



高等数学 A2

浙江理工大学试题 题型汇编 期中用

(试卷册)

学校: _____

专业: _____

班级: _____

姓名: _____

学号: _____

(此试卷为 2022 级第一版)

目录

第八章 向量代数与空间解析几何	1
第一部分 向量	1
第二部分 空间直角坐标系	1
第三部分 两向量的数量积	1
第四部分 两向量的向量积	2
第五部分 平面及其方程	2
第六部分 空间直线及其方程	3
第七部分 曲面及其方程	5
第八部分 空间曲线及其方程	6
第九章 多元函数微分法及其应用	7
第一部分 多元函数的基本概念、 n 维空间	7
第二部分 多元函数的极限、连续性、部分性质	7
第三部分 一阶偏导数和高阶偏导数	7
第四部分 全微分	10
第五部分 多元复合函数求导	11
第六部分 隐函数求导	16
第七部分 多元函数微分学的应用	20
第八部分 方向导数和梯度	24
第九部分 函数连续、偏导存在、方向导数存在、可微等等关系	27
第十部分 多元函数的极值、拉格朗日乘数法	29
第十章 重积分	35
第一部分 二重积分的概念、性质	35
第二部分 二重积分的计算	37
第三部分 三重积分	47
第四部分 重积分的应用	53
第五部分 证明题专练	54
第六部分 应用题	57

资料说明：本资料涵盖 2004~2020 年高等数学 A2 期中和期末 A、B 卷的所有相关的题目，题目前的标号是当级学生的考题，比如我是 2020 年读的高等数学（一学年），虽然我是 2021 年学的高等数学 A2，但是上面标注的是“2020 期中”或“2020 期末”，并且不区分标注 AB 卷，统一标注“期末”。

写在前面

这已经是我第三次写序言了，每年坚持写序言（前两次的序言可见微信公众号“创琦杂谈”查看，也欢迎大家关注哈）已成为一种习惯。

今天是计算机学院团展的日子，我坐在自己的办公座位，写着自己的代码，手机在一边放着团展的节目，突然感觉一种幸福的感觉涌上心头。那也是我美好的大学时光啊！工作的压力貌似已经压的我面目全非，到宿舍的第一件事是想休息，身为大二的你体会不到这种劳累，因为刚开学迎接你们的是各式的社团活动，还有每次下学前可以在学生活动中心看到各式各样的摆摊，可以互动，还可以拿奖品。大学的设施齐全，运动、读书、研究……你的各种爱好将在这里释放，在这里你可以来一场说走就走的旅行（当然，遵守疫情防控是第一），你可以结交很多志同道合的朋友，在这里你可以轻松度过很长时间，大学这美好的四年正徐徐向你展开！

大学的幸福生活要珍惜，也要努力学习，虽说大学成绩不像高考成绩一样可以改变我们的人生轨迹（当然，很多人也需要大学成绩，比如转专业和出国），但好好学习是充实生活、是丰富学识、是提高能力的第一步。

很多人都会坚持不下来，这是一大困难，我们要试着克服。进入大学后，我们的生活更加丰富多彩，课外时间也更加充实了。可很多人对学习的态度变弱了。每次当我反思自己这一天有多少时间是在认真学习时，结果令我吃惊并且失望，学习时长竟然能用手指头数地过来，当我去想时间都去哪儿了的时候，我又感到一丝空虚。我现在在写序言，想到了2021届的学子们也快开学了，心里还是有很多感慨的。此时此刻，我的脑海里浮现的是我曾经追过的五点半的那缕阳光，为了背单词、背文科题目背到口干舌燥却浑然不知；中午饭过后总想着要在班里多学习一会儿，结果每次回宿舍午休都得迟到；刷数学、理综题目时刷到忘了时间，忘了身边的一切；和小伙伴们争论一道题争到面红耳赤……当我高考完过后再去看看自己做过的题目时，发现那一张张卷子有过我青春的回忆。时间，带走的是少年的张扬与不羁，带不走的是少年们为了自己的理想而不顾一切地追求自己所热爱的一切的坚韧、不屈、执着与勇气。我和别人唠嗑时总是会说我高三那时候怎么怎么放松，怎么怎么不努力，我觉得我发扬了中国了一大精神：谦虚的精神。但真正的生活，没有走过怎又能知道呢？当高考结束铃响起，当录取通知书递送到你的手边，当拖着行李箱迈进校园，少年成熟了，敢于追求的梦也越来越清晰了，热爱学习，热爱生活，本就是一个18岁的花季少年身上最发光发亮的地方。

关于写高数试卷，我在这里给大家提几点建议哈。

1、重视课本。重视课本的知识点、习题、概念定理的应用辨析。课本是基础，是提升的地基。做完试卷后你会发现，期末考点万变不离其宗，也有多道试题来源于课本。课本的每道题目存在都有其必然的道理，希望大家在期末考前不要扔掉课本；

2、学着去总结题型。总结题型是脱离题海游上岸的船舶，总结之后，你会发现考点也就只有那么些。总结时，大家要注意这个知识的应用背景、注意事项等等；

3、认真做题。这是我必须强调的，大学期末卷子没有高考难，想取得高分态度一定要端正，认真去学习每个类型的题目，去学习每个知识点。

在这里希望大家可以认真做卷子，争取期末取得理想的成绩！

由于时间紧，录入时可能出现错误，也可能有其他大大小小的错误，恳请大家批评指正。

张创琦

2022年10月22日

更多信息

※ 创琦杂谈网站即将上线！请大家加入下面的 QQ 群敬候佳音 ※

试卷整理人：张创琦

张创琦本人 QQ 号：1020238657

创琦杂谈学习交流群（QQ 群号：749060380，527834512）

cq 数学物理学习群（QQ 群号：967276102）

cq 计算机编程学习群（QQ 群号：653231806）

cq 考研学习群（QQ 群号：687924502）

我们的创琦杂谈网站（www.cqtalk.cn）支持：

1. ※大家可以下载教材的 PDF 版，这样就不用花钱买书啦！（当然，你如果喜欢纸质的可以忽略哈）
2. ※公选课和专业课的资料下载、题目讨论等等（公选课比如高数、线代、概率、物理以及实验等等）
3. ※会拉拢一些搞竞赛的人，针对跨专业打竞赛难、竞赛信息不对等问题，我们提供非官方的竞赛组队渠道；
4. ※针对考研，我们会打造独属于我们创琦杂谈网站的特色内容；同时也会邀请大平台入驻，为我们提供一些免费的咨询服务；
5. ※因为 cqgg 是学计算机专业的嘛，我们后续会推出 AI 专栏，专门更新人工智能的相关文章，大家也可以和 chatGPT 互动起来~（当然 chatGPT 的研发公司是要收费的，钱由创琦来掏了，我是大冤头）；
6. 我们还会打造个人专栏，会在每个专业和行业中找几位大佬，进行有深度、有价值的内容产出；
7. 当然，大学的一些考证、就业、考公等等需求，我们都有相应板块提供；
8. 如果你想结交更多好朋友，我们网站可以发布寻找一起学习的伙伴、一起打球的伙伴的帖子，为大家提供更便利的组队；当然，也可以进行选课选教师的讨论~
9. 如果本资料有问题，也可以在创琦杂谈网站的相应板块进行勘误哈。又不会做的题目也可以在网站上讨论哈~

（网站将于近几日内上线，因为要去相应部门进行备案。请大家加入创琦杂谈学习交流群等待通知哈，即将上线）

本次资料配套相应网课的讲解！

B 站上同步讲解部分经典题目（正在录制和更新中，敬请期待）（本人 B 站名称为“张创琦”，头像为一朵白色的花）

更新时间的具体通知请见创琦杂谈学习交流群。

第八章 向量代数与空间解析几何

我的学习和做题计划：

第一部分 向量

常规考法：向量的加减法运算、向量的数乘、向量间平行和垂直的条件。

历年真题：

1. (2016 期末) 若向量 $(1, -1, 3)$ 与向量 $(-2, 2, a)$ 平行, 则 $a =$ _____.
2. (2016 期末) 若向量 $(1, 2, -1)$ 与向量 $(1, b, -1)$ 垂直, 则 $b =$ _____

第二部分 空间直角坐标系

常规考法：卦限、找到对称点、将向量的坐标分解之后的考法（例如利用坐标作向量的线性运算）、向量的模、两点间的距离、求单位向量、求等距的点、方向角、方向余弦的知识点和公式、向量在轴或者面上的投影等。

历年真题：

1. (2017 期中) 点 $P(1, -2, 3)$ 关于 x 轴的对称点 Q 的坐标为 _____
2. (2016 期中) 已知向量 \mathbf{a} 位于第一卦限内, 其方向余弦中 $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \frac{2}{3}$, 且 $|\mathbf{a}| = 3$, 则 $\mathbf{a} =$ _____
3. (2013 期中) 已知 \mathbf{a} 的方向余弦为 $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \frac{2}{3}$, 且 $|\mathbf{a}| = 3$, 则 $\mathbf{a} =$ _____

第三部分 两向量的数量积

常规考法：数量积的基本理解、数量积的运算规律（交换律、分配律等）、求两向量的夹角、求一个向量在另一个向量上的投影等。

历年真题：

1. (2020 期中)

设 $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (-2, 3, 2)$ 为 \mathbb{R}^3 中的两个向量, 则下列说法中正确的是: ()

- (A) \vec{a} 与 \vec{b} 垂直。 (B) \vec{a} 与 \vec{b} 平行。
(C) \vec{a} 与 \vec{b} 夹角大于 90 度。 (D) \vec{a} 与 \vec{b} 夹角小于 90 度。

2. (2019 期末) $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (0, 2, -1)$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 _____

3. (2008 期末) 设力 $\vec{F} = (2, -1, 2)$ 作用在一质点上, 该质点从点 $M_1(1, 1, 1)$ 沿直线移动到点 $M_2(2, 2, 2)$ 力所作的功 ()

- (A) 2 (B) -1 (C) 3 (D) 4

4. (2012 期中) 向量 $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, 向量 \vec{b} 的三个方向角均相等且为锐角, 则 $\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} =$ _____

5. (2011 期中) 向量 $\vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{j} + 8\vec{k}$, 向量 \vec{b} 的三个方向角均相等且为锐角, 则 $\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} =$ _____

6. (2010 期中) 设 \vec{a}, \vec{b} 为非零向量, 且满足 $(\vec{a} + 3\vec{b}) \perp (7\vec{a} - 5\vec{b}), (\vec{a} - 4\vec{b}) \perp (7\vec{a} - 2\vec{b})$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角 $\theta =$ _____ (说明: 乱码符号为向量的箭头)

7. (2020 期末) \mathbb{R}^3 中以 $(0, 0, 0), (1, 1, 1), (1, -1, 1)$ 为顶点的三角形的面积为: _____.

8. (2018 期末) 向量 $\vec{a} = (4, -3, 4)$ 在向量 $\vec{b} = (2, 2, 1)$ 上的投影是 ().

A、2 B、3 C、6 D、12

第四部分 两向量的向量积

常规考法: 首先要有一个很重要的认知, 在数学中, 数量积(点乘)求的结果是一维的数字, 而向量积(叉乘)的结果是三维向量, 叉积的定义决定它可以求面积(求结果的模), 而选学部分的混合积得到的结果是一个数字, 其定义决定其可以求体积。

首先一定要看懂力矩的概念, 多看看书上的图去悟一下, 然后知道右手定则求力矩的方向, 并且能理解向量积的一些推论。

书上给的例题中求向量积是通过三阶行列式求的, 不过有同学没有学过线性代数, 此处掌握基本行列式运算即可。

历年真题:

1. (2017 期中) 已知 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{2}$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$, 则 $|\vec{a} \times \vec{b}| =$ _____

2. (2020 期末) \mathbb{R}^3 中的一个同时与 $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (3, 2, 1)$ 垂直的单位向量为: _____.

3. (2019 期末) 若 $\vec{a} = (1, -1, 1), \vec{b} = (2, 1, 3)$, 则 $\vec{a} \times \vec{b} =$ ()

A. $(-4, 1, 3)$ B. $(-4, -1, 3)$ C. $(4, 1, -3)$ D. $\sqrt{26}$

第五部分 平面及其方程

理解类似 $F(x, y, z) = 0$ 形式符号表达的含义。

平面的点法式方程: 掌握最基本形式。书上的例 1、例 2 学会。掌握平面的一般方程和截距式方程。

常规考法: 求平面的方程、求两平面的夹角、求直线到平面的距离。

历年真题:

1. (2018 期中) 点 $(-1, 0, 2)$ 到平面 $x + \sqrt{2}y - z + 1 = 0$ 的距离为 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. (2020 期中) 设平面 Γ 的方程为 $2x - 3y - 4z = 5$, 则 Γ 与 xOy 坐标平面的夹角的余弦为: _____.

3. (2016 期末) 点 $(1, 2, 1)$ 到平面 $x + 2y + 2z - 10 = 0$ 的距离为 _____.

4. (2020 期末)

设 $\vec{a} = (1, 2, 3)$ 为 \mathbb{R}^3 中的向量, Γ 为 \mathbb{R}^3 中由方程 $5x - 3y - z = 5$ 决定的平面, 则下列说法中正确的是: ()

- (A) \vec{a} 与 Γ 垂直。
 (B) \vec{a} 与 Γ 平行。
 (C) 向量 $(5, -3, -1)$ 与 Γ 平行, 但是与 \vec{a} 不平行。
 (D) 向量 $(7, 16, -13)$ 与 \vec{a} 垂直、与 Γ 平行。

第六部分 空间直线及其方程

常规考法: 空间直线的一般方程、空间直线的对称式方程 (点向式方程)、空间直线的参数方程 (以及这三者之间方程的转换, 例 1 可以学一下)、两直线的夹角、直线和平面的夹角、理解平面束的概念、能求点或者直线在平面上的投影。

(此部分很重要, 考法也很多, 比如线线、线面、面面等等各种结合, 综合考法也很多。要把例题认真完成, 建议把课后习题 8-4 的一些题目也认真看看, 多掌握一些它的变形考法)。

历年真题:

1. (2020 期中)

设直线 L 的方程为 $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x + y - z = 0 \end{cases}$, 则一个与 L 的方向平行的向量为: _____

2. (2018 期中) 设有直线 $L: \begin{cases} x + 3y + 2z + 1 = 0 \\ 2x - y - 10z + 3 = 0 \end{cases}$ 及平面 $\pi: 4x - 2y + z - 2 = 0$, 则直线 L ()

- A. 垂直于 π B. 在 π 上 C. 平行于 π D. 与 π 的夹角为锐角

3. (2017 期中) 如果直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{\lambda}$ 与直线 $L_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ 相交, 那么常数 λ 的值为 _____

4. (2016 期中) 设直线 L 为 $\begin{cases} x + 3y + 2z + 1 = 0 \\ 2x - y - 10z + 3 = 0 \end{cases}$, 平面 π 为 $4x - 2y + z - 2 = 0$, 则 ()

- A. L 平行于 π B. L 在 π 上 C. L 垂直于 π D. L 与 π 斜交

5. (2016 期中) 设直线 L 的方程为 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$, 则 L 的参数方程为 _____

6. (2015 期中)

设有直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+8}{1}$, $L_2: \begin{cases} x - y = 6 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$, 则 L_1 与 L_2 的夹角为 ()

- (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

7. (2015 期中)

1. 已知两条直线的方程是 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$, $L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$, 则过 L_1 且平行于

L_2 的平面方程是 _____;

8. (2014 期中) 直线 $x-1=\frac{y-5}{-2}=z+8$ 与直线 $\begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$ 的夹角为 ()
- (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$
9. (2014 期中) 直线 $L: \begin{cases} x+2y-z=7 \\ 2x-y-z=-7 \end{cases}$ 在平面 $\pi: 5x-3y+3z-9=0$ 上的投影直线方程为_____
10. (2012 期中) 设直线 $L: \frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$ 及平面 $\pi: x+y+z-3=0$, 则直线 L ()
- (A) 平行于 π (B) 在 π 上 (C) 垂直于 π (D) 与 π 斜交
11. (2011 期中) 设直线 $L: \begin{cases} x+3y+2z-4=0 \\ 2x-y-10z-1=0 \end{cases}$ 及平面 $\pi: x+y-2z-2=0$, 则直线 L ()
- (A) 平行于 π (B) 在 π 上 (C) 垂直于 π (D) 与 π 斜交
12. (2005 期中) 设直线 $L: \begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$, 设平面 $\pi: 4x-2y+z-2=0$, 则直线 L ()。
- (A) 平行于 π (B) 在 π 上 (C) 垂直于 π (D) 与 π 斜交
13. (2019 期末) 已知直线 $l: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$, 平面 $\Pi: 2(x-1)+3(y-2)+4(z-3)=0$, 则直线 l 与平面 Π 具有何种关系 ()
- A. 垂直 B. 平行 C. 夹角为锐角 D. 夹角为钝角
14. (2019 期末) 过点 $(1, 2, 3)$ 且与平面 $\Pi: x+4y+6z-8=0$ 垂直的直线方程为_____
15. (2018 期末) 过点 $M(1, -2, 1)$, 且与直线 $x=y-1=z-1$ 垂直的平面方程是 ()。
- A. $x+y+z=0$ B. $x+y-z=-2$
C. $x-y-z=2$ D. $x-y+z=4$
16. (2017 期末) 直线 $L: \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$ 与平面 $\pi: x-2y+2z=0$ 的位置关系为 ()
- A. 直线在平面内 B. 平行, 但直线不在平面内 C. 相交但不垂直 D. 垂直
17. (2015 期末) 设有直线 $L_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$, $L_2: \begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$, 则 L_1 与 L_2 的夹角为 ()。
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$
18. (2014 期末) 过点 $P(1, 2, -1)$ 与直线 $L: \begin{cases} 4x-y+2z=2 \\ 2x+2y-3z=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程为_____
19. (2019 期末) 已知直线 $l_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$, $l_2: \frac{(x-1)}{-3}=\frac{3(y-2)}{5}=4(z-3)$, 则直线 l_1 与直线 l_2 有何种关系 ()
- A. 垂直且相交 B. 平行 C. 夹角为锐角 D. 垂直且不相交

20. (2016 期末) 过点(0,2,4), 且与两平面 $x + 2z = 1$ 和 $y - 3z = 2$ 平行的直线方程为_____

21. (2018 期中) 已知两条直线的方程是 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$, $L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$. 已知平面 π 过 L_1

且平行于 L_2 , 求平面 π 的方程.

22. (2011 期末) 求过点 $M(4, -3, 1)$ 且与两直线: $\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$ 和 $\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases}$ 都平行的平面方程.

第七部分 曲面及其方程

建议先把书上的知识点看一遍, 要看懂。然后把相关的要记忆的部分(比如方程表示、特点等等)总结起来(参考 PPT 链接: <https://mp.weixin.qq.com/s/B7KDOvNAXBiY1PogI-hjTA>, 这是我找的一个总结的相对还可以的哈, 仅供参考)。

常规考法: 找旋转曲面的对称轴、旋转曲面的方程表示、上述让大家总结的基本知识等。

历年真题:

1. (2020 期中)

设 f 为一个一元函数, 假设下面各选项中的方程决定的 \mathbb{R}^3 中的点集均非空, 问哪个方程决定的点集具有绕 y 轴的旋转对称性: ()

(A) $f(x^2 + z^2) + y = 0$

(B) $f(y^2 + x^2) + z = 0$

(C) $f(y) + z = 0$

(D) $f(z) + x = 0$

2. (2017 期中) 在 yOz 平面内的一条直线绕 z 轴旋转一周所得曲面的图形不可能是 ()

A. 旋转单叶双曲面

B. 圆柱面

C. 圆锥面

D. 平面

3. (2016 期末) 下列结论中, 错误的是 ()。

A. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ 表示圆锥面

B. $x = y^2$ 表示抛物柱面

C. $x + 2y^2 + z^2 = 0$ 表示椭圆抛物面

D. $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 1$ 表示双叶双曲面

4. (2016 期末) 下列结论中错误的是 ()

(A) $z + 2x^2 + y^2 = 0$ 表示椭圆抛物面 (B) $x^2 + 2y^2 = 1 + 3z^2$ 表示双叶双曲面

(C) $x^2 + y^2 - (z - 1)^2 = 0$ 表示圆锥面 (D) $y^2 = 5x$ 表示抛物柱面

5. (2015 期中)

1. 求直线 $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x - y + 2z - 1 = 0$ 上的投影直线 l_0 的方程, 并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

第八部分 空间曲线及其方程

学习这部分时, 例题一定要认真看, 比如书上的例 3 讲了螺旋线, 这个用到的不算很多, 但是考试考过的。

常规考法: 空间曲线的一般方程、空间曲线的参数方程 (以及两者的相互转换)、空间曲线在坐标面上的投影等。

历年真题:

1. (2019 期末) 将曲线方程 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$ 化为参数形式。

第九章 多元函数微分法及其应用

我的学习和做题计划：

第一部分 多元函数的基本概念、n 维空间

此部分的概念很多，虽然考试不会直接考，但是不理解概念的话看后面的知识点会是一头雾水，所以书上的概念一定要认真看哈。书上的所有概念务必看懂！

n 维空间用符号表示是 \mathbf{R}^n ，记住哈，比如二维空间用符号表示就是 \mathbf{R}^2 。

第二部分 多元函数的极限、连续性、部分性质

多元函数的极限一般考证明题居多，此部分不但要会做题，还能理解到底怎样才会极限存在。会考察多元初等函数的连续性（如 63 页例 7 这样的求极限的题目）这类题目一般难度不大。之后课本又引入了有界性、最值定理、介值定理，大家要理解哈。

历年真题：

（由于证明函数极限是否存在的考法涉及到偏导的概念，此类型习题我们放到偏导部分哈。）

1. (2018 期中) 求 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}$.

2. (2013 期末) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{xy-2}{3y+1} = \underline{\hspace{2cm}}$

第三部分 一阶偏导数和高阶偏导数

偏导数的符号比较多，大家要认得符号哈。书上的 70 页的定理经常考，大家也要理解哈。拉普拉斯方程一般考证明题，没必要记住方程的模样的。此部分比较重要，不但要会做题，还要掌握一些几何意义，具体见本资料前言部分给的视频讲解哈。

历年真题：

考法一：求偏导数的值

1. (2012 期中) 设 $z = y \cdot \sin(xy) - (1-y) \arctan x + e^{-2y}$ ，则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = \underline{\hspace{2cm}}$

2. (2014 期末) 设 $f(x, y) = x^3 \cos(1-y) + (y-1) \sin x$ ，则 $f_x(1, 1) = \underline{\hspace{2cm}}$

3. (2009 期末) 二元函数 $z = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$ ，则 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,0)} = \underline{\hspace{2cm}}$

4. (2014 期中) 设函数 $u(x, y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t)dt$, 其中函数 φ 具有二阶导数, ψ 具有一阶导数, 则必有 ()

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

5. (2005 期中) 设 $z = 2^{x+y^2}$, 则 $z_y =$ ()。

(A) $y \cdot 2^{x+y^2} \ln 4$ (B) $(x^2 + y^2) \cdot 2y \ln 4$

(C) $2y(x + y^2)e^{x+y^2}$ (D) $2y \cdot 4^{x+y^2}$

6. (2005 期中) 设 $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____。

7. (2010 期中, 2009 期末) 设 $z = x^3 + y^3 - 3xy^2$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

8. (2018 期末) 设 $z = (x^2 + y^2)e^{x+y}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

9. (2014 期末) 设 $z = e^{x^2+y^2}$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 以及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

10. (2009 期末, 2010 期中) 设 $z = x^y (x > 0, x \neq 1)$, 求证 $\frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$

考法二：结合上一部分的内容，证明极限存在、连续、偏导存在、可微（下一部分学，可以先隔过去）

1. (2018 期中) 二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $M(0, 0)$ 处 ()

- A. 连续, 偏导存在 B. 连续, 偏导不存在
C. 不连续, 偏导存在 D. 不连续, 偏导不存在

2. (2013 期末) 设 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 则在原点 $(0, 0)$ 处 $f(x, y)$ ()

- (A) 偏导数不存在 (B) 不可微 (C) 偏导数存在且连续 (D) 可微

3. (2017 期末) 下列函数中, 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时不存在极限的是 ()

A. $f(x, y) = \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ B. $f(x, y) = \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2}$
C. $f(x, y) = \frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ D. $f(x, y) = \frac{x^2 y + xy^2}{x^2 + y^2}$

4. (2014 期中) 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处 ()

- (A) 两个偏导数都不存在 (B) 两个偏导数存在但不可微
(C) 偏导数连续 (D) 可微但偏导数不连续

5. (2020 期中)

考虑函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{若 } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{若 } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ 证明: f 在 $(0, 0)$ 处不可微。

6. (2010 期中, 2010 期末) 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 问: (1) 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$

是否连续？(2) 求 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的偏导数 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ ，在点 $(0, 0)$ 是否可微？说明理由。

7. (2015 期中)

证明函数 $f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处

(1) 连续且偏导数存在；(2) 偏导数不连续；(3) 可微。

8. (2011 期中) 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$,

问：(1) 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 是否连续？(2) 计算函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的偏导数 $f'_x(0, 0)$ 及 $f'_y(0, 0)$ ，在点 $(0, 0)$ 是否可微？说明理由。

第四部分 全微分

常规考法：主要考察如何求全微分，证明可微与否等知识点。全微分在近似计算中的应用为选学，历年也没怎么考过，此部分暂时不展开说哈。

1. (2020 期中) 求函数 $f(x, y) = x^y$ 在点 $(2, 1)$ 处的微分为：_____。

2. (2019 期末) 已知 $z = (x^2 + y^2)\sin xy$, 则 $dz =$ _____
3. (2017 期末) 已知 $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$, 则 $dz|_{(1,0)} =$ _____
4. (2018 期中) 求 $z = xy + \frac{x}{y}$ 的全微分_____
5. (2016 期中) 已知函数 $z = e^{xy}$, 则在 $(2,1)$ 处的全微分 $dz =$ _____
6. (2010 期中) 已知 $u = x^y$, 则 $du =$ _____
7. (2019 期末) 已知 $z = \arctan(xy)$, 则 $dz =$ _____
8. (2019 期末, 2007 期末) 函数 $f(x, y) = x^2 - y^2 + x^2y^2$ 在点 $(1,1)$ 处的全微分 $df(1,1)$ 为 ()
 A. 0 B. $dx + dy$ C. $4dx$ D. $2dx - dy$
9. (2013 期中) 设 $f(x, y) = |x - y|\varphi(x, y)$, 其中 $\varphi(x, y)$ 在点 $(0,0)$ 连续且 $\varphi(0,0) = 0$, 则 $f(x, y)$ 在 $(0,0)$ 处 ()
 (A) 连续, 偏导数不存在 (B) 不连续, 偏导数存在 (C) 可微 (D) 不可微
10. (2014 期中) 设函数 $f(u)$ 可微, 且 $f'(2) = 2$, 则 $z = f(x^2 + y^2)$ 在点 $(1,1)$ 处的全微分 $dz|_{(1,1)} =$ _____
11. (2009 期中) 设 $z = e^{\cos xy}$, 则 $dz =$ _____
12. (2013 期末) 求函数 $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$ 当 $x = 1, y = 2$ 时的全微分。
13. (2011 期中) $u = x^{\frac{y}{z}}$, 求 du .

第五部分 多元复合函数求导

首先要区分全导数和偏导数的概念, 以及符号区别 (考试时写错符号要扣分的)。至于全微分形式不变性, 大家理解是个什么东东就好。此部分书上讲的相对难记, 学习的话请看我提供的视频讲解。

此部分考的复合函数求高阶导和证明题是相对有难度的, 要好好练习的哈。

历年真题:

1. (2012 期末) 已知 $z = f(x + y, xy)$, 则 $dz =$ _____

2. (2018 期中) 设 $z = f\left(2x, \frac{x}{y}\right)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$ _____

3. (2015 期中)

3. 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处可微, 且 $f(1, 1) = 1, f_x(1, 1) = 2, f_y(1, 1) = 3$,

$g(x) = f(x, f(x, x))$. 则 $\frac{d}{dx} g^3(1) =$ _____;

4. (2013 期中) 设函数 $f(u)$ 可微, 已知 $f'(0) = \frac{1}{2}$, 且 $z = f(4x^2 - y^2)$, 则 $\left. \frac{dz}{dy} \right|_{x=1, y=2} =$ _____

5. (2012 期中) 设 $z = xy + xF(u)$, 而 $u = \frac{y}{x}$, $F(u)$ 为可导函数, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____

6. (2011 期中, 2010 期中) 设 $z = z(x, y)$ 由 $z = z(u, v), u = x + ay, v = x + by$ 复合而成, 且 $z = z(x, y)$ 有

二阶连续偏导数, 欲把方程: $6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} = 0$ 化简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 则常数 a, b 满足 ()

(A) $a = -2, b = -2$ (B) $a = 3, b = 3$ (C) $a = -2, b = 3$ (D) $a = 2, b = -3$

7. (2012 期末, 2011 期末) 设 $z = f(xy, \frac{x}{y}) + \sin y$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

8. (2018 期中) 设 $\begin{cases} xy^2 - uv = 1 \\ x^2 + y^2 - u + v = 0 \end{cases}$, $w = e^{u+v}$, 其中 u, v 是由上式确定的 x, y 的函数, 求 $\frac{\partial w}{\partial x}$.

9. (2018 期中) $z = f(e^x \sin y, x^2 + y^2)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

10. (2016 期中, 2013 期中) 设函数 $z = f(y - x, ye^x)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

11. (2015 期中) 设变换 $\begin{cases} u = x - 2y, \\ v = x + ay \end{cases}$ 可把方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 简化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 求常数 a .

12. (2012 期中) 设 $z = x^3 f(xy, \frac{y}{x})$, 其中 f 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

13. (2005 期中, 2011 期中) 设 $z = f(x^2 - y^2, xy) + g(x^2 + y^2)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, g 具有二阶导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

14. (2010 期中) 已知函数 $z = f(xy^2, x^2y)$ 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

15. (2017 期末) 设 $z = f(x, y \sin x)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

16. (2013 期末) $z = f(u, x, y), u = xe^y$, 其中 f 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

17. (2014 期中) 设 $z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, 求 $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

18. (2014 期中) 设 $y = y(x), z = z(x)$ 是由方程 $z = xf(x+y)$ 和 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的函数, 其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 且满足 $F_y + xf'F_z \neq 0$, 求 $\frac{dz}{dx}$.

19. (2009 期中) 设 $z = f(x^2 + y^2, xy)$, 其中 f 具有连续的二阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

证明专练

1. (2018 期中) 设 $z = xy + xF(u)$, 而 $u = \frac{y}{x}$, $F(u)$ 为可导函数, 证明 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + xy$.

2. (2013 期中) 设 $z = \arctan \frac{x}{y}$, 而 $x = u + v$, $y = u - v$, 证明 $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}$.

3. (2012 期中) 已知 $u = x - ay$, $v = x + ay$, $a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 (a \neq 0)$, 函数 $z = z(u, v)$ 具有二阶连续

偏导数, 求证 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$.

4. (2010 期中) 若函数 $f(\xi, \eta)$ 具有连续二阶偏导数且满足拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 0$, 证明函数

$z = f(x^2 - y^2, 2xy)$ 也满足拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

5. (2013 期末, 2007 期末) 设 $f(u)$ 具有二阶连续导数, 且 $g(x, y) = f(\frac{y}{x}) + yf(\frac{x}{y})$, 证明:

$$x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{2y}{x} f'(\frac{y}{x}).$$

6. (2008 期末) 设函数 $F(u, v)$ 有二阶连续偏导数, 证明由方程 $F\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\right) = 0$ 所确定的函数满足

$$\text{下列方程: } (x-x_0) \frac{\partial z}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial z}{\partial y} = z-z_0.$$

第六部分 隐函数求导

掌握并会使用隐函数存在定理。视频会有补充内容, 请认真学习哈。

1. (2020 期中) 设函数 $x = g(y)$, 是在点 $(-1, -1)$ 附近由方程 $x^4 + 2y^4 = 3$ 所决定的隐函数, 则 $g'(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$

2. (2004 期末) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $xz - y + \arctan y = 0$ 所确定, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. (2020 期末, 注意以下两道题目的区别)

设函数 $x = g(y, z)$ 是由方程 $x^4 + 2y^4 + xz^4 = 2$ 在点 $(-1, -1, -1)$ 附近所决定的隐函数, 则 $g_z(-1, -1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

设函数 $y = h(x, z)$, 是由方程 $x^4 + 2y^4 + xz^4 = 2$ 在点 $(-1, -1, -1)$ 附近所决定的隐函数, 则 $h_z(-1, -1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. (2016 期末) 设 $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ _____

5. (2016 期末) 设 $\frac{y}{z} = \ln \frac{z}{x}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ _____

6. (2015 期中)

4. 设 $xy - z \ln y + e^{xz} = 1$, 根据隐函数存在定理, 存在点 $(0, 1, 1)$ 的一个邻域, 在此邻域内该方程 ()

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的函数 $z = z(x, y)$

(B) 可确定具有两个具有连续偏导数的函数 $y = y(x, z)$ 和 $z = z(x, y)$

(C) 可确定具有两个具有连续偏导数的函数 $x = x(y, z)$ 和 $z = z(x, y)$

(D) 可确定具有两个具有连续偏导数的函数 $x = x(y, z)$ 和 $y = y(x, z)$

7. (2015 期中)

4. 由方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 在点 $(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, 1)$ 处的全微分

$dz =$ _____;

8. (2015 期末) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) = 0$ 确定, 其中 F 为可微函数且 $F'_2 \neq 0$, 则 $xz_x + yz_y =$ ()。

A. x

B. z

C. $-x$

D. $-z$

9. (2005 期中) 设函数 $y = y(x, z)$ 由方程 $yz = \sin(x + y)$ 所确定, 则 $\frac{\partial y}{\partial x} =$ ()。

(A) $\frac{\cos(x + y)}{z}$

(B) $\frac{1}{z - \cos(x + y)}$

(C) $\frac{\cos(x + y)}{z - \cos(x + y)}$

(D) $\frac{1 + \cos(x + y)}{z - \cos(x + y)}$

10. (2006 期中) 设 $z = xyf\left(\frac{y}{x}\right)$, $f(u)$ 可导, 则 $xz'_x + yz'_y =$ _____

(大题序号从 1 开始标)

1. (2015 期中)

设 $\begin{cases} xu - yv = 0, \\ yu + xv = 1, \end{cases}$ 求 u_x, u_y, v_x 和 v_y .

2. (2020 期中)

设 $z = z(x, y)$ 为由方程 $F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$ 所局部决定的隐函数, 其中 F 为连续可微函数, 试求: $\frac{\partial z}{\partial x}$.

3. (2013 期中) 函数 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1,1)}$ 。

4. (2012 期末, 2007 期末) 已知 $e^z + x^2 + y^2 = 2$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

5. (2017 期中) 设函数 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$ 确定, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

6. (2012 期中) 设 $u = f(x, z)$, 而 $z(x, y)$ 是由方程 $z = x + y\varphi(z)$ 所确定的函数, 求 du 。

7. (2010 期中) 设 $e^z - xyz = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

8. (2019 期末) 设 $x^2 + \sin y + z^2 - 2z = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

9. (2016 期中) 设 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

证明专练

1. (2017 期中) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $\frac{x}{z} = \varphi(\frac{y}{z})$ 所确定, 其中 $\varphi(u)$ 具有二阶连续导数, 试证明:

(1) $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$;

(2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2$.

2. (2013 期末) 设 $x = x(y, z), y = y(x, z), z = z(x, y)$ 都是由方程 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的具有连续偏导

数的函数, 证明: $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$.

3. (2014 期中) 已知 $xy = xf(z) + yg(z)$, $xf'(z) + yg'(z) \neq 0$, 其中 $z = z(x, y)$ 是 x 和 y 的函数, 求证:

$$[x - g(z)] \frac{\partial z}{\partial x} = [y - f(z)] \frac{\partial z}{\partial y}.$$

第七部分 多元函数微分学的应用

大家上面估计快被算数给算吐了哈哈, 下面我们换换脑子。

这部分的内容把书和例题好好看看即可, 但是要掌握其方法, 因为下一部分的空间曲线要用得到。

下面要学的是空间曲线的切线和法平面, 曲面的切平面和法线, 这两部分的例题和做题方法要记住。此部分建议先看配套录制的视频, 学习之后完成历年真题。

(有人问为什么这里的考频这么高, 因为它考察的知识点很全面, 哈哈)

历年真题:

1. (2018 期中) 曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处切线的切向量 $\vec{T} =$ _____.

2. (2018 期中) 已知曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 上点 P 的切平面平行于平面 $2x + 2y + 2z - 1 = 0$, 则点 P 的坐标为 _____.

3. (2016 期中, 2016 期末, 2008 期末) 旋转抛物面 $z = x^2 + 2y^2 - 4$ 在点 $(1, -1, -1)$ 处的切平面方程为()

A $2x + 4y - z = 0$

B $2x - 4y - z = 4$

C $2x + 4y - z = 4$

D $2x - 4y - z = 7$

4. (2015 期中)

2. 由曲线 $\begin{cases} z = x^2 - 1, \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面在点 $(2, 1, 4)$ 处的法线方程

为 _____;

5. (2014 期中) 曲面 $xyz = 1$ 上平行于平面 $x + y + z = 0$ 的切平面方程为 _____.

6. (2013 期中, 2006 期中, 2016 期末) 在曲线: $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的所有切线中, 与平面 $\pi: x+2y+z+4=0$ 平行的切线 ()
- (A) 只有 1 条 (B) 只有 2 条 (C) 至少有 3 条 (D) 不存在
7. (2013 期中) 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 在点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$, 则点 P 的坐标是_____
8. (2011 期中) 旋转抛物面 $z=x^2+2y^2-4$ 在点 $(1,-1,-1)$ 处的切平面方程为 ()
- (A) $2x+4y-z=0$ (B) $2x-4y-z=4$ (C) $2x+4y-z=4$ (D) $2x-4y-z=7$
9. (2010 期中, 2011 期末, 2012 期末) 曲面 $z=xy$ 上点 M 处的法线垂直于平面 $2x-y-z=5$, 则点 M 的坐标是 ()
- (A) $(-1,2,-2)$ (B) $(1,2,2)$ (C) $(-1,-2,2)$ (D) $(1,-2,-2)$
10. (2009 期中) 曲面 $z-e^x+2xy=3$ 在点 $(0,2,1)$ 处的切平面方程为_____
11. (2006 期中) 曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为_____
12. (2010 期末, 2006 期中) 曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面方程为_____
13. (2018 期末) 圆柱螺旋线 $x=R\cos\theta, y=R\sin\theta, z=k\theta$ 在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 对应点处的切线方程为_____
14. (2017 期末) 曲面 $z=2x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,4)$ 处的切平面方程为_____
15. (2014 期末) 已知曲面 $2z=x^2+y^2$ 上点 M 的切平面平行于平面 $x-y+z=1$, 则 M 的坐标为 ().
- A. $(-1, 1, 1)$ B. $(-1, -1, 1)$ C. $(1, -1, 1)$ D. $(1, 1, 1)$
16. (2013 期末) 曲线 $x=\frac{t}{1+t}, y=\frac{1+t}{t}, z=t^2$ 对应于 $t=1$ 的点处的法平面方程为_____
17. (2012 期末) 曲线 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ x+2y+z=6 \end{cases}$ 在点 $(1,1,3)$ 处的一个切向量为_____
18. (2011 期末) 曲线 $\begin{cases} x-y+z=2 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, 2)$ 处的一个切线方向向量为 ().
- A. $(-1, 3, 4)$ B. $(3, -1, 4)$ C. $(-1, 0, 3)$ D. $(3, 0, -1)$
19. (2018 期末) 旋转曲面 $3x^2+2y^2+3z^2=12$ 在点 $P(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处指向外侧的单位法向量为_____
20. (2016 期末) 在曲线: $x=t, y=-t^2, z=t^2$ 的所有切线中, 与平面 $\pi: x+2y+z+4=0$ 平行的切线 ()
- (A) 只有 1 条 (B) 只有 2 条 (C) 至少有 3 条 (D) 不存在

21. (2013 期末) 曲面 $\frac{x^2 + y^2}{2} - z^2 = 1$ 在点 $M(1, 1, 0)$ 处的切平面是 _____

22. (2009 期末, 2008 期末) $z = y + \ln \frac{x}{z}$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的法线方程为 ()

(A) $x = y = \frac{3 - z}{2}$

(B) $x - 1 = y - 1 = \frac{z - 1}{2}$

(C) $x - 1 = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 1}{-2}$

(D) $x - 1 = y - 1 = \frac{z - 1}{-1}$

(大题部分从 1 开始标号哈)

1. (2020 期中)

求由方程组 $\begin{cases} x^2 + y^4 + 2z^2 - 4x = 0 \\ 2x - 3y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$ 所决定的曲线在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线方程与法平面方程。

2. (2017 期中) 已知在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ 上点 P 处的切平面与平面 $x - 2y + 3z = 0$ 平行, 求点 P 的坐标及该平面的方程。

3. (2016 期中) 试求曲面 $x^2 + y^2 = 2z$ 的切平面, 使之经过曲线 $\begin{cases} 3x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ 2x^2 + y^2 - 4z = 7 \end{cases}$ 在点 $(1, -1, -1)$ 处的切线。

(拓展: 将曲线改为 $\begin{cases} 3x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ 2x^5 + y^2 - 4z = 7 \end{cases}$, 其它条件、题设均不变)

4. (2012 期中) 试求曲面 $x^2 + y^2 = 2z$ 的切平面, 使之经过曲线 $\begin{cases} 3x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ 2x^5 + y^2 - 4z = 7 \end{cases}$ 在点 $(1, -1, -1)$ 处的切线。

5. (2011 期中) 设空间曲线 $\Gamma: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$. 求:

(1) Γ 在 xOy 面内的投影曲线;

(2) Γ 在点 $(-1, -1, 2)$ 处切线方程和法平面方程;

(3) 原点到 Γ 的最长和最短距离 (用拉格朗日乘数法做, 下一节的内容)。

6. (2020 期末, 两道题对比完成)

求由方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z^2 - 4x = 0 \\ x - 2y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$ 所决定的曲线在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线方程与法平面方程。

求由方程组 $\begin{cases} x^4 + y^4 + 2z^2 - 4x = 0 \\ x - 2y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$ 所决定的曲线在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线方程与法平面方程。

7. (2019 期末, 2004 期末) 求曲面 $z = 2x^2 + \frac{y^2}{2}$ 上平行于平面 $2z + 2y - 4x + 1 = 0$ 的切平面方程, 并求切点处的法线方程。

9. (2011 期中, 2008 期末) 试证曲面 $f(x - ay, z - by) = 0$ 的任一切平面恒与某一直线相平行 (其中 f 为可微函数, a, b 为常数)。

10. (2018 期中, 2016 期中) 试证曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} (a > 0)$ 上任意点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a 。

第八部分 方向导数和梯度

方向导数和梯度的考题不难, 但一定要了解个所以然, 因为后期学人工智能的话梯度是一个很重要的概念! 视频会认真讲这一部分的, 希望大家认真听。

书上的“等值线”这一概念也要了解哈，2020 年期末 A 卷考了。

并且这部分在 2017 期末 A 卷直接考了一道大题，所以过程也要会写哈。

1. (2020 期中) 求函数 $f(x, y) = x^y$ 在点 $(2, 1)$ 处变化率为零的方向: _____.

2. (2018 期中) 函数 $z = xe^{2y}$ 在点 $P(1, 0)$ 处沿从点 $P(1, 0)$ 到点 $Q(2, -1)$ 的方向的方向导数等于 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $-\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. (2018 期中) 函数 $u = xyz$ 在点 $M(1, 1, 1)$ 处的梯度 $\text{grad } u|_M =$ _____

4. (2017 期中) 函数 $z = x^4 + \frac{y^2}{2}$ 在点 $A(1, -3)$ 处其函数值增加最快的单位方向向量为 _____

5. (2016 期中) 设函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$, O 为坐标原点, 则函数 u 在点 $P(1, 1, 1)$ 沿 \overrightarrow{OP} 方向的方向导数为 _____

6. (2016 期中) 函数 $u = xy^2z$ 在 $(1, -1, 2)$ 处增长最快的方向为 _____

7. (2015 期中)

3. 函数 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1, 2)$ 处从点 $(1, 2)$ 到 $(2, 2 + \sqrt{3})$ 的方向的方向导数为 ()

- (A) $1 + 2\sqrt{3}$ (B) $1 - 2\sqrt{3}$ (C) $-1 + 2\sqrt{3}$ (D) $-1 - 2\sqrt{3}$

8. (2011 期中) $u = 3xy^2 + 2x^3y - 1$ 在点 $P(3, 2)$ 沿与 x 轴正向成 $\frac{\pi}{3}$ 倾角方向的方向导数为 ()

- (A) $60 + 45\sqrt{3}$ (B) $60\sqrt{3} + 45$ (C) $-60 - 45\sqrt{3}$ (D) $-60\sqrt{3} - 45$

9. (2011 期中) 函数 $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 在 $(1, 2, -2)$ 处的最大变化率是 _____, 对应方向的方向余弦是 _____

10. (2020 期末) 函数 $z = x^y$ 在点 $(1, e)$ 处沿从点 $(2, 1)$ 到点 $(3, 2)$ 的方向的方向导数 = _____.

11. (2019 期末) 设 $u = 2xy - z^2 + 2x - 2y + 3z$, 则 u 在原点沿 $(1, -1, 1)$ 的方向导数为 _____

12. (2018 期末) 函数 $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ 在 $P(1, 1)$ 处沿 () 方向增长最快。

- A. $(-3, 2)$ B. $(3, -2)$ C. $(2, 3)$ D. $(-2, -3)$

13. (2015 期末) $\text{grad} \frac{1}{x^2 + y^2} =$ _____

14. (2013 期末) 函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 在点 $A(1, 0, 1)$ 处沿点 A 指向 $B(3, -2, 2)$ 方向的方向导数为 _____

15. (2011 期末, 2012 期末) 设 $u = 2xy - z^2$, 则 u 在 $(2, -1, 1)$ 处的方向导数的最大值为 _____

16. (2020 期末) 函数 $f(x, y) = x^y$ 在点 $(2, 1)$ 处增长最快的方向为: _____ .
17. (2019 期末) 设 $u = 2xy - z^2$, 则 u 在 $(1, -1, 1)$ 处的梯度为_____
18. (2008 期末) 设 $u = 2xy - z^2$, 则 u 在 $(1, -1, 1)$ 处的方向导数的最大值为 ()
- (A) $2\sqrt{6}$ (B) 8 (C) 12 (D) $2\sqrt{3}$
19. (2004 期末) 函数 $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ 在点沿 $\overrightarrow{OA} = \{1, 2, 1\}$ 方向的方向导数等于 ()
- (A) $-\frac{7}{2}$; (B) $\frac{1}{2}$; (C) $\frac{\sqrt{6}}{6}$; (D) $-\frac{7\sqrt{6}}{6}$
20. (2014 期中) 设函数 $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ 则 $\nabla f(1, -1, 0) =$ _____
21. (2017 期末) 求函数 $f(x, y) = x^2 - y^2$ 在点 $P(-1, 1)$ 处沿点 $P(-1, 1)$ 到点 $Q(0, 0)$ 的方向的方向导数。
22. (2013 期中) 求函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 在点 $A(1, 0, 1)$ 沿 A 指向点 $B(3, -2, 2)$ 方向的方向导数。
23. (2014 期中) 设 \vec{n} 是曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处的外法线向量, 计算函数 $u = \frac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z}$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处沿方向 \vec{n} 的方向导数。

第九部分 函数连续、偏导存在、方向导数存在、可微等等关系

请见网课哈~

笔记区：（请大家把视频上给的图画到这里哈）

历年真题：

1. （2020 期中）

设 $z = f(x, y)$ 为定义在点 (x_0, y_0) 的一个开邻域上的函数，下列说法中正确的是：（ ）

- (A) 若 f 在 (x_0, y_0) 处偏导数均存在，则 f 在 (x_0, y_0) 处极限存在。
- (B) 若 f 在 (x_0, y_0) 处偏导数均存在，则 f 在 (x_0, y_0) 处连续。
- (C) 若 f 在 (x_0, y_0) 处偏导数均存在，则 f 在 (x_0, y_0) 处可微。
- (D) 以上说法都不对。

2. （2017 期中）在下列命题中，不正确的是（ ）

- A. 若函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微，则它在该点连续；
- B. 若函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微，则它在该点沿任何方向的方向导数存在；
- C. 若函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微，则它在该点的偏导数连续；
- D. 若函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微，这曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处的切平面存在。

3. （2016 期中，2011 期中）下列说法正确的是（ ）

- A. 两向量 \vec{a} 与 \vec{b} 平行的充要条件是存在唯一的实数 λ ，使得 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$
- B. 函数 $z = f(x, y)$ 的两个二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ， $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 在区域 D 内连续，则在该区域内两个二阶混合偏导数必相等

- C. 函数 $z = f(x, y)$ 的两个偏导数在点 (x_0, y_0) 处连续是函数在该点可微的充分条件
- D. 函数 $z = f(x, y)$ 的两个偏导数在点 (x_0, y_0) 处存在是函数在该点可微的充分条件

4. （2012 期中）设 $z = f(x, y)$ 在 M_0 处存在二阶偏导数，则函数在 M_0 处（ ）

- (A) 一阶偏导数必连续
- (B) 一阶偏导数不一定连续
- (C) 必可微
- (D) $z_{xy} \equiv z_{yx}$

5. （2012 期中）设 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = -1$, $\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(0,0)} = 2$ ，则（ ）

- (A) $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的全微分 $dz \Big|_{(0,0)} = -dx + 2dy$ ；
- (B) $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某一邻域有定义；

C. 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处存在方向导数; D. 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处偏导数连续。

第十部分 多元函数的极值、拉格朗日乘数法

二元函数极值的必要条件、充分条件, 驻点, 拉格朗日乘数法在有附加条件的情况下使用。

历年真题:

1. (2020 期中)

设 $z = f(x, y)$ 为定义在点 (x_0, y_0) 的一个开邻域上的所有二阶偏导函数均连续的函数, 设 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$, $f_{xy}(x_0, y_0) = 0$, $f_{xx}(x_0, y_0) = 2$, $f_{yy}(x_0, y_0) = 0$, 则下列说法中正确的是: ()

- (A) (x_0, y_0) 必定为极小值点。 (B) (x_0, y_0) 可能为极小值点。
(C) (x_0, y_0) 一定不是极值点。 (D) 以上说法都不对。

2. (2018 期中) 已知点 $(-3, 2)$ 为函数 $f(x, y) = x^3 + ay^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点, 则 $a =$ ()

- A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

3. (2017 期中, 2016 期中, 2012 期中, 2012 期末) 对函数 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$, 点 $(0, 3)$ ()

- A. 不是驻点 B. 是驻点但非极值点 C. 是极小值点 D. 是极大值点

4. (2013 期中) 设 $u(x, y)$ 在平面有界区域 D 上有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$, 则 ()

- A. 最大值点和最小值点必定都在 D 的内部
B. 最大值点和最小值点必定都在 D 的边界上
C. 最大值点在 D 的内部, 最小值点在 D 的边界上
D. 最小值点在 D 的内部, 最大值点在 D 的边界上

5. (2011 期中, 2010 期中, 2007 期末) 设函数 $f(x, y) = 2x^2 + ax + xy^2 + 2y$ 在点 $(1, -1)$ 取得极值, 则常数 $a =$ _____

6. (2020 期末)

设 $U \subset \mathbb{R}^2$ 为一个开区域, 设 $f(x, y)$ 与 $\phi(x, y)$ 为定义在 U 上的光滑函数, 考虑 f 在条件 $\phi(x, y) = 0$ 下的极值问题, 假设 $(x_0, y_0) \in U$ 为极值点, 并设 f 与 ϕ 在 (x_0, y_0) 处的梯度均不为零, 则下列说法中正确的是: ()

- (A) $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 < 0$.
(B) $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0$.
(C) f 在 (x_0, y_0) 处的梯度与 ϕ 的经过该点的等值线相切。
(D) f 在 (x_0, y_0) 处的梯度与 ϕ 的经过该点的等值线垂直。

7. (2018 期末) 椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上的点到直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的最短距离是 _____

8. (2013 期末) 设函数 $f(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 的某领域内连续, 且 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$.

则下述四个选项中正确的是 ()

(A) 点 $(0,0)$ 不是函数 $f(x,y)$ 的极值点;

(B) 点 $(0,0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极大值点;

(C) 点 $(0,0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极小值点;

(D) 依所给条件无法确定点 $(0,0)$ 是否为函数 $f(x,y)$ 的极值点。

9. (2015 期中, 2011 期末) 函数 $f(x,y) = 4(x-y) - x^2 - y^2$ 的极值为 ()

A. 极大值为 8

B. 极小值为 0

C. 极小值为 8

D. 极大值为 0

10. (2020 期末)

设 $U \subset \mathbb{R}^2$ 为 (x_0, y_0) 的一个邻域, 设 $f(x,y)$ 为 U 上的光滑函数, 设 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, 则下列说法中正确的是: ()

(A) 若 $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, 则 (x_0, y_0) 必为 f 的极小值点。

(B) 若 $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0$, 则 (x_0, y_0) 必是 f 的极值点。

(C) 若 $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0$, 则 (x_0, y_0) 必不是 f 的极值点。

(D) 若 $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0$, 则 (x_0, y_0) 可能不是 f 的极值点。

11. (2013 期末) 已知 $f(x,y) = xy(1-x-y)$, 则 $f(x,y)$ 在第一象限内的驻点为 ()

(A) $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$

(B) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

(C) $(1,1)$

(D) $(1,0)$

12. (2004 期末) 设 $f(x,y) = x^2 + xy - y^2$ 的驻点为 $(0,0)$, 则 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的 ()

(A) 极大值;

(B) 极小值;

(C) 非极值;

(D) 不能确定.

13. (2014 期中) 函数 $z = x^3 + y^3 - 3(x^2 + y^2)$ 的极小值点是 ()

(A) $(0,0)$

(B) $(0,2)$

(C) $(2,0)$

(D) $(2,2)$

14. (2009 期中) 设函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ 确定, 则函数 z 的驻点是_____

(大题序号从 1 开始表示哈)

1. (2020 期中)

用 Lagrange 乘数法求函数 $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 下的极大值与极小值。

2. (2018 期中) 求函数 $f(x,y,z) = xyz$ 在限制条件 $xy + yz + xz = 6$ 下的最大值。

3. (2010 期中) 设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数, 求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值。

4. (2020 期末) 用 Lagrange 乘数法求函数 $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ 在约束 $x + y - 1 = 0$ 下的最小值点.

5. (2019 期末) 已知平面上两定点 $A(1, 3), B(4, 2)$, 试在圆周 $x^2 + y^2 = 1, (x > 0, y > 0)$ 上求一点 C , 使得 $\triangle ABC$ 的面积最大。

6. (2017 期末) 求函数 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2$ 的极值。

7. (2016 期末) 求函数 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值点。

8. (2019 期末, 2015 期末) 求函数 $f(x, y) = (y + \frac{x^3}{3})e^{x+y}$ 的极值。

9. (2020 期末) 试求原点到 \mathbb{R}^3 中的曲面 $S = \{(x, y, z) | (x - y)^2 + z^2 = 1\}$ 的最短距离。

10. (2018 期末) 求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值。

11. (2013 期末) 求抛物面 $z = x^2 + y^2$ 到平面 $x + y + z + 1 = 0$ 的最近距离。

12. (2017 期中) 形状为椭球: $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ 的空间探测器进入地球大气层, 其表面开始受热, 1 小时后在探测器表面点 (x, y, z) 的温度为 $T(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$, 求探测器表面温度最高的点和温度最低的点。

13. (2013 期中) 设一座山的表面的方程为 $z = 100 - 2x^2 - y^2$, $M(x, y)$ 时山脚 $z = 0$ 即等高线 $2x^2 + y^2 = 1000$ 上的点。

(1) 问: z 在点 $M(x, y)$ 处沿什么方向的增长率最大, 并求出此增长率;

(2) 攀岩活动要在山脚处找一最陡的位置作为攀岩的起点, 即在该等高线上找一点 M 使得上述增长率最大, 请写出该点的坐标。

14. (2016 期中, 2012 期中) 建模题: 设某电视机厂生产一台电视机的成本为 c , 每台电视机的销售价格为 p , 销售量为 x 。假设该厂的生产处于平衡状态, 即电视机的生产量等于销售量。根据市场预测, 销售量 x 与销售价格 p 之间有下列的关系: $x = Me^{-ap}$ ($M > 0, a > 0$), 其中 M 为市场最大需求量, a 是价格系数。同时, 生产部门根据对生产环节的分析, 对每台电视机的生产成本 c 有如下测算: $c = c_0 - k \ln x$ ($k > 0, x > 1$), 其中 c_0 是只生产一台电视机时的成本, k 是规模系数。根据上述条件, 应如何确定电视机的售价 p , 才能使该厂获得最大利润?

15. (2014 期中)

某公司可通过电台及报纸两种方式做销售某商品的广告, 根据统计资料, 销售收入 R (万元) 与电台广告费用 x (万元) 及报纸广告费用 y (万元) 之间的关系有如下经验公式:

$$R = 15 + 14x + 32y - 8xy - 2x^2 - 10y^2.$$

- (1) 在广告费用不限的情况下求最优广告策略;
 - (2) 若提供的广告费用为 1.5 万元, 求相应的最优广告策略。
- (注: 所谓最高广告策略, 是指所获得的利润最大)

16. (2009 期中) 利用拉格朗日乘数法, 证明圆的内接三角形中, 正三角形面积最大。

17. (2006 期中) 要造一个容积等于定数 a^2 的长方体无盖水池, 如何选择水池的尺寸, 方可使它的表面积最小。

第十章 重积分

我的学习和做题计划:

第一部分 二重积分的概念、性质

在上册的时候我们知道积分可以求面积, 拓展到二重积分后我们可以求曲顶柱体的体积和平面薄面的质量。二重积分的性质很多, 大家要结合图形理解。

历年真题:

考点: 重积分对于积分区域的可加性、对称性

1. (2020 期中)

设 $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$, 问下面哪个积分必为零: ()

- (A) $\iiint_{\Omega} (xe^y + ye^x) dx dy dz$ (B) $\iiint_{\Omega} 1 dx dy dz$
(C) $\iiint_{\Omega} \cos x dx dy dz$ (D) $\iiint_{\Omega} (x^2 - y^2) dx dy dz$

2. (2017 期中) 设 D 是由曲线 $y = x^2 - 1, y = \sqrt{1 - x^2}$ 所围成的平面区域, 则 $\iint_D (axy + by^2) dx dy$ 的 ()

- A. 值等于 0 B. 符号与 a 有关, 与 b 无关
C. 符号与 a 无关, 与 b 有关 D. 符号与 a, b 都有关

3. (2015 期中, 2012 期中)

设有平面闭区域 $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$, $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$, 且 $f(x)$ 是连续奇函数, $g(x)$ 是连续偶函数, 则 $\iint_D [f(x) + g(x)] f(y) dx dy =$ ()

- (A) $2 \iint_{D_1} g(x) f(y) dx dy$ (B) $2 \iint_{D_1} f(x) f(y) dx dy$
(C) $4 \iint_{D_1} [f(x) + g(x)] f(y) dx dy$ (D) 0

4. (2011 期中)

设 $f(x)$ 是连续的奇函数, $g(x)$ 是连续的偶函数, 且区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}\}$, 则下列结论正确的是 ()

- (A) $\iint_D f(y) g(x) dx dy = 0;$ (B) $\iint_D f(x) g(y) dx dy = 0;$
(C) $\iint_D [f(x) + g(y)] dx dy = 0;$ (D) $\iint_D [f(y) + g(x)] dx dy = 0.$

5. (2013 期末) 设平面区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, 则:

$\iint_D (x^2 + y^3) dx dy =$ ()

- (A) $4 \iint_{D_1} (x^2 + y^3) dx dy$ (B) $4 \iint_{D_1} x^2 dx dy$ (C) $4 \iint_{D_1} y^3 dx dy$ (D) 0

6. (2019 期末) 设 Ω_1 由 $x^2 + y^2 + z^2, z \geq 0$ 确定, Ω_2 由 $x^2 + y^2 + z^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 确定, 则 ()

- A. $\iiint_{\Omega_1} x dx dy dz = 4 \iiint_{\Omega_2} x dx dy dz$ B. $\iiint_{\Omega_1} y dx dy dz = 4 \iiint_{\Omega_2} y dx dy dz$
 C. $\iiint_{\Omega_1} z dx dy dz = 4 \iiint_{\Omega_2} z dx dy dz$ D. $\iiint_{\Omega_1} xyz dx dy dz = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dx dy dz$

7. (2012 期末) 利用被积函数的对称性及区域的对称性, 则 $\iiint_{\Omega} (x+y+z) dv$ 的值 (), 其中 D 为 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$ 。

- A. 大于 0 B. 小于 0 C. 等于 0 D. 上述都不对

8. (2009 期中) 设 D 是平面上以 $(1,1), (-1,1), (-1,-1)$ 为顶点的三角形区域, D_1 是 D 在第一象限的部分, 则 $\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy$ 的值为 ()

- (A) $2 \iint_{D_1} (\cos x \sin y) dx dy$ (B) $2 \iint_{D_1} (xy) dx dy$
 (C) $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$ (D) 0

9. (2014 期中) 设 $f(x)$ 是连续的奇函数, $g(x)$ 是连续的偶函数, 区域

$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}\}$, 则以下结论正确的是 ()

- (A) $\iint_D f(y) g(x) dx dy = 0$ (B) $\iint_D f(x) g(y) dx dy = 0$
 (C) $\iint_D [f(x) + g(y)] dx dy = 0$ (D) $\iint_D [f(y) + g(x)] dx dy = 0$

10. (2005 期中) 利用被积函数的对称性及区域的对称性, 则 $\iint_D (x + x^3 y^2) d\sigma$ 的值 (), 其中 D 为 $x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0$ 。

- (A) 大于 0 (B) 小于 0 (C) 等于 0 (D) 上述都不对

考点: 多个重积分比较大小

1. (2013 期中) 设区域 $D: (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1, I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$, 则有 ()

- (A) $I_1 < I_2$ (B) $I_1 = I_2$ (C) $I_1 > I_2$ (D) 不能比较

2. (2019 期末) $I_1 = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy, I_2 = \iint_{|x|+|y| \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy, I_3 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx dy$, 则 I_1, I_2, I_3

的大小关系为 ()

- A. $I_1 < I_2 < I_3$ B. $I_2 < I_1 < I_3$ C. $I_3 < I_2 < I_1$ D. $I_2 < I_3 < I_1$

3. (2017 期末) 设 D 是由直线 $x+y=1, x+y=2, x=0, y=0$ 所围成的闭区域, 记 $I_1 = \iint_D \ln(x+y) dx dy, I_2 = \iint_D \ln^2(x+y) dx dy, I_3 = \iint_D \sqrt{x+y} dx dy$, 则有 ()

- A. $I_1 < I_2 < I_3$ B. $I_2 < I_1 < I_3$ C. $I_2 < I_3 < I_1$ D. $I_3 < I_2 < I_1$

4. (2005 期中) 设积分区域 D 为 $x^2 + y^2 \leq 1$, 在 $\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} d\sigma$ 与 $\iint_D \sqrt{1+x^4+y^4} d\sigma$ 两者中比较大的值是 _____。

第二部分 二重积分的计算

计算二重积分, 首先运用第一部分的知识, 看看对称性, 再看看是 X 型好求还是 Y 型好求。如果更满足极坐标的情况那就用极坐标来求 (下面这些求二重积分的题目不会告诉大家是用直角坐标求还是极坐标求, 需要大家自己判断哈)。

历年真题:

考点: 交换积分次序

1. (2020 期中)

设 $f(x, y)$ 是定义在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的连续函数, 交换 $\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx$ 的积分顺序得到:

2. (2016 期中) 交换积分次序 $\int_0^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy =$ _____

3. (2015 期中) 交换二次积分的积分顺序: $\int_{-1}^0 dy \int_2^{1-y} f(x, y) dx =$ _____

4. (2013 期中) 设 $I = \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$, 交换积分次序后, $I =$ _____

5. (2011 期中) 将 $\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x f(x, y) dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy$ 交换积分次序为 _____

6. (2010 期中) 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则 $I = \int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy (a > 0) =$ ()

(A) $\int_0^a dy \int_0^y f(x, y) dx$ (B) $\int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx$

(C) $\int_0^a dy \int_a^y f(x, y) dx$ (D) $\int_0^a dy \int_0^a f(x, y) dx$

7. (2020 期末)

设 $f(x, y)$ 是定义在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的连续函数, 交换 $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx$ 的积分顺序得到: _____。

8. (2018 期末) 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则 $\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy =$ ()。

A. $\int_0^a dy \int_0^y f(x, y) dx$ B. $\int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx$

C. $\int_0^a dy \int_a^y f(x, y) dx$ D. $\int_0^a dy \int_0^a f(x, y) dx$

9. (2017 期末) 交换二次积分的次序: $\int_0^1 dy \int_{y^2}^y f(x,y)dx =$ _____

10. (2016 期末) $\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)dx$ 则交换积分次序后得 ()。

A. $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x,y)dy$ B. $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy$

C. $\int_0^1 dx \int_y^1 f(x,y)dy$ D. $\int_0^1 dx \int_1^x f(x,y)dy$

11. (2015 期末) 交换积分次序 $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx =$ _____

12. (2011 期末) 交换积分顺序, 有 $\int_0^1 dy \int_{-y}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx =$ _____

13. (2020 期末)

设 $f(x,y)$ 是定义在 $[0,1] \times [0,1]$ 上的连续函数, 交换 $\int_0^1 dy \int_0^{y^3} f(x,y)dx$ 的积分顺序得到: _____.

14. (2016 期末) $I = \int_0^1 dy \int_{1-y}^1 f(x,y)dx$, 则交换积分次序后得 ()

(A) $I = \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 f(x,y)dy$ (B) $I = \int_0^{1-y} dx \int_0^1 f(x,y)dy$

(C) $I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy$ (D) $I = \int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x,y)dy$

15. (2013 期末) 交换二次积分的积分次序 $\int_{-1}^0 dy \int_2^{1-y} f(x,y)dx =$ _____

16. (2009 期末) $I = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y}} 3x^2 y^2 dx$, 则交换积分次序后得 ()

(A) $I = \int_0^1 dx \int_0^{1+x^2} 3x^2 y^2 dy$ (B) $I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} 3x^2 y^2 dy$

(C) $I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} 3x^2 y^2 dy$ (D) $I = \int_0^{\sqrt{1-y}} dx \int_0^1 3x^2 y^2 dy$

17. (2008 期末) $I = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$, 则交换积分次序后得 ()

(A) $I = \int_0^1 dx \int_0^{1+x^2} f(x,y)dy$ (B) $I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} f(x,y)dy$

(C) $I = \int_0^{\sqrt{1-y}} dx \int_0^1 f(x,y)dy$ (D) $I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} f(x,y)dy$

考点: 二重积分的直角坐标表示和极坐标表示的转换

1. (2016 期中, 2012 期中, 2006 期中, 2009 期中) 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \rho d\rho$ 可写成 ()

(A) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$ (B) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$

(D) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y) dy$

2. (2013 期中) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所围成的立体体积 $V =$ ()

(A) $4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} d\rho$

(B) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \rho \sqrt{4a^2 - \rho^2} d\rho$

(C) $8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \rho \sqrt{4a^2 - \rho^2} d\rho$

(D) $4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \rho \sqrt{4a^2 - \rho^2} d\rho$

3. (2016 期末) 设 D 是由圆心在原点, 半径为 1 的圆周所围成的闭区域, 则 $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy =$ ()。

A. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e^{-\rho^2} \rho d\rho$

B. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e^{-\rho^2} d\rho$

C. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e^{-1} \rho d\rho$

D. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e^{-\rho^2} \rho^2 d\rho$

4. (2015 期末) 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr =$ ()。

A. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

B. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

C. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

D. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

5. (2014 期末) 设 $f(x, y)$ 是定义在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的连续函数, 则二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy =$ ()。

A. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$

B. $\int_0^1 r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$

C. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$

D. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$

6. (2013 期末) 化二次积分 $\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy$ 为极坐标形式 _____

7. (2010 期末, 2016 期末) 设 D 由 $x^2 + y^2 = 3$ 所围成, 则 $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy =$ ()

A. $3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho d\rho$

B. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho^3 d\rho$

C. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho^2 d\rho$

D. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \rho^3 d\rho$

8. (2013 期末) 设平面区域 D 为半圆 $x^2 + y^2 \leq R^2 (x \leq 0)$, 则将 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 化为极坐标系下的累次积分结果为 ()

(A) $\int_0^{\pi} d\theta \int_{-R}^R r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$

(B) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_{-R}^R r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$

(C) $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^R r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$

(D) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_0^R r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$

9. (2020 期末)

设 $a > 0$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq ay\}$, $f(x, y)$ 为 D 上连续函数, 在极坐标变换 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 下 $\iint_D f(x, y) dx dy =$ _____.

考点: 计算二重积分 (直角坐标和极坐标)

1. (2017 期中) 设 $D: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$, 则 $\iint_D x^2 y dx dy =$ _____

2. (2012 期中) 设 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$, 则 $\iint_D (x + y + 1) d\sigma =$ _____

3. (2011 期中, 2010 期末) 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2)$ 等于 ().

(A) $2f(2)$ (B) $f(2)$ (C) $-f(2)$ (D) 0

4. (2011 期中, 2010 期中) 设 $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$, 则积分 $\iint_D |x + y - 3| dx dy =$ _____

5. (2010 期中) 二重积分 $\iint_D xy d\sigma$ (其中 $D: 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 1$) 的值为 ()

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{4}$

6. (2010 期中, 2008 期末) 设 $D: x^2 + y^2 \leq a^2$, 若 $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = \pi$, 则 a 为 ()

(A) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ (B) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ (C) 1 (D) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

7. (2010 期中, 2010 期末) 设积分区域 D 是由直线 $y = 0, x = 1$ 及 $y = 2x$ 所围成的闭区域, 则:

$\iint_D xy d\sigma =$ _____

8. (2014 期末) 若 $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} d\sigma = \frac{16}{3}\pi$, 其中积分区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$, 则 $a =$ _____

9. (2012 期末) 设 $D: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, 则 $\iint_D \operatorname{sgn}(y - x) dx dy =$ ()

A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

10. (2011 期末) 设 $I = \iint_D e^{x^2 + y^2} d\sigma$, $D: x^2 + y^2 \leq 4$, 则 $I =$ ()

A. $\frac{\pi}{2}(e^4 - 1)$ B. $2\pi(e^4 - 1)$ C. $\pi(e^4 - 1)$ D. πe^4

11. (2010 期末) 若 D 满足: $x^2 + y^2 \leq 2x$, 则 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy =$ _____

12. (2019 期末) 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$, 则积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy =$ _____

13. (2019 期末, 2018 期末) 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$, 则 $\iint_D (3x - 5y + 8) dx dy =$ _____.

14. (2019 期末) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$, 则积分 $\iint_D xy dx dy =$ _____

15. (2018 期末) 设平面区域 D 由曲线 $y^2 = 2x$ 和直线 $x = 1$ 所围成, 则 $\iint_D y\sqrt{4-x^2} dx dy =$ ()。

A、-1 B、0 C、1 D、2

16. (2008 期末) 二重积分 $\iint_D 2xy dx dy$ (其中 $D: 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 1$) 的值为 ()

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{4}$

17. (2009 期中, 2008 期末, 2006 期末) $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy =$ _____

18. (2007 期末) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$, 则积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy =$ _____

19. (2004 期末) 设积分区域 D 是由直线 $y = 1$ 、 $x = 2$ 及 $y = x$ 所围成的闭区域, 则 $\iint_D xy d\sigma =$ _____

20. (2013 期中) 设 $u(x, t) = \int_{x-t}^{x+t} f(z) dz$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x} =$ _____

21. (2014 期中) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则 $\iint_D (x^2 - y) dx dy =$ _____

(以下大题的序号从 1 开始标注哈)

1. (2020 期中) 设 D 为 xOy 平面上由 $y = \pi - x, x = \pi, y = \pi$ 所围成的区域, 试求 $\iint_D \frac{\sin x}{x} dx dy$.

2. (2018 期中) 计算 $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, 其中 D 为圆 $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 4y$ 及直线 $x - \sqrt{3}y = 0$, $y - \sqrt{3}x = 0$ 所围成的平面闭区域.

3. (2017 期中) 计算二次积分 $I = \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln(x^2 + y^2 + 1) dy$

4. (2016 期中, 2013 期中) 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$, 利用极坐标求 $I = \iint_D x^2 dx dy$.

5. (2015 期中) 计算二重积分: $\iint_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy$, 其中 $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

6. (2012 期中, 2016 期末, 2012 期末) 计算 $\iint_D \arctan \frac{y}{x} dx dy$, 其中 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 1$ 及直线 $y = 0, y = x$ 所围成的在第一象限内的闭区域。

7. (2010 期中, 2005 期中) 计算 $\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) d\sigma$, 其中 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 及坐标轴所围成的第一象限内的闭区域。

8. (2010 期中) 若 D 满足: $x^2 + y^2 \leq 2x$, 求 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$

9. (2015 期末) 计算二重积分 $\iint_D (3x + 2y) dx dy$, 其中 D 是由两坐标轴及直线 $x + y = 2$ 所围成的区域。

10. (2014 期末) 计算 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 D 是圆周上 $x^2 + y^2 = 4$ 以及 $x^2 + y^2 = 1$ 所围成的闭区域。

11. (2014 期中) 设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 计算二重积分 $\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy$.

12. (2010 期末) 设 $f(x, y)$ 在闭区间 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq y, x \geq 0\}$ 上连续, 且

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{8}{\pi} \iint_D f(x, y) dx dy, \text{ 求 } f(x, y)。$$

13. (2020 期末)

计算二重积分 $\iint_D (x+y) dx dy$, 其中 D 是由 $y = x^2$ 与 $x = y^2$ 在第一象限围成的区域。

14. (2019 期末) 计算二重积分 $\iint_D (x^2 + xye^{x^2+y^2}) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

15. (2018 期末) 通过交换积分次序计算 $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{1+x^3} dx$ 。

16. (2018 期末) 设 $f(x, y)$ 连续, 且 $f(x, y) = xy + \iint_D f(x, y) dx dy$, 其中 D 是由 $y = 0, y = x^2, x = 1$ 所围成的区域, 求 $f(x, y)$ 。

17. (2009 期中) 计算二重积分 $\iint_D (x+y) dx dy$, 其中 D 是由直线 $x+y=4, x+y=12$ 及抛物线 $y^2=2x$ 所围成的平面区域。

18. (2012 期末) 计算 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy$, 其中 $D: x^2+y^2 \leq 1$ 。

19. (2009 期末) 计算 $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$, 其中 $D: x^2+y^2 \leq 1$ 。

20. (2009 期末) 计算二重积分 $\iint_D xy d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=1, x=2$ 及 $y=x$ 所围成的闭区域。

21. (2008 期末) 把下列积分化为极坐标的形式, 并计算积分值, $I = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy \quad (a > 0)$ 。

22. (2008 期末) 计算二次积分 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y} dy$

(23 和 24 题貌似考察的是高等数学 A1 的知识点哈)

23. (2008 期末) 设 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$, f 为连续函数, 试求 $f(x)$.

24. (2007 期末) 设函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $f(x) = e^x + \int_0^x tf(t)dt - x \int_0^x f(t)dt$, 求 $f(x)$.

25. (2005 期中) 计算 $I = \iint_D |\cos(x+y)| dx dy$, 其中 $D: x=0, x=\frac{\pi}{2}, y=0, y=\frac{\pi}{2}$ 围成。

26. (2006 期中) 计算二重积分 $\iint_D y dx dy$, 其中 D 是由直线 $x=-2, y=0, y=2$ 及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域。

27. (2014 期中) 求两个底圆半径为 R 的直交圆柱面所围的体积。

第三部分 三重积分

主要考法就是利用直角坐标、柱面坐标、球面坐标来计算三重积分的值。下面的题目我不会提示用哪个方法，请大家选择合适的方法完成下面的习题。

历年真题：

1. (2020 期中)

设 $\Omega = \{(x, y, z) | x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, f 为 Ω 上的连续函数，问下面哪个式子计算了 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$: ()

- (A) $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz$ (B) $\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_{x+y}^1 f(x, y, z) dz$
(C) $\int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz$ (D) $\int_0^1 dy \int_{1-y}^1 dx \int_{1-x-y}^1 f(x, y, z) dz$

2. (2017 期中) 设 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (R > 0)$ 所围成的闭区域，则三重积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV$ 的值为 ()

- A. $\frac{4}{3}\pi R^3$ B. $\frac{4}{5}\pi R^3$ C. $\frac{2}{5}\pi R^3$ D. 0

3. (2016 期中, 2013 期中) 将三重积分 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$, 其中 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, 化为球面坐标下的三次积分为 ()

- A. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r dr$ B. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r dr$
C. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^4 \sin\varphi dr$ D. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \sin\varphi dr$

4. (2015 期中)

设 Ω 由 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), z = 1, z = 4$ 围成，则 $\iiint_{\Omega} x^2 - 2xy^2 \cos\sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz =$ ()

- (A) 21π (B) 42π (C) 11π (D) 22π

5. (2018 期末) 设 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 所围成的闭区域, 则利用球面坐标计算, 有 $\iiint_{\Omega} x^2 + y^2 + z^2 dv = (\quad)$ 。

- A. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^2 r^2 dr$ B. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^2 4 dr$
C. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^2 r^4 \sin\varphi dr$ D. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^2 4r^2 \sin\varphi dr$

6. (2013 期中) 设闭区域 Ω 为 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$, 则 $\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dx dy dz = \underline{\hspace{2cm}}$

7. (2012 期中, 2010 期中) 设 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域, 则 $\iiint_{\Omega} z dv$ 为 (\quad)

- (A) $\frac{64}{3}$ (B) π (C) $\frac{64}{3}\pi$ (D) 8π

8. (2020 期末)

设 $\Omega = \{(x, y, z) | x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则 Ω 的体积等于: (\quad)

- (A) $\int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{1-x-y} 1 dz$ (B) $\int_0^1 dy \int_{1-y}^1 dx \int_{1-x-y}^1 1 dz$
(C) $\int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \int_0^{1-x-y} \sqrt{3} dz$ (D) $\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_{x+y}^1 \sqrt{3} dz$

9. (2015 期末) 设 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 则 $\iiint_{\Omega} x^2 dv = \underline{\hspace{2cm}}$

10. (2012 期末) 设 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = 2$ 所围成的闭区域, 则 $\iiint_{\Omega} (y + z) dv = \underline{\hspace{2cm}}$

11. (2018 期末) 设 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域, 则 $\iiint_{\Omega} z dv = \underline{\hspace{2cm}}$

12. (2004 期末) 两个圆柱体 $x^2 + y^2 \leq R^2$, $x^2 + z^2 \leq R^2$ 公共部分的体积 V 为 (\quad)

- (A) $2 \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2} dy$; (B) $8 \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2} dy$;
(C) $\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2} dy$; (D) $4 \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2} dy$

13. (2014 期中) 设有空间闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, x \geq 0, y \geq 0\}$, 函数 $f(y, z)$ 为 \mathbb{R}^2 上的连续函数, 则 $\iiint_{\Omega} f(y, z) dx dy dz$ 化为球面坐标系下的三次积分为 $\underline{\hspace{2cm}}$

(以下大题的题号从 1 开始计哈)

1. (2020 期中)

设 Ω 是以点 $(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (0, 0, 2), (0, 2, 2), (2, 2, 2)$ 为顶点的棱台, 试求 Ω 的体积 V 。

2. (2017 期中) 求 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dV$, 其中 Ω 是 xOz 平面上两条曲线 $z = x^2$ 与 $z = 2 - x^2$ 绕 z 轴旋转而成的闭区域。

3. (2016 期中) 把积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 化为三次积分, 其中积分区域 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$ 及平面 $y = 1$, $z = 0$ 所围成的区域。

4. (2015 期中)

计算三重积分: $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 由曲面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$ 所围成的闭区域。

5. (2013 期中) 设 Ω 是由 $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 1$, $z = 2$ 所围成的空间闭区域, 求 $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV$ 。

6. (2013 期中) 计算 $I = \iiint_{\Omega} \frac{dV}{(1 + x + y + z)^3}$, 其中 Ω 由 $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ 所围。

7. (2012 期中) 求 $\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dv$, 其中 Ω 是 xoy 平面上曲线 $y^2 = 2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x = 8$ 所围成的闭区域.

8. (2020 期末) 设 $R > 0$, 求球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 与球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$ 的公共部分的体积 V .

9. (2019 期末) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{1 + x^2 + y^2}$, 其中 Ω 由抛物面 $z = x^2 + y^2$ 及 $z = 2$ 所围成.

10. (2017 期末) 求由曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 与曲面 $z = 6 - 2x^2 - y^2$ 所围成立体的体积。

11. (2016 期末) 求三重积分 $\iiint_{\Omega} x dx dy dz$, 其中 Ω 为三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域。

12. (2011 期末) 计算 $\iiint_{\Omega} xy dx dy dz$, 其中 Ω 是由柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $z = 1, x = 0, y = 0$ 所围成且在第一卦限内的区域。

13. (2010 期末) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω : 平面 $x=1, x=2, y=x, z=0$ 及 $2z=y$ 围成。

14. (2016 期末) 利用柱面坐标求三重积分 $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域。

15. (2013 期末, 2008 期末) 求 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 是由 $x^2 + y^2 = 2z$ 及平面 $z=2$ 所围成的闭区域。

16. (2012 期末, 2007 期末) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z \, dx dy dz$, 其中闭区域 Ω 为半球体: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$.

17. (2014 期中) 设 Ω 是由 $\begin{cases} x^2 = z \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与 $z = 1, z = 2$ 所围成的区域, 求:

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV.$$

18. (2008 期末) 计算 $\iiint_{\Omega} (x + y + z) dv$, 其中 Ω 是由 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 与 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围成的区域。
(其中 $a > 0$).

19. (2009 期中) $I = \iiint_{\Omega} z^2 dv$, 其中 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ ($R > 0$) 所围成的闭区域。

20. (2004 期末) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$, 其中 Ω 是由柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 与平面 $z = a$ ($a > 0$) 及 $z = 0$ 围成的区域。

21. (2005 期中) 计算 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot z dv$, 其中 Ω 是由圆柱面 $x^2 + y^2 = 4$, 平面 $z = 0$ 和平面 $y + z = 2$ 所围成的区域。

22. (2005 期中) 计算 $\iiint_{\Omega} (y + z) dv$, 其中 Ω 是由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 所围成的区域。

第四部分 重积分的应用

主要考察求曲面的面积, 大家记住公式即可。(注意: 此部分不是曲面积分)

1. (2020 期中) 设 $a > 0$, 试求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 所截下的部分的曲面的面积。

2. (2016 期中, 2005 期中) 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2x$ 所割下部分的曲面面积。

3. (2020 期末) 试求马鞍面 $z = xy$ 被柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 所割下的曲面的面积 S . (其中 $a > 0$)

4. (2018 期末) 设 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 被平面 $z = 1$ 截出的上半部分, 求曲面 Σ 的面积。

第五部分 证明题专练

历年真题:

1. (2016 期中, 2013 期中) 设 $f(x)$ 连续, 证明 $\int_a^b dx \int_a^x f(y) dy = \int_a^b f(x)(b-x) dx$

2. (2015 期中)

1. 设函数 $f(x, y)$, $g(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 且 $g(x, y) \geq 0$, 证明: 在 D 上必有一点

(ξ, η) 使得 $\iint_D f(x, y)g(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta)\iint_D g(x, y)d\sigma$ 成立.

3. (2012 期中) 设 $f(x)$ 连续, 证明 $\int_a^b dx \int_a^x (x-y)^{n-2} f(y) dy = \frac{1}{n-1} \int_a^b (b-y)^{n-1} f(y) dy$.

4. (2011 期中, 2010 期末) 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 证明: $2 \int_0^a f(x) dx \int_x^a f(y) dy = \left[\int_0^a f(x) dx \right]^2$.

5. (2019 期末) 设 $F(t) = \iiint_{\Omega(t)} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, $G(t) = \iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) dx dy$ 其中:

$\Omega(t) = \{(x, y, z) | 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}$, $D(t) = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq t^2\}$, 若函数 f 连续且恒大于 0, 试证当 $t > 1$ 时, $F(t) > G(t)$.

6. (2018 期末) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 并设 $\int_0^1 f(x) dx = A$, 证明 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy = \frac{A^2}{2}$.

7. (2015 期末) 证明: $\int_0^a dy \int_0^y e^{m(a-x)} f(x) dx = \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) dx$.

8. (2012 期末) 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 证明: $\int_0^a dy \int_0^y f(x) dx = \int_0^a (a-x) f(x) dx$ 。

9. (2005 期中) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, 证明: $\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2$ 。

10. (2009 期中) 设函数 $u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$, 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \iint_{s^2 + t^2 \leq x^2 + y^2} \frac{1}{1 + s^2 + t^2} ds dt$, $f''(x)$ 存在, 求

证: $f''(r) + f'(r) \frac{1}{r} = \pi \ln(1 + r^2)$ 。

11. (2014 期中) 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 试证 $\left[\int_0^a f(x) dx \right]^2 = 2 \int_0^a \left[f(x) \cdot \int_x^a f(y) dy \right] dx$.

第六部分 应用题

1. (2014 期末, 2015 期中)

设有一高度为 $h(t)$ (t 为时间) 的雪堆在融化过程中, 其侧面满足方程 $z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}$. 设长度单位为厘米, 时间单位为小时, 已知体积减少的速率与侧面积成正比 (比例系数为 0.9), 问高度为 130cm 的雪堆全部融化需要多少小时?

(提示: 设 t 时刻雪堆的体积为 $v(t)$, 侧面积为 $S(t)$, 则根据题意, 有 $\frac{d}{dt}v(t) = -0.9S(t)$; 计算体积 $v(t)$ 与侧面积 $S(t)$ 时可将 t 看成常量)

