

离散数学 期末复习

第 1 章 命题逻辑

1.2 等值演算

1.2.1 等值式

定义 1-11: 设 A 、 B 是两个命题公式, 若 A 和 B 构成的等价式 $A \leftrightarrow B$ 是重言式, 则称 A 与 B 是等值的, 记作 $A \leftrightarrow B$ 。



二维码 1-4 视频

这里先给出重要的等值式, 下面公式中命题变项可以代表任意的命题公式。

- (1) 同一律: $p \wedge T \leftrightarrow p$ $p \vee F \leftrightarrow p$ \wedge 合取: 全真, 并且同时成立
- (2) 零律: $p \vee T \leftrightarrow T$ $p \wedge F \leftrightarrow F$ \vee 析取: 全假, 任选其一
- (3) 幂等律: $p \vee p \leftrightarrow p$ $p \wedge p \leftrightarrow p$
- (4) 双重否定律: $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$
- (5) 排中律: $p \vee \neg p \leftrightarrow T$
- (6) 矛盾律: $p \wedge \neg p \leftrightarrow F$
- (7) 交换律: $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$
- (8) 结合律: $(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
 $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
- (9) 分配律: $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
 $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- (10) 吸收律: $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$ $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$
- (11) 德摩根律: $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
- (12) 蕴含等值式: $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q$ 前假+后真
- (13) 等价等值式: $p \leftrightarrow q \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- (14) 假言易位: $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$
- (14) 等价否定等值式: $p \leftrightarrow q \leftrightarrow \neg p \leftrightarrow \neg q$
- (15) 归谬论: $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow \neg p$

真值表法

例 1-7 试用真值表法判断 $\neg p \vee q$ 和 $p \rightarrow q$ 是否等值。

- (1) 构造两命题公式的真值表。
- (2) 根据对应列真值判断。

解: 真值表见表 1-6。

表 1-6 “ $\neg p \vee q$ ” 和 “ $p \rightarrow q$ ” 真值表

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

由于上述真值表最后两列的结果对应的真值相同, 故两个命题公式相等。

等值演算法

例 1-9 用等值演算方判断 $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ 和 $\neg p \wedge \neg q$ 是否等值。

解：先用 1.2.1 节中介绍的等值公式对题中第一个命题公式进行变形，具体过程如下。

$$\begin{aligned}\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{德摩根律} \\ &\Leftrightarrow \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) && \text{德摩根律} \\ &\Leftrightarrow \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \text{双重否定律} \\ &\Leftrightarrow (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{分配律} \\ &\Leftrightarrow F \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{矛盾律} \\ &\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q && \text{零律}\end{aligned}$$

因此， $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ 和 $\neg p \wedge \neg q$ 等值。

题：等值演算

$$(1) \overline{(\neg P \wedge (\neg Q \wedge R))} \vee \overline{(Q \wedge R)} \vee \overline{(P \wedge R)} \Leftrightarrow R$$

$$(2) \exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$$

$$(1) \text{原式} \Leftrightarrow [\neg p \wedge \neg q \wedge R] \vee [Q \wedge R] \vee [P \wedge R] \quad \text{结合率}$$

$$\Leftrightarrow R \wedge [(\neg p \wedge \neg q) \vee Q \vee P] \quad \text{分配率}$$

$$\Leftrightarrow R \wedge [\neg(p \vee q) \vee (p \vee q)] \quad \text{摩根率}$$

$$\Leftrightarrow R \wedge T \quad \text{排中率}$$

$$\Leftrightarrow R \quad \text{同一率}$$

题：等值演算

16. (本题 10 分) 三人估计比赛结果，甲说“A 第一，B 第二”，乙说“C 第二，D 第四”，丙说“A 第二，D 第四”。结果三人估计得都不全对，但都对了一个，求 A，B，C，D 的名次分别是多少。

解：设 P：A 是第一；Q：B 是第二；R：C 是第二；S：D 是第四；E：A 是第二，根据题意有：

$$\begin{aligned} & ((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)) \wedge ((R \wedge \neg S) \vee (\neg R \wedge S)) \wedge ((E \wedge \neg S) \vee (\neg E \wedge S)) \\ & \Leftrightarrow ((\neg P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S) \\ & \quad \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge S) \\ & \quad \vee (\neg P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S) \\ & \quad \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S)) \\ & \quad \wedge ((E \wedge \neg S) \vee (\neg E \wedge S)) \end{aligned}$$

因为 $(P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge S)$ 与 $(\neg P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S)$ 不符题意，故可在式中删去，原式即为：

$$\begin{aligned} & ((P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S)) \wedge ((E \wedge \neg S) \vee (\neg E \wedge S)) \\ & \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S \wedge E \wedge \neg S) \\ & \quad \vee (P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S \wedge \neg E \wedge S) \\ & \quad \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S \wedge E \wedge \neg S) \\ & \quad \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S \wedge \neg E \wedge S) \\ & \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S \wedge E) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S \wedge \neg E) \end{aligned}$$

因 R 与 E 矛盾，故 $\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S \wedge \neg E$ 为真。即 A 不是第一，B 为第二，C 不是第二，D 为第四，A 不是第二，于是得到：

C 为第一，B 为第二，A 为第三，D 位第四。

1.3 范式

由合取式析取起来的式子是析取范式

由析取式合取起来的式子是合取范式

主析取范式和主合取范式互补

主析取范式 主合取范式

定义 1-15： 在含有 n 个命题变项的简单合取式（简单析取式）中，任一命题或其否定有且仅出现一次，且 n 个命题变项或其否定按照英文字母顺序或下角标排列，则这样的简单合取式（简单析取式）为极小项（极大项）。

故可知 n 个命题变项总共可以产生 2^n 个不同的极小项和 2^n 个不同的极大项，且极小项和极大项的关系如下。

定理 1-3: 设 m_i 与 M_i 是命题变项 p_1, p_2, \dots, p_n 形成的极小项和极大项，则有： $\neg m_i \Leftrightarrow M_i, \neg M_i \Leftrightarrow m_i$ 。



二维码 1-11 视

定义 1-16: 若公式 A 的析取范式中的所有简单合取式都是极小项，则称公式 A 为主析取范式。

定理 1-4: 任何命题公式都有与之等值的唯一主析取范式和主合取范式。

下面介绍求命题公式 A 的主析取范式的三种方法。

1. 真值表法

$m_1 \vee m_3$ 是主析取范式。
极小项的并。

题：主析取范式 主合取范式

主析取范式最好用 m_x 的析取来表示

二、求命题公式 $(P \vee (Q \wedge R)) \rightarrow (P \wedge Q \wedge R)$ 的主析取范式和主合取范式 (10 分)

$$\text{原式} \Leftrightarrow \neg [P \vee (Q \wedge R)] \vee [P \wedge Q \wedge R]$$

$$\Leftrightarrow [\neg P \wedge \neg (Q \wedge R)] \vee [P \wedge Q \wedge R]$$

$$\Leftrightarrow [\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R)] \vee [P \wedge Q \wedge R]$$

$$\Leftrightarrow [\neg P \wedge \neg Q] \vee [\neg P \wedge \neg R] \vee [P \wedge Q \wedge R]$$

$$\Leftrightarrow m_{00x} \vee m_{0x0} \vee m_{111}$$

$$\Leftrightarrow \sum (0, 1, 2, 7)$$

$$\Leftrightarrow \prod (3, 4, 5, 6)$$

$$\begin{aligned} & \overline{P}\overline{Q} + \overline{P}\overline{R} + PQR \\ & 00x \quad 0x0 \quad 111 \end{aligned}$$

第 2 章 一阶逻辑

2.1 一阶逻辑概念

个体词 谓词

个体词：个体常项 或 个体变项

个体域：个体词的范围

谓词描述关系

$P(x)$ 或 $M(x)$ 表示一个一元谓词逻辑

量词

定义 2-3: 量词是描述个体常项与个体变项之间数量关系的词。量词有以下两种。

- (1) 全称量词，表示“所有的”“每一个”，表示为 \forall 。 $\forall \rightarrow$
- (2) 存在量词，表示“有一些”“某一个”，表示为 \exists 。 $\exists \wedge$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \exists x(M(x) \wedge \neg F(x)) \\ \neg \forall x(M(x) \rightarrow F(x)) \end{array}$$

(3) 在使用全称量词时，特性谓词和命题谓词是蕴含关系；而使用存在量词时，特性谓词和命题谓词之间是合取关系。

(4) 在没有特殊指明个体域时，以全总个体域为个体域。

(5) 当个体域中元素的个数有限时，例如，个体域包含 n 个元素 $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ 时，有

$$\forall xP(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$$

$$\exists xP(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$$

量词不能随意调换顺序

量词的优先级比逻辑联结词高

2.2 谓词逻辑解释 分类

辖域 约束变元 自由变元

定义 2-5: 在谓词公式 $\forall xP(x)$ 和 $\exists xP(x)$ 中出现在量词后的变量 x 被称为相应量词的指导变元。将每个量词的最小作用范围称为相应量词的辖域。在量词的辖域中， x 的所有出现为约束出现。辖域内除约束出现 x 以外的其他变元均为自由出现。

约束变元换名规则：把指导变元和被指导的约束变元换名

自由变元换名规则：把自由出现的变元换名

例 2-9 利用约束变元换名规则或自由变元代入规则对下列谓词公式中的变元进行更名，使得变元只存在一种出现形式。

$$(1) \exists xM(x) \rightarrow \exists y(N(x) \wedge L(x, y))$$

$$(2) \forall x(C(x) \vee C(y)) \wedge \exists yF(x, y)$$

$$(3) \exists xM(x) \wedge \exists y(N(x) \wedge L(x, y))$$

解：(1) 在公式 (1) 中，变元 x 既是自由出现，又是约束出现。用约束变元换名规则时，原谓词公式可变为

$$\exists zM(z) \rightarrow \exists y(N(x) \wedge L(x, y))$$

而用自由变元代入规则时，原谓词公式变为

$$\exists xM(x) \rightarrow \exists y(N(z) \wedge L(z, y))$$

定义 2-7: 一阶逻辑中谓词公式 A 的一个解释 (或赋值) I 由下面四个部分组成。

- (1) 非空个体域集合 D 。
- (2) 给谓词公式 A 中的每个个体常项指定在个体域 D 中的特定元素。
- (3) 给谓词公式 A 中的每个 n 元函数指定在个体域 D 上的函数。
- (4) 给谓词公式 A 中的每个 n 元谓词指定个体域 D 上的谓词。

例 2-10 给定解释 I 如下。

- (1) 个体域为整数集合 Z 。
- (2) 个体域中 Z 的特定元素 $a = 0$ 。
- (3) Z 上的函数 $f(x, y) = x + y$, $g(x) = x + 2$ 。
- (4) Z 上的谓词 $F(x, y)$ 为 $x = y$ 。

在解释 I 下, 求下列公式的真值。

- (1) $\forall x F(x, f(x, y))$
- (2) $\forall x \forall y (F(x, f(y, a)) \rightarrow F(y, f(x, a)))$
- (3) $\forall y (F(f(y, a), g(y)))$
- (4) $\forall x (F(f(y, a), x)) \rightarrow F(x, y)$

解: (1) $\forall x F(x, f(x, y)) \Leftrightarrow \forall x (x = x + y)$, 不是命题, 真值不确定。

(2) $\forall x \forall y (F(x, f(y, a)) \rightarrow F(y, f(x, a))) \Leftrightarrow \forall x \forall y (x = y + 0 \rightarrow y = x + 0)$, 是真命题。

(3) $\forall y (F(f(y, a), g(y))) \Leftrightarrow \forall y (y + 0 = y + 2)$, 是假命题。

(4) $\forall x (F(f(y, a), x)) \rightarrow F(x, y) \Leftrightarrow \forall x (y + 0 = x \rightarrow x = y)$, 是真命题。

从例 2-10 中公式 (2) 和 (3) 可知, 闭式在任何解释下都变成命题。不是闭式的谓词公式在某些解释下也可能变成命题, 如例 2.10 中公式 (4), 而有些不是闭式的谓词公式在某些解释下就不是命题, 如例 2.10 中公式 (1)。

题: 解释

3.2.7 给出解释 I , 使下面两个公式在解释 I 下均为假, 从而说明这两个公式都不是逻辑有效式。

- (1) $\forall x (F(x) \vee G(x)) \rightarrow (\forall x F(x) \vee \forall x G(x))$.
- (2) $(\exists x F(x) \wedge \exists x G(x)) \rightarrow \exists x (F(x) \wedge G(x))$.

答案: 给定解释 I 为: 个体域 $D = N$ (自然数集合), $F(x)$: x 为奇数, $G(x)$: x 为偶数。

(1) 在解释 I 下, 公式被解释为

“如果所有的自然数不是奇数就是偶数, 则所有自然数全为奇数, 或所有自然数全为偶数。”
因为蕴含式的前件为真, 后件为假, 所以真值为假。

(2) 在 I 下, 公式被解释为

“如果存在自然数为奇数, 并且存在自然数为偶数, 则存在自然数既是奇数, 又是偶数。”
由于蕴含式的前件为真, 后件为假, 所以真值为假。

分类

永真式、永假式、可满足式

2.3 逻辑等值式 前束范式

一阶逻辑等值式

定理 2-2: 量词否定等值式

$$(1) \neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$$

$$(2) \neg \exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$$

其中, $P(x)$ 是任意的谓词公式。

定理 2-3: 量词辖域收缩与扩展等值式

$$(1) \forall x (P(x) \wedge Q) \Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge Q$$

$$(2) \forall x (P(x) \vee Q) \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee Q$$

$$(3) \exists x (P(x) \wedge Q) \Leftrightarrow \exists x P(x) \wedge Q$$

$$(4) \exists x (P(x) \vee Q) \Leftrightarrow \exists x P(x) \vee Q$$

$$(5) \forall x P(x) \rightarrow Q \Leftrightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q)$$

$$(6) \exists x P(x) \rightarrow Q \Leftrightarrow \forall x (P(x) \rightarrow Q)$$

$$(7) Q \rightarrow \exists x P(x) \Leftrightarrow \exists x (Q \rightarrow P(x))$$

$$(8) Q \rightarrow \forall x P(x) \Leftrightarrow \forall x (Q \rightarrow P(x))$$

其中, $P(x)$ 是包含自由变元 x 的谓词公式, Q 是不包含 x 的谓词公式。

量词前件变号

定理 2-4: 量词分配律

设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是包含自由变元 x 的谓词公式, 则有

$$(1) \forall x (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$$

$$(2) \exists x (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

任意内后取

存在内析取

前束范式

一个谓词公式可以演算成与之等值的标准形式，这个标准形式的谓词公式称为前束范式。下面给出前束范式的定义。

定义 2-11: 设 P 是一阶逻辑中的谓词公式，若 P 的形式为 $Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_nx_nR$ ，其中 Q_i 是量词 \forall 或 \exists ， R 是不含任何量词的谓词公式，则称谓词公式 P 是前束范式。若谓词公式 R 是析取范式，则称该前束范式为前束析取范式；若谓词公式 R 是合取范式，则称该前束范式为前束合取范式。

例如， $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \vee Q(x,y))$ 和 $(\forall x)(\exists y)(\neg P(x) \wedge Q(y))$ 都是前束范式，且 $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y) \vee Q(x,y))$ 是前束析取范式， $(\forall x)(\exists y)(\neg P(x) \wedge Q(y))$ 是前束合取范式。而 $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)Q(y))$ 和 $(\forall x)(P(x) \wedge (\exists y)Q(y))$ 都不是前束范式。

在一阶逻辑中，任一谓词公式都存在与之等值的前束范式。当求一谓词公式的前束范式时，可以利用 2.2.1 节中介绍的约束变元换名规则和自由变元代入规则来得到对应的前束范式。

题：前束范式

注意运算前先换名

一、证明题（10 分）

$$(1) \overline{(\neg P \wedge (\neg Q \wedge R))} \vee \overline{(Q \wedge R)} \vee \overline{(P \wedge R)} \Leftrightarrow R$$

$$(2) \exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$$

$$(2) \text{ 左: } [\exists x][A(x) \rightarrow B(x)]$$

$$\text{右: 原式} \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow \exists y B(y)$$

$$\Leftrightarrow [\exists y][\forall x A(x) \rightarrow B(y)]$$

$$\Leftrightarrow [\exists y)(\exists x)[A(x) \rightarrow B(y)]$$

$$\Leftrightarrow [\exists x][A(x) \rightarrow B(x)]$$

$$\text{左} \Leftrightarrow \text{右}$$

题：消去量词

2.2. (1) 在有限个体域内消去量词。

(1) 个体域 $D=\{1,2,3\}$ ，公式为 $\forall x \forall y (F(x) \rightarrow G(y))$

(2) 个体域 $D=\{a,b\}$ ，公式为 $\forall x \exists y (F(x,y) \rightarrow G(y,x))$

- 答 (1) $(F(1) \vee F(2) \vee F(3)) \rightarrow (G(1) \wedge G(2) \wedge G(3))$
 案 (2) $((F(a, a) \rightarrow G(a, a)) \vee (F(a, b) \rightarrow G(b, a))) \wedge ((F(b, a) \rightarrow G(a, b)) \vee (F(b, b) \rightarrow G(b, b)))$

2.4 逻辑推理

构造证明法

3. 构造证明法

构造证明法是利用推理定律和推理规则，从前提得到有效结论的一系列推理过程。除最后公式外的其他公式或者是前提，或者是由某些前提得到的中间结论。而其中的有些推理规则建立在推理定律的基础之上，给出重要的推理定律如下。

- | | |
|--|-------|
| (1) $p \Rightarrow p \vee q$ | 附加 |
| (2) $p \wedge q \Rightarrow p$ | 化简 |
| (3) $(p \wedge (p \rightarrow q)) \Rightarrow q$ | 假言推理 |
| (4) $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$ | 拒取式 |
| (5) $((p \vee q) \wedge \neg q) \Rightarrow p$ | 析取三段论 |
| (6) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \Rightarrow p \rightarrow r$ | 假言三段论 |
| (7) $((p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)) \Rightarrow p \leftrightarrow r$ | 等价三段论 |

- (8) $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow t) \wedge (p \vee q)) \Rightarrow r \vee t$ 构造性二难

在构造推理证明的过程中还需要引入以下的推理规则。

(1) 前提引入规则：在推理证明的每一步都可以引入前提中的任一命题公式。

(2) 结论引入规则：由推理证明中间步骤得到的结论可以作为后续推理证明的前提。

(3) 置换规则：在推理证明的过程中可以用相应等值式代替命题公式中的任何子命题公式。

构造证明过程可表示为

- | | |
|-------|----------|
| (1) | S_1 |
| (2) | S_2 |
| | \vdots |
| (n) | S_n |
| (n+1) | C |

上述书写形式给出了构造证明法的推理证明步骤。其中前 n 步 $S_1, S_2, \dots, S_n (1 \leq i \leq n)$ 为前提、利用推理定律由中间步骤得到的结论，或者是利用置换规则得到的等值式， C 则是最终的结论。由此可得此推理是正确的， C 是由条件 S_1, S_2, \dots, S_n 得到的有效结论，记为 $S_1 \wedge S_2 \wedge \dots \wedge S_n \Rightarrow C$ 。

1. 附加前提证明法

当上述推理证明的结论 C 是蕴含式, 即为 $A \rightarrow B$ 时, 则推理的蕴含式的形式结构为 $(S_1 \wedge S_2 \wedge \dots \wedge S_n) \rightarrow (A \rightarrow B)$ 。

对上式等值演算可得

$$\begin{aligned} & (S_1 \wedge S_2 \wedge \dots \wedge S_n) \rightarrow (A \rightarrow B) \\ \Leftrightarrow & \neg (S_1 \wedge S_2 \wedge \dots \wedge S_n) \vee (\neg A \vee B) \\ \Leftrightarrow & \neg (S_1 \wedge S_2 \wedge \dots \wedge S_n \wedge A) \vee B \\ \Leftrightarrow & (S_1 \wedge S_2 \wedge \dots \wedge S_n \wedge A) \rightarrow B \end{aligned}$$

故当推理证明的结论是蕴含式时, 可以将蕴含式的前件 A 变成前提, 称为附加前提。若 $(S_1 \wedge S_2 \wedge \dots \wedge S_n \wedge A) \rightarrow B$ 是永真式, 根据上述等值演算过程可知, $(S_1 \wedge S_2 \wedge \dots \wedge S_n) \rightarrow (A \rightarrow B)$ 也是永真式。这种把结论蕴含式的前件作为前提, 结论蕴含式的后件作为结论的证明方法称为附加前提证明法。

例 2-20 构造下面的推理。

前提: $p \rightarrow q, q \rightarrow r$

结论: $p \rightarrow r$

解: 步骤

(1) p

原因

附加前提

(2) $p \rightarrow q$

前提引入

(3) q

(1) 和 (2) 假言推理

(4) $q \rightarrow r$

前提引入

(5) r

(3) 和 (4) 假言推理

因此, 上述推理过程是正确的。

由附加前提证明法可知, 推理是正确的。当然这个例子也可以直接利用假言三段论推理规则直接证明得到。

归谬法 (反证法)

归谬法是把要证结论的否定式与原前提组成新的前提,从新的前提推出矛盾的证明方法。假设 $S_1 \wedge S_2 \wedge \cdots \wedge S_n$ 为前提, C 为结论,则推理的蕴含式的形式结构为 $(S_1 \wedge S_2 \wedge \cdots \wedge S_n) \rightarrow C$ 。

当把要证结论的否定式与原前提组成新的前提时,其形式为 $S_1 \wedge S_2 \wedge \cdots \wedge S_n \wedge \neg C$ 。若 $S_1 \wedge S_2 \wedge \cdots \wedge S_n \wedge \neg C$ 是不相容的,即为矛盾式时,则 $\neg (S_1 \wedge S_2 \wedge \cdots \wedge S_n \wedge \neg C)$ 为永真式,由于

$$\neg (S_1 \wedge S_2 \wedge \cdots \wedge S_n \wedge \neg C)$$

$$\Leftrightarrow \neg (S_1 \wedge S_2 \wedge \cdots \wedge S_n) \vee C$$

$$\Leftrightarrow (S_1 \wedge S_2 \wedge \cdots \wedge S_n) \rightarrow C$$

成立,故当 $S_1 \wedge S_2 \wedge \cdots \wedge S_n \wedge \neg C$ 为矛盾式时,则 $\neg (S_1 \wedge S_2 \wedge \cdots \wedge S_n \wedge \neg C)$ 为永真式,推理 $(S_1 \wedge S_2 \wedge \cdots \wedge S_n) \rightarrow C$ 也为永真式,由此可得 C 是有效结论。这种将原结论的否定式作为附加前提,推出与原前提存在矛盾的证明方法称为归谬法 (间接证明法)。

例 2-21 用归谬法构造下面的推理。

前提: $r \rightarrow \neg q, r \vee s, s \rightarrow \neg q, p \rightarrow q$

结论: $\neg p$

解:

步骤

(1) $\neg \neg p$

(2) p

(3) $p \rightarrow q$

(4) q

(5) $s \rightarrow \neg q$

(6) $\neg s$

(7) $r \vee s$

(8) r

(9) $r \rightarrow \neg q$

(10) $\neg q$

(11) $q \wedge \neg q$ 矛盾

因此,上述推理过程是正确的。

原因

结论否定引入

(1) 双重否定

前提引入

(2) 和 (3) 假言推理

前提引入

(4) 和 (5) 拒取式

前提引入

(6) 和 (7) 析取三段论

前提引入

(8) 和 (9) 假言推理

(4) 和 (10) 合取

题：命题逻辑推理

三、推理证明题（10分）

$$(1) C \vee D, (C \vee D) \rightarrow \neg E, \neg E \rightarrow (A \wedge \neg B), (A \wedge \neg B) \rightarrow (R \vee S) \Rightarrow R \vee S$$

$$(2) \forall x(P(x) \rightarrow Q(y) \wedge R(x)), \exists x P(x) \Rightarrow Q(y) \wedge \exists x(P(x) \wedge R(x))$$

1) 证明：

① $C \vee D$ 前提引入

② $(C \vee D) \rightarrow \neg E$ 前提引入

③ $\neg E$ ①② 假言推理

④ $\neg E \rightarrow (A \wedge \neg B)$ 前提引入

⑤ $A \wedge \neg B$ ③④ 假言推理

⑥ $(A \wedge \neg B) \rightarrow (R \vee S)$ 前提引入

⑦ $R \vee S$ ⑤⑥ 假言推理

Universal instantiation

1. 全称量词消去规则 (UI)

全称实例

$$\frac{\forall x P(x)}{\therefore P(c)}$$

这里 $\forall x P(x)$ 是条件, $P(c)$ 是结论。

成立条件如下:

- (1) x 是 $\forall x P(x)$ 中约束出现的个体变元。
- (2) c 是个体域中任意的个体常项, 且不在 $\forall x P(x)$ 中出现。

例如, 个体域是狗且 Fido 是一条狗, 当“所有狗都很可爱”成立时, Fido 也是可爱的。

2. 全称量词引入规则 (UG)

$$\frac{P(c)}{\therefore \forall x P(x)}$$

这里 $P(c)$ 是条件, $\forall x P(x)$ 是结论。

成立条件如下:

- (1) c 是个体域中任意的个体常项, 且不在 $\forall x P(x)$ 中出现, c 取个体域中的任意值时 P 都为真。
- (2) 取代 c 的 x 是个体域中任意的个体变项, 且不在 $P(x)$ 中出现。

3. 存在量词消去规则 (EI)

$$\frac{\exists x P(x)}{\therefore P(c)}$$

这里 $\exists x P(x)$ 是条件, $P(c)$ 是结论。

成立条件如下:

- (1) c 是个体域中使 P 成立的特定的个体常项, 且不在 $P(x)$ 中出现。
- (2) 在 $P(x)$ 中除 x 外还存在其他自由出现的个体常项时, 不能用此规则。

例如, 个体域是这个班的学生, 在这个班里有个学生 c 离散数学这门课获得 A, 那么可以表示为 $\exists x P(x)$ 为真。这里 $P(x)$ 表示离散数学这门课学生 x 获得 A。

4. 存在量词引入规则 (EG)

$$\frac{P(c)}{\therefore \exists x P(x)}$$

这里 $P(c)$ 是条件, $\exists x P(x)$ 是结论。

成立条件如下:

- (1) c 是个体域中使 P 成立的特定的个体常项。
- (2) c 未在 $P(x)$ 中出现。

例如, 这个班里的 Michelle 离散数学这门课获得 A, 因此 $\exists x P(x)$ 为真。在一阶逻辑中除量词外, 其推理证明本质上和命题逻辑的推理证明是一致

$$\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$$

$$\Rightarrow P(a) \rightarrow Q(a)$$

$$\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)]$$

$$\Rightarrow P(a) \rightarrow Q(a)$$

x 不出现在
量词 y 的辖域内,
则 $A(x)$ 对 y
是自由的



二维码 2-15 视频

例 2-23 用一阶逻辑的推理规则构造下面的推理证明。

这个班有的学生没有读过这本书。这个班的每个人都通过了第一次考试。所以这个班有学生通过第一次考试还没有读过这本书。

解：设 $C(x)$ 表示“ x 是这个班的学生”， $B(x)$ 表示“ x 读过这本书”， $P(x)$ 表示“ x 通过第一次考试。”

前提： $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$ ， $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$

结论： $\exists x(P(x) \wedge \neg B(x) \wedge C(x))$

推理过程如下：

步骤	原因
(1) $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$	前提引入
(2) $C(a) \wedge \neg B(a)$	(1) EI 规则
(3) $C(a)$	(2) 化简
(4) $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$	前提引入
(5) $C(a) \rightarrow P(a)$	(4) UI 规则
(6) $P(a)$	(3) 和 (5) 假言推理
(7) $\neg B(a)$	(2) 化简
(8) $P(a) \wedge \neg B(a) \wedge C(a)$	(3)、(6) 和 (7) 合取
(9) $\exists x(P(x) \wedge \neg B(x) \wedge C(x))$	(8) EG 规则

因此，上述推理证明是正确的。

题：一阶逻辑推理

三、推理证明题（10 分） \wedge 符号优先级高于 \rightarrow

(1) $C \vee D, (C \vee D) \rightarrow \neg E, \neg E \rightarrow (A \wedge \neg B), (A \wedge \neg B) \rightarrow (R \vee S) \Rightarrow R \vee S$

(2) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(y) \wedge R(x)), \exists x P(x) \Rightarrow Q(y) \wedge \exists x(P(x) \wedge R(x))$

(2) 证明：

① $\forall x [P(x) \rightarrow Q(y) \wedge R(x)]$	前提引入
② $P(a) \rightarrow Q(y) \wedge R(a)$	UI 规则
③ $\exists x P(x)$	前提引入
④ $P(a)$	EI 规则
⑤ $Q(y) \wedge R(a)$	②④ 假言推理
⑥ $Q(y)$	⑤ 化简
⑦ $R(a)$	⑤ 化简
⑧ $P(a) \wedge R(a)$	④⑦ 合取
⑨ $\exists x [P(x) \wedge R(x)]$	EI 规则
⑩ $Q(y) \wedge \exists x [P(x) \wedge R(x)]$	⑥⑨ 合取

题：一阶逻辑推理

17. (本题 10 分) 在自然推理系统 $N_{\mathcal{L}}$ 中, 构造用自然语言描述的推理的证明:

人都喜欢吃蔬菜, 但不是所有人都喜欢吃鱼, 所以, 存在喜欢吃蔬菜而不喜欢吃鱼的人.

解:

设 $F(x)$: x 是人, $G(x)$: x 喜欢吃蔬菜, $H(x)$: x 喜欢吃鱼.

前提: $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)), \neg \forall x(F(x) \rightarrow H(x))$

结论: $\exists x(F(x) \wedge G(x) \wedge \neg H(x))$.

证明: 用归谬法.

- | | | |
|---|---|----------|
| ① | $\neg \exists x(F(x) \wedge G(x) \wedge \neg H(x))$ | 结论否定引入 |
| ② | $\forall x \neg(F(x) \wedge G(x) \wedge \neg H(x))$ | ① 置换 |
| ③ | $\neg(F(y) \wedge G(y) \wedge \neg H(y))$ | ② UI |
| ④ | $G(y) \rightarrow \neg F(y) \vee H(y)$ | ③ 置换 |
| ⑤ | $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ | 前提引入 |
| ⑥ | $F(y) \rightarrow G(y)$ | ⑤ UI |
| ⑦ | $F(y) \rightarrow \neg F(y) \vee H(y)$ | ④⑥ 假言三段论 |
| ⑧ | $F(y) \rightarrow H(y)$ | ⑦ 置换 |
| ⑨ | $\forall y(F(y) \rightarrow H(y))$ | ⑧ UG |
| ⑩ | $\forall x(F(x) \rightarrow H(x))$ | ⑨ 置换 |
| ⑪ | $\neg \forall x(F(x) \rightarrow H(x))$ | 前提引入 |
| ⑫ | $\forall x(F(x) \rightarrow H(x)) \wedge \neg \forall x(F(x) \rightarrow H(x))$ | ⑩⑪ 合取 |
| ⑬ | 0 | |

第 3 章 集合和矩阵

3.1 集合

空集 \emptyset

全集 E

幂集

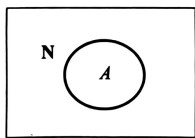


图 3-1 $A \subseteq N$ 的文氏图

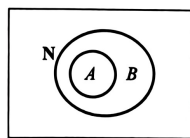


图 3-2 $A \subseteq B$ 的文氏图

$$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

定义 3-7: 集合 A 的所有子集构成的集合称为 A 的幂集, 记作 $P(A)$, 符号化表示为 $P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$ 。

集合的集合

x 是集合。

$$|P(A)| = 2^n$$

相对补 绝对补 对称差

定义 3-10: 设 A, B 为两个集合, 由在集合 A 中但不在集合 B 中的元素组成的集合称为 A 与 B 的相对补集, 记作 $A - B$, 符号化表示为 $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ 。

用文氏图表示集合 A 和 B 的相对补集, 如图 3-5 所示。

定义 3-11: 设 A 为集合, 由在全集 E 中但不在集合 A 中的元素组成的集合, 称为 A 的绝对补集, 记作 $\sim A$, 符号化表示为 $\sim A = E - A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\}$ 。

用文氏图表示集合 A 的绝对补集, 如图 3-6 所示。

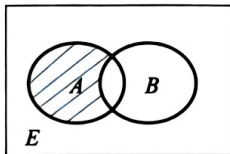


图 3-5 $A - B$ 的文氏图

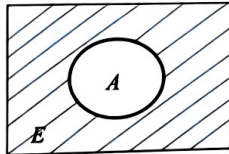


图 3-6 $\sim A$ 的文氏图

定义 3-12: 设 A, B 为两个集合, 由在集合 A 中但不在集合 B 中的元素, 与在集合 B 中但不在集合 A 中的元素组成的集合, 称为 A 与 B 对称差, 记作 $A \oplus B$, 符号化表示为 $A \oplus B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$ 。

用文氏图表示集合 A 和 B 的对称差, 如图 3-7 所示。

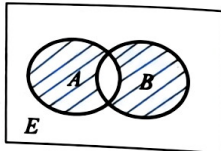


图 3-7 $A \oplus B$ 的文氏图

设 A, B 为任意集合, 由对称差定义不难看出, 对称差有下列性质。

(1) $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

(2) $A \oplus B = (A \cup B) - (B \cap A)$

题：集合运算

13. 设 a, b 为集合, $A = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, 则 $\cup \cup A - \cap \cup A = \underline{a \cup b - a \cap b = a \oplus b}$.
 $\cup A = \{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\}$, $\cup \cup A = a \cup b$, $\cap \cup A = a \cap b$

集合证明

同一律	$A \cup \emptyset = A, A \cap E = A$
零律	$A \cup E = E, A \cap \emptyset = \emptyset$
幂等律	$A \cup A = A, A \cap A = A$
双重否定律	$\sim \sim A = A$
交换律	$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
结合律	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
分配律	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
德摩根律	$\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B \quad \sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$
吸收律	$A \cup (A \cap B) = A \quad A \cap (A \cup B) = A$
排中律	$A \cup \sim A = E$
矛盾律	$A \cap \sim A = \emptyset$
补交转换律	$A - B = A \cap \sim B$

关于对称差有一些特殊等式如下。

- (1) 交换律: $A \oplus B = B \oplus A$
- (2) 结合律: $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
- (3) \cap 对 \oplus 分配律: $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
- (4) $A \oplus \emptyset = A, A \oplus E = \sim A$
- (5) $A \oplus A = \emptyset, A \oplus \sim A = E$

命题演算法

例 3-9 证明 $\sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$ 。

证明： 根据命题演算法要证 $\sim (A \cap B) \subseteq (\sim A \cup \sim B)$ 和 $(\sim A \cup \sim B) \subseteq \sim (A \cap B)$ 。

① 先证 $\sim (A \cap B) \subseteq \sim A \cup \sim B$ 。

任取 x ,

$$x \in \sim (A \cap B)$$

条件

$$x \notin (A \cap B)$$

集合绝对补定义

$$\neg ((x \in A) \wedge (x \in B))$$

元素不属于集合定义

$$\neg (x \in A) \vee \neg (x \in B)$$

德摩根律

$$(x \notin A) \vee (x \notin B)$$

否定定义

$$(x \in A)^{\sim} \vee (x \in B)^{\sim}$$

集合绝对补定义

$$x \in (\bar{A} \cup \bar{B})$$

集合并定义

② 再证 $(\sim A \cup \sim B) \subseteq \sim (A \cap B)$ 。

任取 x ,

$$x \in (\sim A \cup \sim B)$$

条件

$$(x \in \sim A) \vee (x \in \sim B)$$

集合并运算定义

$$(x \notin A) \vee (x \notin B)$$

集合绝对补定义

$$\neg (x \in A) \vee \neg (x \in B)$$

否定定义

$$\neg ((x \in A) \wedge (x \in B))$$

德摩根律

$$\neg (x \in (A \cap B))$$

集合交运算定义

$$x \in \sim (A \cap B)$$

集合绝对补定义

等式代入法

例 3-11 证明 $(A \cup B) \oplus (A \cup C) = (B \oplus C) - A$ 。

证明：

$$\text{左式} = (A \cup B) \oplus (A \cup C)$$

$$= ((A \cup B) - (A \cup C)) \cup ((A \cup C) - (A \cup B))$$

$$= ((A \cup B) \cap \sim A \cap \sim C) \cup ((A \cup C) \cap \sim A \cap \sim B)$$

$$= (B \cap \sim A \cap \sim C) \cup (C \cap \sim A \cap \sim B)$$

$$= ((B \cap \sim C) \cup (C \cap \sim B)) \cap \sim A$$

$$= ((B - C) \cup (C - B)) \cap \sim A$$

$$= (B \oplus C) - A$$

题：集合证明

五、已知 A 、 B 、 C 是三个集合，证明 $A-(B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$ (15 分)

任取 $x \in A-(B \cup C)$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (\neg B \wedge \neg C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$$

$$\Leftrightarrow x \in (A-B) \wedge x \in (A-C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A-B) \cap (A-C)$$

$$\text{即 } A-(B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$$

3.2 矩阵

乘法 布尔矩阵

3.2.3 布尔矩阵运算

0-1 矩阵的运算是基于以下两种元素间的布尔运算定义的，运算规则如下：

$$b_1 \wedge b_2 = \begin{cases} 1 & b_1 = b_2 = 1 \\ 0 & \text{其他取值} \end{cases}$$

$$b_1 \vee b_2 = \begin{cases} 1 & b_1 = 1 \text{ 或 } b_2 = 1 \\ 0 & \text{其他取值} \end{cases}$$

定义 3-20： 设 A 和 B 都是 $m \times n$ 阶的 0-1 矩阵，矩阵 A 和 B 的逻辑或运算定义为第 i 行第 j 列元素的值为 $a_{ij} \vee b_{ij}$ ，记为 $A \vee B$ 。矩阵 A 和 B 的逻辑与运算定义为第 i 行第 j 列元素的值为 $a_{ij} \wedge b_{ij}$ ，记为 $A \wedge B$ 。

例 3-13 求矩阵 A 和 B 的逻辑与和逻辑或。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

解： A 和 B 的逻辑或： $A \vee B = \begin{bmatrix} 1 \vee 0 & 0 \vee 1 & 1 \vee 0 \\ 0 \vee 1 & 1 \vee 1 & 0 \vee 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

A 和 B 的逻辑与： $A \wedge B = \begin{bmatrix} 1 \wedge 0 & 0 \wedge 1 & 1 \wedge 0 \\ 0 \wedge 1 & 1 \wedge 1 & 0 \wedge 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

定义 3-21： 设 A 是 $m \times k$ 阶的 0-1 矩阵， B 是 $k \times n$ 阶的 0-1 矩阵。矩阵 A 和 B 的布尔积记为 $A \odot B$ 。 $A \odot B$ 第 i 行第 j 列元素为 c_{ij} ，其值为 $c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \dots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj})$ 。

例如，有两个矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，矩阵 A 和矩阵 B 的布

尔积计算过程如下。

$$A \odot B = \begin{bmatrix} (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \\ 0 \vee 0 & 0 \vee 1 & 0 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$C_{pq} = \sum_{i=1}^k a_{pi} b_{iq}$
 左行右列
 $C_{12} = \sum a_{1i} b_{i2}$
 左行右列
 再相加

故矩阵 A 是 3×2 矩阵，矩阵 B 是 2×3 矩阵，它们的布尔积计算结果是

一个 3×3 矩阵，记为 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 。

第 4 章 关系和函数

4.1 关系

有序对 元组

定义 4-1: 由元素 a 和 b 按一定的顺序排列成的二元组叫作有序对 (或有序偶), 记作 $\langle a, b \rangle$ 。 a 称为二元组的第一个元素, b 称为二元组的第二个元素。

$\langle a, b \rangle$ 也可以表示为 (a, b) , 有序对表示有一定次序的两个元素间的关系。例如, 平面坐标系下的点坐标 $(2, -1)$ 和 $(-1, 2)$ 表示两个不同的点。由此, 可得有序对具有以下性质。

(1) 当 $a \neq b$ 时, $\langle a, b \rangle \neq \langle b, a \rangle$ 。

(2) 两个有序对相等的充分必要条件是两个有序对的第一个元素和第二个元素分别相等, 即 $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$ 。

定义 4-2: 由 n 个元素 a_1, a_2, \dots, a_n 按一定的顺序排列成一个序列 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$, 称为有序 n 元组。其中, a_1 称为 n 元组的第一个元素, a_2 称为 n 元组的第二个元素, \dots , a_n 称为 n 元组的第 n 个元素。

有序 n 元组 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ 可以表示为 (a_1, a_2, \dots, a_n) , (a_1, a_2, \dots, a_n) 也称为 n 维向量。 n 元组表示有一定次序的多元素间的关系。例如, 在 n 维空间中, 点坐标或 n 维向量都是有序 n 元组, $(2, 1, -3)$ 是三维空间直角坐标系中的点坐标, 向量 $(1, 3, 1, 1, 2)$ 就是一个 5 维向量。

两个有序 n 元组相等的充分必要条件是两个有序 n 元组对应的元素分别相等, 即 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle \Leftrightarrow (a_1 = b_1) \wedge (a_2 = b_2) \wedge \dots \wedge (a_n = b_n)$ 。

笛卡尔积

定义 4-3: 设 A, B 为集合, 有序对 $\langle a, b \rangle$ 的第一个元素 a 为 A 中元素, 第二个元素 b 为 B 中元素, 所有像 $\langle a, b \rangle$ 这样的有序对组成的集合, 称为 A 和 B 的笛卡儿积, 记为 $A \times B$ 。笛卡儿积表示为 $A \times B = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in A \wedge b \in B \}$ 。

例 4-1 已知 $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{a, b\}$, 求 $A \times B$ 、 $B \times A$ 、 $\emptyset \times A$ 和 $B \times \emptyset$ 。

解: $A \times B = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 4, a \rangle, \langle 4, b \rangle \}$

$B \times A = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle a, 4 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle b, 4 \rangle \}$

$\emptyset \times A = \emptyset$

$B \times \emptyset = \emptyset$

二元关系

全域关系 E_A

恒等关系 I_A

定义 4-5: 若一个集合是空集或它的元素都是有序对, 则称这个集合为二元关系, 记为 R , 若 $\langle x, y \rangle \in R$, 则称 x 与 y 有 R 关系, 记作 xRy 。若 $\langle x, y \rangle \notin R$, 则称 x 与 y 没有 R 关系, 记作 $x \not R y$ 。

例如, $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle a, b \rangle \}$, $S = \{ \langle 1, 2 \rangle, a, b \}$ 。根据定义可知 R 是二元关系, 当 a, b 不是有序对时, S 不是二元关系。因为 $\langle 1, 2 \rangle \in R \wedge \langle a, b \rangle \in R$, 根据上面的记法, 可以写 $1R2$ 、 aRb 、 $a \not R 2$ 等。

定义 4-6: 设 A, B 为集合, $A \times B$ 的任意一个子集是集合 A 到集合 B 的一个二元关系, 当 A 等于 B 时, 称 R 为 A 上的二元关系。

例如, $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $R_1 = \{ \langle 0, 2 \rangle \}$, $R_2 = A \times B$, $R_3 = \emptyset$, $R_4 = \{ \langle 0, 1 \rangle \}$ 。那么 R_1 和 R_2 是集合 A 到集合 B 的二元关系, 而 R_3 和 R_4 既是集合 A 到集合 B 的二元关系, 又是集合 A 上的二元关系。其中 $R_3 = \emptyset$, 称 \emptyset 为集合 A 到集合 B 或集合 A 上的空关系, 表示集合 A 到集合 B 不存在某种关系。 $A \times B$ 称为集合 A 到集合 B 的全域关系, 表示集合 A 中的每个元素和集合 B 中的每个元素都存在某种关系。 $A \times A$ 称为集合 A 上的全域关系, 记为 E_A 。 $I_A = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$, 称为 A 上的恒等关系。例如, 上述集合 A

集合表示法

1. 集合表示方法

由定义 4-5 可知, 关系是笛卡儿积集合的一个子集, 故关系也是一个集合。因此, 可以用列出集合中的所有元素的列举法或描述集合元素特性的描述法来表示关系。

例 4-7 已知关系 $R = \{ (x, y, z) \mid x, y, z \text{ 是 } 0 \sim 5 \text{ 的整数且 } x = y + z \}$, 用列举法表示这个关系。

解: 由于该集合仅包含有限个元素, 故可以用列举法表示该关系:

$$R = \{ \langle 2, 1, 1 \rangle, \langle 3, 2, 1 \rangle, \langle 3, 1, 2 \rangle, \langle 4, 1, 3 \rangle, \langle 4, 3, 1 \rangle, \langle 4, 2, 2 \rangle, \langle 5, 1, 4 \rangle, \langle 5, 4, 1 \rangle, \langle 5, 2, 3 \rangle, \langle 5, 3, 2 \rangle \}$$

例 4-8 用描述法给出正整数集合 \mathbb{Z}_+ 上的“ \geq ”关系。

解: 由于该集合包含无限个元素, 故不适合用列举法表示该关系, 而应该用描述法来表示:

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{Z}_+ \wedge x \geq y \}$$

关系图表示法

2. 关系图表示方法

有向图中的有向边是用箭头表示方向的一条从起点到终点的边。有向边可以形象地表示关系的有序对，有向边的起点和终点分别对应有序对中的第一个元素和第二个元素。下面先给出关系图的定义。

定义 4-8: 设集合 $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$, $B = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$ 。 R 是从 A 到 B 的二元关系。把集合 A 和 B 的每个元素表示成一个结点，关系 R 的每个有序对表示成一条有向边，有向边从第一个元素指向第二个元素。这样得到的图就是表示关系 R 的关系图。

在关系 R 中，有序对 $\langle x, y \rangle$ 对应一条有向边，结点 x 是这条有向边的起点，结点 y 是这条有向边的终点。有序对 $\langle x, x \rangle$ 对应一条从结点 x 到结点 x 的有向边，这条有向边也被称为环。

例 4-9 集合 $A = \{0, 1, 2\}$ ，集合 $B = \{a, b\}$ ，关系 $R = \{\langle 0, a \rangle, \langle 0, b \rangle, \langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle\}$ ，请给出 R 的关系图。

解: 关系 R 的关系图如图 4-1 所示。

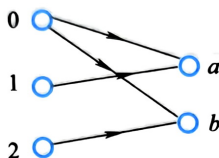


图 4-1 例 4-9 关系 R 的关系图

例 4-10 集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ， $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$ ，请给出 R 的关系图。

解: 关系 R 的关系图如图 4-2 所示。



图 4-2 例 4-10 关系 R 的关系图

关系图可以表示结点之间的邻接关系，是一种简单直观的关系表示方法。

矩阵表示法

3. 矩阵表示方法

定义 4-9: 设集合 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $B = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 。 R 是从 A 到 B 的二元关系。关系 R 可以用一个 $m \times n$ 矩阵 $M_R = [m_{ij}]$ 表示, 其中

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \langle x_i, y_j \rangle \in R \\ 0 & \langle x_i, y_j \rangle \notin R \end{cases}$$

称 M_R 为关系 R 的关系矩阵。

由定义可知, $m \times n$ 矩阵 M_R 的 m 行对应集合 A 的元素个数, n 列对应集合 B 的元素个数, 故元素的排列顺序不同时, 所得关系矩阵也不同, 但都表示同一个关系。为了矩阵表述简便, 规定矩阵的行和列的排列顺序分别对应集合 A 和集合 B 中元素的书写顺序。

例 4-11 集合 $A = \{0, 1, 2\}$, 集合 $B = \{a, b\}$, 关系 $R = \{\langle 0, a \rangle, \langle 0, b \rangle, \langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle\}$, 请给出 R 的关系矩阵。

解: 关系 R 的关系矩阵如下:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例 4-12 集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$, 请给出 R 的关系矩阵。

解: 关系 R 的关系矩阵如下:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

定义域 值域 域

定义 4-10: 设 R 是一个二元关系。由 R 的所有有序对的第一个元素构成的集合称为 R 的定义域, 记为 $\text{dom } R$ 。由 R 的所有有序对的第二个元素构成的集合称为 R 的值域 $\text{ran } R$ 。同一关系的定义域和值域的并集称为 R 的域, 记为 $\text{fld } R$ 。

R 的定义域、值域和域也可以分别表示为

$$\text{dom } R = \{x \mid \exists y (\langle x, y \rangle \in R)\}$$

$$\text{ran } R = \{y \mid \exists x (\langle x, y \rangle \in R)\}$$

$$\text{fld } R = \text{dom } R \cup \text{ran } R$$

关系的逆

定义 4-11: 设 R 是一个集合 A 到集合 B 二元关系。由 R 的所有有序对中的元素顺序交换得到的有序对构成的集合是集合 B 到集合 A 二元关系, 该关系为 R 的逆运算, 记为

$$R^{-1} = \{ \langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \}$$

9. 设 R_1, R_2 为 A 上的关系, 则等式 $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$ 与 $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$ 均成立. (√)

复合关系

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R^{-1} \wedge \langle x, y \rangle \notin S^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R^{-1} - S^{-1}$$

$$R_1 \circ R_2 = R_1[R_2(x)]$$

定义 4-12: 设 R_2 是一个集合 A 到集合 B 的二元关系, R_1 是一个集合 B 到集合 C 的二元关系, 则 R_1 和 R_2 的复合关系 $R_1 \circ R_2$ 是集合 A 到集合 C 的二元关系。定义为

$$R_1 \circ R_2 = \{ \langle x, z \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \wedge z \in C \wedge \langle x, y \rangle \in R_2 \wedge \langle y, z \rangle \in R_1 \}$$

注意, 复合运算分为左复合和右复合两种运算, 本书中使用的都是左复合运算, 与后面函数的复合运算一致。

例 4-14 关系 $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$, 关系 $S = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$ 。试分别计算 $R \circ S$ 和 $S \circ R$ 。

解: $R \circ S = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$

$$S \circ R = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle \}$$



二维码 4-4 视频

关系幂集

定义 4-13: 设 R 是一个集合 A 上二元关系, 关系 R 幂集 R^n 定义为

$$(1) R^0 = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \} = I_A$$

$$(2) R^{n+1} = R^n \circ R$$

I_A : A 的恒等关系

根据关系的三种表示方法, 计算关系的幂集也同样存在以下三种方法。

(1) 用集合表示关系时, 关系 R 的幂集为 $R^n = R \circ R \circ \dots \circ R$ 。

(2) 用矩阵表示关系时, 关系 R 的幂集可以通过关系矩阵乘法得到, 且关系矩阵乘法为布尔乘, 即其中的相加是逻辑加。

(3) 用关系图表示关系时, 在幂集 R^n 关系图中的任一有序对 $\langle x, y \rangle$, 与关系图中从结点 x 到结点 y 的一条长度为 n 的路径相对应。

题: 关系运算

4. 设 $R = \{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 0, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle \}$, 求 $R \circ R, R^{-1}, R \upharpoonright \{0, 1\}, R[\{1, 2\}]$ 。

注: $R \upharpoonright A$ 表示将关系限制在定义域 A 上的关系; $R[A]$ 表示 R 关于定义域 A 的值域。

答案: $R \circ R = \{ \langle 0, 2 \rangle, \langle 0, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle \}$
 $R^{-1} = \{ \langle 1, 0 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 3, 0 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \}$
 $R \upharpoonright \{0, 1\} = \{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 0, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle \}$
 $R[\{1, 2\}] = \{2, 3\}$

自反对称传递

反自反就是任何一个元素都不满足自反

不自反的关系不一定是反自反关系, 反自反关系一定是不自反的关系

对称同理

1. 自反关系

定义 4-14: 设 R 是 A 上的二元关系, 若对于 $\forall x \in A$, 有 $\langle x, x \rangle \in R$, 则称 R 是自反关系。即:

$$R \text{ 是自反的} \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \in R)$$

如果 $A = \emptyset$, 那么集合 A 上的空关系显然是自反关系。

定义 4-15: 设 R 是 A 上的二元关系, 若对于 $\forall x \in A$, 有 $\langle x, x \rangle \notin R$, 则称 R 是反自反关系。即:

$$R \text{ 是反自反的} \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \notin R)$$

2. 对称关系

定义 4-16: 设 R 是 A 上的二元关系, 若对于集合 A 中的任意元素 x, y , 有 $\langle x, y \rangle \in R$ 时, 则有 $\langle y, x \rangle \in R$, 称 R 是对称关系。即:

$$R \text{ 是对称的} \Leftrightarrow \forall x \forall y (\langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$$

定义 4-17: 设 R 是 A 上的二元关系, 若对于集合 A 中的任意元素 x, y , 有 $\langle x, y \rangle \in R$ 且 $\langle y, x \rangle \in R$ 时, 有 $x = y$, 称 R 是反对称关系。即:

$$R \text{ 是反对称的} \Leftrightarrow \forall x \forall y (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \rightarrow x = y)$$

3. 传递关系

定义 4-18: 设 R 是 A 上的二元关系, 对于集合 A 中任意元素 x, y 和 z , 有 $\langle x, y \rangle \in R$ 和 $\langle y, z \rangle \in R$ 同时成立时, 则有 $\langle x, z \rangle \in R$, 称 R 是传递关系。即:

$$R \text{ 是传递的} \Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R)$$

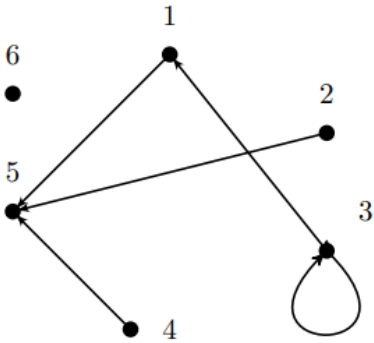
当关系是传递关系时, 有下面定理存在。

定理 4-3: 设 R 是 A 上二元关系。对于任一自然数 $n = 1, 2, 3 \dots$ 有 $R^n \subseteq R$ 成立, 则 R 是传递的。

	自反	反自反	对称	反对称	传递
表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \emptyset$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij}=1$, 且 $i \neq j$, 则 $r_{ji}=0$	对 M^2 中1所在位置, M 中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边, 是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边, 是一条有向边(无双向边)	如果顶点 x_i 连接到 x_k , 则从 x_i 到 x_k 有边

题：自反对称传递

19. (本题 10 分) 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, R 为 A 上的关系, R 的关系图如下图所示:



- (1) 求 R^2, R^3 的集合表达式.
- (2) 求 $r(R), s(R), t(R)$ 的集合表达式.

解:

$$(1) R_1 = \{ \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 5 \rangle \}, R_2 = \{ \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 5 \rangle \}.$$

$$(2) r(R) = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 6, 6 \rangle \}$$

$$s(R) = \{ \langle 1, 5 \rangle, \langle 5, 1 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 5, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 5, 4 \rangle \}$$

$$t(R) = \{ \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 5 \rangle \}$$

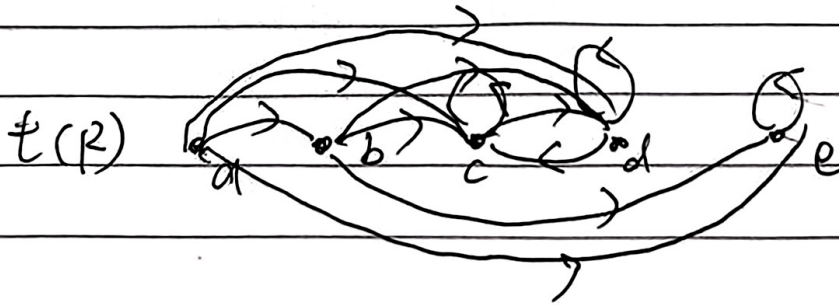
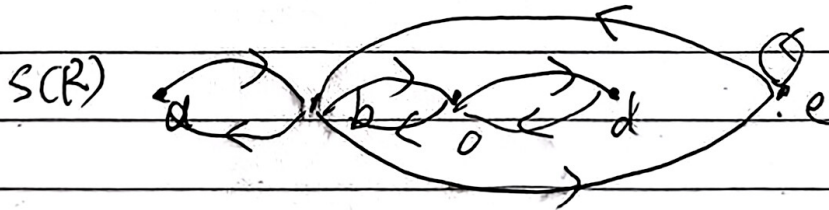
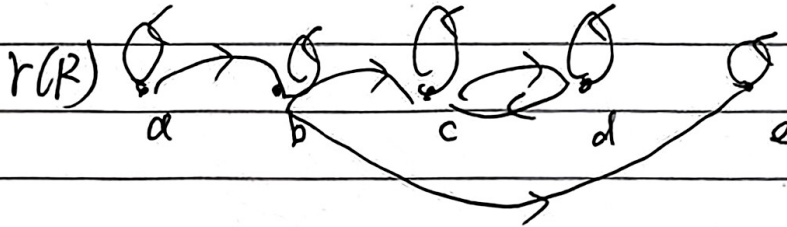
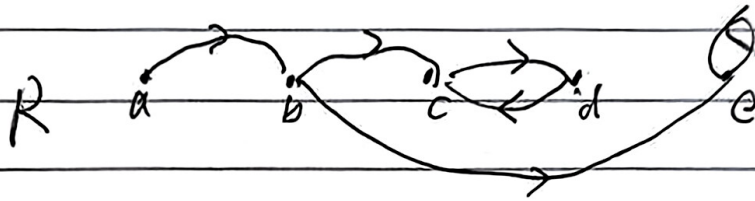
题：自反对称传递

6. 4.14 设 R 的关系图如下图所示, 试给出 $r(R), s(R), t(R)$ 的关系图.



图 4-2

T6



关系闭包

在本节重点讨论自反闭包、对称闭包和传递闭包。令 R 为集合 A 上的一个关系，如果 R 不具有某些属性（如对称性），则可以通过添加最小数量的有序对来扩展 R ，使扩展的 R 具有对称性。扩展后的 R 称为 R 的对称闭包。类似，可以构造 R 的自反闭包和传递闭包。闭包定义如下。

定义 4-19: 设 R 是非空集合 A 上的二元关系， R 的自反闭包（对称闭包或传递闭包）是 A 上 R' ，且 R' 满足以下条件：

- (1) R' 是自反的（对称的或传递的）。
- (2) $R \subseteq R'$ 。
- (3) 对 A 上任何包含 R 的自反关系（对称关系或传递关系） R'' ，都有 $R' \subseteq R''$ 。

一般，将自反闭包表示为 $r(R)$ ，对称闭包表示为 $s(R)$ ，传递闭包表示为 $t(R)$ 。

下面给出构造关系 R 的自反闭包、对称闭包和传递闭包的方法。

定理 4-4: 设 R 是非空集合 A 上的二元关系，则有：

- (1) $r(R) = R \cup I$ Reverse 自反
 - (2) $s(R) = R \cup R^{-1}$ Symmetry 对称
 - (3) $t(R) = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots, n = |A|$ transmit 传递
- $R^{n+1} = R^n \circ R$

(3) 关系图表示法

关系 R 的关系图如图 4-11 所示。



图 4-11 例 4-29 关系 R 的关系图

关系 R 的自反闭包在关系 R 的关系图中加入环，得自反闭包关系图，如图 4-12 所示。



图 4-12 自反闭包的关系图

关系 R 的对称闭包在关系 R 的关系图中加入存在边的反向边，得对称闭包关系图如图 4-13 所示。

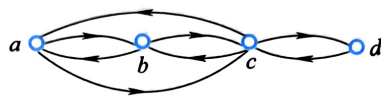


图 4-13 对称闭包的关系图

关系 R 的传递闭包，在关系 R 的关系图中如果存在两条边，若第一条边的终点是第二条边的始点，那么就加入一条边，该边以第一条边的始点为始点，以第二条边的终点为终点，例如，在图 4-11 中存在边 (a, b) 和边 (b, c) ，在传递闭包关系图中应加入边 (a, c) ，对于其他边也做相应操作，得传递闭包的关系图如图 4-14 所示。

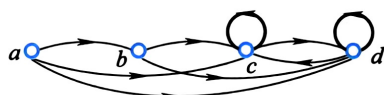


图 4-14 传递闭包的关系图

等价关系

定义 4-20: 设 R 是非空集合 A 上的二元关系，若 R 是自反的、对称的和传递的，则 R 是等价关系。对任何元素 $x, y \in A$ ，若 $\langle x, y \rangle \in R$ ，则记为 $x \sim y$ ，称作 x 和 y 等价。

例 4-30 二元关系模 m 运算的定义如下：

$$R = \{ \langle a, b \rangle \mid a, b \in R \wedge a \equiv b \pmod{m} \} \quad (m \text{ 是整数, 且 } m > 1)$$

试证明关系 R 是整数集上的等价关系。

这里的 $a \equiv b \pmod{m}$ 代表实数 a 和实数 b 除以 m 的余数相等。

证明: 模 m 运算 $a \equiv b \pmod{m}$ ，即 $a - b$ 可以被整数 m 整除。

根据等价关系定义可知：

自反性: 因为 $a - a = 0$ ， 0 能被任何整数整除，可表示为 $0 = 0 \cdot m$ ，故 $a \equiv a \pmod{m}$ ，该关系是自反的。

对称性: 假设 $a \equiv b \pmod{m}$ 成立，那么 $a - b$ 能被 m 整除，故有 $a - b = km$ ，这里 k 是整数。由 $a - b = km$ 可得 $b - a = (-k)m$ 成立，因此， $b \equiv a \pmod{m}$ ，该关系是对称的。

传递性: 假设 $a \equiv b \pmod{m}$ 和 $b \equiv c \pmod{m}$ 成立，那么 $a - b$ 和 $b - c$ 都能被 m 整除。因此，存在整数 k 和 l 使得 $a - b = km$ 和 $b - c = lm$ 成立。故有 $a - c = (a - b) + (b - c) = km + lm = (k + l)m$ 成立。因此， $a \equiv c \pmod{m}$ ，该关系是传递的。

综上所述，模 m 关系是整数集上的等价关系。

等价类

定义 4-21: 设 R 是非空集合 A 上的等价关系, 对任意的 $a \in A$, 若 $[a]_R = \{b \mid b \in A \wedge aRb\}$, 则称 $[a]_R$ 为 a 关于 R 的等价类, 简称为 a 的等价类, 简记为 $[a]$ 。

在模 3 运算的例子中有下列等价类:

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}$$

$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$$

$$[3] = [6] = \{3, 6\}$$

不难发现, 上述子集无交集, 并集为集合 A 。 A 中任何一个元素一定在它自身的等价类中。若 $b \in [a]_R$, 那么 b 是这个等价类的代表元素。等价类中的任意元素都是这个等价类的代表元素。若集合 A 中的两个元素有 R 关系, 则这两个元素的等价类相等。例如, 3 和 6 的模 3 运算余数均为零, 有等价关系, 所以可记为 $[3] = [6]$ 。

例如, 模 4 运算的等价类如下:

$$[0]_4 = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$$

$$[1]_4 = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

$$[2]_4 = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$$

$$[3]_4 = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}$$

定理 4-5: 设 R 是非空集合 A 上的等价关系, 对任意的 $a, b \in A$, 有:

- (1) $[a] \neq \emptyset$, 且 $[a] \subseteq A$ 。
- (2) 若 aRb , 则 $[a]_R = [b]_R$ 。
- (3) 若 $a \not R b$, 则 $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$ 。
- (4) $\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$ 。

商集划分

等价类是集合, 商集就是所有等价类构成的集合

定义 4-22: 设 R 是非空集合 A 上的等价关系, 以 R 的所有等价类为元素的集合, 称为集合 A 在关系 R 下的商集, 记为 $\frac{A}{R}$, 即 划分的方法

$$\frac{A}{R} = \{[a]_R \mid a \in A\}$$

在模 3 运算中, 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 在关系 R 下的商集 $\frac{A}{R} = \{\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6\}\}$ 。而模 m 运算的商集为 $\frac{A}{R} = \{[0]_m, [1]_m, \dots, [m-1]_m\}$ 。

定义 4-23: 非空集合 S 的一簇子集 A_1, A_2, \dots, A_m , 满足以下条件:

(1) $A_i \neq \emptyset (i=1, 2, \dots, m)$ **非空**

(2) $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ **无交集**

(3) $\bigcup_{i=1}^m A_i = S$ **之和为全集**

子集 A_1, A_2, \dots, A_m 构成的集合称为 A 的一个划分, 且 $A_i (i=1, 2, \dots, m)$ 为 A 的一个类或者划分的一个块。

集合 A 的一簇非空子集如图 4-16 所示。根据划分的定义, 图 4-16 所示的非空子集为集合 A 的划分。

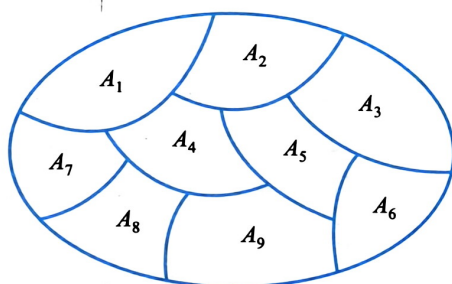


图 4-16 集合 A 的划分

假设 R 是非空集合 A 上的等价关系。由定理 4-5 可知由等价关系 R 生成的等价类的并集记为

$$\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$$

且等价类 $[a]_R \neq [b]_R$ 时, $[a]_R$ 和 $[b]_R$ 的交集为 \emptyset 。因此, 等价关系 R 生成的等价类就是集合 A 的划分。

题: 商集

14. 设 $A = \{a, b, c\}$, $R = \{<a, b>, <b, a>\} \cup I_A$ 是 A 上的等价关系, 设自然映射 $g: A \rightarrow A/R$, 那么 $g(a) = \underline{\{a, b\}}$ $aRa, a \not R b$

题: 商集

2. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 在 $A \times A$ 上定义二元关系 R ,

$$\forall <u, v>, <x, y> \in A \times A, <u, v> R <x, y> \Leftrightarrow u + y = x + v.$$

(1) 证明: R 是 $A \times A$ 上的等价关系。

(2) 确定由 R 引起的对 $A \times A$ 的划分。

答 (1) 注意到 $<u, v> R <x, y> \Leftrightarrow u + y = x + v \Leftrightarrow u - v = x - y$

案 任取 $<x, y>$,

$$<x, y> \in A \times A \Leftrightarrow x - y = x - y \Leftrightarrow <x, y> R <x, y>$$

任取 $<x, y>, <u, v>$,

$$<x, y> R <u, v> \Leftrightarrow x - y = u - v \Leftrightarrow u - v = x - y \Leftrightarrow <u, v> R <x, y>$$

任取 $<x, y>, <u, v>, <s, t>$,

$$<x, y> R <u, v> \wedge <u, v> R <s, t> \Leftrightarrow x - y = u - v \wedge u - v = s - t$$

$$\Rightarrow x - y = s - t \Leftrightarrow <x, y> R <s, t>$$

(2)

$$\{\{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>\}, \{<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>\}, \{<1, 3>, <2, 4>\}, \{<1, 4>\}, \{<4, 1>\}, \{<3, 1>, <4, 2>\}, \{<2, 1>, <3, 2>, <4, 3>\}\}$$

偏序关系

集合上的另一种重要关系是偏序关系，它是集合上部分元素之间的顺序关系，这种关系在实际应用中广泛存在。例如，数字之间的“大于或等于”(\geq)和集合之间的“包含”关系都是偏序关系。

定义 4-24: 如果集合 S 上的关系 R 是自反的、反对称的和传递的，则称其为偏序关系。集合 S 与偏序关系 R 一起被称为偏序集，记为 $\langle S, R \rangle$ 。

哈斯图

定义 4-25: 设 $\langle S, R \rangle$ 为偏序集，对于任意元素 a 和 b ，若 $a \leq b$ 或 $b \leq a$ 成立，则称 a 和 b 是可比的；若 $a \leq b$ 或 $b \leq a$ 不成立，则称 a 和 b 是不可比的。不存在元素 $c \in S$ 使得 $a < c < b$ 成立，则称 b 覆盖 a 。

对于一个偏序关系，如果按照以下规则画图：

- (1) 按照偏序次序自底向上排列结点顺序，若 $a \leq b$ ，则结点 a 在结点 b 下方；然后画偏序关系“ \leq ”的关系图。
- (2) 在关系图中移除所有结点的环。
- (3) 在关系图中移除所有表示传递关系的边和代表方向的箭头。

这样得到的表示偏序关系的图称为哈斯图。在哈斯图中，可以按照位置关系来判断元素在偏序关系上的逻辑大小，即哈斯图下方的元素小于上方的元素。

例 4-36 画出偏序集 $\langle \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, | \rangle$ 和偏序集 $\langle P(\{a, b, c\}), \subseteq \rangle$ 的哈斯图。

解: 整除关系的哈斯图如图 4-21 所示。

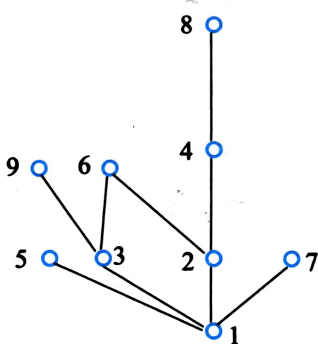


图 4-21 关系“ $|$ ”的哈斯图

集合包含关系的哈斯图如图 4-22 所示。

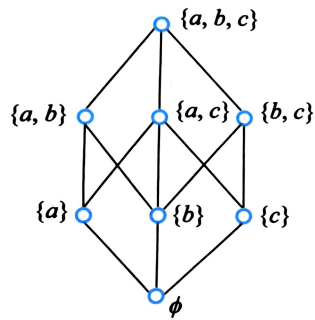
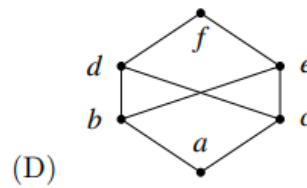
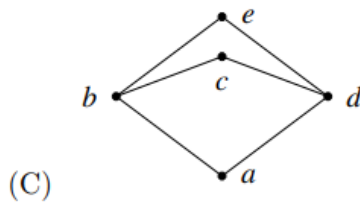
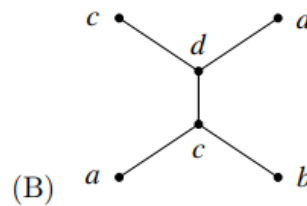
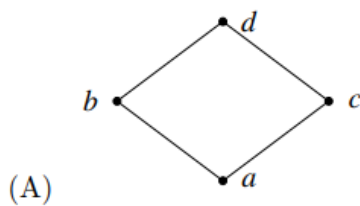


图 4-22 关系 “ \subseteq ” 的哈斯图

题：哈斯图

4. 设 $\langle S, \leq \rangle$ 是偏序集，如果 $\forall x, y \in S, \{x, y\}$ 都有最小上界和最大下界，则称 S 关于 \leq 构成一个格。则如下偏序集中构成一个格的是 (A)



题：哈斯图

3. 分别画出下列各偏序集 $\langle A, R_{\leq} \rangle$ 的哈斯图，并找出 A 的极大元、极小元、最大元和最小元。

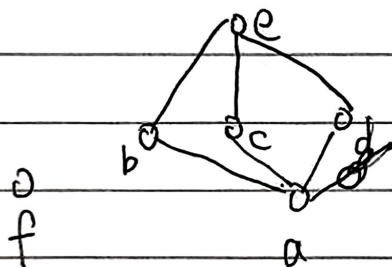
(1) $A = \{a, b, c, d, e, f\}$

$R_{\leq} = \langle a, d \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, e \rangle, \langle b, e \rangle, \langle c, e \rangle, \langle d, e \rangle \cup I_A$

(2) $A = \{a, b, c, d, e\}$

$R_{\leq} = \{ \langle c, d \rangle \} \cup I_A$

T₃ (1)



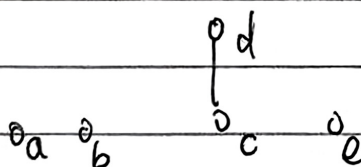
极大元 e, f

极小元 a, f

最大元 ~~不存在~~

最小元 ~~不存在~~

(2)



极大元: a, b, d, e

极小元: a, b, c, e

最大元: 不存在

最小元: 不存在

最小元 极小元 下界 下确界

定义 4-26: 设 $\langle S, \leq \rangle$ 为偏序集, 若任意的 $a, b \in S$, 都有 $a \leq b$ 或 $b \leq a$ 成立, 即 a 和 b 是可比的, 则称 \leq 为 S 上的全序关系, 且 $\langle S, \leq \rangle$ 为全序集。

由哈斯图定义可知, 全序集的哈斯图是一条直线。所以, 全序集也可以称为线序集。

定义 4-27: 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A$ 。

(1) 若 $\exists y \in B$, 使得 $\forall x (x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立, 则称 y 是 B 的最小元。

(2) 若 $\exists y \in B$, 使得 $\forall x (x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立, 则称 y 是 B 的最大元。

(3) 若 $\exists y \in B$, 使得 $\exists x (x \in B \wedge x < y)$ 成立, 则称 y 是 B 的极小元。

(4) 若 $\exists y \in B$, 使得 $\exists x (x \in B \wedge y < x)$ 成立, 则称 y 是 B 的极大元。

由定义可知, 对于有限集合, 极小元和极大元一定存在且可能有多个, 最小元和最大元不一定存在, 若存在则是唯一的。最小元一定是极小元, 最大元一定是极大元, 反之则不成立。当集合仅含有一个元素时, 此元素既为极大元又为极小元。

定义 4-28: 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A$ 。

- (1) 若 $\exists y \in A$, 使得 $\forall x (x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立, 则称 y 是 B 的上界。
- (2) 若 $\exists y \in A$, 使得 $\forall x (x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立, 则称 y 是 B 的下界。
- (3) 令 $C = \{y | y \text{ 为 } B \text{ 的上界}\}$, 则称 C 的最小元为 B 的最小上界或上确界。
- (4) 令 $C = \{y | y \text{ 为 } B \text{ 的下界}\}$, 则称 C 的最大元为 B 的最大下界或下确界。

最大元的最小值

例 4-38 设偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 的哈斯图如图 4-24 所示。

- (1) 给出极大元和极小元。
- (2) 试判断最大元和最小元是否存在? 若存在, 请给出最大元和最小元。
- (3) 求集合 $\{b, c, d\}$ 的上界和下界。
- (4) 试判断集合 $\{b, c, d\}$ 的上确界和下确界是否存在? 若存在, 请给出上确界和下确界。

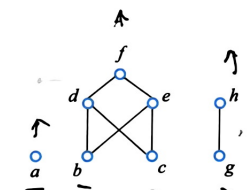


图 4-24 例 4-38 的哈斯图

解: 根据定义, 可得结论:

(1) 极小元为 a, b, c, g ; 极大元为 a, f, h 。

(2) 不存在最大元和最小元。

(3) 下界和下确界不存在。 (没有比 b, c, d 小的元素)

(4) 上界为 d 和 f , 上确界为 d 。

$b \leq c$
 $c \leq b$

$\begin{matrix} b \leq d \\ c \leq d \\ d \leq f \end{matrix}$

4.2 函数

4.2 函数

4.2.1 函数定义

任意 x , 唯一 y

定义 4-29: 设 A 和 B 是非空集合。 f 是一个从 A 到 B 的二元关系, 对任意 $x \in A$, 都有 $\exists y [y \in B \wedge \langle x, y \rangle \in f]$ 成立且 y 唯一, 称 f 为从 A 到 B 的函数或映射, 记作 $f: A \rightarrow B$ 。

不能 1 对多

定义 4-30: 设 f 是一个从集合 A 到集合 B 的函数, 则 A 是函数 f 的定义域。如果 $\langle x, y \rangle \in f$, 则可以写成 $y = f(x)$, 称 y 为 x 的像, x 为 y 的原像。 A 中所有元素的像构成的集合, 称为 f 的值域。

定义 4-31: 设 f, g 是从集合 A 到集合 B 的函数, 所有从 A 到 B 的函数构成 B^A , 读作 “ B 上 A ”, 即 $B^A = \{f | f: A \rightarrow B\}$ 。

单射 满射 双射

定义 4-32: 设 f 是从集合 A 到集合 B 的函数, 对于 $\forall x_1, x_2 \in A$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 是单射函数。

定义中“当 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ ”表示的是一对一的函数方式, 它也可以被表示为“当 $f(x_1) = f(x_2)$ 时, 有 $x_1 = x_2$ ”。下面通过实例来说明一对一的函数方式。

例 4-41 判断从集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 到集合 $B = \{x, y, z, w\}$ 的函数 f 是否为一对一的, f 的定义如图 4-26 所示。

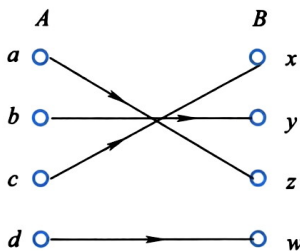


图 4-26 例 4-41 函数 f 的示意图

解: 由于 $f(a) = z$, $f(b) = y$, $f(c) = x$, $f(d) = w$, f 定义域中的 4 个元素分别对应 4 个不同的值, 故 f 是一对一的。

定义 4-33: 设 f 是从集合 A 到集合 B 的函数, 若 $\text{ran } f = B$ 时, 则称 f 是满射函数。

例 4-42 判断从集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 到集合 $B = \{x, y, z\}$ 的函数 f 是否为满射的, f 的定义如图 4-27 所示。

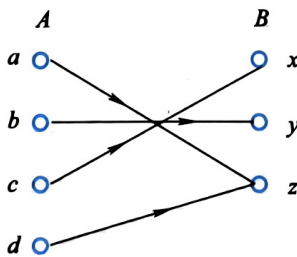


图 4-27 例 4-42 函数 f 的示意图

解: 由函数 f 的示意图可知, 由于函数 f 的值域等于集合 $B = \{x, y, z\}$, 故函数 f 是满射的。

定义 4-34: 设 f 是从集合 A 到集合 B 的函数, 若函数 f 既是单射的, 又是满射的, 则称 f 是双射函数。

例 4-45 判断从集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 到集合 $B = \{x, y, z, w\}$ 的函数 f 是否为双射的, f 的定义如图 4-28 所示。

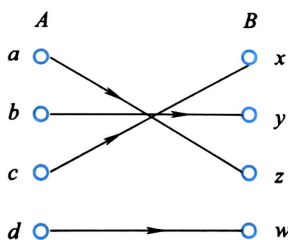


图 4-28 例 4-45 函数 f 的示意图

解: 由函数 f 的示意图可知, 函数 f 的定义域 $A = \{a, b, c, d\}$ 中的每个元素都有唯一对应的值, 故函数 f 是单射的。函数的值域等于集合 $B = \{x, y, z, w\}$, 故函数 f 是满射的, 因此, 函数 f 是双射的。

假设 f 是集合 A 到集合 B 的函数, 根据定义可知以下几点。

(1) 为了证明函数 f 是单射的, 对于 $\forall x, y \in A$ 且 $f(x) \neq f(y)$ 时, 能够得到 $x \neq y$, 那么函数 f 就是单射的。

(2) 为了证明函数 f 是满射的, 对 $\forall y \in B$, 都有 $f(x) = y$, 则函数 f 就是满射的。

(3) 如果函数 f 既是单射的, 又是满射的, 则函数 f 是双射的。

题: 双射函数

2. 设集合 A, B 是有穷集合, 且 $|A| = m, |B| = n$, 则从 A 到 B 不同的双射函数个数有 (D)
- (A) mn (B) m^n (C) $n!$ (D) $m!$

逆函数

4.2.3 函数运算

单 + 满

定义 4-35: 设 f 是从集合 A 到集合 B 的双射函数, 函数 f 的逆函数是从集合 B 到集合 A 的函数, 表示为 $f^{-1}(y) = x$, 当且仅当 $f(x) = y$ 。

题：逆函数

18. (本题 10 分) 设 $f: A \rightarrow B$ 是双射的, 证明: f^{-1} 是函数, 并且是从 B 到 A 的双射函数。

证明: f 是双射函数, 则

① $\forall x \in A, \exists$ 唯一 y, xfy 函数定义

② $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2, f(x_1) \neq f(x_2)$ 单射定义

③ $\text{ran} f = B$ 满射定义

f^{-1} 是函数, $\forall y \in B$, 对于 $x_1, x_2 \in A$, 有 $yf^{-1}x_1 \wedge yf^{-1}x_2$

由逆的定义, 有 $x_1fy \wedge x_2fy$

$\because f$ 单射 $\therefore x_1 = x_2 \therefore f^{-1}$ 是函数

$\because \text{ran} f^{-1} = \text{dom} f = A, \text{dom} f^{-1} = \text{ran} f = B \therefore f^{-1}$ 是满射.

取 $\forall y_1, y_2 \in B, y_1 \neq y_2$, 有 $f^{-1}(y_1) = x_1, f^{-1}(y_2) = x_2$

即 $y_1f^{-1}x_1, y_2f^{-1}x_2$

由逆的定义, 有 x_1fy_1, x_2fy_2

$\because y_1 \neq y_2 \therefore x_1 \neq x_2 \therefore f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2) \therefore f^{-1}$ 是单射

复合函数

定义 4-36: 设 f 是从集合 B 到集合 C 的函数, g 是集合 A 到集合 B 的函数, f 和 g 的复合函数记作 $f \circ g$, 表示为

$$f \circ g = \{ \langle x, z \rangle \mid x \in A \wedge z \in C \wedge \exists y (y \in B) \wedge \langle x, y \rangle \in g \wedge \langle y, z \rangle \in f \}$$

$f \circ g$ 是从 A 到 C 的函数, 称为 f 和 g 的复合函数。对 $\forall x \in A$, 都有 $f \circ g(x) = f(g(x))$ 。

第 5 章 图的概念 矩阵表示

5.1 图的基本概念

顶点 阶 边 环 零图 平凡图

定义 5-1: 图 (Graph) 是由顶点集合和顶点间的一元关系集合 (即边的集合或弧的集合) 组成的数据结构, 通常可以用 $G(V, E, \varphi)$ 来表示。其中顶点集合和边的集合分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示, φ 是从 E 到 V 中的有序对或无序对的映射。

$V(G)$ 中的元素称为顶点 (Vertex), 又称为结点, 用 u 、 v 等符号表示; 顶点的个数称为图的阶 (Order), 通常用 n 表示。 $E(G)$ 中的元素称为边 (Edge), 用 e 等符号表示; 边的个数称为图的边数 (Size), 通常用 m 表示。从边 e 到其相连接的两个顶点 (u 、 v) 的映射如果是无序的, 则这条边可以用无序对 (u, v) 来表示, 这时边 e 称为无向边, 简称为边。从边 e 到其相连接的两个顶点 (u 、 v) 的映射如果是有序的, 则这条边一般用有序对 $\langle u, v \rangle$ 来表示, 这时边 e 称为有向边或弧, u 称为弧 e 的始点, v 称为弧 e 的终点, u 和 v 统称为 e 的端点。同时称 e 关联于 u 和 v , u 和 v 是邻接点。同样, 关联于同一个顶点的两条边, 称为邻接边。关联于同一个顶点的一条边, 称为自回路, 又称为环, 环的方向是不定的。无向边又称为棱, 没有始点和终点。不与任何顶点邻接的顶点称为孤立顶点。

定义 5-2: 每一条边都是有向边的图称为有向图, 每一条边都是无向边的图称为无向图。如果在图中一些边是有向边, 而另一些边是无向边, 则称这个图是混合图。全由孤立顶点构成的图称为零图或离散图。若一个图中只含一个孤立顶点, 则该图称为平凡图。顶点数为 n 的图称为 n 阶图, 顶点集为空集的图称为空图。

多重图 线图 简单图

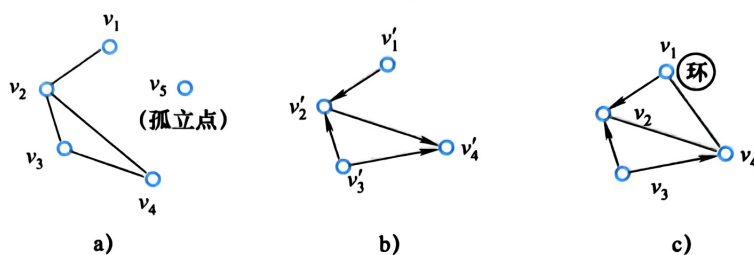


图 5-1 几种常见图

a) 无向图 b) 有向图 c) 混合图

定义 5-3: 含有平行边的图称为多重图，不含平行边的称为线图，没有自回路的线图称为简单图。

在有向图中，若两个顶点间（包括顶点自身间）始点和终点均相同的边多于一条，则这几条边称为平行边，又称为多重边。类似，在无向图中，若两个顶点间（包括顶点自身间）多于一条边，则称这几条边为平行边或多重边。简单图既无多重边，又无环。 e 既可以表示有向边，又可以表示无向边。两个顶点 u 、 v 间互相平行的边的条数称为边 (u, v) 的重数。仅有一条边时重数为 1，没有边时重数为 0。

5.2 度 度序列

度 度序列 正则图

5.2 顶点的度数与度序列

最大度 $\Delta(G)$
最小度 $\delta(G)$

定义 5-4: 在无向图中，顶点 v 作为边的端点的次数之和称为 v 的度数，简称度，记作 $d(v)$ 。在有向图中，顶点 v 作为边的始点的次数之和称为 v 的出度，记为 $d^+(v)$ ；顶点 v 作为边的终点的次数之和称为 v 的入度，记为 $d^-(v)$ ，顶点 v 的度数则是入度和出度之和。

图中度数的最大值称为最大度，度数的最小值称为最小度。同时，有向图中入度的最大值称为最大入度，出度的最大值称为最大出度。有向图中度数为 1 的顶点称为悬挂顶点，它所关联的边称为悬挂边。

设图 G 的顶点集为 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，则称 $(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$ 为 G 的度数序列。同理，有向图还有入度序列和出度序列，分别为 $(d^-(v_1), d^-(v_2), \dots, d^-(v_n))$ 和 $(d^+(v_1), d^+(v_2), \dots, d^+(v_n))$ 。

定义 5-5: 各顶点的度数均相同的图称为正则图，各顶点的度数均为 k 时称为 k 度正则图。

5.3 握手定理

握手定理及其推论

定理 5-1 (握手定理): 对任何图, 每一条边都有两个端点, 所有顶点的度数之和等于它们作为端点的次数之和, 即等于边数的 2 倍。 即 $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m$ 。

一般把度数为奇数的顶点称为 奇度顶点, 度数为偶数的顶点称为 偶度顶点。

推论 5-1: 对任何图, 奇度顶点一定是偶数个。

证明: 设 G 中奇数度顶点集合为 V_1 , 偶数度顶点集合为 V_2 , 则有

$$\sum \deg(v_i) + \sum \deg(v_j) = \sum \deg(v_k) = 2|E|, v_i \in V_1, v_j \in V_2, v_k \in V。$$

由于 $\sum \deg(v_j)$, $v_j \in V_2$ 是偶数之和必为偶数, 而 $2|E|$ 也是偶数, 故得 $\sum \deg(v_i)$, $v_i \in V_1$ 必是偶数。而各个 $\deg(v_i)$ ($v_i \in V_1$) 是奇数, 所以一定是偶数个 $\deg(v_i)$ 求和的结果, 即 $|V_1|$ 是偶数。

推论 5-2: 对有向图, 图的入度总和与出度总和相等, 且等于图的边数, 即

$$\sum_{v \in V} \deg^+(v) = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = m$$
$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v) + \sum_{v \in V} \deg^-(v) = 2m$$

$$\sum \text{度} = 2 \sum \text{边}$$

度数和一定是偶数

5.4 完全图

完全图补图

5.4 完全图

同补图的补图 等于自身

定义 5-6: 任意两个相异顶点都相邻的简单图称为完全图, n 阶完全图记作 K_n 。

其中, 有向完全图的每对相同顶点间都有两个相反方向的弧。无向完全图的每一条边都是无向边, 不含有平行边和环, 每一对顶点间都有边相连。

定义 5-7: 设 $G = \langle V, E \rangle$ 为具有 n 个顶点的简单图, 从完全图 K_n 中删去 G 中的所有边而得到的图称为 G 相对于完全图 K_n 的补图, 简称 G 的补图, 记为 \bar{G} 。当 G 为有向图时, 则 K_n 为有向完全图, 当 G 为无向图时, 则 K_n 为无向完全图。 G 与 \bar{G} 互为补图。

删去边的操作在 5.6 节会重点讨论, 此处能理解其含义即可。

例 5-7 画出图 5-6 中简单图的补图。

解: 补图如图 5-7 所示。

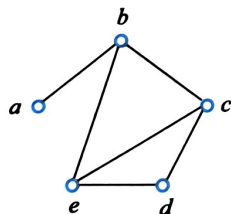


图 5-6 例 5-7 简单图

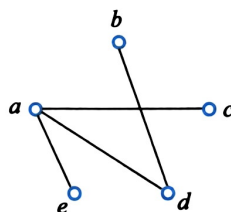


图 5-7 例 5-7 补图

定理 5-2: 在任何图中, n 个顶点的无向完全图 K_n 的边数为 $n(n-1)/2$, n 个顶点的有向完全图 K_n 的边数为 $n(n-1)$ 。

定理 5-3: 在任何有向完全图中, 所有顶点入度的二次方之和等于所有顶点出度的二次方之和。

5.5 图的同构与子图

同构

一个图的图形表示不一定是唯一的，一些看起来不同的图之间可能只是顶点和边的名称不同，而邻接关系是一样的，这时可以视作是同一个图的不同表现形式，也就是图的同构。同构的两个图的各顶点之间可以一一对应，并且这种对应关系保证了顶点之间的邻接关系和边的重数，如果是有向图还能保持每条边的方向相同，那么就说这两个图是同构的。即同构图除了顶点和边的名称不同外，实际上就是一个图形。

定义 5-9: 设 $G = \langle V, E \rangle$ 和 $G' = \langle V', E' \rangle$ 分别表示两个图，若存在从 V 到 V' 的双射函数 φ ，使得对任意的顶点 $a, b \in V$, $(a, b) \in E$ ，当且仅当 $(\varphi(a), \varphi(b)) \in E'$ ，且 (a, b) 和 $(\varphi(a), \varphi(b))$ 有相同的重数时，就称图 G 和 G' 是同构的，记为 $G \cong G'$ 。

目前尚没有一种有效的方法来直接判定两个图同构，在这里仅给出一些同构的必要条件。

- (1) 同构图的顶点数相等。
- (2) 同构图的边数相等。
- (3) 同构图的度数相同的顶点数相等。

以上是必要条件但不是充分条件，满足以上三种条件但不是同构图的情况存在，例如，如图 5-9 所示的非同构图。

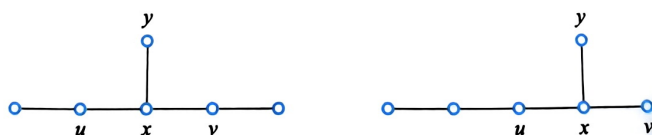


图 5-9 非同构图

子图 真子图 生成子图

定义 5-10: 设 $G = \langle V, E \rangle$ 和 $G' = \langle V', E' \rangle$ 是两个图。如果 $V' \subseteq V$ 且 $E' \subseteq E$ ，则称 G' 是 G 的子图， G 是 G' 的母图，记作 $G' \subseteq G$ 。如果 $G' \subseteq G$ 且 $G' \neq G$ ，则称 G' 是 G 的真子图。如果 $V' = V$ 且 $G' \subseteq G$ ，则称 G' 是 G 的生成子图。若子图 G' 中没有孤立顶点， G' 由 E' 唯一确定，则称 G' 为由边集 E' 导出的子图。

5.7 通路 回路

通路 回路

简单通路：没有重复点

迹：没有重复边

在图的研究中，常常考虑从一个顶点出发，沿着一些边（或弧）连续移动，而到达另一个指定顶点，这种依次由顶点和边（或弧）组成的序列，便形成了链（或路）的概念。以下的定义如果不特别指出，都是同时适用于有向图和无向图。

定义 5-11: 给定无向图（或有向图） $G = \langle V, E \rangle$ ，令 $v_0, v_1, \dots, v_m \in V$ ，边（或弧） $e_0, e_1, \dots, e_m \in E$ ，其中 v_{i-1}, v_i 是 e_i 的顶点，交替序列 $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_m v_m$ 称为连接 v_0 到 v_m 的链（或通路）。 v_0 和 v_m 分别是链的始点和终点，而边（或弧）的数目称为链的长度。

在图 $G = \langle V, E \rangle$ 中，对 $\forall v_i, v_j \in V$ ，如果从 v_i 到 v_j 存在路，则称长度最短的通路为从 v_i 到 v_j 的短程线，从 v_i 到 v_j 的短程线的长度称为 v_i 到 v_j 的距离，记为 $d(v_i, v_j)$ 。

定义 5-12: 若通路中的所有边 e_0, e_1, \dots, e_m 互不相同，则称此通路为简单通路或一条迹。若回路中的所有边 e_0, e_1, \dots, e_m 互不相同，则称此回路为简单回路或一条闭迹；若通路中的所有顶点 v_0, v_1, \dots, v_m 互不相同（从而所有的边互不相同），则称此通路为基本通路或者初级通路、路径；若回路中除 $v_0 = v_m$ 外的所有顶点 v_0, v_1, \dots, v_{m-1} 互不相同（从而所有的边互不相同），则称此回路为基本回路或者初级回路、圈。

基本通路（或基本回路）一定是简单通路（或简单回路），反之则不一定。

通路回路计算

定理 设 A 为 n 阶有向图 D 的邻接矩阵，则 $A^l (l \geq 1)$ 中元素

$a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数，

$a_{ii}^{(l)}$ 为 v_i 到自身长度为 l 的回路数，

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的通路总数，

$\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的回路总数。

推论 设 $B_l = A + A^2 + \dots + A^l (l \geq 1)$, 则 B_l 中元素

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度小于或等于 l 的通路数,

$\sum_{i=1}^n b_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度小于或等于 l 的回路数.

5.8 连通性

连通分支 割点 割边

设 u, v 为无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 中的两个顶点, 若 u, v 之间存在通路, 则称顶点 u, v 是连通的, 记为 $u \sim v$ 。对任意顶点 u , 规定 $u \sim u$ 。

定义 5-13: 若无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 中任意两个顶点都是连通的, 则称 G 是连通图, 否则称 G 是非连通图 (或分离图)。无向图 G 中的每个连通的划分块称为 G 的一个连通分支, 用 $p(G)$ 表示 G 中的连通分支个数。

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 则有:

(1) 若存在顶点子集 $V' \subset V$, 使得删除 V' 后, 所得子图 $G - V'$ 的连通分支数与 G 的连通分支数满足 $p(G - V') > p(G)$, 而删除 V' 的任何真子集 V'' 后, $p(G - V'') = p(G)$, 则称 V' 为 G 的一个点割集。特别地, 若点割集中只有一个顶点 v , 则称 v 为割点。

(2) 若存在边集子集 $E' \subset E$, 使得删除 E' 后, 所得子图 $G - E'$ 的连通分支数与 G 的连通分支数满足 $p(G - E') > p(G)$, 而删除 E' 的任何真子集 E'' 后, $p(G - E'') = p(G)$, 则称 E' 为 G 的一个边割集, 简称为割集。特别地, 若割集中只有一条边 e , 则称 e 为割边或桥, 如图 5-21 中边 cd 和边 hi 。

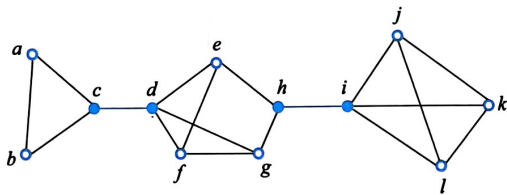
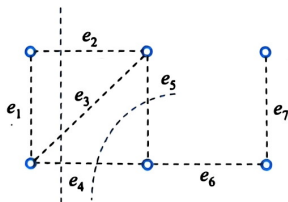


图 5-21 割边

割集有以下特点:

- (1) 若把该集合的所有边删去, 则会增加连通分图的个数。
- (2) 若把该集合的任何真子集从 G 中删去, 则无此效果。

例如在图 5-22 中, $\{e_2, e_3, e_4\}$ 是一个割集, $\{e_4, e_5\}$ 也是一个割集, 但 $\{e_4, e_5, e_6\}$ 不是割集。

图 5-22 图 G 的割集

连通度

最小的连通
分支有几个点

定义 5-14: 设无向图连通图 $G = \langle V, E \rangle$, 称 $\kappa(G) = \min \{ |V'| \mid V' \text{ 为 } G \text{ 的点割集} \}$ 为 G 的点连通度, 简称连通度。规定: 完全图 K_n 的点连通度为 $n-1$, $n \geq 1$; 非连通图的点连通度为 0。若 $\kappa(G) \geq k$, 则称 G 为 k -连通图。

定理 5-4: 对任意无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 均有下面不等式成立。

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G) \leq \Delta(G) \text{ 最大度}$$

其中, $\kappa(G)$ 、 $\lambda(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别为 G 的点连通度、边连通度和顶点的最小度数。

5.8.2 有向图的连通性

强连通 \Leftrightarrow 存在过每个点的回路
 单连通 \Leftrightarrow 存在过每个点的通路

定义 5-15: 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是一个有向图，略去 G 中所有有向边的方向得到无向图 G' ，如果无向图 G' 是连通图，则称有向图 G 是连通图，或称为弱连通图，否则称 G 是非连通图。

设图 $G = \langle V, E \rangle$ ，其中 $v_i, v_j \in V$ ，如果从 v_i 到 v_j 存在一条路径，则称 v_j 从 v_i 可达。定义每个顶点到其自身是可达的。

定义 5-16: 设有向图 $G = \langle V, E \rangle$ 是连通图，若 G 中任何一对顶点之间至少有一个顶点到另一个顶点是可达的，则称 G 是单向连通图；若 G 中任何一对顶点之间都是相互可达的，则称 G 是强连通图。

5.9 矩阵表示

邻接矩阵

设有向图 $G = \langle V, E \rangle$ ，顶点集 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ， V 中的顶点按下标由小到大编序，构造 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$)，其中：

$$a_{ij} = \begin{cases} m & \text{若存在 } m \text{ 条 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 直接相连的有向边} \\ 0 & \text{若不存在 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 直接相连的有向边} \end{cases}$$

则称 A 为有向图 G 的邻接矩阵，记为 $A(G)$ 。

而对无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 来说，顶点集 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ， V 中的顶点按下标由小到大编序，构造 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$)，其中：

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \text{ 与 } v_j \text{ 直接相连} \\ 0 & v_i \text{ 与 } v_j \text{ 不直接相连} \end{cases}$$

则称 A 为无向图 G 的邻接矩阵, 记为 $A(G)$ 。

邻接矩阵与顶点的编序有关, 同一个图形顶点的编序不同, 得到的邻接矩阵也不同, 但是表示的都是同一个图。也就是说, 这些顶点的不同编序得到的图都是同构的, 同时它们的邻接矩阵也是相似的。

邻接矩阵的性质如下。

- (1) 零图的邻接矩阵的元素全为零, 并称它为零矩阵。
- (2) 图的每一个顶点都有自回路而再无其他边时, 则该图的邻接矩阵是单位矩阵。
- (3) 简单图的邻接矩阵的主对角元素全为零。

若设简单图 G 的邻接矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 则它的补图 \bar{G} 的邻接矩阵 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n \times n}$ 为

$$\bar{a}_{ij} = \begin{cases} 1 - a_{ij} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

可达矩阵

给定图 $G = \langle V, E \rangle$, 顶点集 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, V 中的顶点按下标由小到大编序, 构造 n 阶矩阵 $P = (p_{ij})_{n \times n} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 其中:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 可达} \\ 0 & \text{若 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 不可达} \end{cases}$$

则称矩阵 P 是图 G 的可达矩阵, 记为 $P(G)$ 。

可达矩阵表明了图中任意两个顶点间是否至少存在一条链 (或路) 以及在顶点处是否有圈 (或回路)。

例 5-21 求图 5-28 中有向图的邻接矩阵和可达矩阵。

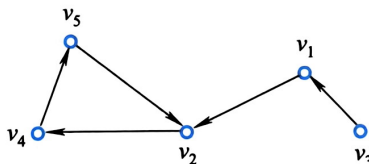


图 5-28 例 5-21 有向图

解: 邻接矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

可达矩阵为

$$A \vee A^2 \vee A^3 \vee A^4 \vee A^5 = P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

关联矩阵

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是一个无环的、至少有一条有向边的有向图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 矩阵 $M = (m_{ij})_{n \times m}$, 其中

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } e_j \text{ 是 } v_i \text{ 的出边} \\ -1 & \text{当 } e_j \text{ 是 } v_i \text{ 的入边} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

称 M 为有向图 G 的关联矩阵。有向图的关联矩阵有如下性质。

(1) 第 i 行 ($1 \leq i \leq n$) 中, 1 的个数是 v_i 的出度, -1 的个数是 v_i 的入度, 都等于边数。

(2) 每列都恰有一个 1 和一个 -1 。

(3) 若第 i 行全为 0, 则 v_i 为孤立顶点。

而对于无向图 $G = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 矩阵 $M = (m_{ij})_{n \times m}$, 其中

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & e_j \text{ 与 } v_i \text{ 相连} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

则称 M 为无向图 G 的关联矩阵。

5.9.4 连通性与矩阵关系

无向图 G 是连通图，当且仅当它的可达矩阵 P 的所有元素都均为 1。

有向图 G 是强连通图，当且仅当它的可达矩阵 P 的所有元素都均为 1。

有向图 G 是单向连通图，当且仅当它的可达矩阵 P 及其转置矩阵 P^T 经布尔加运算后所得矩阵 $P' = P \vee P^T$ 中除对主角元外的其余元素均为 1。

有向图 G 是弱连通图，当且仅当它的邻接矩阵 A 及其转置矩阵 A^T 经布尔加运算后所得矩阵 $B = A \vee A^T$ 作为邻接矩阵而求出的可达矩阵 P' 中的所有元素均为 1。

第 6 章 特殊的图

6.1 欧拉图

欧拉图 定义 判定

6.1.1 基本概念

定义 6-1: 设 G 是一个无孤立顶点的图，经过图中每条边一次且仅一次的道路（或回路）称为欧拉通路（或欧拉回路），具有欧拉回路的图称为欧拉图。

规定平凡图为欧拉图，且每个欧拉图必然是连通图。

图 6-1a、d 是欧拉图；图 6-1b、e 不是欧拉图，但存在欧拉通路；图 6-1c、f 不存在欧拉通路。

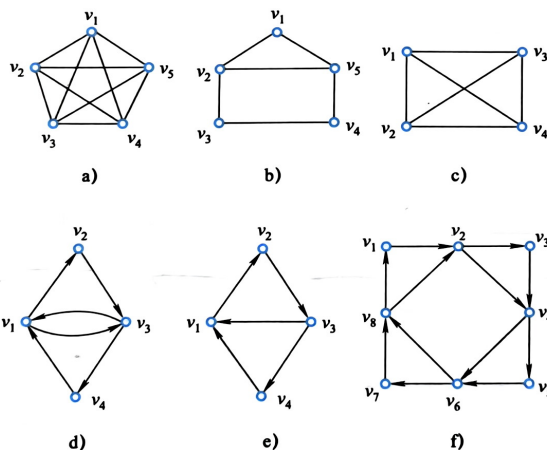


图 6-1 欧拉图的判定

欧拉回路
欧拉图

回路 \rightarrow 欧拉图

$n \div 2 = 1$ 时，完全图 K_n 是欧拉图

定理 6-1: 无向连通图 $G = \langle V, E \rangle$ 是欧拉图，当且仅当 G 的所有顶点的度数都为偶数。

推论: 非平凡连通图 $G = \langle V, E \rangle$ 含有欧拉通路，当且仅当 G 仅有零个或者两个奇度顶点。

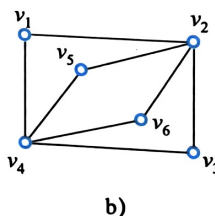
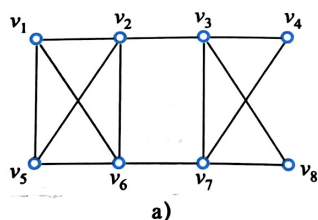
定义 6-2: 图 G 中的一条链 (或路), 若它通过 G 中的每条边 (或弧) 恰好一次, 则称该链 (或路) 为欧拉链 (或欧拉路)。

定理 6-2: 给定连通无向图 $G = \langle V, E \rangle$, $u, v \in V$ 且 $u \neq v$, u 与 v 间存在欧拉链等价于 G 中仅有 u 和 v 为奇度顶点。

定理 6-3: 给定弱连通有向图 G , G 有欧拉回路等价于 G 中的每个顶点的入度等于出度。

定理 6-4: 给定弱连通有向图 $G = \langle V, E \rangle$, $u, v \in V$ 且 $u \neq v$, u 与 v 存在欧拉路等价于 G 中唯有 u 和 v 的入度不等于出度, 且 u 的入度比其出度大 1 且 v 的出度比其入度大 1 (或者反之)。

例 6-1 求图 6-2a、b 的欧拉回路或欧拉通路。



$$\begin{aligned} \text{in}(u) &= \text{out}(u) + 1 \\ \text{and} \\ \text{in}(v) &= \text{out}(v) + 1 \end{aligned}$$

图 6-2 例 6-1 平面图

解: 图 6-2a 的欧拉通路为 $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8, v_3, v_7, v_6, v_2, v_5, v_6, v_1, v_5)$ 。

图 6-2b 的欧拉回路为 $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_2, v_6, v_4, v_1)$ 。

欧拉图 判定方法

判断无向欧拉通路的方法: 无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 具有一条欧拉通路, 当且仅当 G 是连通的, 且仅有零个或者两个奇度顶点。若有两个奇度顶点, 则它们是 G 中每条欧拉通路的端点。

判断无向欧拉图的方法: 无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 是欧拉图, 当且仅当 G 是连通的, 且 G 的所有顶点的度数都为偶数。

根据以上判定方法可知, 图 6-3a 是欧拉图; 图 6-3b 不是欧拉图, 但存在欧拉通路; 图 6-3c 既不是欧拉图, 也不存在欧拉通路。

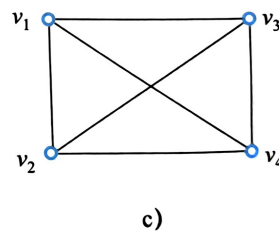
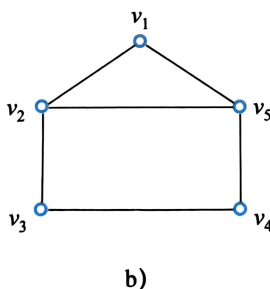
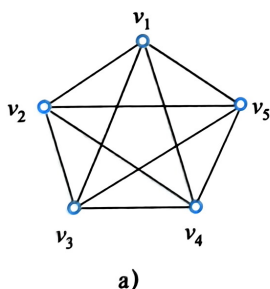


图 6-3 无向欧拉图的判定

判断有向欧拉通路的方法：有向图 G 具有一条欧拉通路，当且仅当 G 是连通的，且除了两个顶点以外，其余顶点的入度等于出度，而这两个例外的顶点中，一个顶点的入度比出度大 1，另一个顶点的出度比入度大 1。

判断有向欧拉图的方法：有向图 G 具有一条欧拉回路，当且仅当 G 是连通的，且所有顶点的入度等于出度。

根据以上判定方法，可知图 6-4a 存在一条的欧拉通路，即 $v_3v_1v_2v_3v_4v_1$ ；图 6-4b 存在欧拉回路 $v_1v_2v_3v_4v_1v_3v_1$ ，因而是欧拉图；图 6-4c 中有欧拉回路 $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_1$ ，因而是欧拉图。

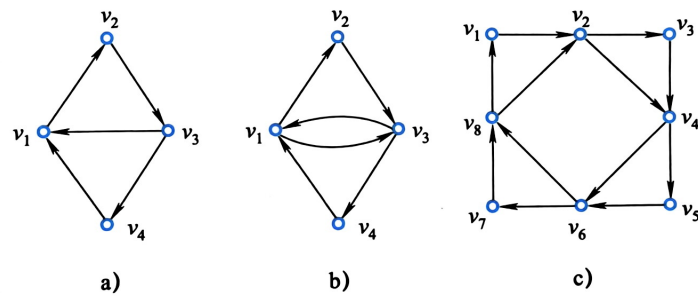
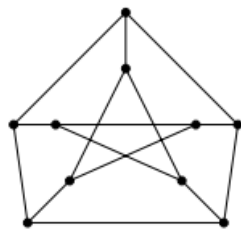


图 6-4 有向欧拉图的判定

题：欧拉图



5. 在 Peterson 图中，至少添加 (C) 条边才能构成 Euler 图。
 (A) 0 (B) 1 (C) 5 (D) 10

6.2 哈密顿图

哈密顿图 定义 判定

定义 6-3: 设 G 是一个连通图, 若 G 中存在一条包含全部顶点的基本通路, 即经过图中每个顶点一次且仅一次的通路, 称这条通路为 G 的哈密顿通路。经过图中每个顶点一次且仅一次的回路, 称为 G 的哈密顿回路 (哈密顿环)。若 G 中存在一个包含全部顶点的圈, 则称这个圈为 G 的哈密顿圈; 含有哈密顿圈的图称为哈密顿图。

规定平凡图为哈密顿图, 且由定义可知, 完全图必是哈密顿图。

例如, 图 6-7a 中有哈密顿通路, 图 6-7b 中没有哈密顿通路, 图 6-7c、d 中都有哈密顿圈。

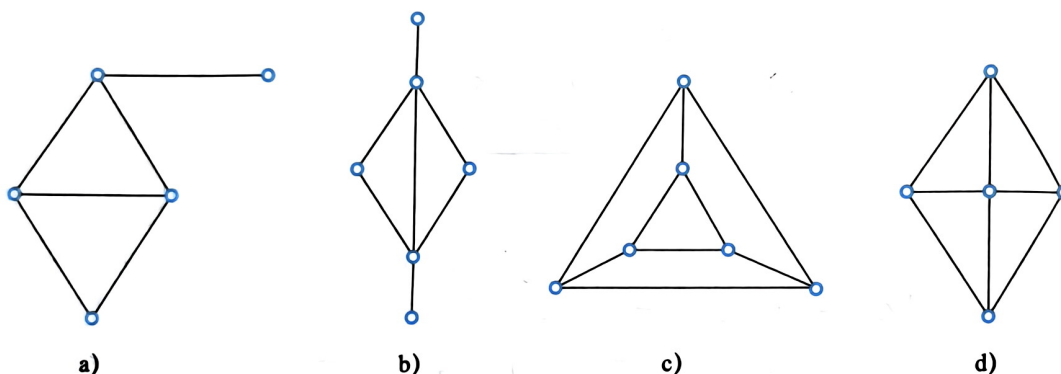


图 6-7 无向图

定理 6-5: (必要条件) 设无向连通图 $G = \langle V, E \rangle$ 是哈密顿图, S 是 V 的任意非空真子集, 则 $w(G-S) \leq |S|$, 其中 $w(G-S)$ 是从 G 中删除 S 后所得到图的连通分支数。

定理 6-6: (充分条件) 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是具有 n 个顶点的简单无向图, 若在 G 中每一对顶点的次数之和大于或等于 $n-1$, 则在 G 中存在一条哈密顿路径。

定理 6-7: (充分条件) 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是具有 n 个顶点的简单无向图, 若在 G 中每一对顶点的次数之和大于或等于 n , 则在 G 中存在一条哈密顿回路。

定理 6-8: (充分条件) 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是具有 $n \geq 3$ 个顶点的简单无向图, 若在 G 中每一个顶点的次数大于或等于 $n/2$, 则在 G 中存在一条哈密顿回路。

题：哈密顿图

21. (本题 10 分) 已知 a, b, c, d, e, f, g 7 人中, 会讲的语言分别为:

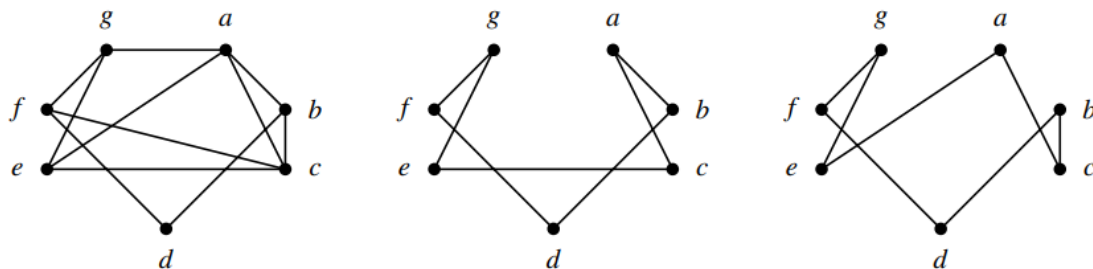
a : 英语、德语; b : 英语、汉语; c : 英语、意大利语、俄语; d : 汉语、日语;

e: 意大利语、德语; *f*: 俄语、日语、法语; *g*: 德语、法语.

问：能否将他们的座位安排在圆桌旁，使得每个人都能与他身边的人交流。

解：

作无向图 $G = \langle V, E \rangle$ ，其中 $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ， $E = \{(u, v) | u, v \in V, u \neq v, \text{且} u \text{与} v \text{会讲同一种语言}\}$ 。根据已知条件，可作出如下 G 的图形（左图）。易知该图是哈密顿图，右侧两图为哈密顿回路，因此可依此安排就坐。



6.3 二部图

二部图 定义 判定

二部图 = 偶图 = 二分图

定义 6-4: 给定简单无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 且 $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. 使得 G 中任意一条边的两个端点, 一个属于 V_1 , 另一个属于 V_2 , 则称 G 是二部图、偶图或二分图, 并将二部图记作 $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$, 并称 V_1 、 V_2 是 V 的划分, 也可以称 V_1 和 V_2 为互补顶点子集。在偶图 $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$ 中, 若 V_1 中的每个顶点与 V_2 中的每个顶点都有且仅有一条边相关联, 则称偶图 G 为完全偶图、完全二部图或完全二分图, 记为 $K_{n,m}$, 其中, $n = |V_1|$, $m = |V_2|$ 。

偶图中没有自回路, 平凡图和零图可以看成特殊的偶图。

定理 6-9: 无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 为偶图的充分必要条件是 G 的所有回路的长度均为偶数。

定义 6-5: 给定简单无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 若 $M \subseteq E$ 且 M 中任意两条边都是不邻接的, 则子集 M 称为 G 的一个匹配或对集, 并把 M 中的边所关联的两个顶点称为在 M 下是匹配的。令 M 是 G 的一个匹配, 若顶点 v 与 M 中的边关联, 则称 v 是 M -饱和的; 否则, 称 v 是 M -不饱和的。若 G 中的每个顶点都是 M -饱和的, 则称 M 是完全匹配 (不唯一)。如果 G 中没有匹配 M_1 , 使 $|M_1| > |M|$, 则称 M 是最大匹配 (不唯一)。

显然, 每个完全匹配是最大匹配, 但反之不为真。

定义 6-6: 令 M 是图 $G = \langle V, E \rangle$ 中的一个匹配。若存在一个链, 它是由 $E - M$ 和 M 中的边交替构成的, 则称该链是 G 中的 M -交错链; 若 M -交错链的始顶点和终止点都是 M -不饱和的, 则称该链为 M -增广链; 特别地, 若 M -交错链的始顶点也是它的终止点而形成圈, 则称该圈为 M -交错圈。

给定两个集合 S 和 T , S 与 T 的对称差记为 $S \oplus T$, 规则如下:

$$S \oplus T = (S \cup T) - (S \cap T)$$

定理 6-10: 设 M_1 和 M_2 是图 G 中的两个匹配, 则在 $\langle M_1 \oplus M_2 \rangle$ 中, 每个分图或是交错链, 或是交错圈。

定理 6-11: 给定二部图 $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$, G 中存在使 V_1 中每个顶点饱和的匹配等价于对任意 $S \subseteq V_1$ 有 $|N(S)| \geq |S|$, 其中 $N(S)$ 表示与 S 中顶点邻接的所有顶点集合。

霍尔定理

定理 6-12 (霍尔定理): 在偶图 $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$ 中存在从 V_1 到 V_2 的匹配, 当且仅当 V_1 中任意 k 个顶点至少与 V_2 中的 k 个顶点相邻, $k = 1, 2, \dots, |V_1|$ 。

这个定理中的条件通常称为相异性条件。

判断一个偶图是否满足相异性条件通常比较复杂, 下面给出判断偶图是否存在匹配的一个充分条件, 对于任何偶图来说, 都很容易确定这些条件。因此, 在考查相异性条件之前, 应首先使用这个充分条件。

t 条件: 设 $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$ 是一个偶图。如果满足条件:

- (1) V_1 中每个顶点至少关联 t 条边。
- (2) V_2 中每个顶点至多关联 t 条边。

则 G 中存在从 V_1 到 V_2 的匹配。其中 t 为正整数。

6.4 平面图

平面图 定义 性质

定义 6-7: 如果能把一个无向图 G 的所有顶点和边画在平面上, 使得任何两条边除公共顶点外没有其他交叉点, 则称 G 为平面图, 否则称 G 为非平面图。

设 G 是一个平面图，由图中的边所包围的内部不包含顶点和边的区域，称为 G 的一个面；包围该面的诸边所构成的回路称为这个面的边界；面 r 的边界的长度（边数）称为该面的次数，记为 $D(r)$ ；区域面积有限的面称为有限面，区域面积无限的面称为无限面。平面图有且仅有一个无限面。

若一条边不是割边，它必是两个面的公共边，割边只能是一个面的边界。两个以边为公共边界的面称为相邻的面。

定理 6-13： G 为一有限平面图，其面的次数之和等于其边数的两倍。

例 6-8 列出图 6-19 中各个面的次数。

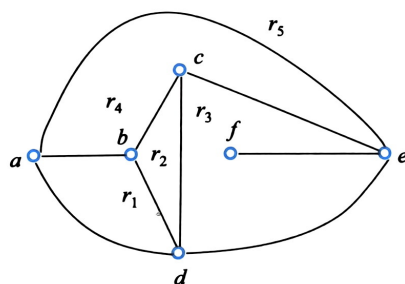


图 6-19 例 6-8 平面图

解： $D(r_1) = 3, D(r_2) = 3, D(r_3) = 5, D(r_4) = 4, D(r_5) = 3$ 。
 $D(r_1) + D(r_2) + D(r_3) + D(r_4) + D(r_5) = 18$ 。

欧拉公式

6.4.2 欧拉公式

1750 年，欧拉发现，任何一个凸多面体，若有 n 个顶点、 m 条棱和 f 个面，则有 $n - m + f = 2$ 。这个公式可以推广到平面图上，称为欧拉公式。具体定义如下。

定理 6-14 (欧拉公式)： 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是连通平面图，有 n 个顶点、 m 条边、 r 个面，则有 $n - m + r = 2$ 。

6.5 图的着色

对偶图

定义 6-11: 将平面图 G 嵌入平面后, 通过以下手续 (简称 D 过程):

- (1) 对图 G 的每个面 D_i 的内部作一顶点且仅作一顶点 v_i^* 。
- (2) 经过每两个面 D_i 和 D_j 的每一个共同边界 e_k^* 作一条边 $e_k^* = (v_i^*, v_j^*)$ 与 e_k 相交。
- (3) 当且仅当 e_k 只是面 D_i 的边界时, v_i^* 恰存在一条自回路与 e_k 相交。

所得的图称为图 G 的对偶图, 记为 G^* 。如果图 G 的对偶图 G^* 同构于 G , 则称图 G 是自对偶图。对偶图是相互的。

如图 6-24 所示, 图 6-24a 为对偶图, 图 6-24b 为自对偶图。

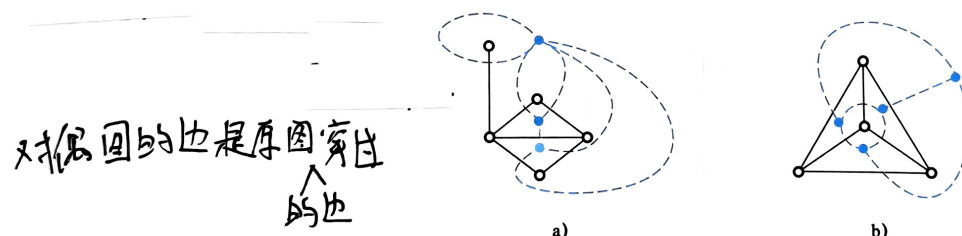


图 6-24 对偶图与自对偶图

a) 对偶图 b) 自对偶图

面着色

平面图着色问题起源于地图的着色, 对地域连通且有一段公共边界的平面地图 G 的每个国家涂一种颜色, 使相邻的国家涂不同的颜色, 称为对 G 的一种面着色, 若能用 k 种颜色给 G 的面着色, 就称对 G 的面进行了 k 着色, 或称 G 是 k -面可着色的; 若 G 是 k -面可着色的, 但不是 $(k-1)$ -面可着色的, 就称 G 的面色数为 k , 记为 $\chi^*(G) = k$ 。

定理 6-18: 地图 G 是 k -面可着色的, 当且仅当它的对偶图 G^* 是 k -可着色的。

在介绍五色定理之前先一起认识一个定理。

定理 6-19: 在简单连通平面图中至少有一个顶点 v_0 , 其次数 $d(v_0) \leq 5$ 。

证明: 用反证法。

设 (n, m) 图 G 是简单连通平面图, 所有顶点的次数不小于 6。

则 $m \leq 3n - 6$ 。

又 $2m = \sum d(v) \geq 6n$, 即 $m \geq 3n$, 矛盾。

故存在 v_0 , 其次数 $d(v_0) \leq 5$ 。

定理 6-20 (五色定理): 用 5 种颜色可以给任一简单连通平面图 $G = \langle V, E \rangle$ 正常着色。

点着色

定义 6-12: 图 G 的正常着色 (简称着色) 是指对它的每一个顶点指定一种颜色, 使得没有两个相邻的顶点有同一种颜色。如果图 G 在着色时用了 n 种颜色, 称 G 是 n -色的。在对图 G 进行着色时, 需要的最少颜色数称为图 G 的着色数, 记为 $x(G)$ 。

首先介绍一种图的着色方法, 名为韦尔奇·鲍威尔 (Welch Powell) 方法, 过程如下。

(1) 将图 G 中的顶点按照次数的递减次序进行排列 (可能并不是唯一的, 有些顶点有相同的次数)。

(2) 用第一种颜色对第一个顶点着色, 并且按排列次序, 对与前面着色点不邻接的每一个顶点着上同样的颜色。

(3) 用第二种颜色对尚未着色的点重复第 (2) 步, 用三种颜色继续这种做法, 直到所有的顶点全部着上色为止。

下面以图 6-31 为例进行点着色。

(1) 按次数递减排序顶点: a_5 、 a_3 、 a_7 、 a_1 、 a_2 、 a_4 、 a_6 、 a_8 。

(2) 用第一种颜色对 a_5 着色, 并对不相邻的顶点 a_1 也着同一颜色。

(3) 对顶点 a_3 和它不相邻的 a_4 、 a_8 着第二种颜色。

(4) 对顶点 a_7 和它不相邻的顶点 a_2 、 a_6 着第三种颜色。

则此图为三色的。 G 不可能是二色的, 因为 a_1 、 a_2 、 a_3 邻接, 必须用三种颜色。所以 $x(G) = 3$ 。

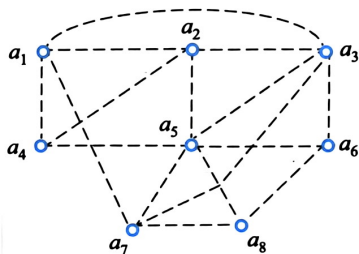


图 6-31 平面图 G