

浙江理工大学 2009 —2010 学年第 一 学期

《复变函数与积分变换 B 》期末试卷（ A ）卷

班级：_____ 学号：_____ 姓名：_____

一、填空题（10×3=30 分）

1. 设 $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ ，则 $f(z)$ 的孤立奇点有_____.
2. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$ 的收敛半径为_____.
3. $\text{Res}(\frac{e^z}{z^n}, 0) = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 函数 $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ 的幂级数展开式为_____.
5. 设 $C: |z|=1$ ，则 $\int_C (z-1)dz = \underline{\hspace{2cm}}$.
6. 函数 $w = \frac{1}{z}$ 将 z 平面上的曲线 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 变成 w 平面上的曲线_____.
7. $3^{3-i} = \underline{\hspace{2cm}}$.
8. 若已知 $f(z) = x(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}) + iy(1 - \frac{1}{x^2 + y^2})$ ，则其关于变量 z 的表达式为_____.
9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} z \cos z dz = \underline{\hspace{2cm}}$.
10. 单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的拉氏变换 $F(s)$ 为_____.

二、选择题（5×4=20 分）

1、下列命题正确的是（ ）

- A. $i < 2i$ B. $\overline{\frac{1}{i}z} = i\bar{z}$ C. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ D. 零的幅角为零

2、下列积分中，其积分值不为零的是（ ）

- A. $\oint_{|z|=2} \frac{z}{z-3} dz$ B. $\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz$ C. $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^5} dz$ D. $\oint_{|z|=1} \frac{z dz}{z^2 - 3}$

3、 $z=0$ 为函数 $f(z) = e^{\frac{2}{z}}$ 的（ ）。

A. 一级极点 B. 可去奇点 C. 本性奇点 D. 非孤立奇点

4、设 $f(z) = \frac{z-1}{z^2+2z}$, 则 $\text{Res}[f(z), 0] = (\quad)$ 。

A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{3}{2}$

5、 $\sum ch(\frac{i}{n})(z-1)^n$ 的收敛半径为 (\quad) 。

A. 1 B. 2 C. 0 D. ∞

三、计算题 (50 分)

1. 设 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, 求 $f(z)$ 在 $D = \{z: 0 < |z| < 1\}$ 内的罗朗展式. (5 分)

2. 计算下列积分。(10 分)

(1) $\int_{|z|=2} \frac{1}{\cos z} dz,$

(2) $\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{2})^2}$

3. 求函数 $\sin(2z^3)$ 的幂级数展开式。(5 分)

4. 设 $u = x^2 - y^2 + xy$ ，验证 u 是调和函数，并求解析函数 $f(z) = u + iv$ ，使之 $f(i) = -1 + i$ 。（8 分）

5. 设 $f(z) = my^3 + nx^2y + i(x^3 + lxy^2)$ 为复平面上的解析函数，试确定 l, m, n 的值。（6 分）

6. 求函数 $f(t) = e^{-\beta|t|} (\beta > 0)$ 的 Fourier 变换，并推证 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\beta^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2\beta} e^{-\beta|t|}$ 。（10 分）

7. 求正弦函数 $f(t) = \sin kt$ (k 为实数) 的 Laplace 变换。（6 分）

浙江理工大学 2009 —2010 学年第 一 学期

《复变函数与积分变换 B》期末试卷（A）卷标准答案和评分标准

一、填空题。

1. $z = \pm i$; 2. 1; 3. $\frac{1}{(n-1)!}$; 4. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$ ($|z| < 1$); 5. 0; 6. $u = \frac{1}{2}$;

7. $27e^{2k\pi} [\cos(\ln 3) - i \sin(\ln 3)], k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 8. $f(z) = z + \frac{1}{z}$

9. $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \frac{\pi}{4}) - 1$ 10. 1

二、选择题

1.B; 2.C; 3.C; 4.A; 5.A

三、计算题

1. 解 因为 $0 < |z| < 1$,

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2(1-\frac{z}{2})} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z}{2})^n. \quad (5')$$

2. 解 (1) 因为

$$\operatorname{Res}[f(z), z = -\frac{\pi}{2}] = \lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{z + \frac{\pi}{2}}{\cos z} = \lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\sin z} = 1$$

$$\operatorname{Res}[f(z), z = \frac{\pi}{2}] = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{z - \frac{\pi}{2}}{\cos z} = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\sin z} = -1.$$

$$\text{即 } \int_{|z|=2} \frac{1}{\cos z} dz = 2\pi i \left\{ [\operatorname{Res} f(z), z = -\frac{\pi}{2}] + [\operatorname{Res} f(z), z = \frac{\pi}{2}] \right\} = 0 \quad (5')$$

$$(2)、\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{2})^2} dz = 2\pi i (\sin z)' \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 2\pi i \cos z \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = 0 \quad (10')$$

$$3. \text{ 解 } \sin(2z^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2z^3)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} z^{6n+3}}{(2n+1)!}, R = +\infty \quad (5')$$

4、解: $u = x^2 - y^2 + xy \Rightarrow u_x = 2x + y, u_y = -2y + x$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0 \Rightarrow u \text{ 是调和函数.} \quad (2')$$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (-u_y)dx + u_x dy + c = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2y - x)dx + (2x + y)dy + c \\ &= \int_0^x (-x)dx + \int_0^y (2x + y)dy + c \\ &= -\frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} + c \end{aligned} \quad (6')$$

$$\Rightarrow f(z) = u + iv = (x^2 - y^2 + xy) + i(-\frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}) = z^2 + \frac{i}{2}(1 - z^2). \quad (8')$$

5、解 设 $u(x, y) = my^3 + nx^2y, v(x, y) = x^3 + lxy^2$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2nxy, \frac{\partial u}{\partial y} = 3my^2 + nx^2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 + ly^2, \frac{\partial v}{\partial y} = 2lxy, \quad (2')$$

$$\text{因 } f(z) \text{ 解析, 由 } C-R \text{ 条件有 } \begin{cases} 2nxy = 2lxy \\ 3my^2 + nx^2 = -3x^2 - ly^2 \end{cases} \quad (4')$$

$$\text{解得 } l = -3, m = 1, n = -3. \quad (6')$$

$$6. \quad F(w) = F[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|t|} e^{-jwt} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cos wtdt = \frac{2\beta}{\beta^2 + w^2} \quad (3')$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(w) e^{jwt} dw = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{2\beta}{\beta^2 + w^2} \cos wtdw \\ &= \frac{2\beta}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos wt}{\beta^2 + w^2} dw \end{aligned} \quad (6')$$

$$\text{即 } \int_0^{+\infty} \frac{\cos wt}{\beta^2 + w^2} dw = \frac{\pi}{2\beta} f(t) = \frac{\pi}{2\beta} e^{-\beta|t|} (\beta > 0) \quad (9')$$

$$7. \quad L(\sin kt) = \int_0^{+\infty} \sin kt e^{-st} dt \quad (2')$$

$$= \frac{e^{-st}}{s^2 + k^2} (-s \sin kt - k \cos kt) \Big|_0^{+\infty} = \frac{k}{s^2 + k^2} (\operatorname{Re}(s) > 0) \quad (6')$$

浙江理工大学 2009 —2010 学年第 一 学期

《复变函数与积分变换 B》期末试卷（ B ）卷

班级：_____ 学号：_____ 姓名：_____

一、 填空题。（10×3=30 分）

1. 设 $z = 1 - \sqrt{3}i$ ，则 $|z| = \underline{\hspace{2cm}}$, $\arg z = \underline{\hspace{2cm}}$, $\bar{z} = \underline{\hspace{2cm}}$

2. $\text{Res}(\frac{e^z}{z^n}, 0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (\cos i n) z^n$ 的收敛半径为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设 a 为函数 $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的一阶极点，且 $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$ ，则

$\text{Res}[f(z), a] = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 设 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，则 $z^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的拉氏变换 $F(s)$ 为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设 $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ ，则 $f(z)$ 在 $z=0$ 的邻域内的泰勒展式为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

8. $\int_0^{1+i} z e^z dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设 $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}$ ，则 $f(z)$ 在 $z=0$ 处的留数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

10. $e^{\frac{1}{4}(1+i\pi)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、 选择题(5×4=20 分)

1、复数 $z = \sin \frac{\pi}{3} - i \cos \frac{\pi}{3}$ 的幅角主值为 ()。

A. $-\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{6}$

C. $-\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{3}$

2. 若函数 $f(z)$ 在正向简单闭曲线 C 所包围的区域 D 内解析，在 C 上连续，且 $z=a$

为 D 内任一点， n 为正整数，则积分 $\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$ 等于 ()

A. $\frac{2\pi i}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)$

B. $\frac{2\pi i}{n!} f(a)$

C. $2\pi i f^{(n)}(a)$

D. $\frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a)$

3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}$ 的收敛区域为 ()

- A. $0 < |z| < +\infty$ B. $|z| < +\infty$ C. $0 < |z| < -1$ D. $|z| < 1$

4. $z = \frac{\pi}{3}$ 是函数 $f(z) = \frac{\sin(z - \frac{\pi}{3})}{3z - \pi}$ 的 ()

- A. 一阶极点 B. 可去奇点 C. 一阶零点 D. 本性奇点

5. 设 $Q(z)$ 在点 $z=0$ 处解析, $f(z) = \frac{Q(z)}{z(z-1)}$, 则 $\text{Res}[f(z), 0]$ 等于 ()

- A. $Q(0)$ B. $-Q(0)$ C. $Q'(0)$ D. $-Q'(0)$

三、计算题 (50 分)

1. 求 $\oint_c \frac{2z-1}{z^2-z} dz$, c 为包含 $|z|=1$ 在内的任意简单正向曲线。(10 分)

2. 把下列函数展成 z 的幂级数; (10 分)

- (1). $\frac{1}{(1+z)^2}$ (2). $\ln(1+z)$

欢迎加入浙江理工大学考试资料群：462349252

3. 设 $u = x^2 - y^2 + xy$ ，验证 u 是调和函数，并求解析函数 $f(z) = u + iv$ ，使之 $f(i) = -1 + i$ 。(9 分)

4. 试将函数 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域 $1 < |z| < 2$ 内展开为洛朗级数。(6 分)

5. 求函数 $f(t) = e^{-\beta|t|}$ ($\beta > 0$) 的 Fourier 变换，并推证 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\beta^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2\beta} e^{-\beta|t|}$ 。(9 分)

6. 求正弦函数 $f(t) = \sin kt$ (k 为实数) 的 Laplace 变换。(6 分)

欢迎加入浙江理工大学考试资料群：462349252

浙江理工大学 2009 —2010 学年第 一 学期

《复变函数与积分变换 B》期末试卷（ B ）卷标准答案和评分标准

一. 填空题。

1. $2, -\frac{\pi}{3}, 1+\sqrt{3}i$; 2. $\frac{1}{(n-1)!}$. 3. $\frac{1}{e}$ 4. $\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$ 5. $r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$; 6.1

7. $1+z^2+z^4+\cdots+z^{2n}+\cdots$; 8. $ie^{1+i}+1$; 9. $-\frac{1}{6}$; 10. $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{4}}(1+i)$;

二. 选择题

1.A; 2.D 3.B; 4.B; 5.B

三. 计算题

$$1. \oint_c \frac{2z-1}{z^2-z} dz = \oint_{c_1} \frac{2z-1}{z^2-z} dz + \oint_{c_2} \frac{2z-1}{z^2-z} dz \quad (2')$$

$$= \oint_{c_1} \frac{2z-1}{z} dz + \oint_{c_2} \frac{2z-1}{z-1} dz \quad (8')$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{2z-1}{z-1} \Big|_{z=0} + 2\pi i \cdot \frac{2z-1}{z} \Big|_{z=1} = 4\pi i \quad (10')$$

$$2.(1). \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{d}{dz} \left[-\frac{1}{1+z} \right] = -\frac{d}{dz} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^{n-1}, |z| < 1, \quad (5')$$

$$(2) . \ln(1+z) = \int_0^z \frac{dz}{1+z} = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}, |z| < 1, \quad (10').$$

$$3. \text{解: } u = x^2 - y^2 + xy \Rightarrow u_x = 2x + y, u_y = -2y + x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0 \Rightarrow u \text{ 是调和函数.} \quad (3')$$

$$v(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (-u_y) dx + u_x dy + c = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2y - x) dx + (2x + y) dy + c$$

$$= \int_0^x (-x) dx + \int_0^y (2x + y) dy + c$$

$$= -\frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} + c \quad (7')$$

$$\Rightarrow f(z) = u + iv = (x^2 - y^2 + xy) + i(-\frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}) = z^2 + \frac{i}{2}(1 - z^2). \quad (9')$$

$$4. \quad 1 < |z| < 2 \text{ 时 } f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{-1}{2(1-\frac{z}{2})} - \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} \quad (3')$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n} \quad (6')$$

$$5. \quad F(w) = F[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|t|} e^{-j\omega t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cos \omega t dt = \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2} \quad (3')$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(w) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2} \cos \omega t d\omega$$

$$= \frac{2\beta}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\beta^2 + \omega^2} d\omega \quad (6')$$

$$\text{即 } \int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\beta^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2\beta} f(t) = \frac{\pi}{2\beta} e^{-\beta|t|} (\beta > 0) \quad (9')$$

$$6. \quad L(\sin kt) = \int_0^{+\infty} \sin kt e^{-st} dt \quad (2')$$

$$= \frac{e^{-st}}{s^2 + k^2} (-s \sin kt - k \cos kt) \bigg|_0^{+\infty} = \frac{k}{s^2 + k^2} (\operatorname{Re}(s) > 0) \quad (6')$$

浙江理工大学 2015/2016 学年第一学期《复变函数与积分变换》期末试卷 (A)

姓名_____ 学号_____ 班级_____ 得分_____

一、填空题 (4x10=40 分)

1、 $1+i$ 的辐角为_____.

2、 $\operatorname{Ln}(-1)=$ _____.

3、 $\int_0^i z \sin z dz =$ _____.

4、函数 $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$ 的奇点为_____.

5、幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (1+\sqrt{2})^n z^n$ 的收敛半径为_____.

6、设 C 为逆时针方向的圆周： $|z|=r<1$ ，则 $\oint_C \sum_{n=-2}^{\infty} (n+3)^2 z^n dz =$ _____.

7、设 C 为逆时针方向的圆周： $|z|=r<1$ ， $\oint_C \frac{dz}{z-1} =$ _____.

8、 $[\sin(-i)]^2 + [\cos(-i)]^2 =$ _____.

9、函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 D 内解析，则其满足的 Cauchy-Riemann 方程为_____.

10、若 z_0 是 $f(z)$ 的极点，则 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) =$ _____.

二、计算 (4x5=20 分)

1、计算积分 $\oint_C \frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}$ ，其中 C 为正圆周 $|z|=2$ 。

2、将函数 $f(z) = \frac{1}{z(z-2)^2}$ 分别在圆环 $0 < |z| < 2$ 内展开为罗朗级数。

3、求解析函数 $\sin^2 z$ 的麦克劳林展开式。

4、计算留数 $\operatorname{Res}\left(\frac{\sin z}{z^3}, 0\right)$ 。

5、计算 $\sqrt[3]{-1}$ 。

三、解答题。(10x4=40 分)

1. 讨论函数 $f(z) = \frac{1+\cos z}{z^2(z^2+1)^2}$ 的奇点类型，若是极点，指出其级数。

2. 求函数 $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ ae^{-\beta t}, & t \geq 0 \end{cases}$ 的傅立叶变换，其中 $a \neq 0, \beta > 0$ 。

3. 求函数 $f(t) = t^2 + 3 \sin t \delta(t)$ 的拉普拉斯变换。

4. 用拉普拉斯变换方法解方程 $y'' + 2y' - 3y = e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ 。

参考-1

一、单项选择题（3分×5=15分）.

1. z 为复数, 以下结论**错误**的是().

(A) $z^2 + 1 \geq 0$

(B) $|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$

(C) $\operatorname{Re} z \leq |z|$

(D) $\int \cos z dz = \sin z + C$

2. $z=1$ 是 $\frac{z^3+z+4}{(z-1)^3}$ 的 () 级极点.

(A) 5

(B) 2

(C) 3

(D) 1

3. 若 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, 则 ().

(A) $f(z)$ 在区域 D 内恒为常数

(B) $f'(z)$ 在区域 D 内恒为常数

(C) $f(z)$ 在区域 D 内有界

(D) $f(z)$ 在区域 D 内连续

4. 若 C : 单位圆周 $|z|=1$, 逆时针方向, 则积分

$\oint_C \frac{z^3+3z+1}{z^2} dz$ 的值等于 ().

(A) $2\pi i$;

(B) 0;

(C) $6\pi i$;

(D) $3\pi i$.

5. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} z^n$ 的收敛域为 ().

(A) $|z-1| < +\infty$,

(B) $|z| < 3$

(C) $|z-1| < 3$

(D) $|z| < +\infty$

二、填空题（3分×10=30分）.

1. 辐角主值 $\arg(1+i) =$ _____.

2. $a = \cos \theta + i \sin \theta$, 则 $|a| =$ _____.

3. $(1+i)^{16} =$ _____.

4. $\operatorname{Ln}(-1)$ 的主值为_____.

5. 双边级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 的收敛圆环为_____.

6. 设 $L[f(t)]$ 表示函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换, $L[1] =$ _____.

7. 将函数 $\frac{1}{(1+z)^3}$ 在 $z=0$ 处展开成 $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n z^n$ 的形式,

$$\frac{1}{(1+z)^3} = \underline{\hspace{10cm}}.$$

8. 如果函数 $f(z) = u + iv$ 解析, 则 Cauchy-Riemann 方程为 $\underline{\hspace{10cm}}$.

9. $e^{100\pi i} = \underline{\hspace{10cm}}.$

10. $\sin(2i) = \underline{\hspace{10cm}}.$

三. 解答计算题 (第 1 至第 9 题每题 5 分, 第 10 题 10 分, 共 55 分)

1. 计算 $(-1)^{\sqrt{2}}.$

2. $\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z+e^z)}{z} dz.$ (积分方向沿单位圆周 $|z|=1$ 的逆时针方向进行)

3. (1) 验证函数 $u(x, y) = e^x \cos y + x$ 为调和函数.

(2) 求一调和函数 $v(x, y)$, 使 $f(z) = u + iv$ 是解析函数.

4. 用 Cauchy-Riemann 方程讨论函数 $w = |z|^2 + z$ 的解析性.

5. 把函数 $f(z) = (\cos z)^2$ 展开成 z 的幂级数, 并指出它们的收敛半径.

6. 把函数 $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$ 在指定的圆环 $1 < |z| < 2$ 内展开成罗朗级数.

7. 已知 C : 单位圆周 $|z|=1$, 方向为逆时针方向. 分别讨论点 a 在 C 内和 C 外情况下积分

$$\int_C \frac{1+z^3}{(z-a)^3} dz$$

的值.

8. 求函数 $f(t) = t^2 - t$ 的拉普拉斯变换.

9. 求函数 $f(t) = \begin{cases} e^t, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$ 的傅立叶变换.

10. 用拉普拉斯变换方法求方程 $y'' - y = e^{2t}$, $y(0) = y'(0) = 0$ 的解.

一、选择题 (3 分 \times 5 = 15 分)

1. A 2. C 3. D 4. C 5. B

二、填空题 (每空 3 分 \times 10 = 30 分)

1. $\frac{\pi}{4}$ 2. 1 3. 2^8 4. πi ; 5. $3 < |z| < +\infty$
 6. $\frac{1}{s}$, ($\text{Re } s > 0$) 7. $1 - 3z + \dots + (-1)^n \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2} + \dots$, $|z| < 1$;
 8. $u_x = v_y, u_y = -v_x$; 9. 1 ; 10. $\frac{e^2 - e^{-2}}{2} i$.

三、解答计算题 (第 1 至第 9 题每题 5 分, 第 10 题 10 分, 共 55 分)

1. $(-1)^{\sqrt{2}} = \exp\{\sqrt{2}Ln(-1)\}$ 3 分
 $= \exp\{\sqrt{2}(2k+1)\pi i\}$ 5 分 (5 分)

2. 由 Cauchy 积分公式, $I = 2\pi i \cos(z + e^z)|_{z=0} = 2\pi i \cos 1$ (5 分)

3. (1) $u = e^x \cos y + 1$, $u_{xx} = e^x \cos y$, $u_{yy} = -e^x \cos y$, $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (2 分)

(2) $f'(z) = u_x - iu_y = e^z + 1$ (4 分)
 $f(z) = e^z + z + C$

$v = e^x \sin y + y + C$ (5 分)

4. $u = x^2 + y^2 + x$, $v = y$, $u_x = 2x + 1$, $u_y = 2y$, $v_x = 0$, $v_y = 1$, (3 分)

$u_x = v_y$, $u_y = -v_x \Rightarrow x = y = 0$

所以函数只在原点可导, 处处不解析。 (5 分)

5. $f(z) = \frac{1 + \cos 2z}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n z^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad |z| < +\infty$ (5 分)

6. $f(z) = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2}$ (2 分)

装

$$= \frac{1}{z} \frac{1}{1 + \frac{1}{z}} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z}{2}}$$

(3 分)

$$= \frac{1}{z} \left[1 - \frac{1}{z} + \dots + \frac{(-1)^n}{z^n} + \dots \right] - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{z}{2} + \dots + \frac{(-1)^n z^n}{2^n} + \dots \right]$$

(5 分)

7. 当 a 在 C 外时, 积分等于 0; (2 分)
当 a 在 C 内时, 积分

$$\int_C \frac{1+z^3}{(z-a)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} [1+z^3]''|_{z=a} = 6i\pi a$$

(5 分)

订

8. $L[f(t)] = \int_0^{+\infty} (t^2 - t) e^{-st} dt$ (3 分)

$$= \frac{2}{s} \int_0^{+\infty} t e^{-st} dt - \int_0^{+\infty} t e^{-st} dt = \frac{1}{s^2} \left(\frac{2}{s} - 1 \right), \quad \operatorname{Re} s > 0$$

(5 分)

9. $F[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ (3 分)

$$= \int_{-1}^1 e^t e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{1-j\omega} [e^{1-j\omega} - e^{-j\omega-1}]$$

(4 分)

$$= \frac{(e - \frac{1}{e}) \cos \omega + \omega(e + \frac{1}{e}) \sin \omega}{1 + \omega^2} + j \frac{(e - \frac{1}{e}) \omega \cos \omega - (e + \frac{1}{e}) \omega \sin \omega}{1 + \omega^2}$$

(5 分)

10. 设 $L[y(t)] = Y(s)$, (2 分)

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - Y(s) = \frac{1}{s-2}, \quad (6 \text{ 分})$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2-1)(s-2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{3} \frac{1}{s-2} - \frac{1}{6} \frac{1}{s-1}$$

(8 分)

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{6} e^t - \frac{1}{3} e^{2t}$$

(10 分)

参考-2

一、单项选择题（3分×5=15分）.

1. $z=1$ 是 $\frac{\sin z}{(z^2-1)^2}$ 的 () 级极点.

- (A) 5 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 关于 $\cos z$ (z 为复数) 以下结论**错误**的是().

- (A) $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$ (B) $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
(C) $|\cos z| \leq 1$ (D) $\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$

3. 以下函数中是周期函数的是 ().

- (A) $e^z + 1$ (B) $\ln z$ (C) $\sin(z^3 + 1)$ (D) $z + \sin z$

4. 若积分方向沿单位圆周 $|z|=1$ 的逆时针方向进行, 则积分

$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2} dz$ 的值等于 ().

- (A) $2\pi i e$; (B) 0; (C) $2\pi i$; (D) $\frac{1}{2}$.

5. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} (z-1)^n$ 的收敛半径为 ().

- (A) 1, (B) 0, (C) $+\infty$ (D) 2

二、填空题（3分×10=30分）.

1. $(1+i)^i$ 的主值为_____.

2. 留数 $\operatorname{Res}\left(\frac{z-\sin z}{z^4}, 0\right) =$ _____.

3. 若函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 且 $|f(z)|$ 为常数, 则 $f(z) =$ _____.

4. 双边级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + 1 + z^3 + z^6 + z^9$ 的收敛圆环为_____.

5. 设 $L[f(t)]$ 表示函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换. 单位阶跃函数为 $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$, 拉普

拉斯变换 $L[u(t)+t] =$ _____.

6. 函数 $\frac{1}{(1+z)^2}$ 的麦克劳林级数 (即函数在 $z=0$ 处展开, 或表示成 $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n z^n$ 的形式),

$$\frac{1}{(1+z)^2} = \underline{\hspace{10cm}}.$$

7. 如果函数 $f(z) = u + iv$ 解析, 则 Cauchy-Riemann 方程为 $\underline{\hspace{10cm}}$.

8. 复数 $1-i$ 的辐角主值 $\arg(1-i) = \underline{\hspace{10cm}}$.

9. $i^{2017} = \underline{\hspace{10cm}}$.

10. 用欧拉公式表示 $e^{xi} = \underline{\hspace{10cm}}$.

三. 解答计算题 (第 1 至第 9 题每题 5 分, 第 10 题 10 分, 共 55 分)

1. 计算 $\operatorname{Ln}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. $\oint_{|z|=1} \sin(\sin z + e^z) dz$. (积分方向沿单位圆周 $|z|=1$ 的逆时针方向进行)

3. 讨论函数 $w = |z|^2$ 的解析性.

4. (1) 验证函数 $u(x, y) = e^x \cos y$ 为调和函数.

(2) 求一调和函数 $v(x, y)$, 使 $f(z) = u + iv$ 是解析函数.

5. 把函数 $f(z) = \ln(1+z^2)$ 展开成 z 的幂级数, 并指出它们的收敛半径.

6. 把函数 $f(z) = \frac{1}{z(z+1)^2}$ 在指定的圆环 $1 < |z+1| < +\infty$ 内展开成洛朗级数.

7. 讨论函数 $f(z) = \frac{1-e^z}{z^3(z-1)}$ 的有限奇点的类型, 若是极点, 指出极数.

8. 求函数 $f(t) = e^{3t} + 5\delta(t)$ 的拉普拉斯变换.

9. 求函数 $f(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -1 \\ e^t, & -1 \leq t \leq 1 \\ 0, & 1 < t < +\infty \end{cases}$ 的傅立叶变换.

10. 用傅立叶变换方法求方程 $y'' - y' + 2y = f(t)$ 的解, 其中 $f(t)$ 为已知函数, 且 $f(t)$ 的傅立叶变换为 $F(w)$.

一、选择题 (3 分 \times 5 = 15 分)

1. (B) 2. (C) 3. (A) 4. (C) 5. (D)

二、填空题 (每空 3 分 \times 10 = 30 分)

1. $e^{-\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i \ln \sqrt{2}}$; 2. $\frac{1}{6}$; 3. 常数; 4. $1 < |z| < +\infty$; 5. $\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}, \operatorname{Re} s > 0$

6. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^n, |z| < 1$; 7. $u_x = v_y, u_y = -v_x$; 8. $-\frac{\pi}{4}$

9. i ; 10. $\cos x + i \sin x$.

三、解答计算题 (第 1 至第 9 题每题 5 分, 第 10 题 10 分, 共 55 分)

1. $\operatorname{Ln} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \ln 1 + (2k + \frac{1}{3}) \pi i = (2k + \frac{1}{3}) \pi i$. (5 分)

2. 由于被积函数解析, 由 Cauchy 积分定理, $I = 0$. (5 分)

3. $u = x^2 + y^2, v = 0$ (2 分)

$$\begin{cases} u_x = 2x = v_y = 0 \\ u_y = 2y = -v_x = 0 \end{cases} \quad (4 \text{ 分})$$

所以函数只在原点可导, 因此处处不解析。 (5 分)

4. (1) $u = e^x \cos y, u_{xx} + u_{yy} = 0$, (2 分)

$$(2) \begin{cases} u_x = e^x \cos y = v_y \\ -u_y = e^x \sin y = v_x \end{cases} \quad (4 \text{ 分})$$

$$v = e^x \sin y + c \quad (5 \text{ 分})$$

5. $\frac{1}{1+z} = 1 - z + \cdots + (-1)^n z^n + \cdots, \quad |z| < 1$ (2 分)

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots, \quad |z| < 1 \quad (3 \text{ 分})$$

$$\ln(1+z^2) = z^2 - \frac{z^4}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2(n+1)}}{n+1} + \cdots, \quad |z| < 1 \quad (5 \text{ 分})$$

6. $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \frac{1}{(z+1)-1}$ (2 分)

$$= \frac{1}{(z+1)^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z+1}} \quad (3 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{(z+1)^3} \cdot \left(1 + \frac{1}{z+1} + \cdots + \frac{1}{(z+1)^n} + \cdots \right) \quad (5 \text{ 分})$$

7. 函数在 $z=1$ 有单极点, 函数在 $z=0$ 有 2 级极点. (5 分)

8. $L[f(t)] = \int_0^{+\infty} (e^{3t} + 5\delta(t))e^{-st} dt$ (3 分)

$$= \frac{1}{s-3} + 5 = \frac{5s-14}{s-3}. \quad (5 \text{ 分})$$

9. $F[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$ (3 分)

$$= \int_{-1}^1 e^{(1-j\omega)t} dt = \frac{e^{1-j\omega} - e^{-1+j\omega}}{1-j\omega} \quad (5 \text{ 分})$$

10. 设 $F[y(t)] = Y(\omega)$, $F[f(t)] = F(\omega)$, (2 分)

$$((j\omega)^2 - j\omega + 2)Y(\omega) = -F(\omega), \quad (6 \text{ 分})$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{(2-\omega^2-j\omega)} F(\omega) \quad (10 \text{ 分})$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2-\omega^2-j\omega)} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$