线性代数 A

浙江理工大学期末试题汇编

（试卷册 五套精装版）

学校：____________________

专业：____________________

班级：____________________

姓名：____________________

学号：____________________

（此试卷为 2022 年第二版 第 1 次发行）

写在前面

亲爱的小伙伴们：

你们好！我是20信管专业的欧阳玉泉，这次很荣幸创琦 giegie 邀请我来写这段序言。本人学习马马虎虎，线代勉强能够那个不错的成绩（创琦注：97分）。在学习了10多年数学后，每个人对于如何学习数学都会有独特的见解。但无论你们是谁，你们现状如何，只要是用这份资料，就必然想要学好数学，想要数学尽量拿个高分，最少也不想数学挂科。

从高中到大学，对于学习，很多人最深的体会就是可以摸鱼，可以不用想高中那样死命的学。高中老师常常给我们这样一种“暗示”，只要上了大学，学习就轻松了。然而高中生与大学生最大的差别就在于能否挂科的问题，高中无论怎么挂科，只要高考考好就没事，而大学，基本只有一次期末考试，期末考试挂了就基本凉透了。所以，希望使用这份资料的同学们能够好好学习，充实的度过一个学期的线代课程。

数学的重要性在于他的应用，由于数学是一门思维性的学科，由数学推理出的各种结论没有物化那么多的限制，它可以自由的应用于各种社会问题，社会的方方面面都充满了数学。很多学生会有疑惑，我们学好线性代数的意义在哪？有一部分学生学不好线代，甚至挂科重修。学好现代或许对你以后的人生发展意义不大，但现阶段你必须学好它，没人想要挂科。更深层次来说，学好一门数学科目，这一事实证明了一个学生的学习能力，也为某些特定专业的学生打好了基础。

你们可能会问，那么如何学好数学，更具体来说，如何学好线代？这个问题，每个人都有自己的答案。对于我来说，我喜欢数学，仅仅在于它是与高中最接近的科目。一个学期就那么十多周学习的时间，想要真正学的透彻，这很难。但学习的本质正在于学会如何学习，以及锻炼自己的思维能力。学习一门学科，必须要有清晰的思维，要有严密的流程意识，最后，要有对学习的热爱和信心。

线性代数这门科目，思维性极强，任何一个论断都有着严密的思维推理。它的基础只是简单的解方程，但它不仅仅是解方程，它解释了解方程背后的深层次原理以及更高层面的拓展。它能够被应用于许多的社会学科之中，学好它，有助于增强你的信心和能力。

那么，具体来说，线代的学习有没有什么具体的建议？

首先，学好线代，必须要有坚实的基础。自主学习，阅读课本，或者B站网课都是很好的方法。其次，我们需要具备严谨的思维推理能力，具备强烈的因果意识，多思考“为什么”。

最后，万变不离其宗，要有好成绩，刷题必不可少，只要是这种应试教育的模式，刷题就是很好的方法。我们在刷题过程中，巩固了基础，锻炼了思维能力，规范了流程和过程。这同样适用于其他各种科目。

最后的最后，希望你们都能够在线代的学习中找到学习的乐趣，在考试中拿到好成绩，最差也能逢考必过。

欧阳玉泉
2022年5月9日

（创琦说：欧阳玉泉同学是我见过的学习很努力的同学，他那一年考试的试卷难度很高，能考到97分已经很厉害了。他在信息管理专业需要敲代码，编程能力丝毫不亚于我这个计算机科班同学。他在学习方面也蛮刻苦的，能取得好成绩，背后一定是无数次的练习。大家经常听到躺平，但你们有没有发现，你身边那些经常喊着躺平的小伙伴考的都很好，所以嘛，抱怨归抱怨，该学习学习，加油！相信各位！）

目录

2022 年所有试卷版本见试卷尾页。如需资料获取请添加下方的 QQ 群获取。

送给大家一段文摘：

当欢笑淡成沉默，当信心变成失落，我走近梦想的脚步，是否依旧坚定执着；当笑颜流失在心的沙漠，当霜雪冰封了亲情承诺，我无奈的心中，是否依然碧绿鲜活。

有谁不渴望收获，有谁没有过苦涩，有谁不希望生命的枝头挂满丰硕，有谁愿意让希望变成梦中的花朵。现实和理想之间，不变的是跋涉，暗淡与辉煌之间，不变的是开拓。

甩掉世俗的羁绊，没谁愿意，让一生在碌碌无为中度过。整理你的行装，不同的起点，可以达到同样辉煌的终点。人生没有对错，成功永远属于奋斗者。

——汪曾祺《生活》

更多信息

试卷整理人：张创琦　　　　　　　微信公众号：创琦杂谈

试卷版次：2022 年 5 月 8 日 第二版 第 2 次发行

本人联系 QQ 号：1020238657（勘误请联系本人）

创琦杂谈学习交流群（QQ 群）群号：749060380

cq 数学物理学习群（QQ 群）群号：967276102

cq 计算机编程学习群（QQ 群）群号：653231806

创琦杂谈公众号优秀文章：

曾发布了《四级备考前要注意什么？创琦请回答！（一）》、《走！一起去春季校园招聘会看看，感受人间真实》、《送给即将期末考试的你》、《那些你不曾在选课中注意到的事情》、《身为大学生，你的劳动价值是多少？》（荐读）、《如何找到自己的培养计划》以及信息学院本科阶段五个专业的分流经验分享（来自 20 多位学长学姐的亲身经历与分享，文章过多，就不贴链接啦），公众号也可以帮忙大家发布相关社会实践的问卷。

我最近在写关于 github 使用技巧的文章，并且在开发网站，争取给大家提供更优质的学习讨论平台。

QQ 群：

“创琦杂谈学习交流群”主要为大家更新各种科目的资料，群里可以讨论问题、也可以发布社会实践的调查问卷互相帮助，目前群成员不到千人，相信您的问题会有人解答的。

“cq 数学物理学习群”更适合讨论数学物理相关的题目等，数学科目包括但不限于：高等数学、线性代数、概率论与数理统计等，物理包括但不限于：普通物理、普通物理实验。

“cq 计算机编程学习群”适用于讨论编程语言相关内容，包括但不限于：C 语言、C++语言、Java 语言、matlab 语言、python 语言等，也可以讨论计算机相关课程，包括但不限于：数据结构、算法、计算机网络、操作系统、计算机组成原理等。

考试承诺：本人郑重承诺：本人已阅读并且透彻地理解《浙江理工大学考场规则》，愿意在考试中自觉遵守这些规定，保证按规定的程序和要求参加考试，如有违反，自愿按《浙江理工大学学生违纪处分规定》有关条款接受处理。

最终感谢我的老师、我的朋友，还要感谢各位朋友们对我的大力支持。

本人尽全力为大家寻找、整理数学考试资料，但因时间仓促以及本人水平有限，本练习册中必有许多不足之处，还望各位不吝赐教。

宣传伙伴：

浙理羊同学 YOUNG

大家好，这里是浙理羊同学 YOUNG，一个致力于打造成为浙理校内最全最大的信息发布平台。如果你有爆料吐槽、闲置交易、失物招领、表白脱单、树洞聊天、互推捞人等需求，就来找羊羊聊天吧~ （下面是浙理羊同学 YOUNG 的微信号，有需求可以加哈）

1 浙江理工大学 2019—2020 学年第 1 学期《线性代数 A》期末 A 卷

一、选择题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在圆括号内)

1. 齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解, 则 ( )

(A) $\lambda = 0$ 或 $\mu = 0$　　(B) $\lambda = 1$ 或 $\mu = 0$

(C) $\lambda \neq 0$ 且 $\mu \neq 0$　　(D) $\lambda \neq 1$ 且 $\mu \neq 0$

2. 设 A 和 B 都是 n 阶方阵, 则下列说法正确的是 ( )

(A) $|A+B| = |A| + |B|$　　(B) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

(C) $|AB| = |A| \cdot |B|$　　(D) $(A+B)^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$

3. 若 3 阶方阵 A 的特征值互不相同, 且 $|A| = 0$, 则 $R(A)$ 应为 ( )

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

4. 有向量组 $(I): \alpha_1, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_t$ 和向量组 $(II): \alpha_1, \cdots, \alpha_s$, 则以下说法正确的是 ( )

(A) 若向量组 (I) 线性相关, 则向量组 (II) 线性相关.

(B) 若向量组 (I) 线性相关, 则向量组 (II) 线性无关.

(C) 若向量组 (I) 线性无关, 则向量组 (II) 线性相关.

(D) 若向量组 (I) 线性无关, 则向量组 (II) 线性无关.

5. 设 λ 是 n 阶可逆矩阵 A 的一个特征值, 则下列选项中一定为矩阵 A^* 的特征值的是 ( )

(A) $\lambda^{-1}|A|^{n-1}$　　(B) $\lambda^{-1}|A|$

(C) $\lambda|A|^{n-1}$　　(D) $\lambda|A|$

6. 若实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 是正定二次型, 则 a 的取值范围为 ( )

(A) $-1 < a < 1$　　(B) $-1 < a < \frac{1}{2}$

(C) $a > 1$ 或 $a < -1$　　(D) $\frac{1}{2} < a < 1$

二 填空题（本题共 **6** 小题，每小题 **4** 分，共 **24** 分）

1. 设 M_{ij} 和 A_{ij} 分别为行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 8 & 2 \end{vmatrix}$ 第 i 行第 j 列元素的余子式和代数余子式, 则 $M_{11} + 2A_{12} + M_{13} + A_{14} =$________.

2. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 - 3A + E = 0$, 则 $(A - 2E)^{-1} =$______________.

3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $|A^4| =$________.

4. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是向量空间 R^3 的一组基，易知 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$ 也是向量空间 R^3 的一组基. 向量 γ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标是 $(1, 2, 3)^T$，则 γ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为____________.

5. 已知向量 $\alpha = (1, 2019, 0, 1)^T$ 与 $\beta = (1, 0, 2020, k)^T$ 正交，则 $k =$______.

6. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} -4 & -10 & 0 \\ x & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = -2$，则 $x =$______.

三、计算题 **(本题共 5 小题，共 42 分，请写出必要的文字说明和演算步骤)**

1. (6 分) 设 $x \neq a$，计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$.

2. (6 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} x & a_1 & u \\ y & a_2 & v \\ z & a_3 & w \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & b_1 & u \\ y & b_2 & v \\ z & b_3 & w \end{pmatrix}$，且 $|A| = 1$, $|B| = 2$，计算 $|2A + B|$.

3. (6 分) 设向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\6\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-2\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\5\\10\\5\end{pmatrix},$$

求出它的一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大无关组线性表示.

4. (12 分) 设非齐次线性方程组 $\begin{cases}3x_1+\lambda x_2+2x_3=10,\\2x_1+(2\lambda+1)x_2+\lambda x_3=5,\\x_1+\lambda x_2+\lambda x_3=2.\end{cases}$ 问 λ 取何值时, 该方程组

(1) 有唯一解; (2) 无解; (3) 有无穷多解, 并求其通解.

5. (12 分) 求一个正交变换将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 化为标准形.

四、证明题 (本题共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分)

1. 设 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 和 $B:\beta_1,\cdots,\beta_t$ 是两个同维向量组, 向量组 $C=A\cup B$. 证明: $R(C)\le R(A)+R(B)$.

2. 设 λ_1,λ_2 是方阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量依次为 ξ_1,ξ_2. 证明: $2\xi_1+3\xi_2$ 不是 A 的特征向量.

2 浙江理工大学 2018—2019 学年第 1 学期《线性代数 A》期末 A 卷

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 A 为 3 阶矩阵，把 A 按列分块为 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_3-2\alpha_1,4\alpha_2)$，若 $|A|=-3$，则 $|B|=$（　　）.

（A）12　　（B）-12　　（C）24　　（D）-24

2. 已知向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，　则（　　）.

（A）该向量组的任何部分组必线性相关 .

（B）该向量组的任何部分组必线性无关 .

（C）该向量组的秩小于 m .

（D）该向量组的最大线性无关组是唯一的.

3. 设 3 阶方阵 A 与 B 相似，且 A 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，则 $\mathrm{tr}(B^{-1}-E)$ 为（　　）.

$(A)2$　　$(B)3$　　$(C)4$　　$(D)6$

4. 已知 n 元线性方程组 $Ax=b$，系数阵的秩 $R(A)=n-2$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是方程组线性无关的解，则方程组的通解为（　　）.（c_1,c_2 为任意常数）

(A) $c_1(\alpha_1-\alpha_2)+c_2(\alpha_2+\alpha_1)+\alpha_1$；　(B) $c_1(\alpha_1-\alpha_3)+c_2(\alpha_2+\alpha_3)+\alpha_3$；

(C) $c_1(\alpha_2-\alpha_3)+c_2(\alpha_3+\alpha_2)+\alpha_2$；　(D) $c_1(\alpha_2-\alpha_3)+c_2(\alpha_2-\alpha_1)+\alpha_3$.

5. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-5x_1^2-4x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2$ 是负定的，则 t 的取值范围为（　　）.

$(A)t>0$　　$(B)t<0$

$(C)t>1$　　$(D)t<1$

二 填空题（每小题 4 分，共 5 小题，共 20 分）

1. 设行列式 $D=\begin{vmatrix}2&2&3\\1&1&2\\2&x&y\end{vmatrix}$，其代数余子式 $A_{11}+A_{12}+A_{13}=1$，则 $D=$________ .

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{\beta}=(1,2,3)$，则 $(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta})^k=$________________.

3. 已知三阶矩阵 A 的三个特征值为 $-2,1,2$，则 $|A|=$______，A^* 的特征值为____________.

4. 设 A 为 n 阶矩阵，满足 $A^2-4A+3E=O$，则 $(A-2E)^{-1}=$__________.

5. A 为 4×3 矩阵，且 $R(A)=2$，$B=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&0\\2&3&1\end{pmatrix}$，则 $R(AB)-R(A)=$__________.

三、解答题（共 50 分）**(解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)**

1. 设 3 阶方阵 A,B,C 满足方程 $C(2A-B)=A$，试求矩阵 A，其中

$$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1&-2&4\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}。$$（6 分）

2. 在 3 维空间 V 中，已知从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\1&-2&4\\-1&2&-3\end{pmatrix},$$

（1）若向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标.

（2）求一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使其在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和基 β_1,β_2,β_3 下的坐标相同.（8 分）

3.已知$\alpha_1=(1,0,2,3),\alpha_2=(1,1,3,5),\alpha_3=(1,-1,a+2,1)$，$\alpha_4=(1,2,4,a+8)$及

$\beta=(1,1,b+3,5)$.

（1）a,b为何值时，β不能表示成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的线性组合?

（2）a,b为何值时，β有$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的唯一线性表示式?并写出该表示式.（ 10分）

4.当λ为何值时，线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=4, \\ -x_1+\lambda x_2+\lambda x_3=\lambda^2, \\ x_1-\lambda x_2+2x_3=-4, \end{cases}$

（1）由唯一解；（2）无解；（3）有无穷多个解？并求出有无穷多个解时的通解.（12分）

5. 求一个正交变换化二次型

$$f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

成标准形. （14 分）

四、证明题。（本题 10 分，每题 5 分）

1. 设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，证明向量 $2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + 5\alpha_3, 2\alpha_3 + 3\alpha_1$ 也线性无关。

2. 设 λ 是 n 阶正交矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值，证明 $\lambda \neq 0$，且 $\dfrac{1}{\lambda}$ 也是 $\mathbf{A}$ 的特征值.

3 浙江理工大学 2014—2015 学年第 1 学期《线性代数 A》期末 A 卷

一、选择题（每小题 4 分，共 24 分）

1. 对于n阶可逆矩阵A，B，则下列等式中（　　）不成立.

(A) $\left|(AB)^{-1}\right| = \left|A^{-1}\right| \cdot \left|B^{-1}\right|$　　(B) $\left|(AB)^{-1}\right| = (1/\left|A^{-1}\right|) \cdot (1/\left|B^{-1}\right|)$

(C) $\left|(AB)^{-1}\right| = \left|A\right|^{-1} \cdot \left|B\right|^{-1}$　　(D) $\left|(AB)^{-1}\right| = 1/\left|AB\right|$

2. 设 $A = (a_{ij})_{3\times 3}$，$B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$，$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，那么（　　）。

（A）$AP_1P_2 = B$　（B）$AP_2P_1 = B$　（C）$P_1P_2A = B$　（D）$P_2P_1A = B$

3. 设向量组$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$,则该向量组的一个

最大无关组为（　　）

（A）$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$　（B）$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$　（C）$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$　（D）$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$

4. 若方程$AX = b$中，方程的个数小于未知量的个数，则有（　　）.

（A）$AX = b$必有无穷多解　（B）$AX = 0$必有非零解

（C）$AX = 0$仅有零解　（D）$AX = 0$一定无解

5. 设n阶矩阵A的n个特征值全为零，则（　　）。

（A）$A = 0$　（B）A只有一个线性无关的特征向量

（C）A不能与对角矩阵相似　（D）当A与对角矩阵相似时，$A = 0$

6. 二次型$f(X) = X^T AX$（A是对称矩阵）正定的充要条件是（　　）。

（A）对任何X，有$X^T AX \geq 0$　（B）A的特征值为非负数

（C）对任何$X \neq 0$，有$X^T AX \neq 0$　（D）对任意$X \neq 0$，有$X^T AX > 0$

二、填空题（每空格 4 分，共 24 分）

1. n阶行列式$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} =$________________________。

2. 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$B$为非零矩阵，$AB = 0$，则$t =$____________。

3. 若$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$，则$BC = \begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}$。

4. 设$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2tx_2x_3$为正定二次型，则$t$的取值范围为______________________。

5. 设$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$是非齐次线性方程组$AX = b$的$s$个解，若$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s$也是它的解，则$k_1 + k_2 + \cdots + k_s =$_____________。

6. 设四阶矩阵A与B相似，矩阵A的特征值为$\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_3}, \frac{1}{\lambda_4}$，则行列式$\left| B^{-1} - E \right| =$___________。

三、**解答题**（12+8+12+12=44 分）

1. 当λ取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + \lambda x_2 - x_3 = -\lambda \\ -x_1 - x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有（1）惟一解；（2）无解；（3）无穷多解，并求通解。

2. 解矩阵方程 $X = AX + B$，其中 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

3. 判断下面向量组的线性相关性，求它的秩和一个极大无关组，并把其余向量用这个极大无关组线性表示。$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$， $\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$， $\alpha_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\alpha_4=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

4. 设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2,\ \lambda_1 = 1$ 对应的特征向量为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

（1）求 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 对应的特征向量；

（2）求矩阵 A 。

四、证明题（每小题 4 分，共 8 分）

1. 设 A 为 n 阶可逆阵， $A^2 = |A|E$.证明 A 的伴随阵 $A^* = A$.

2. 设 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 是 n 阶方阵 A 的特征值，对应的特征向量分别为 p_1, p_2，证明 $p_1 + p_2$ 不是 A 的特征向量。

4 2013—2014 学年第 2 学期《线性代数 A》12 级期末 A 卷

一 选择题（每小题 4 分，共 24 分）

1、设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a \neq 0$，则 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & \frac{1}{3}a_{13}-5a_{12} & -3a_{12} \\ 2a_{21} & \frac{1}{3}a_{23}-5a_{22} & -3a_{22} \\ 2a_{31} & \frac{1}{3}a_{33}-5a_{32} & -3a_{32} \end{vmatrix} =$（ ）.

(A) $2a$　（B）$-2a$　（C）$-3a$　（D）$3a$

2、设 A 为 $n(n\geq 2)$ 阶矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，k 为常数，则 $(kA)^* =$（ ）.

(A) A^*.　(B) kA^*.　(C) $k^{n-1}A^*$.　(D) k^nA^*.

3、当 $a=$（ ）时，非齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + ax_2 - x_3 = 1, \\ ax_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$ 无解.

(A) 1　(B) $-\frac{4}{5}$　(C) 4　(D) 2

4、已知矩阵 $\begin{pmatrix} 22 & 30 \\ -12 & a \end{pmatrix}$ 有一个特征向量 $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$，则 a 等于（ ）.

(A) -18　(B) -16　(C) -14　(D) -12

5、设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 则必有 （ ）

(A) $AP_1P_2 = B$;　（B）$AP_2P_1 = B$;　（C）$P_1P_2A = B$;　（D）$P_2P_1A = B$.

6、齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 的基础解系中含有解向量的个数是（ ）.

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

二 填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1．已知三阶矩阵 A 使得行列式 $|2A+3E| = |3A+4E| = |4A+5E| = 0$，则 $|A| =$ ___

2. 行列式$\begin{vmatrix} 549 & 49 & 9 \\ 667 & 67 & 7 \\ 986 & 86 & 6 \end{vmatrix} =$____________.

3. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix} 7 & 4 & x \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$的特征值为$\lambda_{1,2}=3, \lambda_3=12$，则$x$=__________.

4. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ a & b & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}$为正交矩阵，则$a$=____________________.

5. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2-x_3)$的秩为__________.

6．已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$为正定二次型．则$a$的取值范围为____________.

三、计算题（共 40 分）**(解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)**

1．（6 分）设$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，试求$A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}$和$M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}$.

2.（6 分） 设$X=AX+B$，其中矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$．求矩阵$X$.

3．（8 分）试问向量 β 可否由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示？若能，求出 β 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示的表达式．其中 $\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix};\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$．

4．（10 分）在 R^3 中取两组基：$\alpha_1=(1,2,1)^T,\alpha_2=(2,3,3)^T,\alpha_3=(3,7,1)^T$；

$$\beta_1=(3,1,4)^T,\beta_2=(5,2,1)^T,\beta_3=(1,1,-6)^T.$$

（1）求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵．

（2）若向量 γ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 $(1,1,1)$，求向量 γ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标．

5．（10 分）设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_{2,3}=1$，对应 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为 $\alpha_1=(0,1,1)^T$，求 A.

四、证明题（共 12 分）

1．（6 分）设 A,B 都是 n 阶实对称矩阵，证明 A 与 B 相似的充要条件是 A 与 B 有相同的特征值.

2.（6 分）设 A 为 3 阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量，向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$．证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

5　2013—2014 学年第 1 学期《线性代数 A》12 级期末 A 卷

一．选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，则（　　）。.

（A） $AB = BA$　　　　（B）存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$

（C）　存在可逆阵 C 使得 $C^T AC = B$（D）存在可逆阵 P 和 Q 使得 $PAQ = B$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $Ax = 0$ 仅有零解的充分必要条件是（　　）.

（A） $\boldsymbol{A}$ 的列向量组相性相关　　（B） $\boldsymbol{A}$ 的列向量组相性无关

（C） $\boldsymbol{A}$ 的行向量组相性无关　　（D） $\boldsymbol{A}$ 的行向量组相性相关

3. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + (b-1)x_2^2 + 2bx_1x_3 + 4x_3^2$ 为正定二次型，则（　　）.

（A） $0 < b < 1,$　　（B） $1 < b < 2$

（C）　$0 < b < 2$　　（D） $2 < b < 3$

4. 若 A，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆方阵，$C = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}$,则 C^{-1} 为（　　）.

（A） $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$；　　（B） $\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

（C） $\begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ ；　　（D） $\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$。

5．设 $\lambda = 2$ 是可逆矩阵 A 的一个特征值，则矩阵 $(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$ 有一个特征值等于（　　）.

（A） $\frac{4}{3}$　　（B） $\frac{3}{4}$　　（C） $\frac{1}{2}$　　（D） $\frac{1}{4}$

二．填空题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$ =__________.

2. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^* X = A^{-1} + 2X$,则 $X =$__________.

3. 设方阵$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$与矩阵$B=\begin{bmatrix}2&2&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$相似，则$x=$_____， $y=$______。

4. 矩阵$A=\begin{bmatrix}3&2&-2\\-k&-1&k\\4&2&-3\end{bmatrix}$，若矩阵$A$可对角化，则$k=$______。

三、计算题（共 40 分）

1.（8 分）求一个齐次线性方程组使其基础系为$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$

2.（8 分）求向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\6\end{pmatrix},\ \alpha_5=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$的秩与一个极大线性无关组，并把其他向量用这个极大无关组线性表示.

3.（**12 分**）λ 为何值时非齐次线性方程组 $\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1,\\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2,\\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1.\end{cases}$

（1）有唯一解；（2）无解；(3) 有无数多个解.并且在方程组有无数多个解时，用该方程组的一个特解及对应齐次线性方程组的基础解系表示其通解.

4.（**12 分**）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$ 用正交变换把 f 化为标准形并写出相应的正交变换和对应的正交矩阵.

四、证明题（20 分）

1.（6 分）设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方矩阵，若 $\mathrm{AB}=0$，则 $R(A)+R(B)\le n$.

2.（7 分）设 A,B 都是 $m\times n$ 矩阵，证明：$R(A+B)\le R(A\,|\,B)\le R(A)+R(B)$.

3.（**7 分**）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\cdots$，$\beta_s=\alpha_s+\alpha_1$，

试讨论 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的线性相关性.

数学通识必修课系列试卷汇总

（试题册和答案册配套，为两个小册子，这里为了节省空间，就将两本册子写在了一块儿）
（版本号与年份有关；发行次数会根据当年发行情况进行修改）

高等数学 A2 期末系列：（具体内容请见高等数学 A2 试题册尾页）
高等数学 A2 期末试题册、答案册上 2022 第二版第 1 次发行.pdf
高等数学 A2 期末试题册、答案册下 2022 第二版第 1 次发行.pdf
高等数学 A2 期末试题册、答案册五套 2022 第二版第 1 次发行.pdf

高等数学 B2 期末系列：（具体内容请见高等数学 B2 试题册尾页）
高等数学 B2 期末试题册、答案册 2022 第二版第 1 次发行.pdf
高等数学 B2 期末试题册、答案册五套 2022 第二版第 1 次发行.pdf

线性代数 A 期末系列：
线性代数 A 期末试题册、答案册 2022 第二版第 1 次发行.pdf
线性代数 A 期末试题册、答案册五套 2022 第二版第 1 次发行.pdf

线性代数 B 期末系列：
线性代数 B 期末试题册、答案册上 2022 第二版第 1 次发行.pdf
线性代数 B 期末试题册、答案册下 2022 第二版第 1 次发行.pdf
线性代数 B 期末试题册、答案册五套 2022 第二版第 1 次发行.pdf

概率论与数理统计 A 期末系列：
概率论与数理统计 A 期末试题册、答案册上 2022 第二版第 1 次发行.pdf
概率论与数理统计 A 期末试题册、答案册下 2022 第二版第 1 次发行.pdf
概率论与数理统计 A 期末试题册、答案册五套 2022 第二版第 1 次发行.pdf

概率论与数理统计 B 期末系列：
概率论与数理统计 B 期末试题册、答案册 2022 第二版第 1 次发行.pdf

概率论与数理统计期末练习系列：
概率论与数理统计练习试题册、答案册 2022 第二版第 1 次发行.pdf