = \alpha_n$$

A 中仅出现 p, q, r, \dots , 给 A 赋值 $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ 是指 $p = \alpha_1, q = \alpha_2, r = \alpha_3 \dots$

含 n 个变项的公式有 2^n 个赋值.

3.真值表

真值表： 公式 A 在所有赋值下的取值情况列成的表.

例 给出 $A = (q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$ 的真值表

p q	$q \rightarrow p$	$(q \rightarrow p) \wedge q$	$(q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$
0 0	1	0	1
0 1	0	0	1
1 0	1	0	1
1 1	1	1	1

3.真值表

例 $C = (p \vee q) \rightarrow \neg r$ 的真值表

p	q	r	$p \vee q$	$\neg r$	$(p \vee q) \rightarrow \neg r$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

3.真值表

课堂讨论- 求 $B = \neg(\neg p \vee q) \wedge q$ 的真值表

p q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg(\neg p \vee q)$	$\neg(\neg p \vee q) \wedge q$
0 0	1	1	0	0
0 1	1	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	1	0	0

4.命题公式分类

定义 设 A 为一个命题公式

- (1) 若 A 无成假赋值, 则称 A 为**重言式**(也称**永真式**)
- (2) 若 A 无成真赋值, 则称 A 为**矛盾式**(也称**永假式**)
- (3) 若 A 不是矛盾式, 则称 A 为**可满足式**

注意: 重言式是可满足式, 但反之不真.

上例中 A 为重言式, B 为矛盾式, C 为可满足式

$$A = (q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p, \quad B = \neg(\neg p \vee q) \wedge q, \quad C = (p \vee q) \rightarrow \neg r$$

思考

命题常元、命题变元、连接词、命题公式等概念的定义是否与我们学过的某些知识有相似之处？

课后作业

课后习题：1、3、5、7

答题派作业：

一、简答题

1. 1.1 判断下列语句是否为命题，若是命题请指出是简单命题还是复合命题。

(45)

- (1) $\sqrt{2}$ 是无理数。
- (2) 5能被2整除。
- (3) 现在开会吗？
- (4) $x + 5 > 0$ 。
- (5) 这朵花真好看呀！
- (6) 2是素数当且仅当三角形有3条边。
- (7) 雪是黑色的当且仅当太阳从东方升起。
- (8) 2080年10月1日天气晴好。
- (9) 太阳系以外的星球上有生物。
- (10) 小李在宿舍里。
- (11) 全体起立！
- (12) 4是2的倍数或是3的倍数。
- (13) 4是偶数且是奇数。
- (14) 李明与王华是同学。
- (15) 黄色和蓝色可以调配成绿色。

2. 1.3 判断下列各命题的真值。

(25)

- (1) 若 $2 + 2 = 4$,则 $3 + 3 = 6$ 。
- (2) 若 $2 + 2 = 4$,则 $3 + 3 \neq 6$ 。
- (3) 若 $2 + 2 \neq 4$,则 $3 + 3 = 6$ 。
- (4) 若 $2 + 2 \neq 4$,则 $3 + 3 \neq 6$ 。
- (5) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 $3 + 3 = 6$ 。
- (6) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 $3 + 3 \neq 6$ 。
- (7) $2 + 2 \neq 4$ 当且仅当 $3 + 3 = 6$ 。
- (8) $2 + 2 \neq 4$ 当且仅当 $3 + 3 \neq 6$ 。

3. 将下列命题符号化，并给出真值。

(30)

- 1) 如果 $2 < 1$, 则 $3 \geq 2$.
- 2) 只有 $2 < 1$, 才有 $3 \geq 2$.
- 3) 除非 $2 < 1$, 才有 $3 \geq 2$.
- 4) 除非 $2 < 1$, 否则 $3 < 2$.
- 5) $2 < 1$, 仅当 $3 < 2$.
- 6) 若 $2 + 2 \neq 4$,则 $3 + 3 \neq 6$; 反之亦然.