离散数学概论

第四章 关系与函数-特殊关系与函数

课程QQ号：**819392514**
金耀 软件工程系
fool1025@163.com
13857104418

知识回顾

- 有序对、笛卡尔积、关系的概念
- 关系的表示方法（三种）
- 关系的运算（复合）
- 关系的性质（五条）
- 关系性质的判定
- 闭包

知识回顾——合成运算

❖左复合（书本）：

$$R \circ S = \{<x, z> \mid \exists y\,(<x, y> \in S \land <y, z> \in R)\}$$

❖右复合：

$$R \circ S = \{<x, z> \mid \exists y\,(<x, y> \in R \land <y, z> \in S)\}$$

知识回顾——关系的性质

❖ 设R为A上的关系, 则：

自反性： $\forall x\,(x\in A\rightarrow \langle x, x\rangle \in R)$

反自反： $\forall x(x\in A\rightarrow \langle x, x\rangle \notin R)$

对称： $\forall x\forall y(x,y\in A\wedge \langle x, y\rangle \in R\rightarrow \langle y, x\rangle \in R)$

反对称： $\forall x\forall y(x,y\in A\wedge \langle x, y\rangle \in R\wedge \langle y, x\rangle \in R\rightarrow x=y)$

传递： $\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\wedge \langle x,y\rangle \in R\wedge \langle y,z\rangle \in R\rightarrow \langle x,z\rangle \in R)$

知识回顾——关系性质判别

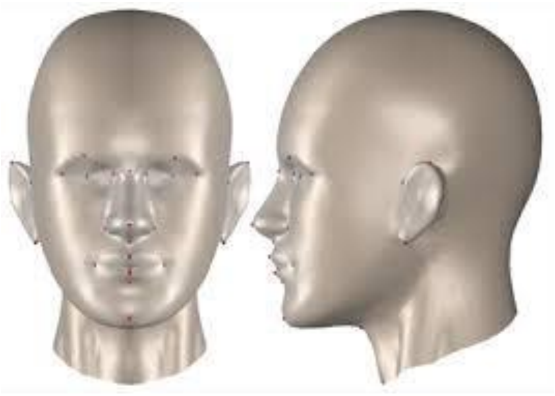
	自反	反自反	对称	反对称	传递
表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij} = 1$，且$i \neq j$，则$r_{ji} = 0$	对M^2中1所在位置，M中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边，是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边，是一条有向边(无双向边)	如果顶点x_i连通到x_k，则从x_i到x_k有边

- 4.1.1 关系概念
- 4.1.2 关系表示方法
- 4.1.3 关系运算
- 4.1.4 关系的性质
- 4.1.5 关系闭包
- <u>4.1.6 等价关系</u>
- 4.1.7 偏序关系

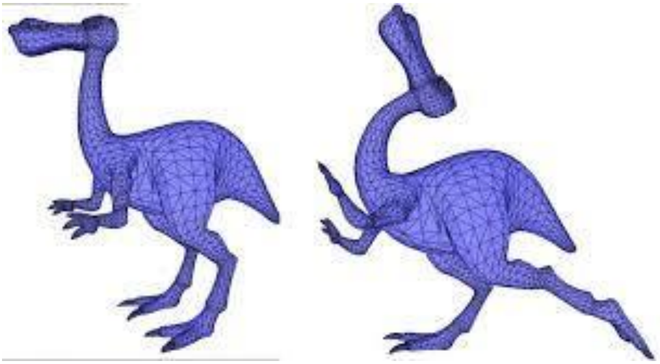
本讲主要内容

- 等价关系的定义与实例
- 等价类及其性质
- 商集与集合的划分
- 等价关系与划分的一一对应

一个引子：几何变换



等（欧式）距变换



等（测地）距变换

连续（拓扑）变换

若将上述几何变换看作关系，那么这种关系具有哪些性质？

等价关系的定义与实例

定义 设 R 为非空集合上的关系. 如果 R 是自反的、对称的和传递的, 则称 R 为 A 上的**等价关系**. 设 R 是一个等价关系, 若$<x, y>\in R$, 称 x 等价于y, 记做 $x\sim y$.

实例 1 同寝室关系

实例 2 设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$, 如下定义A上的关系 R:

$$R = \{ <x, y> \mid x, y\in A \wedge x \equiv y \pmod 3) \}$$

其中 $x \equiv y \pmod 3)$ 叫做 x 与 y **模3相等**, 即 x 除以3的余数与 y 除以3的余数相等.

等价关系的验证

验证模 3 相等关系 R 为 A上的等价关系，因为

$\forall x \in A$, 有$x \equiv x(\text{mod } 3)$

$\forall x, y \in A$, 若 $x \equiv y(\text{mod } 3)$, 则有 $y \equiv x(\text{mod } 3)$

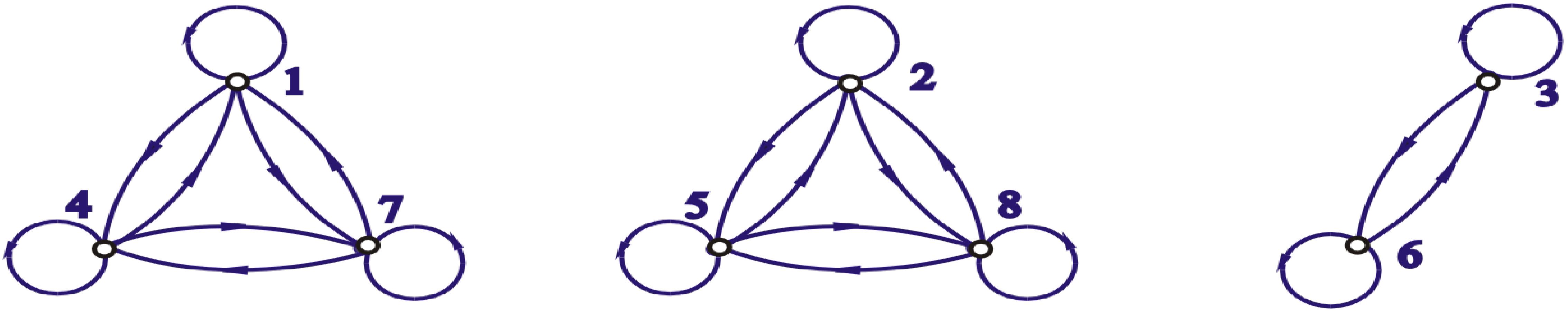
$\forall x, y, z \in A$, 若$x \equiv y(\text{mod } 3)$, $y \equiv z(\text{mod } 3)$, 则有 $x \equiv z(\text{mod } 3)$

自反性、对称性、传递性得到验证

A上模3等价关系的关系图

设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$,

$R=\{ <x, y> \mid x, y \in A \wedge x \equiv y \pmod 3) \}$



思考

1. 举例你所熟知的等价关系。

2. 等价关系有什么用？

等价类

定义 设R为非空集合A上的等价关系, $\forall x \in A$， 令

$$[x]_R = \{\, y \mid y \in A \wedge xRy \,\}$$

称 $[x]_R$ 为 x 关于R 的**等价类**, 简称为 x 的等价类, 简记为$[x]$.

实例$A=\{1, 2, \ldots, 8\}$上模 3 等价关系的**等价类**：

$[1]=[4]=[7]=\{1,4,7\}$

$[2]=[5]=[8]=\{2,5,8\}$

$[3]=[6]=\{3,6\}$

等价类的性质

定理1 设R是非空集合A上的等价关系, 则：

(1) $\forall x\in A$, $[x]$ 是A的非空子集.

(2) $\forall x, y\in A$, 如果 $x\, R\, y$, 则 $[x]=[y]$.

(3) $\forall x, y\in A$, 如果 $x \not R\, y$, 则 $[x]$与$[y]$不交.

(4) $\cup\{\, [x] \mid x\in A\}=A$, 即所有等价类的并集就是$A$.

实例

$A=\{1, 2, \ldots, 8\}$上模 3 等价关系的等价类：

$[1]=[4]=[7]=\{1, 4, 7\}$,

$[2]=[5]=[8]=\{2, 5, 8\}$,

$[3]=[6]=\{3, 6\}$

以上3 类两两不交,

$\{1, 4, 7\}\cup\{2, 5, 8\}\cup\{3, 6\} = \{1, 2, \ldots, 8\}$

商集

定义 设R为非空集合A上的等价关系，以R的所有等价类作为元素的集合称为A关于R的**商集**，记做A/R，$A/R = \{ [x]_R \mid x \in A \}$

实例 $A=\{1,2,\ldots,8\}$，A关于模3等价关系R的商集为

$$A/R = \{ \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6\} \}$$

A关于恒等关系和全域关系的商集为：

$$A/I_A = \{ \{1\},\{2\}, \ldots ,\{8\}\}$$

$$A/E_A = \{ \{1, 2, \ldots ,8\} \}$$

商集的推广

- 商群：由群（代数）上的等价关系定义

- 商空间：由线性空间上的等价关系定义

集合的划分

定义 设A为非空集合，若A的**子集族**π($\pi \subseteq P(A)$) 满足下面条件：

(1) $\varnothing \notin \pi$

(2) $\forall x \forall y\ (x, y \in \pi \land x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

(3) $\cup \pi = A$

则称π是A的一个划分，称π中的元素为A的划分块.

例题

例1 设$A=\{a, b, c, d\}$,

给定$\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6$如下：

$\pi_1=\{\{a, b, c\}, \{d\}\}$, $\pi_2=\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$

$\pi_3=\{\{a\}, \{a, b, c, d\}\}$, $\pi_4=\{\{a, b\}, \{c\}\}$

$\pi_5=\{\varnothing, \{a, b\}, \{c, d\}\}$, $\pi_6=\{\{a, \{a\}\}, \{b, c, d\}\}$

则π_1和π_2是A的划分，其他都不是A的划分．为什么？

等价关系与划分的一一对应

- 商集 A/R 就是 A 的一个划分
- 不同的商集对应于不同的划分
- 任给 A 的一个划分π, 如下定义 A 上的关系 R:

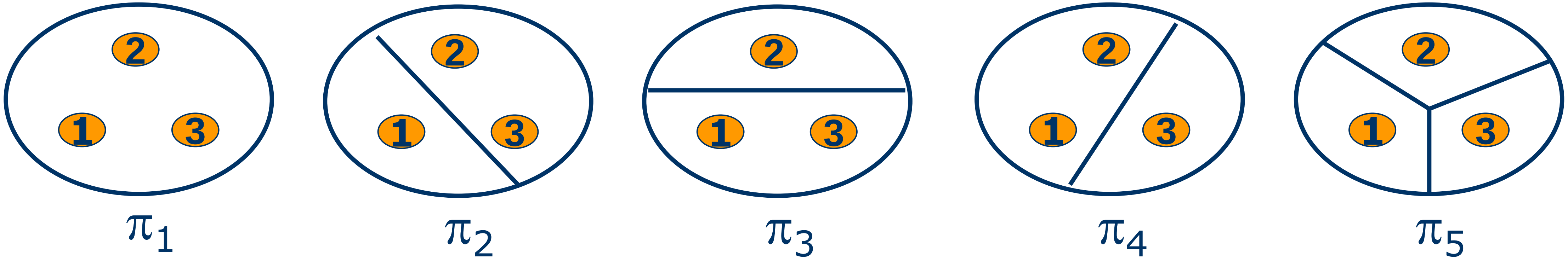
  $R = \{<x, y> \mid x, y \in A \wedge x$ 与 y 在π的同一划分块中$\}$

  则 R 为 A上的等价关系, 且该等价关系确定的商集就是π.

例2 给出$A = \{1,2,3\}$上所有的等价关系

求解思路：先做出A的所有划分, 然后根据划分写出对应的等价关系.

等价关系与划分之间的对应



π_1对应于全域关系 E_A，π_5 对应于恒等关系 I_A

π_2,π_3和π_3分别对应等价关系 R_2, R_3 和 R_4.

$R_2=\{<2,3>,<3,2>\}\cup I_A$，$R_3=\{<1,3>,<3,1>\}\cup I_A$

$R_4=\{<1,2>,<2,1>\}\cup I_A$

实例

例3 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，在 $A\times A$上定义二元关系R：

$$<<x, y>,<u, v>>\in R \Leftrightarrow x+y = u+v,$$

求 R 导出的划分.

解 $A\times A=\{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <1,4>, <2,1>, <2,2>, <2,3>, <2,4>,$
$<3,1>, <3,2>, <3,3>, <3,4>, <4,1>, <4,2>, <4,3>, <4 ,4>\}$

实例（续）

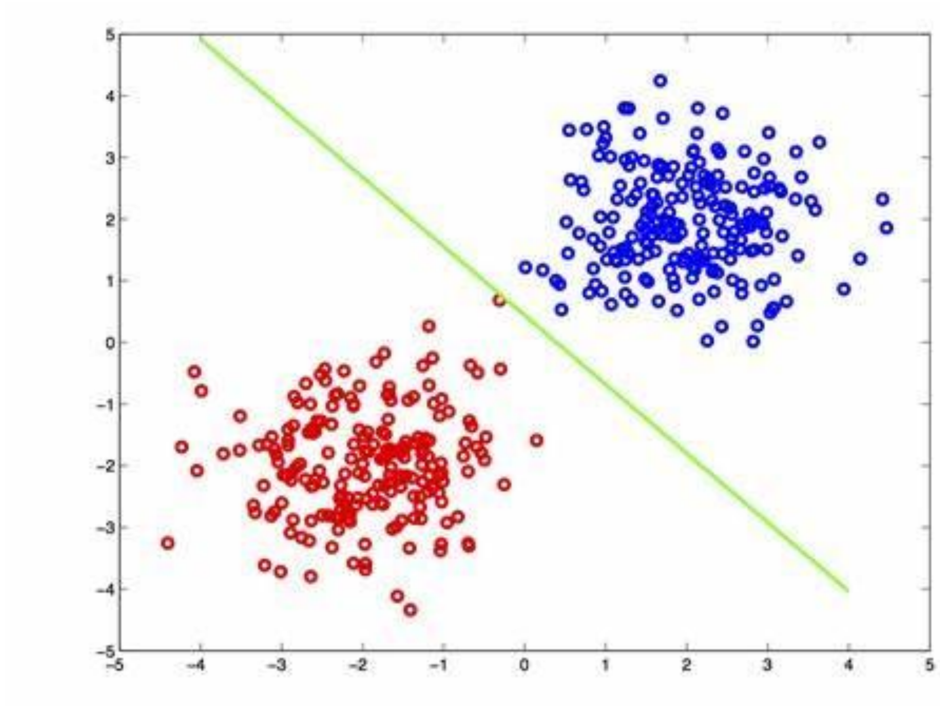
根据 $\langle x, y\rangle$ 的 $x + y = 2,3,4,5,6,7,8$ 将$A\times A$划分成7个等价类：

$(A\times A)/R=\{\ \{\langle 1,1\rangle\}, \{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}, \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,1\rangle\},$

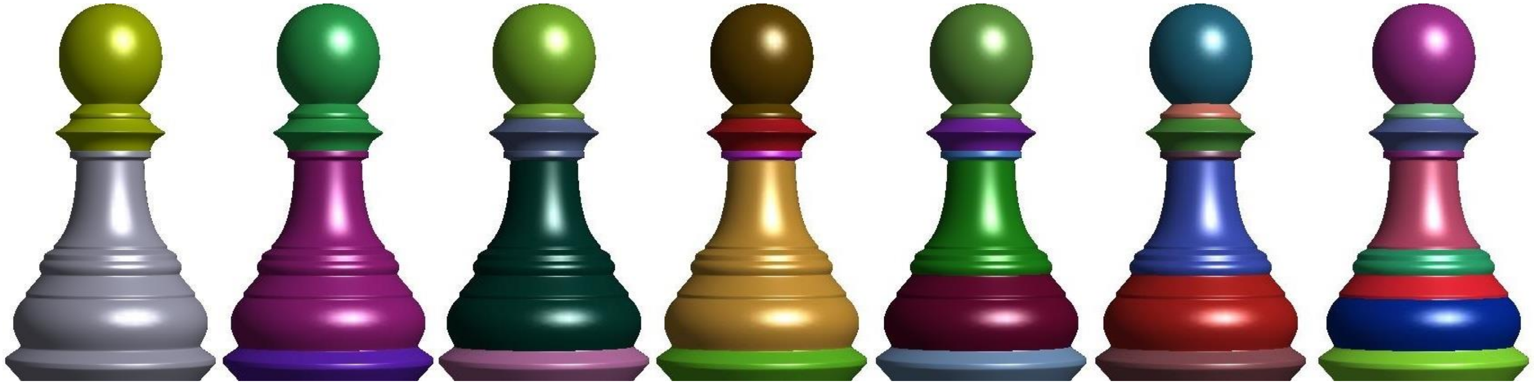
$\{\langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle\}, \{\langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,2\rangle\},$

$\{\langle 3,4\rangle, \langle 4,3\rangle\}, \{\langle 4,4\rangle\}\ \}$

等价关系的应用——分类



等价关系的应用——聚类（分割）



思考

如何用数学语言定义图像分割问题？

设A为图像像素的集合，则图像分割A的子集族$\pi(\pi\subseteq P(A))$ 满足下面条件：

(1) $\varnothing\notin\pi$

(2) $\forall x\forall y\ (x, y\in\pi\ \wedge\ x\neq y\rightarrow x\cap y=\varnothing)$

(3) $\cup\pi=A$

(4) $\forall x\ (x\in\pi$是一个连通域)

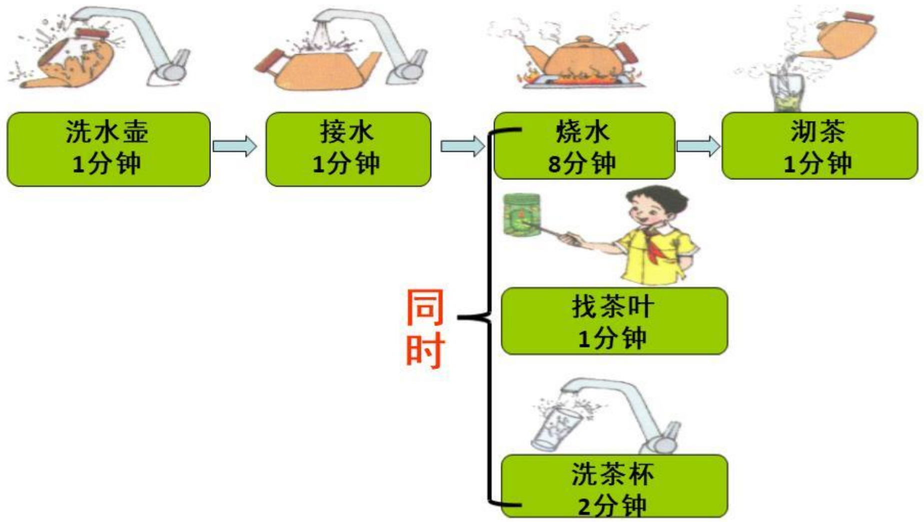
- 4.1.1 关系概念
- 4.1.2 关系表示方法
- 4.1.3 关系运算
- 4.1.4 关系的性质
- 4.1.5 关系闭包
- 4.1.6 等价关系
- **4.1.7 偏序关系**

本讲主要内容

- ❖偏序关系
- ❖偏序集与哈斯图
- ❖偏序集中的特定元素

生活中的序

- 年龄、字典、课程安排……
- 泡茶



偏序关系（Partial Order）

定义 非空集合A上的自反、反对称和传递的关系，称为A上的偏序关系，记作$\preccurlyeq$. 设$\preccurlyeq$为偏序关系, 如果 $<x, y> \in \preccurlyeq$, 则记作 $x \preccurlyeq y$, 读作 x "小于或等于" y.

实例

集合A上的恒等关系 I_A 是A上的偏序关系.

小于或等于关系, 整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.

相关概念

x与 y 可比：设R为非空集合A上的偏序关系，

$x, y \in A$，x与y可比 $\Leftrightarrow x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$.

结论：任取两个元素x和y，可能有下述情况：

$x \prec y$ (或$y \prec x$)，$x = y$，x与y不可比.

全序关系：

R为非空集合A上的偏序，$\forall x, y \in A$，x与 y 都是可比的，则称 R 为全序（或 线序）

实例：数集上的小于或等于关系是全序关系

整除关系不是正整数集合上的全序关系

相关概念（续）

覆盖：设R为非空集合A上的偏序关系，$x, y \in A$, 如果$x \prec y$且不存在$z \in A$ 使得 $x \prec z \prec y$, 则称 y **覆盖** x.

实例：$\{ 1, 2, 4, 6 \}$集合上的整除关系，

2 覆盖 1,

4 和 6 覆盖 2.

4 不覆盖 1.

偏序集与哈斯图

定义 集合A和A上的偏序关系$\preccurlyeq$一起叫做**偏序集**, 记作 $<A,\preccurlyeq>$.

实例： 整数集和小于等于关系构成偏序集$<Z, \leq>$， 幂集$P(A)$和包含关系构成偏序集$<P(A), R_{\subseteq}>$.

偏序集与哈斯图

哈斯图：利用偏序自反、反对称、传递性简化的关系图

特点：每个结点没有环，两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示，位置低的元素的顺序在前，具有覆盖关系的两个结点之间连边

哈斯图

- 设R是非空集合A上的偏序关系，则按如下方法对R的关系图进行**简化**：

1）删除每个结点的自环（为什么？）

2）删除所有由于传递性出现的边（为什么？）

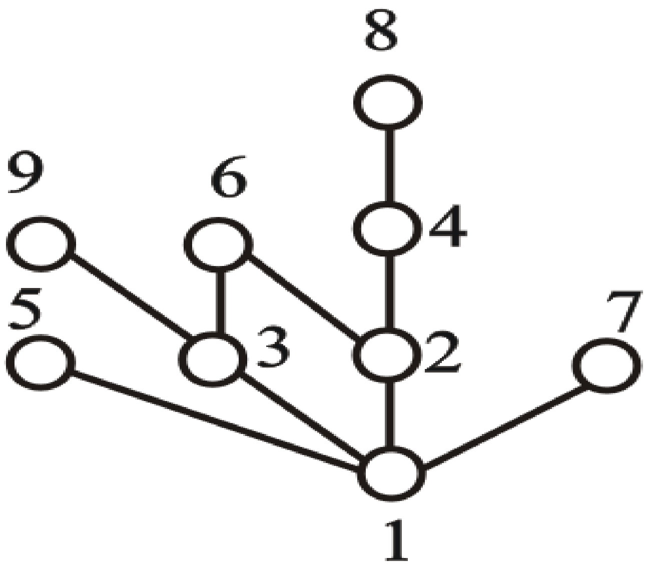
3）重排所有边，使箭头朝上并删除箭头（为什么？）

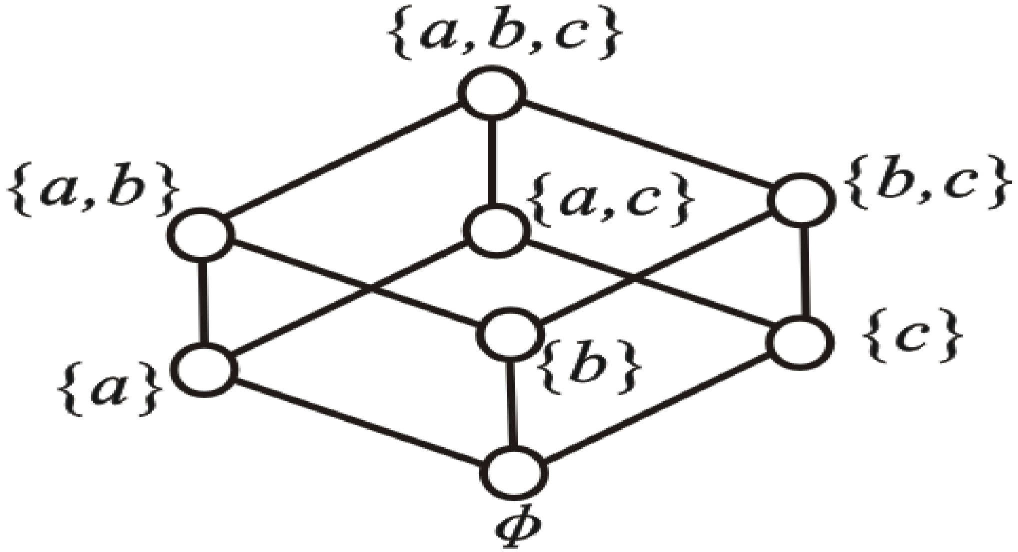
- 例：<{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }, R整除>画出其哈斯图

哈斯图实例

例4 $<\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, R_{整除}>$

$<P(\{a, b, c\}), R_{\subseteq}>$

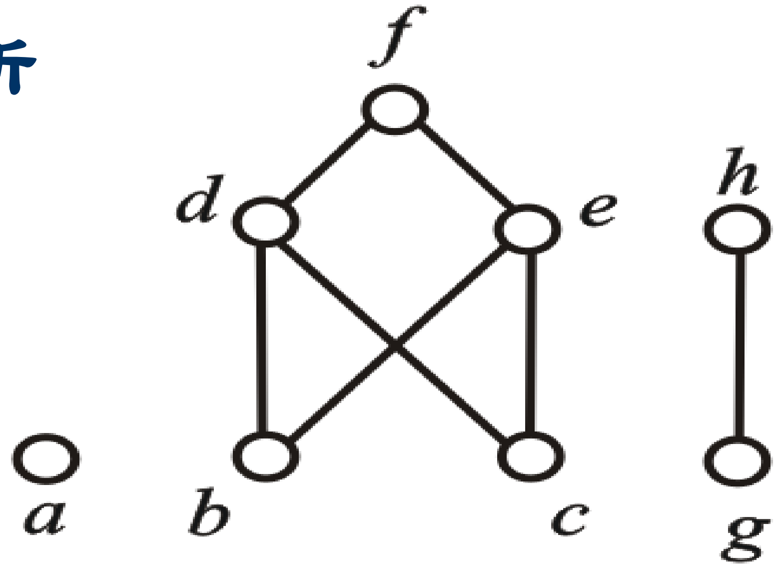




哈斯图实例（续）

例5

已知偏序集$<A, R>$的哈斯图如右图所示，试求出集合A和关系R的表达式.



$A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$R=\{<b, d>,<b, e>,<b, f>,<c, d>,<c, e>,<c, f>,<d, f>,<e, f>,<g, h>\}\cup I_A$

偏序集的特定元素

定义 设 $<A,\preccurlyeq>$ 为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$.

(1) 若 $\forall x\,(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的**最小元**.

(2) 若 $\forall x\,(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的**最大元**.

(3) 若 $\neg\exists x\,(x\in B\wedge x\prec y)$ 成立, 则称 y 为 B 的**极小元**.

(4) 若 $\neg\exists x\,(x\in B\wedge y\prec x)$ 成立, 则称 y 为 B 的**极大元**.

特殊元素的性质

- 对于有穷集，极小元和极大元必存在，可能存在多个.
- 最小元和最大元不一定存在，如果存在一定唯一.
- 最小元一定是极小元；最大元一定是极大元.
- 孤立结点既是极小元，也是极大元.

偏序集的特定元素(续)

定义　设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$.

(1) 若$\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$ 成立, 则称 y 为B的**上界**.

(2) 若$\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$ 成立, 则称 y 为B的**下界**.

(3) 令$C = \{y \mid y$为B的上界$\}$, 则称C的最小元为B的**最小上界** 或 **上确界**.

(4) 令$D = \{y \mid y$为B的下界$\}$, 则称D的最大元为B的**最大下界** 或 **下确界**.

特殊元素的性质

- 下界、上界、下确界、上确界不一定存在
- 下界、上界存在不一定唯一
- 下确界、上确界如果存在，则唯一
- 集合的最小元就是它的下确界，最大元就是它的上确界；反之不对.

特殊元素（一）

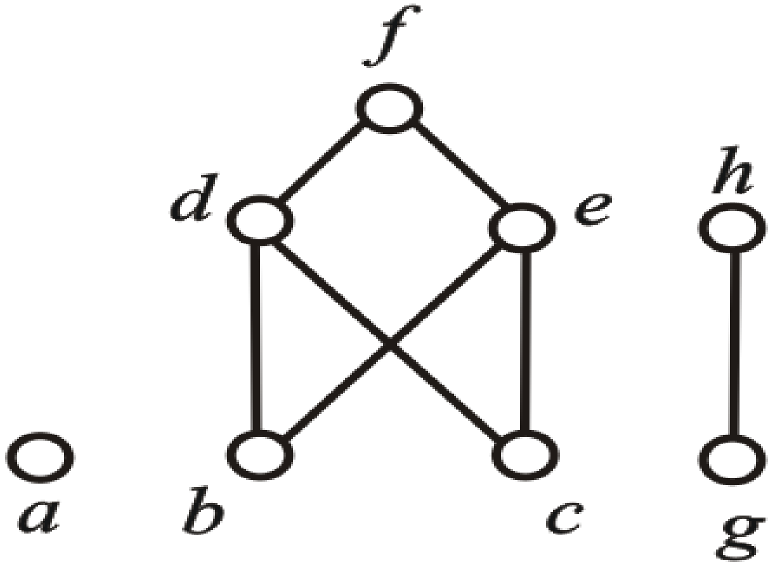
- B的最大元、最小元、极大元和极小元若存在，则一定在B中；
- b是B的最大元, B中所有的元素都比b小;
- b是B的最小元, B中所有的元素都比b大;
- b是B的极大元, B中没有比b大的元素;
- b是B的极小元, B中没有比b小的元素.

特殊元素（二）

- 子集B的上、下界和上、下确界可在集合A中寻找;
- 子集B的上、下界不一定存在，若存在可能多个;
- 子集B的上、下确界不一定存在，若存在一定唯一;
- 子集B有上（下）确界，一定有上（下）界，反之不然.

实例

例6 设偏序集$\langle A,\preccurlyeq\rangle$如下图所示，求 A 的极小元、最小元、极大元、最大元. 设 $B=\{b, c, d\}$, 求 B 的下界、上界、下确界、上确界.



极小元：a, b, c, g;

极大元：a, f, h;

没有最小元与最大元.

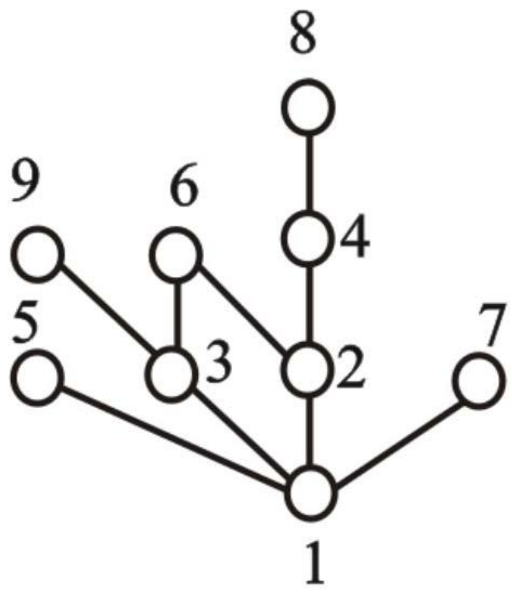
B的下界和最大下界都存在,

上界有不d 和 f,

最小上界为 d.

例:根据右图填表格

	{2,4}	{2,3,5,6}	{6,7,8,9}	{1,2,3}
最大元				
最小元				
极大元				
极小元				
上界				
上确界				
下界				
下确界				



4.2 函数

- 函数的定义
  - 函数定义
  - 函数的定义域、值域
  - 函数的像与原像
- 函数的性质
  - 函数的单射、满射、双射性
  - 构造双射函数
- 函数运算
  - 函数逆运算
  - 函数的复合运算

生活中的函数：因果关系

出门带伞

减速

一只猫

买入

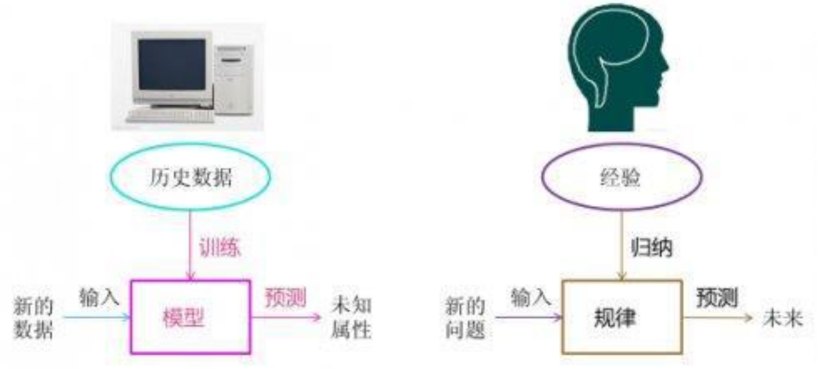
科研中的函数：描述规律

对象的表示

图像融合（编辑）

Lévy, Petitjean, Ray, and Maillot: *Least squares conformal maps for automatic texture atlas generation*, SIGGRAPH 2002

纹理映射



机器学习

思考

- 函数是一种关系吗？
- 函数相对于关系有什么特点？

函数定义

定义 设 F 为二元关系, 若 $\forall x \in \mathrm{dom}F$ 都存在唯一的 $y \in \mathrm{ran}F$ 使 xFy 成立, 则称 F 为**函数**. 对于函数F, 如果有 xFy, 则记作 $y=F(x)$, 并称 y 为 F 在 x 的**值**.

例1 $F_1=\{<x_1,y_1>,<x_2,y_2>,<x_3,y_2>\}$

$F_2=\{<x_1,y_1>,<x_1,y_2>\}$

F_1是函数, F_2不是函数.

函数相等

定义 设F, G为函数, 则 $F = G \Leftrightarrow F \subseteq G \wedge G \subseteq F$

如果两个函数 F 和 G 相等, 一定满足下面两个条件:

(1) $\mathrm{dom}F = \mathrm{dom}G$

(2) $\forall x \in \mathrm{dom}F = \mathrm{dom}G$ 都有 $F(x) = G(x)$

实例 函数 $F(x)=(x^2-1)/(x+1)$, $G(x)=x-1$不相等,

因为 $\mathrm{dom}F \subset \mathrm{dom}G$.

函数定义域与值域

定义 设f 是一个从集合A到集合B的函数，则A是函数f的**定义域**。如果xFy ，则可写成$y=f(x)$，称y为x的**像**，x为y的**原像**。A中所有元素的像构成的集合，称为f的**值域**。

从 A 到 B 的函数

定义 设A, B为集合, 如果 f 为函数

$$\mathrm{dom}f = A \qquad \mathrm{ran}f \subseteq B,$$

则称 f 为从A到B的函数, 记作 f: $A \to B$.

实例

f: $N \to N$, $f(x)=2x$ 是从 N 到 N 的函数

g: $N \to N$, $g(x)=2$也是从 N 到 N 的函数

B上A函数

定义 所有从 A 到 B 的函数的集合记作 B^A，读作"B上A"，符号化表示为

$$B^A=\{ f \mid f: A\to B \}$$

计数：

$|A|=m$, $|B|=n$, 且$m, n>0$, $|B^A|=n^m$.

$A=\varnothing$, 则 $B^A=B^\varnothing=\{\varnothing\}$.

$A\neq\varnothing$且$B=\varnothing$, 则 $B^A=\varnothing^A=\varnothing$.

实例

例2 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, 求B^A.

解 $B^A = \{f_0, f_1, \ldots, f_7\}$, 其中

$f_0=\{<1,a>,<2,a>,<3,a>\}$, $f_1=\{<1,a>,<2,a>,<3,b>\}$

$f_2=\{<1,a>,<2,b>,<3,a>\}$, $f_3=\{<1,a>,<2,b>,<3,b>\}$

$f_4=\{<1,b>,<2,a>,<3,a>\}$, $f_5=\{<1,b>,<2,a>,<3,b>\}$

$f_6=\{<1,b>,<2,b>,<3,a>\}$, $f_7=\{<1,b>,<2,b>,<3,b>\}$

函数的性质

定义 设 f：$A \to B$,

（1）若$\mathrm{ran}f = B$, 则称 f：$A \to B$是**满射**的.

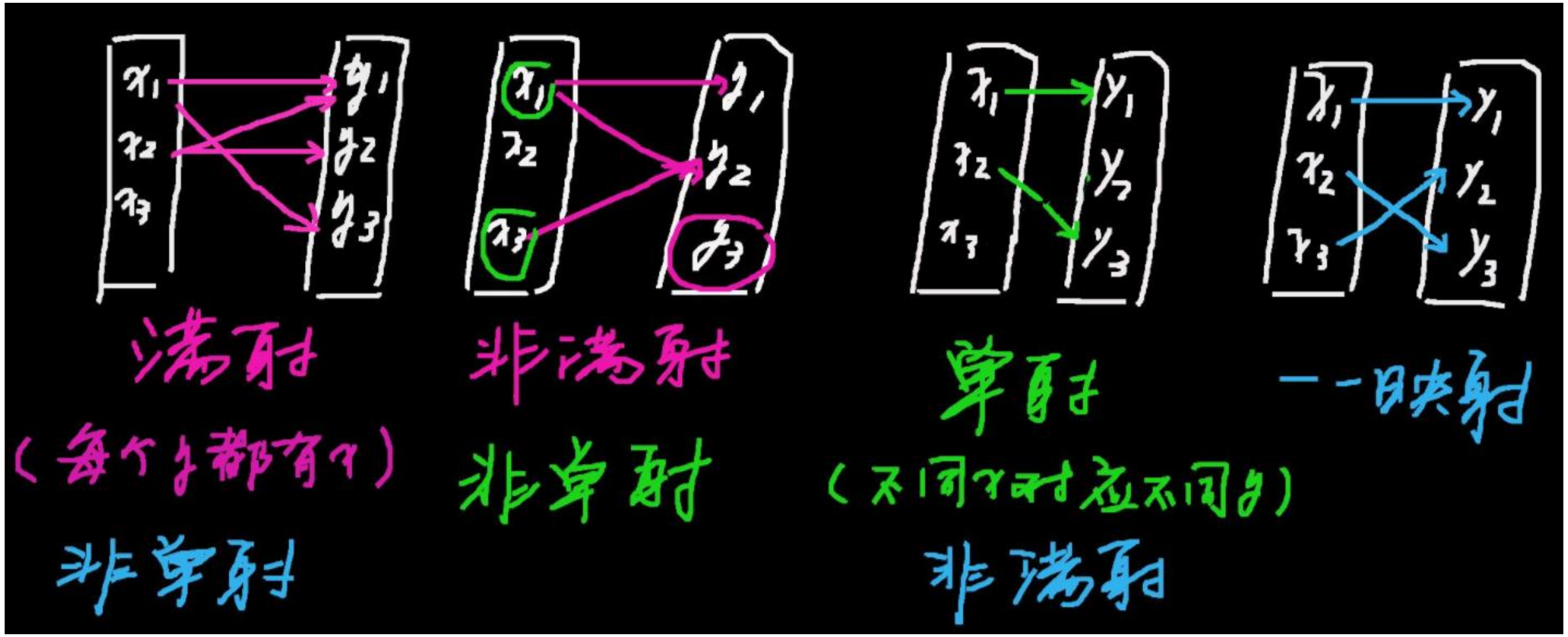
（2）若 $y \in \mathrm{ran}f$ 都存在唯一的 $x \in A$使得 $f(x)=y$, 则称 f: $A \to B$是**单射**的.

（3）若 f：$A \to B$既是满射又是单射的, 则称 f：$A \to B$是**双射**的.

f 满射意味着：$\forall y \in B$, 都存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$.

f 单射意味着：$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

例示：各种映射的图示



实例

例4

判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

(1) f: $R \to R$, $f(x) = -x^2+2x-1$

(2) f: $Z^+ \to R$, $f(x) = \ln x$, Z^+为正整数集

(3) f: $R \to Z$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$

(4) f: $R \to R$, $f(x) = 2x+1$

(5) f: $R^+ \to R^+$, $f(x)=(x^2+1)/x$, 其中R^+为正实数集.

实例（续）

解 (1) f: $R \to R$, $f(x)=-x^2+2x-1$

在$x=1$取得极大值0. 既不单射也不满射.

(2) f: $Z^+ \to R$, $f(x)=\ln x$

单调上升, 是单射. 但不满射, $\mathrm{ran} f=\{\ln 1, \ln 2, \ldots\}$. (3) f: $R \to Z$, $f(x)=\lfloor x \rfloor$

满射, 但不单射, 例如 $f(1.5)=f(1.2)=1$.

(4) f: $R \to R$, $f(x)=2x+1$

满射、单射、双射, 因为它是单调的并且$\mathrm{ran} f=R$.

(5) f: $R^+ \to R^+$, $f(x)=(x^2+1)/x$

有极小值$f(1)=2$. 该函数既不单射也不满射.

构造从A到B的双射函数

有穷集之间的构造

例5 $A=P(\{1,2,3\})$, $B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$

解 $A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

$B=\{ f_0, f_1, \ldots , f_7 \}$, **其中**

$f_0=\{<1,0>,<2,0>,<3,0>\}$, $f_1=\{<1,0>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_2=\{<1,0>,<2,1>,<3,0>\}$, $f_3=\{<1,0>,<2,1>,<3,1>\}$,

$f_4=\{<1,1>,<2,0>,<3,0>\}$, $f_5=\{<1,1>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_6=\{<1,1>,<2,1>,<3,0>\}$, $f_7=\{<1,1>,<2,1>,<3,1>\}$.

令 $f: A\to B$,

$f(\varnothing)=f_0$, $f(\{1\})=f_1$, $f(\{2\})=f_2$, $f(\{3\})=f_3$,

$f(\{1,2\})=f_4$, $f(\{1,3\})=f_5$, $f(\{2,3\})=f_6$, $f(\{1,2,3\})=f_7$

构造从A到B的双射函数（续）

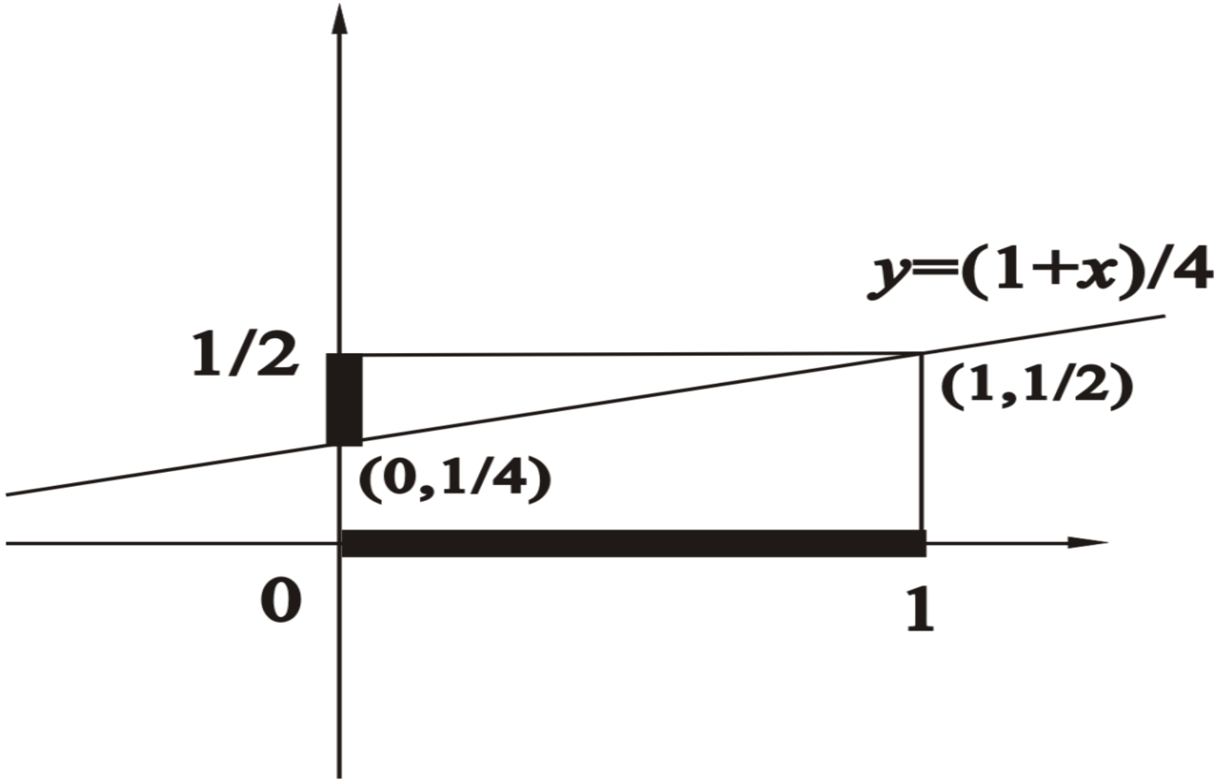
实数区间之间构造双射

构造方法：直线方程

例6 $A=[0,1]$

$B=[1/4,1/2]$

构造双射 $f:A\to B$



解

令 f: $[0,1]\to[1/4,1/2]$

$f(x)=(x+1)/4$

构造从*A*到*B*的双射函数（续）

*A*与自然数集合之间构造双射

方法：将*A*中元素排成有序图形，然后从第一个元素开始

按照次序与自然数对应

例7　$A=Z, B=N$，构造双射 f：$A \to B$

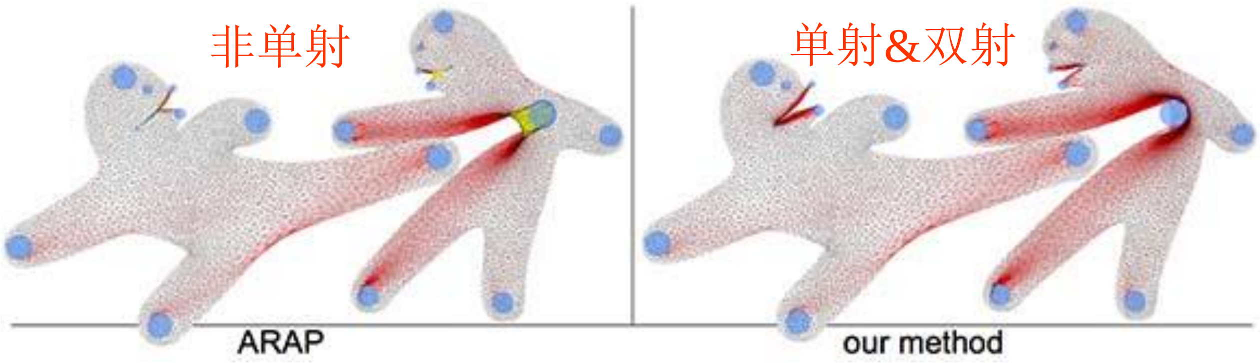
将Z中元素以下列顺序排列并与N中元素对应：

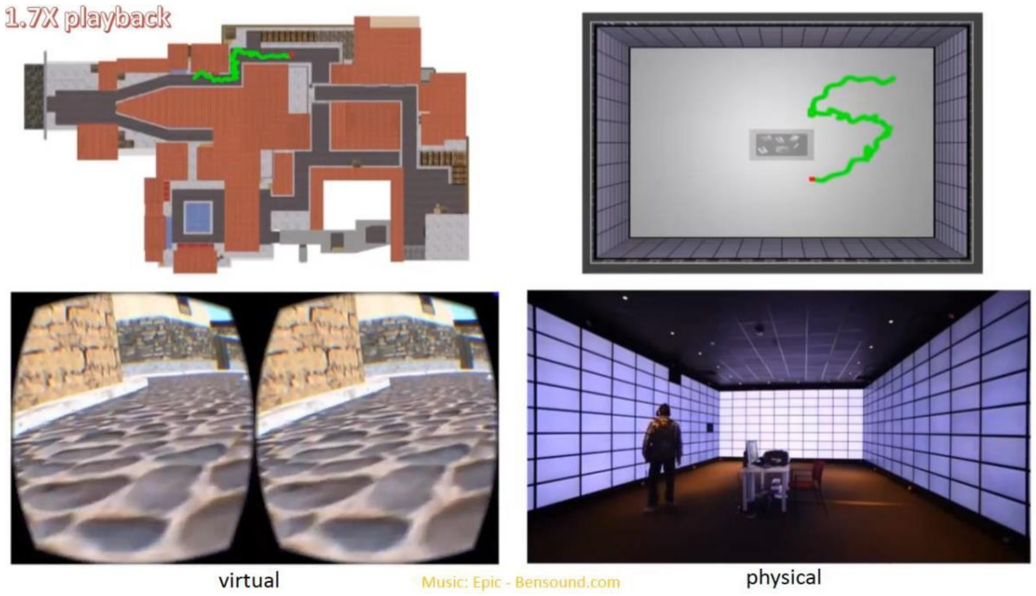
$$
\begin{array}{llllllll}
\mathrm{Z}: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3\ \ldots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\mathrm{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\ \ldots
\end{array}
$$

则这种对应所表示的函数是：

$$
f\text{:}\ \ \mathrm{Z} \to \mathrm{N},\ f(x) = \begin{cases} 2x & \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}
$$

例：变形与VR场景映射


非单射
单射&双射
ARAP
our method


1.7X playback
virtual
Music: Epic - Bensound.com
physical

函数运算

- 逆函数
  - 逆函数存在的条件
  - 逆函数的性质
- 函数的复合
  - 函数复合的定理
  - 函数复合的性质

逆函数存在的条件

任给函数 F, 它的逆F^{-1}不一定是函数, 是二元关系.

实例： $F=\{<a, b>,<c, b>\}$， $F^{-1}=\{<b, a>,<b, c>\}$

任给单射函数 f： $A\to B$, 则 f^{-1}是函数, 且是从 $\mathrm{ran}f$ 到 A的双射函数, 但不一定是从 B 到 A 的双射函数.

实例： $f: N \to N,\ f(x) = 2x,$

$f^{-1}: \mathrm{ran}f \to \mathrm{N},\ f^{-1}(x) = x/2$

逆函数的定义及性质

对于双射函数f：$A\to B$, 称 f^{-1}：$B\to A$是它的**反函数**.

反函数的性质

定理 设 f：$A\to B$是双射的, 则

$$f^{-1}\circ f = I_A,\quad f\circ f^{-1} = I_B$$

对于双射函数 f：$A\to A$, 有

$$f^{-1}\circ f = f\circ f^{-1} = I_A$$

逆函数

定理 设 f: $A\to B$是双射的, 则f^{-1}: $B\to A$也是双射的.

证 因为 f 是函数, 所以 f^{-1} 是关系, 且

$$\text{dom}\, f^{-1} = \text{ran}f = B\ , \qquad \text{ran}\, f^{-1} = \text{dom}f = A,$$

对于任意的 $y\in B = \text{dom}\, f^{-1}$, 假设有$x_1, x_2\in A$使得

$$<y, x_1>\in f^{-1}\wedge<y, x_2>\in f^{-1}$$

成立,

则由逆的定义有

$$<x_1, y>\in f\wedge<x_2, y>\in f$$

根据 f 的单射性可得 $x_1 = x_2$, 从而证明了f^{-1}是函数, 且是满射的.

逆函数

定理 设 f: $A \to B$ 是双射的，则 f^{-1}: $B \to A$ 也是双射的.

下面证明 f^{-1} 的单射性.

若存在 $y_1, y_2 \in B$ 使得 $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$, 从而有

$$<y_1, x> \in f^{-1} \wedge <y_2, x> \in f^{-1}$$

$$\Rightarrow <x, y_1> \in f \wedge <x, y_2> \in f \Rightarrow y_1 = y_2$$

函数复合的定理

定理 设F, G是函数，则$F \circ G$也是函数，且满足

(1) $\mathrm{dom}(F \circ G) = \{ x \mid x \in \mathrm{dom}G \land G(x) \in \mathrm{dom}F \}$

(2) $\forall x \in \mathrm{dom}(F \circ G)$ 有 $F \circ G(x) = F(G(x))$

推论1 设F, G, H为函数，则 $(F \circ G) \circ H$ 和 $F \circ (G \circ H)$

都是函数，且 $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$

推论2 设 g：$A \to B$, f：$B \to C$, 则 $f \circ g$：$A \to C$, 且

$\forall x \in A$ 都有 $f \circ g(x) = f(g(x))$.

函数复合运算的性质

定理 设 g：$A \to B$, f：$B \to C$.

(1) 如果 g：$A \to B$, f：$B \to C$ 都是满射的，则 $f \circ g$：$A \to C$也是满射的.

(2) 如果 g：$A \to B$, f：$B \to C$ 都是单射的，则 $f \circ g$：$A \to C$也是单射的.

(3) 如果 g：$A \to B$, f：$B \to C$ 都是双射的，则 $f \circ g$：$A \to C$也是双射的.

证 (1) $\forall c \in C$, 由 f：$B \to C$ 的满射性, $\exists b \in B$ 使得$f(b)=c$.

对这个b, 由 g：$A \to B$ 的满射性，$\exists a \in A$ 使得 $g(a)=b$.

由合成定理有 $f \circ g(a)=f(g(a))=f(b)=c$

从而证明了 $f \circ g$：$A \to C$是满射的.

(2) 假设存在 $x_1, x_2 \in A$ 使得 $f \circ g(x_1) = f \circ g(x_2)$

由合成定理有 $f(g(x_1))=f(g(x_2))$.

因为 f: $B \rightarrow C$ 是单射的， 故 $g(x_1)=g(x_2)$. 又由于

g: $A \rightarrow B$ 也是单射的， 所以 $x_1=x_2$. 从而证明：

$f \circ g$: $A \rightarrow C$ 是单射的.

(3) 由 (1) 和 (2) 得证.

定理 设 $f: A \rightarrow B$，则：$f = f \circ I_A = I_B \circ f$

函数复合与反函数的计算

例 设 f: $R \to R$, g: $R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 3 \\ -2 & x < 3 \end{cases} \qquad g(x) = x + 2$$

求 $f \circ g$, $g \circ f$. 如果 f 和 g 存在反函数，求出它们的反函数.

解

$$f \circ g = \begin{cases} (x+2)^2 & x \geq 1 \\ -2 & x < 1 \end{cases} \qquad g \circ f = \begin{cases} x^2 + 2 & x \geq 3 \\ 0 & x < 3 \end{cases}$$

f: $R \to R$不是双射的，不存在反函数。

g: $R \to R$是双射的，它的反函数是 g^{-1}: $R \to R$, $g^{-1}(x) = x-2$

函数的建模方法

❖ 基于方程的建模：

* 微分方程：

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial_u}{\partial_{x_1}}, \ldots, \frac{\partial_u^\alpha}{\partial_{x_1}^{a_1}\partial_{x_2}^{a_2}\ldots\partial_{x_n}^{a_n}}\right)=0$$

* 积分方程：

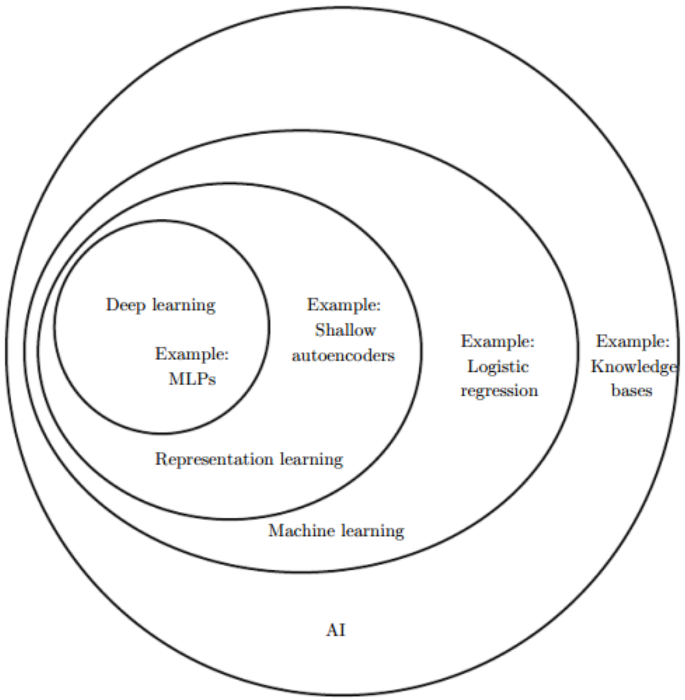
$$\int_a^x K(x, y)\varphi(y)\mathrm{d}y=\psi(x)$$

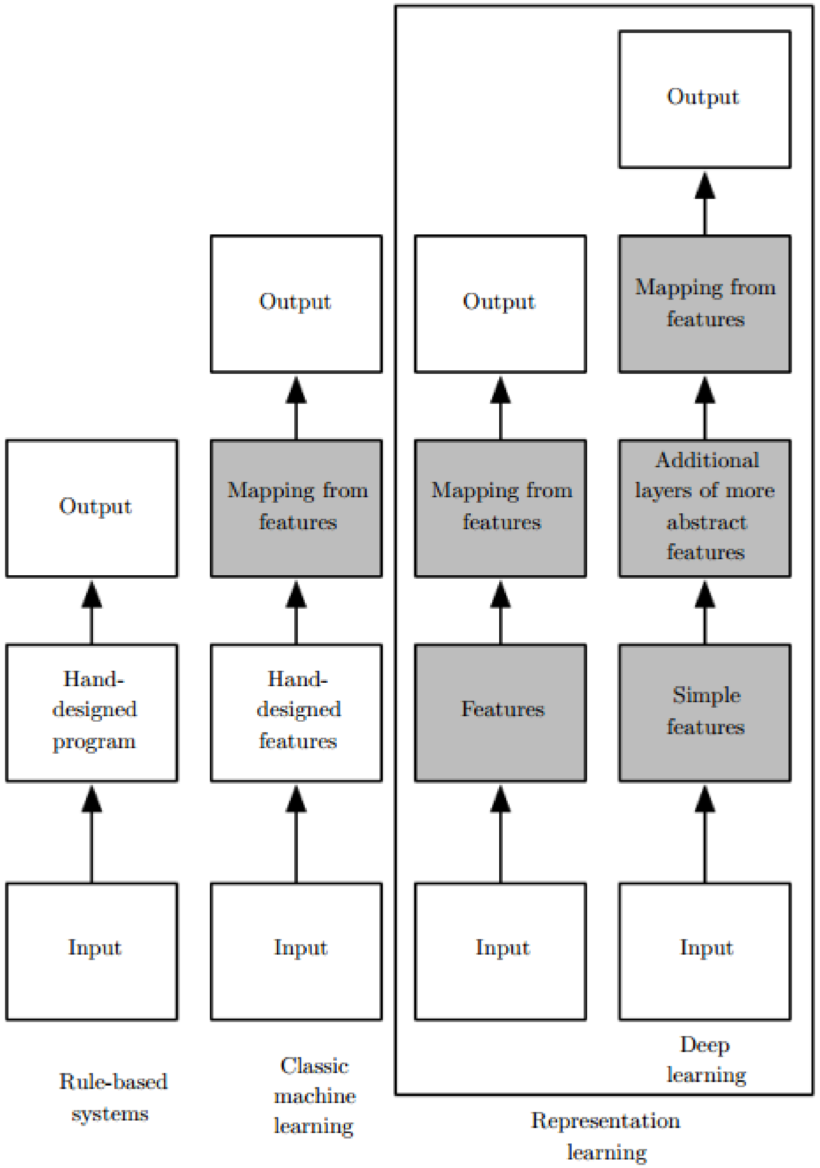
* 优化方程：

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s.t. } g_i(x)\geq 0 \quad (i=1.2\cdots,m) \\ \qquad h_j(x)=0 \quad (j=1,2\cdots,l) \end{cases}$$

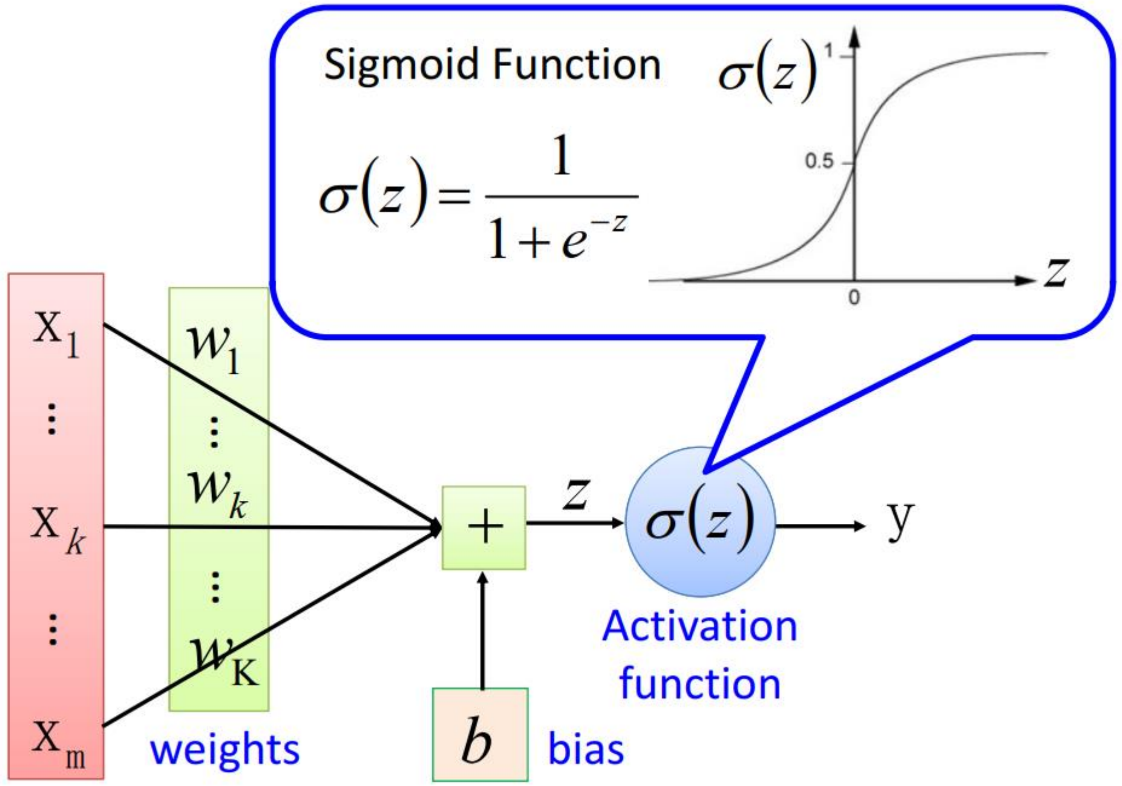
❖ 基于（机器）学习的建模：

机器学习


Deep learning
Example: MLPs
Example: Shallow autoencoders
Representation learning
Example: Logistic regression
Machine learning
Example: Knowledge bases
AI

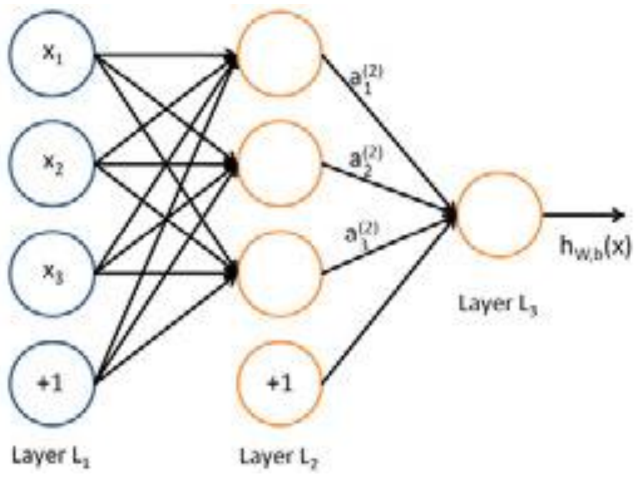

Output
Mapping from features
Additional layers of more abstract features
Simple features
Input
Output
Mapping from features
Features
Input
Output
Mapping from features
Hand-designed features
Input
Output
Hand-designed program
Input
Rule-based systems
Classic machine learning
Deep learning
Representation learning

例：神经元（复合函数）

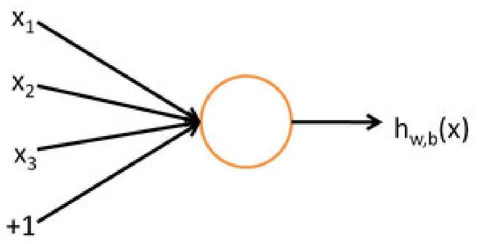


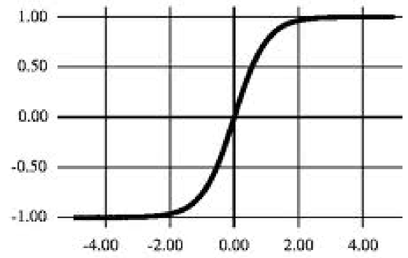
$$z = w_1 x_1 + \cdots + w_k x_k + \cdots + w_m x_m + b$$

例：神经网络（多层复合函数）



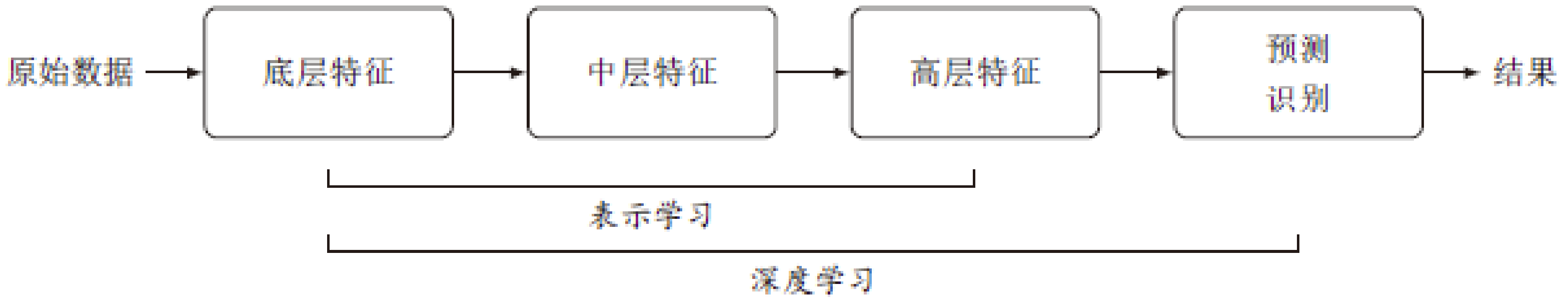
$$a_1^{(2)} = f(W_{11}^{(1)}x_1 + W_{12}^{(1)}x_2 + W_{13}^{(1)}x_3 + b_1^{(1)})$$
$$a_2^{(2)} = f(W_{21}^{(1)}x_1 + W_{22}^{(1)}x_2 + W_{23}^{(1)}x_3 + b_2^{(1)})$$
$$a_3^{(2)} = f(W_{31}^{(1)}x_1 + W_{32}^{(1)}x_2 + W_{33}^{(1)}x_3 + b_3^{(1)})$$
$$h_{W,b}(x) = a_1^{(3)} = f(W_{11}^{(2)}a_1^{(2)} + W_{12}^{(2)}a_2^{(2)} + W_{13}^{(2)}a_3^{(2)} + b_1^{(2)})$$





$$h_{W,b}(x) = f(W^T x) = f(\textstyle\sum_{i=1}^{3} W_i x_i + b)$$

深度学习的数学描述



$y = f(x)$ 浅层学习

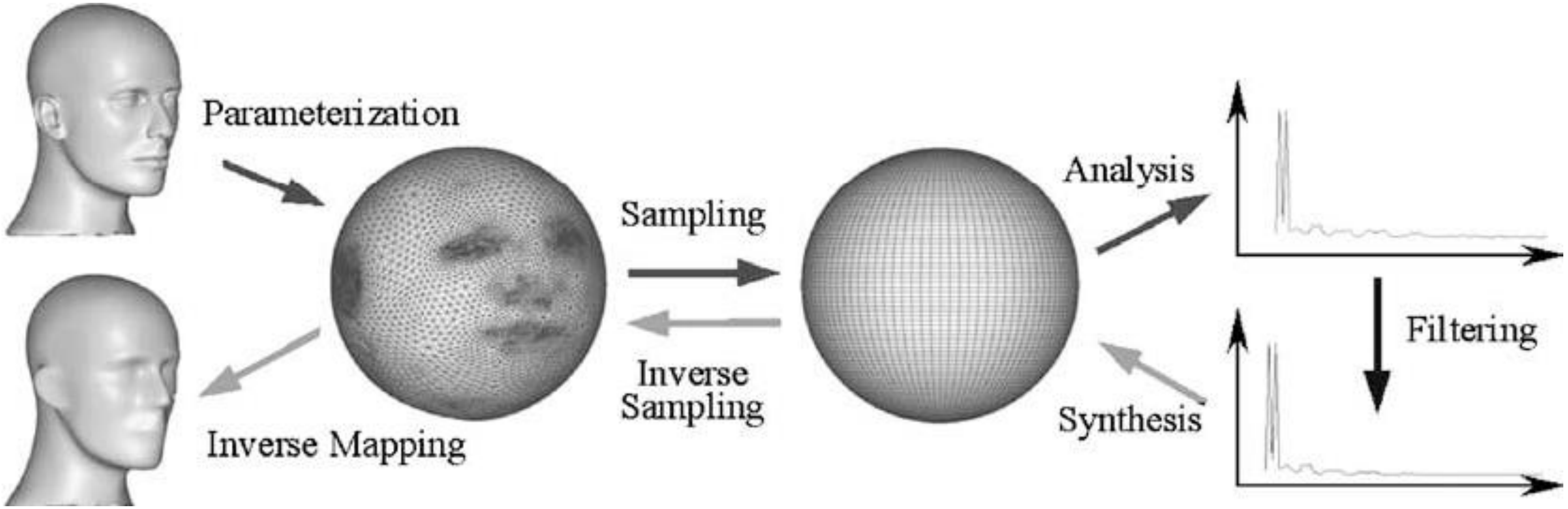
$y = f^2(f^1(x))$

…

$y = f^5(f^4(f^3(f^2(f^1(x)))))$ 深度学习

当$f^l\ x = \sigma\ W^l x$时为神经网络！

例：三维模型处理（反函数）



球面傅里叶变换

课后习题

- ❖9, 11, 15, 18, 21
- ❖答题派如图：

一、简答题

1. 4.14 设R的关系图如下图所示，试给出$r(R), s(R), t(R)$的关系图。 (20)

图 4-2

2. 4.15 对任意非空集合S, $P(S)-\{\varnothing\}$是S的非空子集族，那么$P(S)-\{\varnothing\}$能否构成S的划分? (20)

3. 4.16 画出下列集合关于整除关系的哈斯图。 (20)
  (1) $\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$。
  (2) $\{1,2,...,9\}$。
  并指出它的极小元、最小元、极大元、最大元。

二、简答题

4. 4.17 在下列的关系中哪些能构成函数? (20)
  (1) $\{<x_1,x_2>|x_1,x_2\in N, x_1+x_2<10\}$.
  (2) $\{<y_1,y_2>|y_1,y_2\in R, y_2=y_1^2\}$.
  (3) $\{<y_1,y_2>|y_1,y_2\in R, y_2^2=y_1\}$.

5. 4.25 对下述函数f,g及集合A,B，计算$f\circ g$, $f\circ g(A)$和$f\circ g(B)$，并说明$f\circ g$是否是单射或满射。 (20)
  (1) $f:R\to R, f(x)=x^4-x^2$.
  $g:N\to R, g(x)=\sqrt{x}$.
  $A=\{2,4,6,8,10\}, B=\{0,1\}$.
  (2) $f:Z\to R, f(x)=e^x$.
  $g:Z\to Z, g(x)=x^2$.
  $A=N, B=\{2k|\ k\in N\}$.