座位号 ______________

浙江理工大学2022-2023学年第二学期

《线性代数A》期末试卷（B）卷

本人郑重承诺：本人已阅读并且透彻地理解《浙江理工大学考场规则》，愿意在考试中自觉遵守这些规定，保证按规定的程序和要求参加考试，如有违反，自愿按《浙江理工大学学生违纪处分规定》有关条款接受处理。

承诺人签名：___________ **学号：**____________ **专业班级：**_____________

题号	一	二	三					四		总分
			1	2	3	4	5	1	2	
得分										
签名										

一．单选题（每题请选出一个正确选项，每小题4分，共24分）

1．计算行列式$D=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=$（　　）

A. $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$　　　　B. $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

C. $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$　　　　D. $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

2．设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为$n$阶矩阵，$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价，则下列命题中错误的是（　　）。

A.若$|\boldsymbol{A}|>0$，则$|\boldsymbol{B}|>0$　　　　B. 若$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则$\boldsymbol{B}$也可逆

C. 若$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{E}$等价，则$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{E}$等价　　　　D. 存在可逆矩阵$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$

3.设$\alpha=(1,2,3,4)^T,\beta=(4,-3,2,-1)^T$，则下列命题中不成立的是（　）.

A. α与β正交　　B. α，β线性相关　　C. $\alpha^T\beta=0$　　D. $\|\alpha\|=\|\beta\|$

4．设A为n阶方阵，P,Q分别为n阶可逆矩阵，则下列矩阵中与矩阵A具有相同的特征值的为(　　).

A. $P^{-1}AP$　　B. PA　　C. $P^{T}AP$　　D. PAQ

5.设向量组　I) $\alpha_1=(a_1\ a_2\ \ a_3)$, $\alpha_2=(b_1\ b_2\ \ b_3)$, $\alpha_3=(c_1\ c_2\ \ c_3)$

$II)\beta_1=(a_1\ a_2\ \ a_3\ \ a_4)$, $\beta_2=(b_1\ b_2\ \ b_3\ b_4)$, $\beta_3=(c_1\ c_2\ \ c_3\ c_4)$　　则有（　　）

A. 若 I）线性相关，则 2）线性相关　　B. 若 I）线性无关，则 II）线性无关

C. 若 II）线性无关，则 I）线性无关　　D. I）线性相关的充分必要条件是 II）线性相关

6.设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的导出组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{o}$，如果 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{o}$ 仅有零解，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$（　　）

A. 必定无解　　B. 必有无穷多个解　　C. 必有唯一解　　D. 以上均不对

二．填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. **设** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=d$**，则** $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 3a_{11}-a_{12} & 4a_{12}-a_{13} \\ 2a_{21} & 3a_{21}-a_{22} & 4a_{22}-a_{23} \\ 2a_{31} & 3a_{21}-a_{32} & 4a_{32}-a_{33} \end{vmatrix}=$________.

2. 若 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{BC}=$______________

3.由向量组$(1\quad 1\quad 0\quad -1)$，$(1\quad 2\quad 3\quad 0)$，$(2\quad 3\quad 3\quad -1)$生成的向量空间维数为 ____

4.二次型$f=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$为正定二次型，则$t$的取值范围是 ________

5. 设非齐次线性方程组 $AX=b$，$R(A)=2$，方程组的 2 个解向量为 α_1,α_2，且$\alpha_1=[1\quad 1\quad 2]^T,\alpha_2=[2\quad 1\quad 3]^T$，则该方程组的通解为________________________.

6. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 1，2，1，若矩阵 B 为 A 的相似矩阵，则$|2B^{-1}|$=_________.

三．计算题（1，2，3 每小题 8 分，4，5 每小题 10 分，共 44 分）

1.（8 分）设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$，求 $\mathbf{A}^{-1}$

2. 解矩阵方程 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

3. 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个最大无关组，并把其他向量用最大无关组线性表示：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}.$$

4. 设线性方程组$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-2x_4=0\\2x_1-x_2-x_3+x_4=1\\3x_1+x_2-2x_3-x_4=a\end{cases}$ 试确定a 的值，使方程组有解，并求全部解

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

（1）求一正交相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵；（2）求 $\boldsymbol{B}^{n}$.

四．证明题（每小题 4 分，共 8 分）

1.若 η_1,η_2,η_3 线性无关，证明：$\eta_1+\eta_2,\eta_2+\eta_3,\eta_3+\eta_1$ 也线性无关.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，证明：$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|>1$.

浙江理工大学 2022 —2023　学年第 二 学期

《 线性代数 A 》期末试卷（ B ）卷标准答案和评分标准

一．单选题（每题请选出一个正确选项，每小题 4 分，共 24 分）

1.D　2.A　3.B　4.A　5.B　6.C

二．填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1.2d

2.$\begin{bmatrix}0 & 21\\ 4 & 22\end{bmatrix}$

3. 2

4.$-\sqrt{2}<T<\sqrt{2}$

5.$\alpha_1+k(\alpha_2-\alpha_1)$

6.　4

三．计算题（1，2，3 每小题 8 分，4，5 每小题 10 分，共 44 分）

1（8 分）. 解：由于 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}$，$\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}$，

………2 分

由于 $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2^{-1}\end{pmatrix}$，且 $\mathbf{A}_1^{-1}=\dfrac{1}{\det\mathbf{A}_1}\mathbf{A}_1^{*}=\dfrac{1}{-25}\begin{pmatrix}-3 & -4\\ -4 & 3\end{pmatrix}$，　………4 分

$\mathbf{A}_2^{-1}=\dfrac{1}{\det\mathbf{A}_2}\mathbf{A}_2^{*}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}$　………6 分

故　$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{25} & \frac{4}{25} & 0 & 0\\ \frac{4}{25} & -\frac{3}{25} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$　……8 分

2. 解：由 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$，得 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$，　……2 分

为此对矩阵 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 施行初等行变换化为行最简形矩阵，

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 5 & -3\end{pmatrix}$$ ………4 分

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$ ………6 分

所以 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. ………8 分

3. 解：对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换变成行最简形，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1\\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ ………2 分

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$ ………4 分

所以 $R(\boldsymbol{A})=3$，$\boldsymbol{A}$ 的前三列 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的最大无关组，且 ………6 分

$$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3, \quad \boldsymbol{\alpha}_5=-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3.$$ ………8 分

4. 解：对增广矩阵施行初等行变换，化为阶梯型：

$$B=[A \ \vdots \ \beta]=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & -2 & \vdots & 0\\ 2 & -1 & -1 & 1 & \vdots & 1\\ 3 & 1 & -2 & -1 & \vdots & a\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & -2 & \vdots & 0\\ 0 & -5 & 1 & 5 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & a-1\end{bmatrix}$$ ……2 分

要使方程组有解，则$R(A)=R(B)=2,$ 因此$a=1$时，方程组有无数解 ……4 分

当$a=1$时，

$$B=[A \ \vdots \ \beta]\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & -2 & \vdots & 0\\ 0 & -5 & 1 & 5 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & -2 & \vdots & 0\\ 0 & -5 & 1 & 5 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & a-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & -3 & 0 & 3 & \vdots & 1\\0 & -5 & 1 & 5 & \vdots & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}$$ ……6 分

其中x_2，x_4为自由变元，得到导出组基础解系

$\xi_1 = [3\quad 1\quad 5\quad 0]^T, \xi_2 = [-3\quad 0\quad -5\quad 1]^T$, ……8 分

特解为$\eta^* = [1\quad 0\quad 1\quad 0]^T$ …… 9 分

方程组通解为$\eta = \eta^* + +k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ ……10 分

5. 解：（1）特征多项式$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\2 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda+1)$，………2 分

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = 3$． ………3 分

当$\lambda_1 = -1$时，解方程组$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})X = \boldsymbol{0}$，得基础解系$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，于是得到$\lambda_1 = -1$对应的单位特征向量$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

当$\lambda_2 = 3$时，解方程组$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$，得基础解系$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，于是得到$\lambda_2 = 3$对应的单位特征向量$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. ………5 分

令$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，即为所求的正交相似变换矩阵，且$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$. ……6 分

（2）先求$\boldsymbol{A}^n$，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$，所以

$$\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}^n\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n & 0\\0 & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3^n+(-1)^n}{2} & \frac{3^n-(-1)^n}{2}\\\frac{3^n-(-1)^n}{2} & \frac{3^n+(-1)^n}{2}\end{pmatrix},$$

故 $$\boldsymbol{B}^n = \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^n & 0\\0 & 1^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3^n+(-1)^n}{2} & \frac{3^n-(-1)^n}{2} & 0\\\frac{3^n-(-1)^n}{2} & \frac{3^n+(-1)^n}{2} & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$ ………10 分

四．证明题（每小题 4 分，共 8 分）

1. 证 设有三个数k_1,k_2,k_3使得$k_1(\eta_1+\eta_2)+k_2(\eta_2+\eta_3)+k_3(\eta_3+\eta_1)=0$，

则有$(k_1+k_3)\eta_1+(k_1+k_2)\eta_2+(k_2+k_3)\eta_3=0$， 2 分

因为η_1,η_2,η_3是线性无关，故

$$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}, \text{该方程组的系数行列式} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$ 3 分

所以该方程组只有零解．即$k_1=k_2=k_3=0$．即$\eta_1+\eta_2,\eta_2+\eta_3,\eta_3+\eta_1$线性无关．………………(4 分)

2. 证：$\boldsymbol{A}$为正定矩阵，则$\boldsymbol{A}$特征值全为正数．即

若$\boldsymbol{A}$的全部特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则$\lambda_i>0,(i=1,2,\cdots,n)$，………2 分

又由于$\boldsymbol{A}$为正定矩阵，所以存在正交矩阵$\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{即} \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},$$ 3 分

所以$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=\left|\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \lambda_1+1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2+1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n+1 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\right|.$$

$$=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1.$$ ………4 分