离散数学笔记

第一章 命题逻辑

合取
析取
定义 1.1.3 否定：当某个命题为真时，其否定为假，当某个命题为假时，其否定为真
定义 1.1.4 条件联结词，表示“如果… …那么……”形式的语句
定义 1.1.5 双条件联结词，表示“当且仅当”形式的语句

定义 1.2.1 **合式公式**
(1)单个命题变元、命题常元为合式公式，称为原子公式。
(2)若某个字符串 A 是合式公式，则¬A、(A)也是合式公式。
(3)若 A、B 是合式公式，则 A ∧B、A∨B、A→ B、A↔B 是合式公式。
(4)有限次使用(2)~(3)形成的字符串均为合式公式。

1.3 等值式

(1)$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$	条件式的等值式、原命题⇔逆否命题
(2)$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	双条件的等值式
(3)$p \Leftrightarrow \neg\neg p$	双重否定律
(4)$p \Leftrightarrow p \wedge p \Leftrightarrow p \vee p$	幂等律
(5)$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$，$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	交换律
(6) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	结合律
(7) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	分配律
(8) $p \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow p$ $p \wedge (p \vee r) \Leftrightarrow p$	吸收律(多吃少)
(9) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	德摩律

注意：符号“⇔”不是一个联结词，它表明两个公式的值相等。符号“↔”是联结词，表示“当且仅当”、“充分必要”。

定理 1.3.1 置换规则：当将公式 A 中的 B 换成 C 得到公式 D 后，若 B⇔C，那么 A⇔D。

当将一个公式的局部进行等值替换后，仍与原公式等值，这也是我们在代数等数学最常见的方法，不断对局部进行等值替换的操作，称为“等值演算”。

1.4 析取范式与合取范式

定义 1.4.1 文字：命题变项(变元)及其否定称为文字。如:p、q、r、¬p、¬q、¬r。

定义 1.4.2 简单析取式：仅由有限个文字构成的析取式。如:p∨q、¬p∨q、p∨¬q、¬p∨¬q、p∨q∨r。

定义 1.4.3 简单合取式:仅由有限个文字构成的合取式。如:p∧q、¬p∧q、p∧¬q、¬p∧¬q、p∧q∧r。

定理 1.4.1

(1)简单析取式 Ai 是重言式⇔同时含有某命题变元及其否定式，如 Ai=p∨¬p∨…。

(2)简单合取式 Ai 是矛盾式⇔同时含有某个命题变元及其否定式，如 Ai=p∧¬p∧…。

定义 1.4.4 析取范式：由有限个简单合取式的析取构成的命题公式。

如：(p∧q)∨(¬p∧q)、(p∧¬q) ∨(¬p∧¬q) ∨(p∧q∧r)。

由析取的性质可知，仅当每个简单合取式为假时，析取范式为假。

范式中只出现¬(否定)、∨(析取)、∧(合取)三种符号，其中∨、∧交替出现，因为最外层的运算符号是析取，从而将这种范式称为“析取范式”。如果最外层的符号是合取则称为“合取范式”。

定义 1.4.5 合取范式：由有限个简单析取式的合取构成的命题公式。

如：(p∨q)∧(¬p∨q)、(p∨¬q)∧(¬p∨¬q) ∧ (p∨q∨r)

由合取的性质可知，仅当每个简单析取式为真时，合取范式才为真。

定理 1.4.2

(1)析取范式是矛盾式⇔该范式中每个简单合取式是矛盾式。

(2)合取范式是重言式⇔该范式中每个简单析取式是重言式。

将一个普通公式转换为范式的基本步骤

1、肯定转换→：利用 $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$，将条件式运算符转换为¬、∨。

2、恰当转换↔：利用 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

利用 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

3、否定到底：利用 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$、$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$、$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

4、适当分配：$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$　$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

定理 1.4.3(范式存在定理)

(1)不是永假的命题公式，存在析取范式。

(2)不是永真的命题公式，存在合取范式。

定义 1.4.4 小项：在含有 n 个变元的**简单合取式**中，每个命题变元或其否定仅出现一次，且各变元按其字母顺序出现，则该简单合取式为小项或极小项。

如：p∧q∧r, p¬∧q∧r, p∧q¬∧r, ¬p∧q∧r 是小项，而¬p ∧r、q∧r 不是小项。

定义 1.4.5 大项：在含有 n 个变元的**简单析取式**中，每个命题变元或其否定仅出现一次，且各变元按其字母顺序出现，则该简单析取式为大项或极大项。

如：p∨q∨r, p¬∨q∨r, p∨q¬∨r, ¬p∨q∨r 是大项，但 p∨r、¬q∨r 不是大项。

【帮你记忆】：因为 p ∧q 的结果是这两值中最小者，即 p ∧q=min(p,q)，所以将形如“p ∧q”的公式称为小项。类似 p∨q 结果是这两值中最大者，即 p∨q=max(p,q)，所以将形如“p∨q”的公式称为大项。

定义 1.4.6 主合取范式：一个合取范式中，如果所有简单析取式均为大项，则称为主合取范式。

如 (p∨q∨r)∧ (p∨¬q∨r)∧(¬p¬∨q∨r) ∧(¬p∨q¬∨r)是主合取范式。

又如(p∨r)∧(¬q∨r)∧(¬p∨q¬∨r)前 2 个简单析取式变元不全，因而不是大项，故不是主合取范式。

定义 1.4.7 主析取范式：一个析取范式中，如果所有简单合取式均为小项，则称为主析取范式。

如(¬p ∧r)∨(q∧r)∨(p¬∧q∧¬r) ，因其前 2 个简单合取式中少变元不是小项，从而不是主析取范式

又如：(¬p∧q∧r)∨(¬p∧¬q∧r)∨ (p∧q∧r)∨ (p¬∧q¬∧r)是主析取范式。

现构造$(p \to q) \leftrightarrow r$、其主析取范式、其主合取范式的真值表，其中 $m_{001} \vee m_{011} \vee m_{100} \vee m_{111}$ 为 $(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$，$M_{000} \wedge M_{010} \wedge M_{101} \wedge M_{110}$ 为 $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$。

表 1.17

p	q	r	$(p \to q) \leftrightarrow r$ 原式(记为 A)	$m_{001} \vee m_{011} \vee m_{100} \vee m_{111}$ 主析取范式(记为 B)	$M_{000} \wedge M_{010} \wedge M_{101} \wedge M_{110}$ 主合取范式(记为 C)
0	0	0	0	0∨ 0∨ 0∨ 0=0	**0**∧ 1∧ 1∧ 1=0
0	**0**	**1**	1	**1**∨0∨ 0∨ 0=1	1∧ 1∧ 1∧1=1
0	1	0	0	0∨ 0∨ 0∨ 0=0	1∧ **0**∧ 1∧ 1=0
0	**1**	**1**	1	0∨ **1**∨ 0∨ 0=1	1∧ 1∧ 1∧ 1=1
1	**0**	**0**	1	0∨ 0∨ **1**∨ 0=1	1∧ 1∧ 1∧ 1=1
1	0	1	0	0∨ 0∨ 0∨ 0=0	1∧ 1∧ **0**∧ 1=0
1	1	0	0	0∨ 0∨ 0∨ 0=0	1∧ 1∧ 1∧ **0**=0
1	**1**	**1**	1	0∨ 0∨ 0∨ **1=1**	1∧ 1∧ 1∧ 1=1

从表 1.17 可发现$(p \to q) \leftrightarrow r$、与其主析取范式、主合取范式的真值表完全一样，说明三者互相等值，因此我们得到如下定理。

定理 1.4.4

(1)不是永假的命题公式，其主析取范式等值于原公式。

(2)不是永真的命题公式，其主合取范式等值于原公式。

1.6 推理

定义 1.6.1 设 A 与 C 是两个命题公式， 若 A → C 为永真式、 重言式，则称 C 是 A 的有效结论，或称 A 可以逻辑推出 C，记为 A => C。（用等值演算或真值表）

第二章 谓词逻辑

2.1、基本概念

∀：全称量词　　∃：存在量词

一般情况下， 如果个体变元的取值范围不做任何限制即为全总个体域时， 带 “全称量词”的谓词公式形如"∀x(H(x)→B(x))，即量词的后面为条件式，带“存在量词”的谓词公式形如∃x(H(x)∨WL(x))，即量词的后面为合取式

例题

R(x)表示对象 x 是兔子，T(x)表示对象 x 是乌龟， H(x,y)表示 x 比 y 跑得快，L(x,y)表示 x 与 y 一样快，则兔子比乌龟跑得快表示为： ∀x∀y(R(x)∧T(y)→H(x,y))

有的兔子比所有的乌龟跑得快表示为：∃x∀y(R(x)∧T(y)→H(x,y))

2.2、谓词公式及其解释

定义 2.2.1、 非逻辑符号： 个体常元(如 a,b,c)、 函数常元(如表示 $x^2 + y^2$ 的 f(x,y))、 谓词常元(如表示人类的 H(x))。

定义 2.2.2、**逻辑符号**：个体变元、量词(∀∃)、联结词(¬∨∧→↔)、逗号、括号。

定义 2.2.3、**项**的定义：个体常元、变元及其函数式的表达式称为项(item)。

定义 2.2.4、**原子公式**：设 R($x_1 \ldots x_n$)是 n 元谓词，$t_1 \ldots t_n$ 是项，则 R(t)是原子公式。原子公式中的个体变元，可以换成个体变元的表达式(项)，但不能出现任何联结词与量词，只能为单个的谓词公式。

定义 2.2.5 **合式公式**：(1)原子公式是合式公式；(2)若 A 是合式公式，则(¬A)也是合式公式；(3)若 A,B 合式，则 A∨B, A∧B, A→B , A↔B 合式(4)若 A 合式，则∀xA、∃xA 合式(5)有限次使用(2)~(4)得到的式子是合式。

定义 2.2.6 **量词辖域**：∀xA 和∃xA 中的量词∀x/∃x 的作用范围，A 就是作用范围。

定义 2.2.7 **约束变元**：在∀x 和∃x 的辖域 A 中出现的个体变元 x，称为约束变元，这是与量词相关的变元，约束变元的所有出现都称为约束出现。

定义 2.2.8 **自由变元**：谓词公式中与任何量词都无关的量词，称为自由变元，它的每次出现称为自由出现。一个公式的个体变元不是约束变元，就是自由变元。

注意：为了避免约束变元和自由变元同名出现，一般要对“约束变元”改名，而不对自由变元改名。

定义 2.2.9 闭公式是指不含自由变元的谓词公式

从本例(已省)可知， 不同的公式在同一个解释下， 其真值可能存在， 也可能不存在， 但是对于没有自由变元的公式(闭公式)，不论做何种解释，其真值肯定存在

谓词公式的类型：重言式(永真式)、矛盾式(永假式)、可满足公式三种类型

定义 2.2.10 在任何解释下，公式的真值总存在并为真，则为重言式或永真式。

定义 2.2.11 在任何解释下，公式的真值总存在并为假，则为矛盾式或永假式。

定义 2.2.12 存在个体域并存在一个解释使得公式的真值存在并为真，则为可满足式。

定义 2.2.13 代换实例 设 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 是命题公式 A_0 中的命题变元， $A_0, A_1, \ldots, A_n$ 是 n 个谓词公式，用 A_i 代替公式 A_0 中的 p_i 后得到公式 A，则称 A 为 A_0 的代换实例。

如 A(x)∨﹁A(x)，∀xA(x) ∨﹁∀ xA(x)可看成 p ∨﹁ p 的代换实例，A(x) ∧﹁A(x)，∀xA(x) ∧﹁ ∀x A(x)可看成 p ∧﹁ p 的代换实例。

定理 2.2.1 命题逻辑的永真公式之代换实例是谓词逻辑的永真公式， 命题逻辑的永假公式之代换实例是谓词逻辑的永假式。（代换前后是同类型的公式）

2.3、谓词公式的等值演算

定义 2.3.1 设 A、B 是两个合法的谓词公式，如果在任何解释下，这两个公式的真值都相等，则称 A 与 B 等值，记为 A ⇔ B。

当 A⇔B 时，根据定义可知，在任何解释下，公式 A 与公式 B 的真值都相同，故 A↔B 为永真式，故得到如下的定义。

定义 2.3.2 设 A、B 是两个合法谓词公式，如果在任何解释下， A↔ B 为永真式， 则 A 与 B 等值，记为 A ⇔ B。

一、利用代换实例可证明的等值式(p↔﹁﹁p 永真，代换实例∀ xF(x) ↔﹁﹁∀ xF(x)永真)

二、个体域有限时，带全称量词、存在量词公式的等值式

如：若 D={ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ }，则∀ xA(x) ⇔ A(a_1)∧A(a_2)∧…∧A(a_n)

三、量词的德摩律

1、 ﹁∀xA(x) ⇔ ∃x﹁A(x)　　2、 ﹁∃xA(x) ⇔ ∀x﹁A(x)

四、量词分配律

1、∀x(A(x)∧B(x)) ⇔ ∀xA(x)∧∀xB(x)　　2、∃x(A(x)∨B(x)) ⇔ ∃xA(x)∨∃xB(x)

记忆方法：∀与∧，一个尖角朝下、一个尖角朝上，相反可才分配。2 式可看成 1 式的对偶式

五、量词作用域的收缩与扩张律

A(x)含自由出现的个体变元 x，B 不含有自由出现的 x，则有：

1、∀/∃(A(x)∨B) ⇔ ∀/∃A(x)∨B　　2、∀/∃(A(x)∧B) ⇔ ∀/∃A(x)∧B

对于条件式 A(x) ↔B， 利用 “基本等值一” 将其转换为析取式， 再使用德摩律进行演算

六、置换规则

若 B 是公式 A 的子公式，且 B ⇔ C，将 B 在 A 中的每次出现，都换成 C 得到的公式记为 D，则 A ⇔D

七、约束变元改名规则

将公式 A 中某量词的指导变元及辖域中约束变元每次约束出现，全部换成公式中未出现的字母，所得到的公

式记为 B，则 $A \Leftrightarrow B$

例 $\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$

证明步骤：

$\forall x(A(x) \rightarrow B)$

$\Leftrightarrow \forall x(\neg A(x) \vee B)$　　命题公式 $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ 的代换实例

$\Leftrightarrow \forall x \neg A(x) \vee B$　　量词作用域的收缩与扩张律

$\Leftrightarrow \neg \exists x A(x) \vee B$　　德摩律

$\Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$　　$p \Leftrightarrow \neg\neg p$ 的代换实例

2.4、谓词公式的范式

定义 2.4.1 一个谓词公式，如果量词均在全式的开头，它们的作用域延伸到整个公式的末尾，则该公式称为前束范式。

如：$\forall x \exists y F(x) \wedge G(y)$，$\forall y \exists x(\neg P(x,y) \rightarrow G(y))$是前束范式。

但 $\forall x(F(x) \rightarrow \exists y(G(y) \vee H(x,y))$不是前束范式。

定理 2.4.1 任意一个谓词公式，都有与之等值的前束范式。

从定理证明过程，可得到获取前束范式的步骤：

(1)剔除不起作用的量词；

(2)如果约束变元与自由变元同名，则约束变元改名；

(3)如果后面的约束变元与前面的约束变元同名，则后的约束变元改名；

(4)利用代换实例，将→、↔转换¬∨∧表示；

(5)利用德摩律，将否定¬深入到原子公式或命题的前面；

(6)利用量词辖域的扩张与收缩规律或利用量词的分配律，将量词移到最左边

例题 2.4.1 把公式$\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$转换为前束范式

解：由于没有空量词，即没有不约束任何变元的量词，现有的约束变元也不与自由变元同名，但$\exists x$ 的约束变元与前面$\forall x$ 中的 x 同名，后者改名。

$\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$

$\Leftrightarrow \forall x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)$　　后方约束变元改名

$\Leftrightarrow \neg \forall x P(x) \vee \exists y Q(y)$　　条件式的代换实例

$\Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists y Q(y)$　　德摩律

$\Leftrightarrow \exists x \exists y(\neg P(x) \vee \exists y Q(y))$　　量词辖域的扩张

2.5、谓词推理

定义 2.5.1 若在各种解释下 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots A_n \rightarrow B$ 只能为真即为永真，则称为前提 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots A_n$ 可推出结论 B。

定义 2.5.2 在所有使 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots A_n$ 为真的解释下，B 为真，则称为前提 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots A_n$ 可推出结论 B。

谓词逻辑的推理方法分为以下几类：

一、 谓词逻辑的等值演算原则、 规律： 代换实例、 量词的德摩律、 量词的分配律、 量词辖域的扩张与收缩、约束变元改名。

二、 命题逻辑的推理规则的代换实例， 如假言推理规则、 传递律、 合取与析取的性质律、CP 规则、反证法等。

三、谓词逻辑的推理公理

(1) $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\vee B(x))$ 全称量词展开可推出合并

(2) $\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$ 存在量词的合并可推出展开，别记反了

(3)全称量词的指定 US 或$\forall$-：$\forall xA(x)\Rightarrow A(x0)$

x0 是论域中的任意个体。该规则可理解为：谓词公式$\forall xA(x)$在某个解释下为真，即论域中**所有**个体都在此解释下使 A 为真时，论域中的任意**个体** x0 在此解释下使 A 为真。

(4)全称量词的推广 UG 或$\forall$+：$A(x0)\Rightarrow\forall xA(x)$

x0 是论域中的任意个体，它是由某个全称量词指定时确定个体。该规则可理解为：在某个解释下，论域中的**任意**个体 x0 都使公式 A 为真，那么论域中的**所有**个体在此解释下，都使 A 为真，意即谓词公式$\forall xA(x)$为真。

(5)存在量词的指定 ES 或$\exists$-：$\exists xA(x)\Rightarrow A(c)$

c 为某个特定的个体，不是任意的个体，这是它与全称量词的区别。该规则可理解为：当$\exists xA(x)$在某个解释下为真时，至少有一个个体常元 c 在该解释下使得公式 A 为真，即 A(c)=1。

(6)存在量词的推广 EG 或$\exists$+：$A(c)\Rightarrow\exists xA(x)$

c 为某个体，可以是某个存在量词指定时确定的个体，也可以是全称量词指定时的个体。该规则可理解为：在某个解释下有 1 个个体 c 使公式 A 为真，就可认为$\exists xA(x)$该解释下为真。

例题 2.5.3 证明$\forall x(F(x)\rightarrow G(x)),\exists x(F(x)\wedge H(x))\Rightarrow\exists x(G(x)\wedge H(x))$

(1)$\exists x(F(x)\wedge H(x))$为真	(前提)
(2) $F(c)\wedge H(c)$为真	(存在指称，至少存在 c 使 F(c)为真，先使用存在指定)
(3) F(c)为真	((2) $\wedge$的定义)
(4) H(c)为真	((2) $\wedge$的定义)
(5) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$为真	(前提)
(6) $F(c)\rightarrow G(c)$为真	(全称指定，任意 x0 都为真，尤其 x0=c 时为真)
(7) G(c)为真	((2)，(4)假言推理的代换实例)
(8)$G(c)\wedge H(c)$为真	((4)(7)合取)
(6) $\exists x(G(x)\wedge H(x))$为真	((5)存在推广，有一个 c 使公式为真，则存在量词可加)

第三章 集合与关系

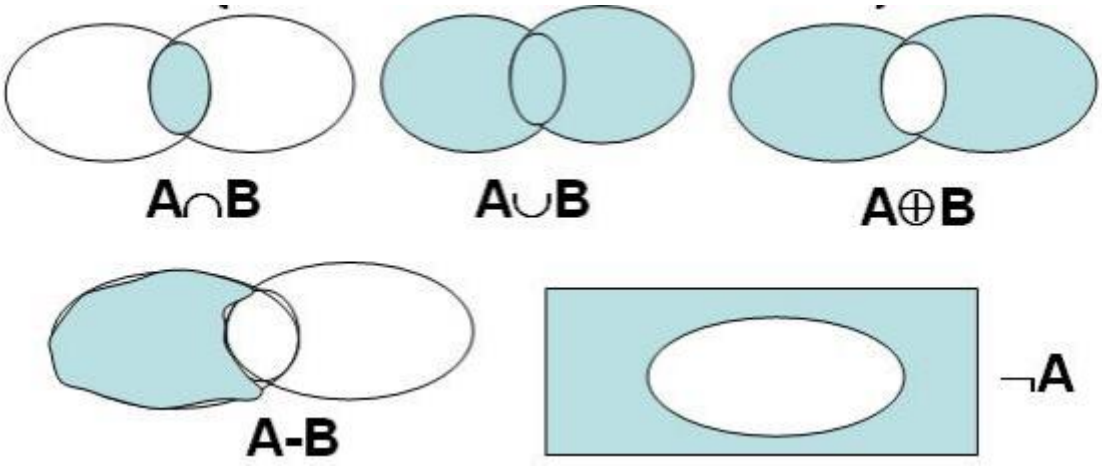
3.1、基本概念

在离散数学称 “不产生歧义的对象的汇集一块” 便构成集合。常用大写字母表示集合， 如 R 表示实数， N 表示自然数， Z 表示整数， Q 表示有理数，C 表示复数。描述一个集合一般有 “枚举法” 与 “描述法”，“枚举法”。元素与集合之间有“属于$\in$”或“不属于$\notin$”二种关系。

定义 3.1.1 设 A，B 是两个集合，如果 A 中的任何元素都是 B 中的元素，则称 A 是 B 的子集，也称 B 包含于 A，记为 $B\subseteq A$，也称 A 包含 B，记为 $A\supseteq B$。

3.2 集合运算性质

定义 3.2.1 设 A、B 为集合，A 与 B 的并集 A∪B、A 与 B 的的交集 A∩B、A-B 的定义：A∪B={x|x∈A∨x∈B}，A∩B={x|x∈A∧x∈B}，A-B={x|x∈A∧x∉B}



定义 3.2.2 设 A、B 为集合，A 与 B 的对称差，记为 A⊗B={x|(x∈A∧x∉B)∨(x∉A∧x∈B)}= A∪B - A∩B。

定义 3.2.3 设 A、B 是两个集合，若 A⊆B、B⊆A 则 A=B，即两个集合相等。

幂等律	A∪A=A、A∩A=A
结合律	A∪B∪C= A∪(B∪C)= (A∪B)∪C
	A∩B∩C= A∩(B∩C)= (A∩B)∩C
交换律	A∪B=B∪A、A∩B=B∩A
分配律	A∪(B∩C)=(A∪B)∩(A∪C)
	A∩(B∪C)=(A∩B)∪(A∩C)
同一/零律	A∪Ø = A、A∩Ø= Ø
排中/矛盾律	A∪¬A=E、A∩¬A= Ø
吸收律(大吃小)	A∩(B∪A)=A、 A∪(B∩A)=A
德摩律	¬ (A∩B)= ¬A ∪¬B 、¬ (A∪B)= ¬A∪¬B
双重否定	¬¬A=A

3.3、有穷集的计数

定理 3.3.1 二个集合的包含排斥原理 $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

3.4、序偶

定义 3.4.2 令<x,y>与<u,v>是二个序偶，如果 x=u、y=v，那么<x,y>=<u,v>即二个序偶相等。

定义 3.4.3 如果<x,y>是序偶，且<<x,y>,z>也是一个序偶，则称<x,y,z>为三元组。

3.5、直积或笛卡尔积

定义 3.5.1 令 A、B 是两个集合，称序偶的集合{<x,y>|x∈A, y∈B}为 A 与 B 的直积或笛卡尔积，记为 A×B。

如：A={1,2,3}，B={a,b,c}则 A×B={1,2,3}×{a,b,c}={<1,a>,<1,b>,<1,c>,<2,a>,<2,b>,<2,c>,<3,a>,<3,b>,<3,c>}

直积的性质

1、$A\times(B\cup C)=A\times B\cup A\times C$

2、$A\times(B\cap C)=A\times B\cap A\times C$

3、$(B\cup C)\times A=B\times A\cup C\times A$

4、$(B\cap C)\times A=B\times A\cap C\times A$

5、$A\subseteq B\Leftrightarrow A\times C\subseteq B\times C\Leftrightarrow C\times A\subseteq C\times B$

6、$A\subseteq B,C\subseteq D\Leftrightarrow A\times C\subseteq B\times D$

定义 3.5.2 令 $A_1,A_2,\ldots A_n$ 是 n 个集合，称 n 元组的集合{$<x_1,x_2,\ldots,x_n>|$

$x_1\in A_1,x_2\in A_2,\ldots,x_n\in A_n$}，为 $A_1,A_2,\ldots A_n$ 的直积或笛卡尔积，记为 $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$。

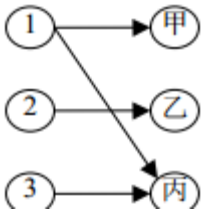
3.6、关系

定义 3.6.1 称直积中部分感兴趣的序偶所组成的集合为“关系”，记为 R。

如在直积{1,2,3,4,5,6,7,8}×{1,2,3,4,5,6,7,8}中，只对第 1 个元素是第 2 个元素的因数的序偶感兴趣，即只对 R={<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6>, <1,7>,<1,8>, <2,2>,<2,4>, <2,6>, <2,8>, <3,3>,<3,6>,<4,4>,<4,8>,<5,5>, <6,6>,<7,7>,<8,8>}，R⊆A×A（A={1,2,3,4,5,6,7,8}）

定义 3.6.2 如果序偶或元组属于某个关系 R，则称序偶或元组具有关系 R。

关系图，关系矩阵



$$M_R=\begin{array}{c|ccc} & 甲 & 乙 & 丙 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$，应为$M_R=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

3.7、关系的复合

定义 3.7.1 若关系 F⊆A×A，关系 G⊆A×A，称集合{<x,y>|∃t 使得<x, t>∈F，<t,y>∈G}为 F 与 G 的复合，记为 F∘G。

例题 3.7.1 令 A={1,2,3}，F={<1,1>,<1,2>} G={<2,2>,<1,3>,<1,1>}则

解： F∘G={ <1,3>,<1,1>,<1,2>} ，G∘F={<1,2>,<1,1>}， 因此关系的复合不满足交换律。

采用复合的定义去计算，只适合于人工计算，为了编程实现，故采用矩阵表示关系。

$$M_F\circ M_G=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M_G\circ M_F=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

说明： M_F 的第 i 行与 M_G 的第 j 列相乘时，乘法是合取∧，加法是析取∨，如 MF 的 1 行与 MG 的第 3 列相乘是：$(1\wedge 1)\vee(1\wedge 0)\vee(0\wedge 0)$，结果为 1。

定义 3.7.2 若关系 F⊆A×A，称集合{<**y,x**>|<x,y>∈F }为 F 的逆，记为 F^{-1}

例题 3.7.2 令 A={1,2,3}，F={<1,2>,<1,3>,<2,1>}，则 F^{-1} ={ <2,1>,<3,1>,<1,2>}。

3.8、关系的分类

定义 3.8.1 若∀$x \in A$都有<x,x>∈R，则 R 是**自反关系**。(自己到自己的关系全属于 R)
定义 3.8.2 若∀$x \in A$都有<x,x>∉R,则 R 是**反自反**的。(自己到自己的关系全不属于 R)

$$M_{R1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \qquad M_{R2}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \qquad M_{R3}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

自反关系 R1 的关系矩阵 M_{R1} 的对角线全为 1，凡关系矩阵的对角线全是 1 是自反关系。
反自反关系 R2 的关系矩阵 M_{R2} 的对角线全为 0，凡关系矩阵的对角线全是 0 的反自反。
而关系 R3 的关系矩阵的主角线不全是 1，也不全是 0，故既不是自反的，也不是反自

定义 3.8.4 如果所有形如<x,x>的序偶都在关系 R 中， R 也只有这种形式的序偶， 则称 R 为恒等关系，记为 I_A。

对于恒等关系而言，其关系矩阵是单位矩阵，即其主对角线全是 1，其他位置全是 0，对关系图是每个点都有自旋，仅只有自旋，没有其他边。
定义 3.8.5 令关系 R⊆A×A，如果当<x,y>∈R 时<y,x>∈R，则称 R 为**对称关系**。
定义 3.8.6 令关系 R⊆A×A，如果当<x,y>∈R 且 x≠y 时<y,x>∉R， 则称 R 为**反对称关系**。

$$M_{R1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} \qquad M_{R2}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \qquad M_{R3}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

定义 3.8.8 令关系 R⊆A×A，若当<x,y>∈R,<y,z>∈R 时有<x,z>∈R，则称 R 为**可传递关系**。

从 R∘R 的关系矩阵可知，其非 0 元素在 R 的关系矩阵都出现，即 $M_{R\circ R} \le M_R$，凡满足这个不等式的关系，肯定为可传递关系。

$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix} \qquad M_{R\circ R}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

所以不可传递。
从 R∘R 的关系矩阵可知，其非 0 元素出现在(1,1)，(1,3)，(2,2)，(2,4)，在 R 的关系矩阵都没出现，不满足 $M_{R\circ R} \le M_R$，不可传递关系。

$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad M_{R\circ R}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

3.9、关系的闭包

由前面的知识可知，有自反关系、对称关系、可传递关系，对于反自反或既不是自反，也不是反自反的关系，是否适当添加一些序偶，使之变成自反的关系，同时也要使添加的序偶尽可能少，类似对关系进行“投入”，使之发育成对称关系与可传递关系，同时要求“投入”刚刚好，这样得到的自反关系、对称关系、可传递关系，称为原关系的自反闭包(记为r(R))、对称闭包(记为s(R))、可传递闭包(t(R))，严格的数学定义如下。

定义 3,9.1 设 $R\subseteq A\times A$，若存在关系 $R'\subseteq A\times A$，满足如下条件则称为自反闭包。

(1)R'是自反关系。

(2)$R\subseteq R'$。

(3)任意 $R''\subseteq A\times A$ 且 $R\subseteq R''$，那么 $R'\subseteq R''$。

即 r(R)是包含 R 的所有自反关系中，序偶最少的一个。

定义 3,9.2 设 $R\subseteq A\times A$，若存在关系 $R'\subseteq A\times A$，满足如下条件则称为对称闭包。

(1)R'是对称关系。

(2)$R\subseteq R'$。

(3)任意 $R''\subseteq A\times A$ 且 $R\subseteq R''$，那么 $R'\subseteq R''$。

即 s(R)是包含 R 的所有对称关系中，序偶最少的一个。

定义 3,9.3 设 $R\subseteq A\times A$，若存在关系 $R'\subseteq A\times A$，满足如下条件则称为可传递闭包。

(1)R'是可传递关系。

(2)$R\subseteq R'$。

(3)任意 $R''\subseteq A\times A$ 且 $R\subseteq R''$，那么 $R'\subseteq R''$。

即 s(R)是包含 R 的所有可传递关系中，序偶最少的一个。

将关系矩阵的主角线上全部变成 1， 即得到其**自反闭包**的关系矩阵， 从而可得到其自反闭包。

3.10、等价关系与集合的划分

定义 3.10.1 设 $R\subseteq A\times A$，如果 R 是自反、对称、可传递的关系则称为**等价关系**。

定义 3.10.2 设 $R\subseteq A\times A$，如果 R 是等价关系， $B\subseteq A$， B 中任意二个元素之间都有关系 R，则 B 是一个**等价类**。

定义 3.10.3 设 $R\subseteq A\times A$，R 是等价关系，$A_0, A_1, \ldots, A_k$ 是基于 R 得到的等价类，则称集合 $\{A_0, A_1, \ldots, A_k\}$ 为 A 关于 R 的**商集**，记为 A/R。

定义 3.10.3 若 $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ 是 A 的子集，若 $i \neq j$ 时 $A_i \cap A_j = \Phi$，并且 $A = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{k-1}$，

则称 $A_0, A_1, \ldots, A_k$ 是 A 的**一个划分**。

定理 3.10.1 设 R⊆ A×A，R 是等价关系，$A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ 是利用 R 得到的 k 个不同的等价类，则 $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ 为集合 A 的划分。

定理 3.10.2 设 $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ 是 A 的划分，R= $A_0 \times A_0 \cup A_1 \times A_1 \cup \ldots \cup A_{k-1} \times A_{k-1}$，则 R 是等价关系。

3.11、偏序关系

定义 3.1 1.1 设 R⊆ A×A，如果 R 是自反、反对称、可传递的关系则称为**偏序关系**。
如：R 是实数中小于等于关系，则 R 是偏序关系。
定义 3.1 1.2 设 R⊆ A×A，R 偏序关系，x 与 y 是 A 中的元素，若序偶<x,y>与<y,x>至少有一个在 R 中，则称 x 与 y **可比**。
定义 3.1 1.3 设 R⊆ A×A，R 偏序关系，若 A 中任意二个元素都可比，则称 A 为**全序关系**或线序关系。
定义 3.1 1.4 设 R⊆ A×A，R 偏序关系，将关系图绘制成所有箭头都朝上，然后去掉所有箭头、去掉自旋边、去掉复合边，得到关系图的简化形式，称为**哈斯图**。
定义 3.1 1.5 在哈斯图中，如果某个元素 y 在元素 x 的直接上方，则称 y **盖住**了 x。记 COVA={<x,y>}
定义 3.1 1.6 设 R⊆ A×A，R 偏序关系，将偏序关系与集合 A 一块称为偏序集，记为<A,R>，表示是 A 上的偏序关系。以后说偏序关系时，可简单地说偏序集<A,R>。
定义 3.1 1.7 在偏序集<A,R>中，B⊆A，y∈B，若 $\forall x \in B$ 都有<x,y>∈R，则称 y 是**最大元**。即最大元与 B 中每个元素都可比，并且都比其大。
定义 3.1 1.8 在偏序集<A,R>中，B⊆A，y∈B，若 $\forall x \in B$ 都有<y,x>∈R，则称 y 是**最小元**。即最小元与 B 中每个元素都可比，并且都比其小。
一个子集中没有最大元或最小元时，可能存在极大元或极小元。
定义 3.1 1.9 在偏序集<A,R>中，B⊆A，y∈B，若不存在 x∈B 使得<y,x>∈R，则称 y 是**极大元**，即 B 中不存在比 y “大”的元素。即极大元与 B 中有些元素是否可比不做要求。
定义 3.1 1.10 在偏序集<A,R>中，B⊆A，y∈B，若不存在 x∈B 都有<x,y>∈R，则称 y 是**极小元**，不存在比 y 小的元素。即极小元与 B 中元素是否可比不做要求。
定义 3.1 1.1 1 在偏序集<A,R>中，B⊆A，y∈B，若任意 x∈B 都有<x,y>∈R，则称 y 是 B 的**上界**。与 B 中每个元素都可比，并且都 B 中的元素大。

3.12、其它关系

定义 3.6.1 给定集合 A 上的关系 ρ，若 ρ 是**自反的**、**对称的**，则称 ρ 是 A 上的相容关系。

定义 3.6.3 给定非空集合 A，设有集合 S={ $S_1, S_2, \ldots, S_n$ }，其中 $S_i \subseteq A$ 且 $S_i \neq \Phi$，i=1,2,…,m,且 $S_i \cap S_j = \Phi (i \neq j)$，则称集合 S 称作 A 的**覆盖**。

定理 3.6.1 给定集合 A 的覆盖，$S_1, S_2, \ldots, S_n$，由它确定的关系：$S_1 \times S_1 \cup \ldots \cup S_n \times S_n$ 是相容关系。

定义 3.7.1 设 R 为定义在集合 A 上的一个关系，若 R 是自反的，对称的，传递的，则 R 称为**等价关系**。(显然

等价关系一定是相容关系)。

定义 3.7.2 设给定非空集合 A，若有集合 S={$S_1, S_2, \ldots, S_n$}，其中$S_i \subseteq A$且$S_i \neq \Phi$ (i=1,2,…,m)，且有$S_i \cap S_j = \Phi(i \neq j)$，同时有$\bigcup_{i=1}^{m} S_i = A$，则称 S 为 A 的一个划分。(所有子集的并为 A，且子集的交为空，则这些子集组成的集合为 A 的一个划分，**覆盖中，子集的交集可不为空**)

等价类
商集

偏序关系(自反性，反对称性，传递性)< $A, \leq$>，哈斯图，可比的，元素 y 盖住元素 x，全序关系，极大元，极小元，最大元，最小元
拟序关系(反自反的，传递的)< $A, \prec$>

第四章 代数系统

定义 4.3.1 设°是集合 S 上的二元运算，若$\forall x, y \in S$都有 x°y=y°x，则称°在 S 上是可交换的，或者说运算°在 S 上满足**交换律**。
定义 4.3.2 设°是集合 S 上的二元运算，若$\forall x, y \in S$都有(x°y)°z=x°(y°z)，则称°在 S 上是可结合的，或者说运算°在 S 上满足**结合律**。
定义 4.3.3 设°是集合 S 上的二元运算，若$\forall x \in S$都有 x°x=x，则称°在 S 上是幂等的，或说运算°在 S 上满足幂等律。
定义 4.3.4 设°与*是集合 S 上的二种运算，若$\forall x, y \in S$都有 x*(y°z)=(x*y)°(x*z)与(y°z)*x=(y*x)°(z*x)，则称*对°是**可分配的**。
定义 4.3.5 设°与*是集合 S 上的二种可交换的二元运算，若$\forall x, y \in S$都有 x*(x°y)=x 与 x°(x*y)=x 则称*与°是满足**吸收律**，内外二种运算不一样，运算符内外各出现一次，以多吃少。

广群：

定义 4.6.1 对于代数系统<A, ♥>，若其运算♥是封闭的，即∀a,b ∈ A，其运算结果 a ♥ b ∈ A，则称此代数系统为广群。

半群：

定义 4.6.2 对于代数系统<A, ♥>，若其运算♥是封闭的，还是可结合的，即∀a,b,c ∈ A，(a ♥ b)♥ c=a ♥(b ♥ c)，则称此代数系统为半群。

群：

定义 4.7.1 若代数系统<A, ♥>之运算♥是封闭的、可结合的、存在单位元、∀a ∈ A 都有逆元 a^{-1} ∈ A，则称该代数系统为群。记为 G，即 Group 的首字母。

子群：

定义 4.8.1 代数系统<G，°>是群，∅≠H⊆G，若代数系统<H，°>是群，则称为<G，°>的子群，也简称 H 是 G 的子群，记为 H≤G。若 H⊂G 则称 H 是 G 的真子群，记为 H<G。