线性代数A

浙江理工大学期末试题汇编

（试卷册）

学校：____________________

专业：____________________

班级：____________________

姓名：____________________

学号：____________________

（此试卷为 2022 年第二版 第 1 次发行）

写在前面

亲爱的小伙伴们：

你们好！我是 20 信管专业的欧阳玉泉，这次很荣幸创琦 giegie 邀请我来写这段序言。本人学习马马虎虎，线代勉强能够那个不错的成绩（创琦注：97 分）。在学习了 10 多年数学后，每个人对于如何学习数学都会有独特的见解。但无论你们是谁，你们现状如何，只要是用这份资料，就必然想要学好数学，想要数学尽量拿个高分，最少也不想数学挂科。

从高中到大学，对于学习，很多人最深的体会就是可以摸鱼，可以不用想高中那样死命的学。高中老师常常给我们这样一种“暗示”，只要上了大学，学习就轻松了。然而高中生与大学生最大的差别就在于能否挂科的问题，高中无论怎么挂科，只要高考考好就没事，而大学，基本只有一次期末考试，期末考试挂了就基本凉透了。所以，希望使用这份资料的同学们能够好好学习，充实的度过一个学期的线代课程。

数学的重要性在于他的应用，由于数学是一门思维性的学科，由数学推理出的各种结论没有物化那么多的限制，它可以自由的应用于各种社会问题，社会的方方面面都充满了数学。很多学生会有疑惑，我们学好线性代数的意义在哪？有一部分学生学不好线代，甚至挂科重修。学好现代或许对你以后的人生发展意义不大，但现阶段你必须学好它，没人想要挂科。更深层次来说，学好一门数学科目，这一事实证明了一个学生的学习能力，也为某些特定专业的学生打好了基础。

你们可能会问，那么如何学好数学，更具体来说，如何学好线代？这个问题，每个人都有自己的答案。对于我来说，我喜欢数学，仅仅在于它是与高中最接近的科目。一个学期就那么十多周学习的时间，想要真正学的透彻，这很难。但学习的本质正在于学会如何学习，以及锻炼自己的思维能力。学习一门学科，必须要有清晰的思维，要有严密的流程意识，最后，要有对学习的热爱和信心。

线性代数这门科目，思维性极强，任何一个论断都有着严密的思维推理。它的基础只是简单的解方程，但它不仅仅是解方程，它解释了解方程背后的深层次原理以及更高层面的拓展。它能够被应用于许多的社会学科之中，学好它，有助于增强你的信心和能力。

那么，具体来说，线代的学习有没有什么具体的建议？

首先，学好线代，必须要有坚实的基础。自主学习，阅读课本，或者 B 站网课都是很好的方法。其次，我们需要具备严谨的思维推理能力，具备强烈的因果意识，多思考“为什么”。

最后，万变不离其宗，要有好成绩，刷题必不可少，只要是这种应试教育的模式，刷题就是很好的方法。我们在刷题过程中，巩固了基础，锻炼了思维能力，规范了流程和过程。这同样适用于其他各种科目。

最后的最后，希望你们都能够在线代的学习中找到学习的乐趣，在考试中拿到好成绩，最差也能逢考必过。

欧阳玉泉
2022 年 5 月 9 日

（创琦说：欧阳玉泉同学是我见过的学习很努力的同学，他那一年考试的试卷难度很高，能考到 97 分已经很厉害了。他在信息管理专业需要敲代码，编程能力丝毫不亚于我这个计算机科班同学。他在学习方面也蛮刻苦的，能取得好成绩，背后一定是无数次的练习。大家经常听到躺平，但你们有没有发现，你身边那些经常喊着躺平的小伙伴考的都很好，所以嘛，抱怨归抱怨，该学习学习，加油！相信各位！）

目 录

2022 年所有试卷版本见试卷尾页。如需资料获取请添加下方的 QQ 群获取。

更多信息

试卷整理人：张创琦　　　　　　　微信公众号：创琦杂谈

试卷版次：2022 年 5 月 8 日 第二版 第 2 次发行

本人联系 QQ 号：1020238657（勘误请联系本人）

创琦杂谈学习交流群（QQ 群）群号：749060380

cq 数学物理学习群（QQ 群）群号：967276102

cq 计算机编程学习群（QQ 群）群号：653231806

创琦杂谈公众号优秀文章：

曾发布了《四级备考前要注意什么？创琦请回答！（一）》、《走！一起去春季校园招聘会看看，感受人间真实》、《送给即将期末考试的你》、《那些你不曾在选课中注意到的事情》、《身为大学生，你的劳动价值是多少？》（荐读）、《如何找到自己的培养计划》以及信息学院本科阶段五个专业的分流经验分享（来自 20 多位学长学姐的亲身经历与分享，文章过多，就不贴链接啦），公众号也可以帮忙大家发布相关社会实践的问卷。

我最近在写关于 github 使用技巧的文章，并且在开发网站，争取给大家提供更优质的学习讨论平台。

QQ 群：

“创琦杂谈学习交流群”主要为大家更新各种科目的资料，群里可以讨论问题、也可以发布社会实践的调查问卷互相帮助，目前群成员不到千人，相信您的问题会有人解答的。

“cq 数学物理学习群”更适合讨论数学物理相关的题目等，数学科目包括但不限于：高等数学、线性代数、概率论与数理统计等，物理包括但不限于：普通物理、普通物理实验。

“cq 计算机编程学习群”适用于讨论编程语言相关内容，包括但不限于：C 语言、C++语言、Java 语言、matlab 语言、python 语言等，也可以讨论计算机相关课程，包括但不限于：数据结构、算法、计算机网络、操作系统、计算机组成原理等。

考试承诺：本人郑重承诺：本人已阅读并且透彻地理解《浙江理工大学考场规则》，愿意在考试中自觉遵守这些规定，保证按规定的程序和要求参加考试，如有违反，自愿按《浙江理工大学学生违纪处分规定》有关条款接受处理。

最终感谢我的老师、我的朋友，还要感谢各位朋友们对我的大力支持。

本人尽全力为大家寻找、整理数学考试资料，但因时间仓促以及本人水平有限，本练习册中必有许多不足之处，还望各位不吝赐教。

宣传伙伴：

浙理羊同学 YOUNG

大家好，这里是浙理羊同学 YOUNG，一个致力于打造成为浙理校内最全最大的信息发布平台。如果你有爆料吐槽、闲置交易、失物招领、表白脱单、树洞聊天、互推捞人等需求，就来找羊羊聊天吧~ （下面是浙理羊同学 YOUNG 的微信号，有需求可以加哈）

1 浙江理工大学 2019—2020 学年第 1 学期《线性代数 A》期末 A 卷

一、选择题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在圆括号内)

1. 齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解, 则 ( )

(A) $\lambda = 0$ 或 $\mu = 0$　　(B) $\lambda = 1$ 或 $\mu = 0$

(C) $\lambda \neq 0$ 且 $\mu \neq 0$　　(D) $\lambda \neq 1$ 且 $\mu \neq 0$

2. 设 A 和 B 都是 n 阶方阵, 则下列说法正确的是 ( )

(A) $|A+B| = |A| + |B|$　　(B) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

(C) $|AB| = |A| \cdot |B|$　　(D) $(A+B)^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$

3. 若 3 阶方阵 A 的特征值互不相同, 且 $|A| = 0$, 则 $R(A)$ 应为 ( )

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

4. 有向量组 $(I): \alpha_1, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_t$ 和向量组 $(II): \alpha_1, \cdots, \alpha_s$, 则以下说法正确的是 ( )

(A) 若向量组 (I) 线性相关, 则向量组 (II) 线性相关.

(B) 若向量组 (I) 线性相关, 则向量组 (II) 线性无关.

(C) 若向量组 (I) 线性无关, 则向量组 (II) 线性相关.

(D) 若向量组 (I) 线性无关, 则向量组 (II) 线性无关.

5. 设 λ 是 n 阶可逆矩阵 A 的一个特征值, 则下列选项中一定为矩阵 A^* 的特征值的是 ( )

(A) $\lambda^{-1}|A|^{n-1}$　　(B) $\lambda^{-1}|A|$

(C) $\lambda|A|^{n-1}$　　(D) $\lambda|A|$

6. 若实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 是正定二次型, 则 a 的取值范围为 ( )

(A) $-1 < a < 1$　　(B) $-1 < a < \frac{1}{2}$

(C) $a > 1$ 或 $a < -1$　　(D) $\frac{1}{2} < a < 1$

二 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1. 设 M_{ij} 和 A_{ij} 分别为行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 8 & 2 \end{vmatrix}$ 第 i 行第 j 列元素的余子式和代数余子式, 则 $M_{11} + 2A_{12} + M_{13} + A_{14} =$________.

2. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 - 3A + E = 0$, 则 $(A-2E)^{-1}=$____________.

3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $|A^4| =$________.

4. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是向量空间 R^3 的一组基，易知 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2, \beta_2=\alpha_2+\alpha_3, \beta_3=\alpha_3+\alpha_1$ 也是向量空间 R^3 的一组基. 向量 γ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标是 $(1,2,3)^T$，则 γ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为____________.

5. 已知向量 $\alpha=(1,2019,0,1)^T$ 与 $\beta=(1,0,2020,k)^T$ 正交，则 $k=$________.

6. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} -4 & -10 & 0 \\ x & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_{1,2}=1, \lambda_3=-2$，则 $x=$________.

三、计算题 (**本题共 5 小题，共 42 分，请写出必要的文字说明和演算步骤**)

1. (6 分) 设 $x \neq a$，计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$.

2. (6 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} x & a_1 & u \\ y & a_2 & v \\ z & a_3 & w \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & b_1 & u \\ y & b_2 & v \\ z & b_3 & w \end{pmatrix}$，且 $|A|=1$, $|B|=2$，计算 $|2A+B|$.

3. (6 分) 设向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\6\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-2\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\5\\10\\5\end{pmatrix},$$

求出它的一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大无关组线性表示.

4. (12 分) 设非齐次线性方程组 $\begin{cases}3x_1+\lambda x_2+2x_3=10,\\2x_1+(2\lambda+1)x_2+\lambda x_3=5,\\x_1+\lambda x_2+\lambda x_3=2.\end{cases}$ 问 λ 取何值时, 该方程组

(1) 有唯一解; (2) 无解; (3) 有无穷多解, 并求其通解.

5. (12 分) 求一个正交变换将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 化为标准形.

四、证明题 (本题共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分)

1. 设 $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 和 $B: \beta_1, \cdots, \beta_t$ 是两个同维向量组, 向量组 $C = A \cup B$. 证明: $R(C) \le R(A) + R(B)$.

2. 设 λ_1, λ_2 是方阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量依次为 ξ_1, ξ_2. 证明: $2\xi_1 + 3\xi_2$ 不是 A 的特征向量.

2 浙江理工大学 2018—2019 学年第 1 学期《线性代数 A》期末 A 卷

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 A 为 3 阶矩阵，把 A 按列分块为 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_3-2\alpha_1,4\alpha_2)$，若 $|A|=-3$，则 $|B|=$（　　）.

（A）12　　（B）-12　　（C）24　　（D）-24

2. 已知向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则（　　）.

（A）该向量组的任何部分组必线性相关．

（B）该向量组的任何部分组必线性无关．

（C）该向量组的秩小于 m．

（D）该向量组的最大线性无关组是唯一的.

3. 设 3 阶方阵 A 与 B 相似，且 A 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，则 $\mathrm{tr}(B^{-1}-E)$ 为（　　）.

$(A)2$　　$(B)3$　　$(C)4$　　$(D)6$

4. 已知 n 元线性方程组 $Ax=b$，系数阵的秩 $R(A)=n-2$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是方程组线性无关的解，则方程组的通解为（　　）.（c_1,c_2 为任意常数）

(A) $c_1(\alpha_1-\alpha_2)+c_2(\alpha_2+\alpha_1)+\alpha_1$；　(B) $c_1(\alpha_1-\alpha_3)+c_2(\alpha_2+\alpha_3)+\alpha_3$；

(C) $c_1(\alpha_2-\alpha_3)+c_2(\alpha_3+\alpha_2)+\alpha_2$；　(D) $c_1(\alpha_2-\alpha_3)+c_2(\alpha_2-\alpha_1)+\alpha_3$．

5. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-5x_1^2-4x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2$ 是负定的，则 t 的取值范围为（　　）.

$(A)t>0$　　$(B)t<0$

$(C)t>1$　　$(D)t<1$

二 填空题（每小题 4 分，共 5 小题，共 20 分）

1. 设行列式 $D=\begin{vmatrix}2&2&3\\1&1&2\\2&x&y\end{vmatrix}$，其代数余子式 $A_{11}+A_{12}+A_{13}=1$，则 $D=$________ .

2. 设 $\alpha=(1,2,3)$，$\beta=(1,2,3)$，则 $(\alpha^T\beta)^k=$________________.

3. 已知三阶矩阵 A 的三个特征值为 $-2,1,2$，则 $|A|=$______，A^* 的特征值为____________.

4. 设 A 为 n 阶矩阵，满足 $A^2-4A+3E=O$，则 $(A-2E)^{-1}=$ __________.

5. A 为 4×3 矩阵，且 $R(A)=2$，$B=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&0\\2&3&1\end{pmatrix}$，则 $R(AB)-R(A)=$ __________.

三、解答题（共 50 分）(解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

1. 设 3 阶方阵 A,B,C 满足方程 $C(2A-B)=A$，试求矩阵 A，其中

$$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1&-2&4\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}。$$（6 分）

2. 在 3 维空间 V 中，已知从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\1&-2&4\\-1&2&-3\end{pmatrix},$$

（1）若向量 β 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，求 β 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标.

（2）求一个向量 α，使其在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和基 β_1,β_2,β_3 下的坐标相同. （8 分）

3.已知$\alpha_1=(1,0,2,3),\alpha_2=(1,1,3,5),\alpha_3=(1,-1,a+2,1)$，$\alpha_4=(1,2,4,a+8)$及$\beta=(1,1,b+3,5)$.

（1）a,b为何值时,β不能表示成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的线性组合?

（2）a,b为何值时,β有$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的唯一线性表示式?并写出该表示式.（ 10分）

4.当λ为何值时，线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=4, \\ -x_1+\lambda x_2+\lambda x_3=\lambda^2, \\ x_1-\lambda x_2+2x_3=-4, \end{cases}$

（1）由唯一解；（2）无解：（3）有无穷多个解？并求出有无穷多个解时的通解.（12分）

5. 求一个正交变换化二次型

$$f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

成标准形. （14 分）

四、证明题。（**本题 10 分，每题 5 分**）

1. 设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，证明向量 $2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + 5\alpha_3, 2\alpha_3 + 3\alpha_1$ 也线性无关。

2. 设 λ 是 n 阶正交矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值，证明 $\lambda \neq 0$，且 $\frac{1}{\lambda}$ 也是 $\mathbf{A}$ 的特征值.

3 浙江理工大学 2014—2015 学年第 1 学期《线性代数 A》期末 A 卷

一、选择题（每小题 4 分，共 24 分）

1. 对于 n 阶可逆矩阵 A，B，则下列等式中（　　）不成立.

(A) $\left|(AB)^{-1}\right| = \left|A^{-1}\right| \cdot \left|B^{-1}\right|$　　(B) $\left|(AB)^{-1}\right| = (1/\left|A^{-1}\right|) \cdot (1/\left|B^{-1}\right|)$

(C) $\left|(AB)^{-1}\right| = \left|A\right|^{-1} \cdot \left|B\right|^{-1}$　　(D) $\left|(AB)^{-1}\right| = 1/\left|AB\right|$

2. 设 $A = (a_{ij})_{3\times 3}$，$B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$，$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，那么（　　）。

（A）$AP_1P_2 = B$　　（B）$AP_2P_1 = B$　　（C）$P_1P_2A = B$　　（D）$P_2P_1A = B$

3. 设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$,则该向量组的一个最大无关组为（　　）

（A）α_1，α_2, α_3　　（B）α_1，α_2, α_4　　（C）α_1，α_2, α_5　　（D）α_1，$\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$

4. 若方程 $AX = b$ 中，方程的个数小于未知量的个数，则有（　　）.

（A）$AX = b$ 必有无穷多解　　（B）$AX = 0$ 必有非零解

（C）$AX = 0$ 仅有零解　　（D）$AX = 0$ 一定无解

5. 设 n 阶矩阵 A 的 n 个特征值全为零，则（　　）。

（A）$A = 0$　　（B）A 只有一个线性无关的特征向量

（C）A 不能与对角矩阵相似　　（D）当 A 与对角矩阵相似时，$A = 0$

6. 二次型 $f(X) = X^T AX$（A 是对称矩阵）正定的充要条件是（　　）。

（A）对任何 X，有 $X^T AX \geq 0$　　（B）A 的特征值为非负数

（C）对任何 $X \neq 0$，有 $X^T AX \neq 0$　　（D）对任意 $X \neq 0$，有 $X^T AX > 0$

二、填空题（每空格 4 分，共 24 分）

1. n阶行列式$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} =$ ________________________。

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$B$ 为非零矩阵，$AB = 0$，则 $t =$ ____________。

3. 若 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$，则 $BC = \begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}$。

4. 设 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2tx_2x_3$ 为正定二次型，则 t 的取值范围为______________________。

5. 设 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 是非齐次线性方程组 $AX = b$ 的 s 个解，若 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s$ 也是它的解，则 $k_1 + k_2 + \cdots + k_s =$ _____________。

6. 设四阶矩阵 A 与 B 相似，矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_3}, \frac{1}{\lambda_4}$，则行列式 $\left| B^{-1} - E \right| =$ ___________。

三、**解答题**（12+8+12+12=44 分）

1. 当 λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + \lambda x_2 - x_3 = -\lambda \\ -x_1 - x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有（1）惟一解；（2）无解；（3）无穷多解，并求通解。

2. 解矩阵方程 $X = AX + B$，其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$， $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

3. 判断下面向量组的线性相关性，求它的秩和一个极大无关组，并把其余向量用这个极大无关组线性表示。$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$， $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$， $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

4. 设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2,\ \lambda_1 = 1$ 对应的特征向量为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

（1）求 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 对应的特征向量；

（2）求矩阵 A。

四、证明题（每小题 4 分，共 8 分）

1. 设 A 为 n 阶可逆阵，$A^2 = |A|E$.证明 A 的伴随阵 $A^* = A$.

2. 设 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 是 n 阶方阵 A 的特征值，对应的特征向量分别为 p_1, p_2，证明 $p_1 + p_2$ 不是 A 的特征向量。

4　2013—2014 学年第 2 学期《线性代数 A》12 级期末 A 卷

一 选择题（每小题 4 分，共 24 分）

1、设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a \neq 0$，则 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & \frac{1}{3}a_{13} - 5a_{12} & -3a_{12} \\ 2a_{21} & \frac{1}{3}a_{23} - 5a_{22} & -3a_{22} \\ 2a_{31} & \frac{1}{3}a_{33} - 5a_{32} & -3a_{32} \end{vmatrix} =$（　　）.

(A) $2a$　　（B）$-2a$　　（C）$-3a$　　（D）$3a$

2、设 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，k 为常数，则 $(kA)^* =$（　　）.

(A) A^*.　　(B) kA^*.　　(C) $k^{n-1}A^*$.　　(D) $k^n A^*$.

3、当 $a=$（　　　）时，非齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + ax_2 - \ \ x_3 = 1, \\ ax_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$ 无解.

(A) 1　　(B) $-\dfrac{4}{5}$　　(C) 4　　(D) 2

4、已知矩阵 $\begin{pmatrix} 22 & 30 \\ -12 & a \end{pmatrix}$ 有一个特征向量 $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$，则 a 等于（　　）.

(A) -18　　(B) -16　　(C) -14　　(D) -12

5、设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 则必有　(　　)

(A)　$AP_1P_2 = B$;　　（B）　$AP_2P_1 = B$;　　（C）　$P_1P_2A = B$;　　（D）$P_2P_1A = B$.

6、齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 的基础解系中含有解向量的个数是（　　）.

(A)　1　　(B)　2　　(C)　3　　(D)　4

二 填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1．已知三阶矩阵 A 使得行列式 $|2A + 3E| = |3A + 4E| = |4A + 5E| = 0$，则 $|A| =$ ___

2. 行列式$\begin{vmatrix} 549 & 49 & 9 \\ 667 & 67 & 7 \\ 986 & 86 & 6 \end{vmatrix} =$____________.

3. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 7 & 4 & x \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_{1,2}=3, \lambda_3=12$，则 $x=$__________.

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ a & b & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}$ 为正交矩阵，则 $a=$____________.

5. 二次型 $f(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3)=(\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2+\mathrm{x}_3)(\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_3)$ 的秩为__________.

6．已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型．则 a 的取值范围为____________.

三、计算题（共 40 分）**(解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)**

1.（6 分）设 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，试求 $\mathrm{A}_{14}+\mathrm{A}_{24}+\mathrm{A}_{34}+\mathrm{A}_{44}$ 和 $\mathrm{M}_{11}+\mathrm{M}_{12}+\mathrm{M}_{13}+\mathrm{M}_{14}$.

2.（6 分） 设 $X=AX+B$，其中矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 求矩阵 X.

3．（8 分）试问向量 β 可否由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示？若能，求出 β 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示的表达式．其中 $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix};\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

4．（10 分）在 R^3 中取两组基：$\alpha_1=(1,2,1)^T,\alpha_2=(2,3,3)^T,\alpha_3=(3,7,1)^T$；

$$\beta_1=(3,1,4)^T,\beta_2=(5,2,1)^T,\beta_3=(1,1,-6)^T.$$

（1）求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵.

（2）若向量 γ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 $(1,1,1)$，求向量 γ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标.

5．（10 分）设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_{2,3}=1$，对应 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为 $\alpha_1=(0,1,1)^T$，求 A．

四、证明题（共 12 分）

1．（6 分）设 A,B 都是 n 阶实对称矩阵，证明 A 与 B 相似的充要条件是 A 与 B 有相同的特征值．

2.（6 分）设 A 为 3 阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量，向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$．证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

5　2013—2014 学年第 1 学期《线性代数 A》12 级期末 A 卷

一．选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，则（　　）。.

（A）$AB = BA$　　（B）存在可逆阵P使得$P^{-1}AP = B$

（C）存在可逆阵C使得$C^T AC = B$（D）存在可逆阵P和Q使得$PAQ = B$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $Ax = 0$ 仅有零解的充分必要条件是（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}$ 的列向量组相性相关　　（B）$\boldsymbol{A}$ 的列向量组相性无关

（C）$\boldsymbol{A}$ 的行向量组相性无关　　（D）$\boldsymbol{A}$ 的行向量组相性相关

3. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + (b-1)x_2^2 + 2bx_1x_3 + 4x_3^2$ 为正定二次型，则（　　）.

（A）$0 < b < 1,$　　（B）$1 < b < 2$

（C）$0 < b < 2$　　（D）$2 < b < 3$

4. 若 A，$\boldsymbol{B}$ 均为n阶可逆方阵，$C = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}$,则$C^{-1}$为（　　）.

（A）$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$；　　（B）$\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}$；　　（D）$\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$。

5．设 $\lambda = 2$ 是可逆矩阵 A 的一个特征值，则矩阵$(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$有一个特征值等于（　　）.

（A）$\frac{4}{3}$　　（B）$\frac{3}{4}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{1}{4}$

二．填空题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 计算行列式$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$=_________ _.

2. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^* X = A^{-1} + 2X$,则 $X =$_________ _.

3. 设方阵$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$与矩阵$B=\begin{bmatrix}2&2&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$相似，则$x=$_____，$y=$______。

4. 矩阵$A=\begin{bmatrix}3&2&-2\\-k&-1&k\\4&2&-3\end{bmatrix}$，若矩阵$A$可对角化，则$k=$______。

三、计算题（共 40 分）

1.（8 分）求一个齐次线性方程组使其基础系为$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$

2.（8 分）求向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\6\end{pmatrix},\ \alpha_5=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$的秩与一个极大线性无关组，并把其他向量用这个极大无关组线性表示.

3. **（12 分）** λ 为何值时非齐次线性方程组 $\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1,\\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2,\\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1.\end{cases}$

（1）有唯一解；（2）无解；(3) 有无数多个解.并且在方程组有无数多个解时，用该方程组的一个特解及对应齐次线性方程组的基础解系表示其通解.

4. **（12 分）** 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$ 用正交变换把 f 化为标准形并写出相应的正交变换和对应的正交矩阵.

四、证明题（20 分）

1.（6 分）设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方矩阵，若 $\mathrm{AB}=0$，则 $R(A)+R(B)\le n$.

2.（7 分）设 A,B 都是 $m\times n$ 矩阵，证明：$R(A+B)\le R(A\,|\,B)\le R(A)+R(B)$.

3.（**7 分**）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\cdots$，$\beta_s=\alpha_s+\alpha_1$，

试讨论 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的线性相关性.

6　2013—2014 学年第 1 学期《线性代数 A》12 级期末 B 卷

一 选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 、 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，则（　　　）。.

（A） $AB = BA$　　　　（B）存在可逆阵P使得$P^{-1}AP = B$

（C）存在可逆阵C使得$C^T AC = B$　　（D）存在可逆阵P和Q使得$PAQ = B$

2.二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 为正定二次型． a 的取值范围为（　　　　）

（A） $-\frac{4}{5} < a < 0$. (B) $-1 < a < 0$,（C） $0 < a < 1/2$,（D） $0 < a < 3/2$

3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似，则（　　　）.

（A） $a = 5, b = 0$　（B） $a = 5, b = 6$　（C） $a = 6, b = 5$　（D） $a = 0, b = 5$

4. 若 A， $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆方阵， $C = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}$,则 C^{-1} 为（　　　）.

（A） $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$；　　（B） $\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

（C） $\begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ ；　　（D） $\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$。

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & a \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$，且 A 的特征值为 $\lambda_1 = 6, \lambda_{2,3} = 2$ ，则 a 的值为（　　　）.

（A）2　　（B） -2　　（C）4　　（D） -4

二 填空题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a+x & a & a & a \\ a & a+x & a & a \\ a & a & a+x & a \\ a & a & a & a+x \end{vmatrix}$ =________

2. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^* X = A^{-1} + 2X$,则 $X =$________

3. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}7 & 4 & x\\ 4 & 7 & -1\\ -4 & -4 & 4\end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_{1,2}=3,\lambda_3=12$，则 x=________.

4. 设 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=P^{-1}AP$, 其中 P 为三阶可逆矩阵, 求 $B^{2004}-2A^2=$________.

三 计算题（共 44 分）

1.（8 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，且矩阵 X 满足 $AX=2X+\beta$，试求矩阵 X .

2.（8 分）求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\\ 3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\ -1\\ -5\\ -6\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ -3\\ -4\\ -7\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$ 的秩与一个极大线性无关组，并把其他向量用这个极大无关组线性表示.

.

3.（14 分）求解线性方程组，写出特解，对应齐次线性方程组的基础解系，求其通解.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=-1, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-5, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=2, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=-7. \end{cases}$$

4.（14 分）用正交变换将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2$ 化为标准型。

四、证明题（共 16 分）

1（8 分）设 A 为 n 阶方阵，且 $A^2 = A$，证明 $R(A)+R(A-E)=n$.

2（8 分）设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系，求证 $\xi_1+\xi_2,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 也是 $AX=0$ 的基础解系.

7　2011—2012 学年第 1 学期《线性代数 A》11 级期末 A 卷

一 选择题（每小题 4 分，共 24 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 、 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $AB=0$，则下面必成立的是（　　　）。.

（A） $A=0$ 或 $B=0$　　　　（B） $A+B=0$

（C） $|A|=0$ 或 $|B|=0$　　　　（D） $|A|+|B|=0$

2. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则下列向量组相性无关的是（　　　）。

（A） $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$

（B） $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$

（C） $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$

（D） $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $Ax=0$ 仅有零解的充分必要条件是（　　　）.

（A） $\boldsymbol{A}$ 的列向量组相性无关　　　　（B） $\boldsymbol{A}$ 的列向量组相性相关

（C） $\boldsymbol{A}$ 的行向量组相性无关　　　　（D） $\boldsymbol{A}$ 的行向量组相性相关

4. 若 n 阶可逆阵 A 的一个特征值为 λ，则它的伴随矩阵 A^* 必有一个特征值（　　　）.

（A） $\lambda^{-1}|A|^n$　　（B） $\lambda^{-1}|A|$　　（C） $\lambda|A|$　　（D） $\lambda|A|^n$

5．若 A，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，且 A,B 相似，　E 为 n 阶单位矩阵，则（　　　）.

（A） $\lambda E-A=\lambda E-B$；　　　　（B） A，$\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值和特征向量；

（C） A，$\boldsymbol{B}$ 相似于同一个对角阵；　　　　（D）对于任意的 t，$tE-A$ 和 $tE-B$ 相似。

6. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+bx_2^2+2cx_1x_3+ax_3^2$ 为正定二次型，则（　　　）.

（A） $a>0,b>0,c<a$　　　　（B） $a>0,b>0,a<|c|$

（C） $a>0,b>0,a>|c|$　　　　（D） $a>0,b<0,a<|c|$

二 填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 是四维列向量，且 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m$，$|\beta_2,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=n$，

则 $|\alpha_1,\beta_1+\beta_2,\alpha_2,\alpha_3|=$__________.

2. 矩阵 A 为 3 阶方阵，且 $|A|=\dfrac{1}{2}$，则 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=$__________。

3. 设方阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & a & -2\\ -4 & -2 & 1\end{bmatrix}$ 与对角阵 $\Lambda=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}$ 相似，则 $a=$_____，$b=$______。

4. 向量组 $\beta=\begin{bmatrix}7 & -2 & k\end{bmatrix}^T$，$\alpha_1=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\end{bmatrix}^T$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}3 & 7 & 8\end{bmatrix}^T$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}1 & -6 & 1\end{bmatrix}^T$，若 β 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，则 $k=$_____。

5. 若 $\xi=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\end{bmatrix}^T$ 是矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{bmatrix}$ 的一个特征向量，则 ξ 对应的特征值 $\lambda=$_____，$a=$______， $b=$______ 。

6. 若矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & \lambda & -1\\ \lambda & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$ 是正定矩阵，则 $\lambda=$______。

三 计算题（共 42 分）

1（5 分） 已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$．矩阵 X 满足 $AXA+BXB=AXB+BXA+E$，这里 E 为三阶单位，求 X.

2.（6 分） 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 3\end{bmatrix}^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2 & -5 & -3 & 6\end{bmatrix}^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3 & 0\end{bmatrix}^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}2 & -1 & 4 & 7\end{bmatrix}$，的秩与一个极大线性无关组，并把其他向量用这个极大无关组线性表示.

3. **（10 分）** a,b 为何值时非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$

（1）有唯一解；（2）无解；(3) 有无数多个解.并且在方程组有无数多个解时，用该方程组的一个特解及对应齐次线性方程组的基础解系表示其通解.

4. **（11 分）** 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_2x_3 \quad (b>0)$，其中二次型矩阵 A 的特征值之和等于1，特征值的积等于 -12；

（1）求 a,b 的值；

（2）用正交变换把 f 化为标准形并写出相应的正交变换和对应的正交矩阵.

5. （**10 分**）设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，$\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 是 A 的二重特征值，且向量

$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, 均为 A 的属于特征值 6 的特征向量，

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的另一个特征值和对应的特征向量；（2）求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

四、证明题（6+4=10 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方矩阵，若 $\mathrm{AB} = 0$，则 $R(A) + R(B) \le n$.

2. 设 $\mathbf{A}, \mathrm{B}$ 均为 n 阶正交矩阵，证明：AB 也为正交矩阵.

8　2011—2012 学年第 1 学期《线性代数 A》11 级期末 B 卷

一 选择题（每小题 4 分，共 24 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\,(n\geq 3)$ 阶方阵，A^* 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，又 k 为常数且 $k\neq 0,\pm 1$，则 $(kA)^*=$（　　）。.

（A）kA^*　　（B）$k^{n-1}A^*$　　C）　k^nA^*　　（D）$k^{-1}A^*$

2. n 阶方阵 A 具有 n 个不同的特征值是 A 与对角阵 Λ 相似的（　　）。
（A）充分必要条件 （B）充分而非必要条件（C）必要而非充分条件
（D）既非充分也非必要条件

3. 非齐次线性方程组 $AX=b$ 中未知量的个数为 n，方程的个数为 m，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，则（　　）.
（A）当 $r=m$ 时，方程组 $AX=b$ 有解　　（B）当 $r=n$ 时，方程组 $AX=b$ 有惟一解
（C）当 $n=m$ 时，方程组 $AX=b$ 有惟一解（D）当 $r<n$ 时，方程组 $AX=b$ 有无穷多解。

4. 若 n 阶矩阵 A 的行列式值为 0，即 $|A|=0$ 则 A 中（　　）.

（A）必有一列元素全为 0　　（B）必有两列元素对应成比例
（C）必有一列向量是其余列向量的线性组合　（D）任意一列是是其余列向量的线性组合。

5．若 A，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆阵，则（　　）.

（A）$AB=BA$；　　（B）存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$；

（C）存在可逆阵 P 使得 $P^TAP=B$；　（D）存在可逆阵 P 和 Q，使得 $PAQ=B$。

6. 二次型 $f=X^TAX$ 为正定二次型的充分必要条件是（　　）.

（A）负惯性指数全为零　　（B）$|A|>0$

（C） 对任意的 $X\neq 0$，都有 $f>0$　　（D）存在 n 阶矩阵 U，使得 $A=U^TU$

二 填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. 设齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$ 只有零解，则 λ 应满足的条件是______.

2. 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，且 $n\geq 2$ 为正整数，则 $A^n-2A^{n-1}=$_________。

3. 设矩阵 A 是一个 4×3 阶矩阵，且 A 的秩 $R(A)=2$，矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{bmatrix}$，则

$R(AB)$______。

4. 已知向量组

$\alpha_1=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}^T$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}^T$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5 & 6\end{bmatrix}^T$, $\alpha_4=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6 & 7\end{bmatrix}^T$,

则该向量组的秩为_____。

5. 已知三阶矩阵 A 的三个特征值为$1, 2, -3$，则$\left|A^*-3A+2E\right|=$______ 。

6. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=tx_1^2+x_2^2+5x_3^2-4x_1x_2-2tx_1x_3+4x_2x_3$ 是正定二次型，则t的取值范围是 ______。

三、计算题（共 42 分）

1. **（6 分）**设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$，$E$ 为二阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA=B+2E$，求矩阵 B.

2.（8 分）讨论向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\end{bmatrix}^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}5 & 3 & t\end{bmatrix}^T$，（1）$t$ 为何值时线性无关，（2）t 为何值时线性相关，并求出它的极大相性无关组并把其他向量用最大无关组线性表示。

3. **（10 分）**已知线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$ ，讨论 λ 为何值时，方程组

（1）有唯一解；（2）无解；(3) 有无数多个解.并且在方程组有无数多个解时，用该方程组的一个特解及对应齐次线性方程组的基础解系表示其通解.

4. **（10 分）**已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 　用正交变换把 f 化为标准形并写出相应的正交变换和对应的正交矩阵.

5.（8 分） 设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & x & -2\\ -4 & -2 & 1\end{bmatrix}$ 与矩阵 $\Lambda=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & y\end{bmatrix}$ 相似，求 x, y 的值；并求一个正交矩阵 U，使得 $U^{-1}AU=\Lambda$

四、证明题（5+5=10 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵，则 A^{-1} 和 A^{*} 都是正定矩阵.

2. 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，且 $A^2=A$，证明：A 的特征值只能是 1 和 0.

9 浙江理工大学 2009—2010 学年第 1 学期《线性代数 A》期末 A 卷

一 选择题（每题 4 分，共 20 分）

1．设 A,B 是 n 阶方阵，$A \neq 0$ 且 $AB=0$，则(　).

(A) $|B|=0$ 或 $|A|=0$；　(B) $B=0$；

(C) $BA=0$；　(D) $(A+B)^2=A^2+B^2$.

2. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $|A|=2$，则 $||A|A^T|=$（　　）。

(A) 2^n　(B) 2^{n-1}　(C) 2^{n+1}　(D) 4

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则下列向量组中不再是 $Ax=0$ 的基础解系的为_______________

(A) $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$；

(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$；

(C) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$；

(D) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$

4. 下列命题中正确的是(　　)。

(A)任意 n 个 $n+1$ 维向量线性相关　(B) 任意 n 个 $n+1$ 维向量线性无关

(C) 任意 $n+1$ 个 n 维向量线性相关　(D) 任意 $n+1$ 个 n 维向量线性无关

5. 设 A，B 均为 n 阶方阵，下面结论正确的是(　　)。

(A)若 A，B 均可逆，则 $A+B$ 可逆　(B) 若 A，B 均可逆，则 AB 可逆

(C) 若 $A+B$ 可逆，则 $A-B$ 可逆　(D) 若 $A+B$ 可逆，则 A，B 均可逆

二 填空题（每题 4 分，共 20 分）

1 设 3 阶方阵 A 的特征值为 1，2，3，且 A 相似于 B，则行列式 $|B^2+E|=$ ___

2 设 A 为 n 阶可逆阵，且 $A^2=|A|E$，则 $A^*=$__________

3 已知四阶方阵 A 的秩为 2，其伴随矩阵 A^* 的秩=__________

4 若$\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix}=1$ ，则$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$ ___________

5 当 k=____时，向量$\beta=(1,k,5)$能由向量$\alpha_1=(1,-3,2)$，$\alpha_2=(2,-1,1)$线性表示。

三 计算题（48 分）

1 (8 分)已知 A$=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$求$A^{-1}$及$|A|^8$.

2. （8 分）设 3 阶方阵 A，B，C 满足方程 $C(2A-B)=A$，试求矩阵 A，其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

3. (8 分)已知向量组 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\m\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\n\end{pmatrix}$ 与向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ 有相同的秩，并且 β_3 可由 α_1,α_2 线性表示，求 m,n 的值。

4.（12 分）线性方程组为 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=0\\ 2x_1+x_2+ax_3=1\\ 3x_1+2x_2+4x_3=b\end{cases}$ ，问 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 各取何值时，线性方程组无解，有唯一解，有无穷多解？在有无穷多解时求出其通解。

5、(12 分)已知二次型, $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$,

(1) 写出此二次型对应的矩阵 A;

(2) 求一个正交变换 $x=Q\,y$, 把二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$化为标准型.

四、证明题 (12 分)

1、(6 分) 若 A,B 均为 n 阶正交矩阵,试证明 AB 也是正交矩阵。

2、(6 分)若 A 是 n 阶方阵,且 $AA^T=E, |A|=-1,$ 证明 $|A+E|=0$ 。其中 E 为单位矩阵。

10 浙江理工大学 2007-2008 学年第 2 学期《线性代数 A》期末 A 卷

一 单项选择题（每小题 3 分，共 3×8 分=24 分）

1．设 $(-1)^t a_{33}a_{2r}a_{41}a_{52}a_{1s}$ 是五阶行列式 D 中的一项，则下述说法正确的是(　　　).

(A) $r=4,s=5,t$ 为奇数　　(B) $r=4,s=5,t$ 为偶数

(C) $r=5,s=4,t$ 为奇数　　(D) 以上均不正确

2．设三阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$|\boldsymbol{A}|=3$，令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_1)$，则 $|\boldsymbol{B}|=$(　　　).

(A) 3　　(B) -3　　(C) 6　　(D) -6

3．设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，下列矩阵中不是正交矩阵的是(　　　).

(A) $\boldsymbol{A}^2$　　(B) $\boldsymbol{A}^*$　　(C) $2\boldsymbol{A}$　　(D) $\boldsymbol{A}^T$

4．设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，则下列等式必成立的是(　　　).

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$　　(B) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$

(C) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$　　(D) $|k\boldsymbol{A}|=k|\boldsymbol{A}|$

5．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&3&5\\1&1&0&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$（　　　）.

(A) $\begin{pmatrix}0&0&5&-2\\0&0&-3&1\\1&-1&0&0\\-2&1&0&0\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}0&0&-1&1\\0&0&2&-1\\-5&2&0&0\\3&-1&0&0\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\0&0&-2&1\\5&-2&0&0\\-3&1&0&0\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}0&0&-5&2\\0&0&3&-1\\-1&1&0&0\\2&-1&0&0\end{pmatrix}$

6．设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则下述说法正确的是(　　　).

(A) $\boldsymbol{\beta}$ 必能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示

(B) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 的秩不一定相等

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 不是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 的极大线性无关组

(D) 以上说法均错

7. 设数 λ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 r 重特征值，$\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的全部线性无关特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots\boldsymbol{\xi}_m$，则(　　　　).

(A) m 可能大于 r　　　　　　　　　　　　(B) m 不可能大于 r

(C) $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的全部特征向量构成集合 $\{\boldsymbol{\xi} \mid \boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots k_m\boldsymbol{\xi}_m, k_1,k_2,\cdots k_m\in R\}$

(D) $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的全部特征向量构成集合 $\{\boldsymbol{\xi} \mid (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{\xi}=0\}$

8．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$，则下列矩阵中必与 $\boldsymbol{A}$ 合同的是(　　　　).

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$　　　　(D) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

二 填空题（每小题 3 分，共 3×7 分=21 分）

1．计算矩阵乘积 $\begin{pmatrix}2&-1\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&-5\end{pmatrix}=$ ________________________.

2．三阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&2&x\\0&0&4\end{pmatrix}$ 可以相似对角化，则 $x=$ ______________.

3．设方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1&1\\a&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$，已知 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的第三个特征值为 $\lambda_3=$__________.

4．设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×5 矩阵，$R(\boldsymbol{A})=3$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=0$ 的基础解系含__________个向量.

5．设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,3，若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\left|\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{E}\right|=$______________.

6．设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2ax_2x_3$，若 f 的秩为 2，则 $a=$________ .

7．设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\end{pmatrix}^T,\beta=\begin{pmatrix}0&3&-2&4\end{pmatrix}^T$，则 $[\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}]=$______________.

三．计算题(前 4 题各 6 分，第 5 题 10 分，第 6 题 11 分，满分 45 分)

1．计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \end{vmatrix}.$$

2．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

3．设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}3\\ 7\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}$.

4．求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\\ -1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 2\\ -1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\ 3\\ 5\\ -1\end{pmatrix}$ 的一个极大线性无关向量组，并把其它向量用该极大线性无关组表示出来.

5．问当λ为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - \lambda x_3 = 1, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = -2\lambda - 1, \\ x_1 + (\lambda+3)x_2 - x_3 = -\lambda^2 - 2 \end{cases}$$

(1)有惟一解；(2)无解；(3)有无穷多个解，并在有无穷多解时，求其通解.

6．设二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = -2x_1^2 - 2x_2^2 + ax_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$，若正交变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{UY}$ 可将f化为标准形

$$f = -y_1^2 + 2y_2^2 + by_3^2,$$

(1) 求 a，b 的值；(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{U}$.

四 证明题(每小题 5 分，满分 10 分)

1．设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times s$ 矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，证明 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\le n$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵，$t>0$，证明 $\left|t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\right|>t^{n}$.

11 浙江理工大学 2006-2007 学年第 2 学期《线性代数 A》期末 A 卷

一 选择题（4 分 ×6 题 =24 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=-3$，则 $|-3\boldsymbol{A}|=$（　　）。

（A）9　　(B) 3^5　　(C) -3^5　　(D) 12

2. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，满足关系式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则必有（　　）。

（A）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$　　(B) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$　　(C) $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$　　(D) $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$

3. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{pmatrix}$，若 $R(\boldsymbol{A})=2$，则 a 必为（　　）。

（A）1　　(B) $-\dfrac{1}{2}$　　(C) -1　　(D) $\dfrac{1}{2}$

4. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$,则下列向量组是其最大无关组的是（　　）。

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$　　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，且 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是 $\mathbf{Ax}=b$ 的两个不同的解，则 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的通解为（　　）。

（A）$\mathbf{x}=k\boldsymbol{\xi}_1$　　(B) $\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi}_2$

(C) $\boldsymbol{x}=k(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2)$　　(D) $\boldsymbol{x}=k(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)$

6.设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵,则下列矩阵中与 $\boldsymbol{A}$ 有相同特征值的是（　　）。

（A）$\boldsymbol{A}^T$　　(B) $\boldsymbol{A}^{-1}$　　(C) $\boldsymbol{A}^2$　　(D) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$

二 填空题（4 分 ×6 题 =24 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=-4$，设 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 为 A 的第 i 个列向量，于是 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,4\boldsymbol{\alpha}_1|=$___.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$，则 $\alpha^T\beta=$__________, (-1) $\alpha\beta^T=$________________ .

3．设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$，则 $(A^*)^{-1}=$______________。

4. 设三阶方阵 A 的特征值为 1，2，3 则 $|A-E|=$ ______，A^* 的特征值为 ____________。

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，$R(A)\le 2$，则 $t=$ ____________________。

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+2x_1x_2+2kx_2x_3$ 为正定二次型，则 k 的取值范围为___________。

三 计算题(6+6+6+12+12)

1.设四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\2&1&4&-6\end{vmatrix}$，求 $M_{42}-M_{43}+7M_{44}$。

2.设三阶矩阵 A,B 满足 $A^{-1}BA=6A+BA$, 且 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{pmatrix}$，求矩阵 B.

3.设向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\b\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$的秩为 2，求$a$，$b$.

4．$\boldsymbol{\lambda}$取何值时,非齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$

(1)有唯一解；(2)无解；(3)有无穷多个解?

5．求一个正交矩阵，将二次型 $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3$ 化成标准形:

四、证明题（3+4+3=10，共 10 分）

若 A 为 n 阶方阵（n≥2）,则

1．当 $R(A) = n$时，$R(A^*) = n$;

2．当 $R(A) = n-1$时，$R(A^*) = 1$;

3．当 $R(A) < n-1$时，$R(A^*) = 0$;

12 浙江理工大学 2006-2007 学年第 2 学期《线性代数 A》期末 B 卷

一 选择题 (4 分×6) (请将答案写在表格中)

1 设 A 为 3 阶矩阵，且 $|\mathbf{A}|=-2$，则 $|-2\mathbf{A}|=$（　　　）。

（A）4　　　(B) 2^4　　　(C) -2^4　　　(D) 12

2 设 A,B 为 n 阶矩阵，下列命题正确的是（　　　）。

（A）$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$；　　（B）$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$；

（C）$A^2-E=(A+E)(A-E)$；　　（D）$(AB)^2=A^2B^2$。

3　n 阶矩阵 A 与对角矩阵相似的充分必要条件是（　　　）。

（A）A 有 n 个不同的特征值；　　（B）$|A-\lambda E|$ 是一元 n 次多项式；

（C）A 有 n 个不同的特征向量；　　（D）A 有 n 个线性无关的特征向量。

4 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$,则下列向量组是其最大无关组的是

（　　）。

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$　　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$

5 二次型 $f(X)=X^TAX$（A 是对称矩阵）正定的充要条件是（　）。

（A）对任何 X，有 $X^TAX\ge 0$　　（B）A 的特征值为非负数

（C）对任何 $X\ne 0$，有 $X^TAX\ne 0$　　（D）对任意 $X\ne 0$，有 $X^TAX>0$

6 若 A 为 n 阶矩阵，且 $A^3=0$，则矩阵 $(E-A)^{-1}=$______________；

（A）$E+A+A^2$　（B）$E-A+A^2$　（C）$E+A-A^2$　（D）$E-A-A^2$

二、填空题(4 分×6)

1. 已知的第一行元素分别为 2，-3，9，4，它们的代数余子式分别为 6，9，3，7，则 $D=$_________.

2. 已知 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$,则 $\alpha^T\beta=$__________, $\alpha\beta^T=$________________ .

3．设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$，则 $(A^*)^{-1}=$_________________。

4. 设三阶方阵 A 的特征值为 1，2，3 则 $|A-2E|=$ ______，A^* 的特征值为 ______。

5. 设 $\alpha_1=(1,\ -1,\ 2)$，$\alpha_2=(2,\ k,\ 5)$，$\alpha_3=(1,\ -6,\ 1)$ 线性相关，则 $k=$ ______.

6. 设二次型 $f(x_1,x_2)=2x_1^2+2x_2^2+4kx_1x_2$ 为正定二次型，则 k 取值范围为______。

三、计算题(6+6+6+12+12)

1.设四阶行列式 D= $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -5 & 9 \end{vmatrix}$，求 $-5M_{41}-6M_{43}+2M_{44}$。

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$,且 $X=AX+B$,求矩阵 X .

3.设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的秩为 2，求 a，b .

4．已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad\quad + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 = 3, \\ x_1 + ax_2 \qquad\quad - 2x_3 = 0, \end{cases}$$

问当a为何值时，该方程组（1）有惟一解，（2）无解，（3）有无穷多个解，在有无穷多个解时求其通解。

5．设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，

（1）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，

（2）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的单位特征向量，

（3）求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵。

13 浙江理工大学 2004-2005 学年第 2 学期《线性代数 A》期末 A 卷

一 填空题 (每题 2 分，共 16 分)

1. 四阶行列式中的某项是 $a_{13}\,a_{2i}\,a_{34}\,a_{4k}$ 且该项的符号为正，则 i，k________________.

2. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$=____________.

3. $\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & & a_1b_n \\ & & & \\ a_nb_1 & a_nb_2 & & a_nb_n \end{pmatrix}$，则 R(A) =________________.

4. 设 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 则$(A^*)^{-1}$=___________.

5. A 是 n 阶可逆矩阵,且 2|A|=|kA| (k>0), 则 k=___________.

6. 设方程组$\begin{cases} cx_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+cx_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+cx_3=2 \end{cases}$当 c= _______时,其对应的齐次方程组有非零解.

7. X=(2,0,-1,4), Y=(1,3,a,-2), 当 a=___________时,XY,正交.

8. 已知 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$有一个特征值是 3, 则 a=__________.

二 选择题 (每题 2 分，共 14 分)

1. A, B 都是 n 阶可逆矩阵,则____________.

A.|A+B|=|A|+|B|　　B.|AB|=|BA|

C.$(AB)^T=A^TB^T$　　D.$(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

2. A 是 n 阶可逆矩阵, 且$|A^{-1}|=2$, 则_____________.

A.$|A^*|=2^{n-1}$　B. $|(A^*)^{-1}|=2^{n-1}$　C..$|A^*|=1/2$　D. .$|(A^*)^{-1}|=2^{1-n}$

3. A, B 都是 n 阶矩阵, 且 AB=0,___________.

A. A=0 或 B=0;　　B. |A|=0 或|B|=0;

C. R(A)+R(B)=0;　　D. R(A)R(B)=0.

4. m 个 n 维向量组成向量组 A:$\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_m$ 线性无关,而向量组 B 是 A 中的向量再加上 r 个分量所得到的 m 个 n+r 维向量,则向量组 B___________ .

A. 线性相关;　　B. 线性无关;

C. 是否线性相关不能判别;　D.线性相关的充分必要条件是加上的 r 个分量全部是零.

5. α, β, γ 是齐次线性方程组 AX=0 的一个基础解系,则该方程组的基础解系还可以是______

A. $k_1\alpha+k_2\beta+k_3\gamma$;　　B. $\alpha+\beta, \beta+\gamma$,

C. $\alpha, \alpha+\beta, \alpha+\beta+\gamma$;　　　　　　　　D. $\alpha-\beta, \beta-\gamma, \gamma-\alpha$.

三 简答题: (每题 5 分,共 10 分)

1. 说出向量组最大线性无关组定义及至少两条性质.

2. 说明初等矩阵和初等变换的关系，并说出初等矩阵的至少两条性质.

四.计算题(50 分)

1 (8 分):求行列式|A|= $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

2 (8 分).已知 A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,且 AA^T-A^TB=E (E 是四阶单位阵),求矩阵 B..

3. (10 分) 已知向量组 A:
α_1=(1,4,0,2), α_2=(2,7,1,3), α_3=(0,1,-1,1), α_4=(3,10,C,4)秩为 2，求 C 的值和 A 的一个极大线性无关组,并把其它向量表示为最大无关组的线性组合.

4. (12 分)当 a,b 为何值时,下列方程组无解,有唯一解,有无穷解, 并在有无穷解的情况下求其通解:

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3 \\ 3x_1-x_2-ax_3+15x_4=3 \\ x_1-5x_2-10x_3+11x_4=b \end{cases}$$

5．(12 分)用一个正交变换,把下列二次型

$f(x_1, x_2, x_3)= 4x_1^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$

化为标准形， 并写出变换矩阵 P。

五．证明题：（8 分）

1.A 是 n 阶可逆矩阵，且 $A^2=|A|E$，证明: $A^*=A$.

2. A 是 n 阶矩阵，α是 n 维非零列向量，且 $A^{n-1}\alpha \neq 0, A^n\alpha=0$，证明:

$\alpha, A\alpha, A^2\alpha, \ldots, A^{n-1}\alpha$线性无关.

14 浙江理工大学 2003-2004 学年第 1 学期《线性代数 A》期末 B 卷

一、填空题（每小题2分，共10分）

1、设A为n阶方阵，且满足$A^3-2A^2+A=E$，则A^{-1}=_。

2、设A为3阶方阵，且|A|=2，则A的伴随矩阵的行列式$|A^*|$=_。

3、设A为3阶方阵，而A+E，A-E，A-2E都不满秩，则A的特征值为_。

4、设x_1，　x_2，　x_3，是齐次方程组AX=0的基础解系，其中A是3×5矩阵，R（A）=_。

5、设A为3×4矩阵，则A的4个列向量是线性_关的。

二、是非题（每小题2分）（10分）(用YES，NO选答)

1.　可逆方阵A的转置矩阵A^T必可逆. ……………………………………（　）。

2.　若向量组α_1，α_2，α_3 的秩为2，则α_3能由 α_1，α_2，线性表示（　）。

3.　若矩阵A与矩阵B相似，则A的特征向量也是B 的特征向量. ………………………………………………………………………………（　）。

4.　设A为正交矩阵，　则A^{-1}也是正交矩阵. ……………………………（　）。

5.　已知n阶方阵A满足A^2=A，则A=0或者A=E. ……………（　）。

三、选择题（每小题2分）（10分）

1.　设n阶行列式|A|中等于零的元素个数大于n^2-n，则此行列式|A|=

A. -1;　B. 0　C. 1,　D. n

2．设n维向量组A,B,C线性相关，D也是n维向量，则…（　）。

A. C能由A,B线性表示;　B. A能由B,C线性表示;

C. A,B,C,D线性相关;　D. A,B 线性相关.

3．设M=,则:…………………………………（　）

A. |M|=|AD|-|BC|;　B. M^T=

C. M^T=　D. M^T=

4．A,B都是正交矩阵，则

A．A＋B 是正交矩阵;　B．A－B 是正交矩阵;

C. AB 是正交矩阵;　D. AB＝BA

5．设A为3×4矩阵，b是3维向量，b≠0，R(A,b)=R(A)=3，u,v是AX=b的解，且u≠v，则AX=b的通解是…………（　）(其中k_1，k_2，k都为常数)

A. $X=k_1u+k_2v$　B. X=u+kv　C. X=k(u-v)+v　D. X=ku+v

四、计算题（20分）

(4分)1．求行列式的值.

(8分)2．已知A= ，且$A^{-1}XA=6A+2XA$，求矩阵X

(8分)3. 求向量组A^T=(1,0,1,2)，B^T=(2,1,1,3)，C^T=(5,1,4,9)，D^T=(3,2,1,2)，的秩及写出一个极大线性无关组.

（第 1 题没办法做，请大家自行忽略。第 2 题大家可以进行化简练习）

五、综合题（每题15分,共30分）

1. 试问a,b分别取何值时，下面线性方程组有唯一解？无解？有无穷多解？并求出有无穷多解时的通解.

2. 试求一个正交变换P, 把下列二次型化为标准形.

$$f(x_1, x_2, x_3)=3x_1^2+3x_2^2+x_3^2-2x_1x_2$$

（第 1 题没办法做）

六、简答题（每题5分,共10分）

1. 试叙述方阵可逆的各种等价说法(设A是n阶方阵,至少五种说法)

2. 试写出判断向量组线性相关性的方法(至少五种)

七. 论证题 （每题5分,共10分）

1. 设A为n阶方阵, ξ 为n维列向量. 若$A^2\xi \neq 0$, $A^3\xi=0$,
试证明：向量组 ξ，$A\xi$，$A^2\xi$ 线性无关.

2. 已知3 阶实对称矩阵A满足$A^3-3A^2+3A-E=0$, 证明:A是正定矩阵。

数学通识必修课系列试卷汇总

（试题册和答案册配套，为两个小册子，这里为了节省空间，就将两本册子写在了一块儿）
（版本号与年份有关；发行次数会根据当年发行情况进行修改）

高等数学 A2 期末系列：（具体内容请见高等数学 B2 试题册尾页）
高等数学 A2 期末试题册、答案册上 2022 第二版第 1 次发行.pdf
高等数学 A2 期末试题册、答案册下 2022 第二版第 1 次发行.pdf
高等数学 A2 期末试题册、答案册五套 2022 第二版第 1 次发行.pdf

高等数学 B2 期末系列：（具体内容请见高等数学 B2 试题册尾页）
高等数学 B2 期末试题册、答案册 2022 第二版第 1 次发行.pdf
高等数学 B2 期末试题册、答案册五套 2022 第二版第 1 次发行.pdf

线性代数 A 期末系列：
线性代数 A 期末试题册、答案册 2022 第二版第 1 次发行.pdf
线性代数 A 期末试题册、答案册五套 2022 第二版第 1 次发行.pdf

线性代数 B 期末系列：
线性代数 B 期末试题册、答案册上 2022 第二版第 1 次发行.pdf
线性代数 B 期末试题册、答案册下 2022 第二版第 1 次发行.pdf
线性代数 B 期末试题册、答案册五套 2022 第二版第 1 次发行.pdf

概率论与数理统计 A 期末系列：
概率论与数理统计 A 期末试题册、答案册上 2022 第二版第 1 次发行.pdf
概率论与数理统计 A 期末试题册、答案册下 2022 第二版第 1 次发行.pdf
概率论与数理统计 A 期末试题册、答案册五套 2022 第二版第 1 次发行.pdf

概率论与数理统计 B 期末系列：
概率论与数理统计 B 期末试题册、答案册 2022 第二版第 1 次发行.pdf

概率论与数理统计期末练习系列：
概率论与数理统计练习试题册、答案册 2022 第二版第 1 次发行.pdf