线性代数B

浙江理工大学期末试题汇编

（试卷册 下）

学校：______________________

专业：______________________

班级：______________________

姓名：______________________

学号：______________________

（此试卷为2022年第二版 第1次发行）

写在前面

转眼间已经来到 2022 年，如今一直在经历高中时期心心念念的大学时光，不知你过得如何？有人低头有题，抬头有星，手中有笔，心中有梦；也有人昏昏沉沉，浑浑噩噩，不思进取，荒于嬉戏。

《觉醒年代》中说："在这个浮躁的时代，只有自律的人，才能够脱颖而出，成就大事"，这句话同样适用于我们所处的时代。早晨六七点钟，旭日东升，但是，日出未必意味着光明，太阳也无非是一颗晨星，只有在我们醒着的时候，才是真正的破晓。收拾好书包，踏出宿舍楼门，面对校内风景，面对一日之晨，欣欣然满面春风，巍巍然昂首挺胸。

也许奋斗了一辈子，草根还是草根，咸鱼翻身也是一条翻了身的咸鱼。那么，努力的意义究竟是什么？

努力，能让你坦然面对失败。让人难受的从来都不是失败的结果，我们不能原谅的是那个没有拼尽全力的、懒惰的自己。

努力，能让你的每一天都好过昨天，最终的结果或许没有你预想的那么好，但是好过什么都没做的最开始的那一天。

努力，把失败变成一个荣耀的词。一个人，如果一辈子不做任何尝试，一辈子不为任何事情努力，那么他连失败都没有资格遭遇。但是努力过的你不同，你在一个并不优越的起点上，在芸芸众生里，用努力做到了最好的自己，谁又有资格说你不成功？

努力过的人生，即使不完美，但是它完整。

你可能阴差阳错地来到浙江理工大学，发现与想象中的大学生活并不一样，开始悔恨，开始荒废，人生是湛蓝的天空，那么失意则是天际一朵漂浮的白云。如果你认为浙江理工大学配不上你的雄心壮志，那么你至少要证明给她看。少年有梦，不应止于心动，更要付诸行动。以青春为梦，志存远方，愿你我不负韶华，奔赴山海。

尼采说过"谁终将声震人间，必长久深自缄默；谁终将点燃闪电，必长久如云漂泊。"当你躺在床上进入梦的花园，别人却在此套试题上挥洒汗水进行知识的耕耘。当你想要做某件事迟迟观望时，别人早已准备好了理想的扁舟，准备扬帆起航。

机会从来不是为谁准备的，从来都是谁抓住它，谁就是它的主人。正值青春年少的我们，是晨起初生的朝阳，不应站在窗边，望向窗外感叹"岁月蹉跎，时间飞逝如流水，日复一日，年复一年。"

要明白一个道理，天资不高，可以通过不断打磨自我提升。但如果你始终躺在舒适的角落，徜徉在狭小的世界，那么终有一天，你会站在塔的最底端仰望别人。努力的过程虽然辛苦，但只要你一直付诸行动，终有一天也能在线性代数这门课上拿到满意的成绩。

有风有雨是常态，风雨兼程是状态。所有千夫所指的困难，都是为了淘汰懦夫。

青春是人生的一首歌：成功是词，拼搏是曲，永不懈怠是青春的主旋律。

这世间花开流水两从容，不如将生命于青春处洒落成绚丽的光彩，有着遗世独立的高度，让世界成为你的归属。

尘雾之微补益山河，萤烛末光增添日月。中华民族复兴的重任在我们肩上，复兴的荣光属于每一个人。朝受命、夕饮冰，昼无为、夜难寐，这是有责有义的中国人；秉初心、守宽和，见刚强、笃远行，这是可敬可爱的中国人。

在大学，每天忙忙碌碌，无暇前瞻后顾，有时候明知道那种我羡慕的生活我可能没有机会体验，可还是想为之奋斗。有些我们真正热爱的东西，值得我们为了不可知的结果而长久地等待，为了保持内心而放弃外壳。

现在，烈日正浓之时，夏意盎然之刻，但是，心有所属之人，必定无问西东。

2021 级 生物制药 刘建

2022 年 5 月 9 日

（创琦说：大家读完之后心里或多或少都会有些感概。一起努力学习，加油吧！）

目 录

2022 年所有试卷版本见尾页。如需资料获取请添加下方的 QQ 群获取。

（A1 和 A2 卷分别为新生和老生考试卷，卷子质量相同，不妨碍大家学习）

更多信息

试卷整理人：张创琦　　　　　　　　　微信公众号：创琦杂谈
试卷版次：2022 年 5 月 7 日 第二版 第 1 次发行
本人联系 QQ 号：1020238657（勘误请联系本人）
创琦杂谈学习交流群（QQ 群）群号：749060380
cq 数学物理学习群（QQ 群）群号：967276102
cq 计算机编程学习群（QQ 群）群号：653231806

创琦杂谈公众号优秀文章：

曾发布了《四级备考前要注意什么？创琦请回答！（一）》、《走！一起去春季校园招聘会看看，感受人间真实》、《送给即将期末考试的你》、《那些你不曾在选课中注意到的事情》、《身为大学生，你的劳动价值是多少？》（荐读）、《如何找到自己的培养计划》以及信息学院本科阶段五个专业的分流经验分享（来自 20 多位学长学姐的亲身经历与分享，文章过多，就不贴链接啦），公众号也可以帮忙大家发布相关社会实践的问卷。

我最近在写关于 github 使用技巧的文章，并且在开发网站，争取给大家提供更优质的学习讨论平台。

QQ 群：

“创琦杂谈学习交流群”主要为大家更新各种科目的资料，群里可以讨论问题、也可以发布社会实践的调查问卷互相帮助，目前群成员不到千人，相信您的问题会有人解答的。

“cq 数学物理学习群”更适合讨论数学物理相关的题目等，数学科目包括但不限于：高等数学、线性代数、概率论与数理统计等，物理包括但不限于：普通物理、普通物理实验。

“cq 计算机编程学习群”适用于讨论编程语言相关内容，包括但不限于：C 语言、C++语言、Java 语言、matlab 语言、python 语言等，也可以讨论计算机相关课程，包括但不限于：数据结构、算法、计算机网络、操作系统、计算机组成原理等。

考试承诺：本人郑重承诺：本人已阅读并且透彻地理解《浙江理工大学考场规则》，愿意在考试中自觉遵守这些规定，保证按规定的程序和要求参加考试，如有违反，自愿按《浙江理工大学学生违纪处分规定》有关条款接受处理。

最终感谢我的老师、我的朋友，还要感谢各位朋友们对我的大力支持。

本人尽全力为大家寻找、整理考试资料，但因时间仓促以及本人水平有限，本练习册中必有许多不足之处，还望各位不吝赐教。

感谢浙理羊同学以及学校各大资料平台对本资料的支持。

浙理羊同学 YOUNG

大家好，这里是浙理羊同学 YOUNG，一个致力于打造成为浙理校内最全最大的信息发布平台。如果你有爆料吐槽、闲置交易、失物招领、表白脱单、树洞聊天、互推捞人等需求，就来找羊羊聊天吧~ （下面是浙理羊同学 YOUNG 的微信号，有需求可以加哈）

9 浙江理工大学 2015—2016 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 B 卷

一、选择题（每小题 4 分，共 24 分）

1. 设$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a \neq 0$，则$\begin{vmatrix} 2a_{11} & \frac{1}{3}a_{13}-5a_{12} & -3a_{12} \\ 2a_{21} & \frac{1}{3}a_{23}-5a_{22} & -3a_{22} \\ 2a_{31} & \frac{1}{3}a_{33}-5a_{32} & -3a_{32} \end{vmatrix}$ =（　　）。

A. $2a$　　B. $-2a$　　C. $-3a$　　D. $3a$

2 齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解得充要条件是 $\lambda =$（　　）。

A. 1　　B. -2　　C. 1 或 -2　　D. -1 或 2

3 三阶矩阵 A 的特征值为-1, 1, 3, 则下列矩阵中可逆矩阵是（　　）。

A. $2E-A$　　B. $2E+A$　　C. $E-A$　　D. $A-3E$

4 设 A,B 为 n 阶可逆方阵，则 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ =（　　）。

A $\begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$

5 设 A,B 为 n 阶非零矩阵，且 $AB=0$，则 A 与 B 的秩（　　）。

A. 必有一个为零；　　B. 都小于 n；

C. 一个小于 n，一个等于 n；　　D. 均等于 n。

6 设矩阵 A 与 B 相似，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & x & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，已知矩阵 B 的特征值为 1,2,3，则 $x =$(　　)。

A. 4　　B. 3　　C. -4　　D. -3

二、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$，则 $AB =$____________________。

2. $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} =$ ____________________。（$a_1a_2\cdots a_n \neq 0$）

3. 设 n 元齐次线性方程组 $x_1+2x_2+\cdots+nx_n=0$，则它的基础解系中含向量的个数为____________。

4. 三阶方阵 A 的特征值为 $2,1,-3$，则行列式 $|3A|=$ ____________________。

5. 已知 $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$ __________________。

6. 设 $\alpha=(2,1,2)^T$，$\beta=(1,2,2)^T$，$\gamma=(2,2,t)^T$ 线性相关，则 $t=$ ____________。

三、计算题

1. 设 A 为 3 阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，且 $|A|=-3$，求行列式 $\left|(\frac{1}{3}A)^{-1}-A^*\right|$ 的值。（6 分）

2 求 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1}。（7 分）

3 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$，

（1）求 A 的秩 $R(A)$；（5 分）

（2）求 A 的列向量组的一个极大线性无关组，并用此极大线性无关组表示出组中其他向量。（6 分）

4 设线性方程组 $\begin{cases} (2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1 \\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2 \\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1 \end{cases}$。讨论 λ 取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？在方程组有无穷多解时，试用其导出的基础解系表示其全部解。（10 分）

5 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量。（10 分）

四 证明题（每小题 4 分，共 8 分）

1 任取 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4 \in R^n$，又记 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_4$,

$\beta_4=\alpha_4+\alpha_1$，证明 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 必线性相关。

2 设 A 是 $n\times m$ 矩阵，B 是 $m\times n$ 矩阵，其中 $n<m$. 若 $AB=E$ ，其中 E 为 n 阶单位矩阵. 证明方程组 $BX=O$ 只有零解.

10 浙江理工大学 2013-2014 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 B 卷

一、 选择题：每小题 4 分，共 20 分。

1．设 n 阶方阵 A,B,C 满足 $ABC=E$，则 (　　　　　)

（A）$ACB=E$ （B）$CBA=E$ （C）$CAB=E$ （D）$BAC=E$

2．设 A,B 均为 n 阶矩阵,则必有(　　　　).

(A) $|A+B|=|A|+|B|$ (B) $AB=BA$ (C) $|AB|=|BA|$ (D) $|A-B|=|A|-|B|$

3．设 A 是 $m\times n$ 矩阵，矩阵 A 的秩为 r, 则齐次线性方程组 $Ax=0$ (　　　　)

(A) $r=m$ 时，方程组 $Ax=0$ 有非零解. (B) $r=m$ 时，方程组 $Ax=0$ 有唯一解

(C) $m=n$ 时，方程组 $Ax=0$ 有唯一解. (D) $r<n$ 时，方程组 $Ax=0$ 有无穷多解

4．设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{bmatrix}$，$P_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$P_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则有（　　　　　）

（A）$AP_1P_2=B$ （B）$P_1P_2A=B$ （C）$P_2P_1A=B$ （D）$AP_2P_1=B$

5．设 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=1$,则 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & 5c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & 5c_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & 5c_3 \end{vmatrix}=$(　　　　　).

(A) 5 (B) 2 (C) 1 (D)10

二、填空题：每小题 5 分，共 25 分。

1．若 3 阶矩阵 A 的伴随矩阵的秩 $r\left(A^*\right)=1$，则矩阵 A 的秩 $r\left(A\right)=$________.

2．设三阶方阵 A 的特征值为 λ，2，3，且 $|2A|=-48$，则 $\lambda=$__________.

3．设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$__________.

4．设 4 阶方阵 A 的特征值互不相同，若 $|A|=0$，则 A 的秩为_________.

5. 设 $\lambda_1=2,\lambda_2=3,\lambda_3=5$ 是三阶矩阵 A 的特征值, 则伴随阵 A^* 的特征值是____________.

三、计算题：每小题 7 分，共 21 分。

1．求 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{vmatrix}$

2．求向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\1\\3\\0\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}2\\5\\-1\\4\end{bmatrix}$ 的一个极大线性无关组。

3．已知 $XA=B$，其中 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\-2 & -2 & 2\\-2 & 2 & -2\end{bmatrix}$ 求解 X

四、设$\beta=\begin{pmatrix}7\\x\\15\end{pmatrix},\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\7\\8\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-6\\1\end{pmatrix}$，问 x 为何值时，$\beta$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，并求出其线性表示式。(9 分)

五、已知矩阵$A=\begin{bmatrix}-1&1&2\\-2&2&x\\-2&1&2\end{bmatrix}$有两个特征值为 1 和 2，求$x$及矩阵其另外一个特征值，并求出该矩阵所有特征值所对应的特征向量。(10 分)

六、当 λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$ 有惟一解，无解或有无穷多解？并在有无穷多解时求出方程组的通解.　(10 分)

七、已知 n 阶方阵 A, 满足 $A^2 + A - 4E = 0$，求 $(A-E)^{-1}$ (5 分)

11 浙江理工大学 2011-2012 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 B1 卷

一 选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1．设 A 是4阶方阵， 且行列式 $|A|=8, B=-\dfrac{1}{2}A$, 则 $|B|=$ (　　).

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $-\dfrac{1}{2}$　　(C) 4　　(D) -4

2．设 A, B 为同阶可逆方阵，则 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的逆为(　　　) .

（A）$\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$ ；（B）$\begin{pmatrix} O & A^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$；（C）$\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$；（D）$\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & A^{-1} \end{pmatrix}$ 。

3. 已知向量组 $\alpha_{1,}\cdots,\alpha_m$ 线性相关， 则（　　）.

（A）该向量组的任何部分组必线性相关 . （B）该向量组的任何部分组必线性无关 .

（C）该向量组的秩小于 m .　　　（D）该向量组的最大线性无关组是唯一的.

4. 设 A, B 都是 n 阶方阵， $A \neq \mathbf{0}$,且 $AB=\mathbf{0}$,则(　　).

（A） $B=\mathbf{0}$;　（B） $|B|=0$ 或 $|A|=0$；　（C） $BA=\mathbf{0}$;　（D） $(A+B)^2=A^2+B^2$

5、若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$，$D_1=\begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{11}-3a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{21}-3a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{31}-3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，则 $D_1=$（　　）.

（A）8；　　（B）-12；　　（C）24；　　（D）-24

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2+\mathbf{A}-4\mathbf{E}=\mathbf{0}$, 其中 $\mathbf{E}$ 是 n 阶单位矩阵, $(\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}=$ ________.

2．设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, f(x)=\begin{vmatrix} x-1 & x & 0 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$， $f(\mathbf{A})=$ ___________.

3．设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$， A_{ij} 是 $|\mathbf{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则

$3A_{31}+3A_{32}-4A_{33}+9A_{34}=$ ___________.

4. 设 $\lambda=1$ 是非奇异矩阵 $\mathbf{A}$ 的一个特征值，则矩阵 $\left(\dfrac{1}{3}\mathbf{A}^2\right)^{-1}$ 的一个特征值等于 __________ .

5. 设 $A=\left(\alpha,\gamma_1,\gamma_2\right)$，$B=\left(\beta,\gamma_1,\gamma_2\right)$ 均是3阶方阵，$\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2$ 是三维列向量，若 $|A|=2$ ，$|B|=3$，则 $|A+2B|=$________。

三、**解答题**（共 54 分）(解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

1. **（本题 10 分）** 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} x_1+3 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2+3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n+3 \end{vmatrix}$

2.（**本题 10 分**）A 为三阶矩阵，E 是三阶单位阵，已知 AX=2X+A ,A=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 求

X

3、**（本题 10 分）**设$\alpha_1=(1,1,2,2,1)$、$\alpha_2=(0,2,1,5,-1)$、$\alpha_3=(2,0,3,-1,3)$、$\alpha_4=(1,1,0,4,-1)$，求此向量组的一个极大无关组，并用它表示其余的向量。

4. **（本题 12 分）**已知线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+ax_3=3 \\ x_1+ax_2+3x_3=2 \end{cases}$

（1）讨论 a 取何值时，方程组有唯一解？有无穷多解？无解？

（2）方程组有无穷多解时，求其通解（用向量形式表示）

5、**（本题 12 分）**设 $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，求一个正交阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角阵.

四、证明题**（本题 6 分）**

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是齐次线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系, 若 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2$，

$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3$， $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+t\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+t\boldsymbol{\alpha}_1$ ，其中 t 为实数, 证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 也是方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系的充分条件是 $t\neq\pm1$.

12 浙江理工大学 2011-2012 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 B2 卷

一 选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1 设 A 为三阶矩阵，若｜A｜＝k≠0，则｜kA｜＝（　　）.

(A) 3k　; 　(B) k^2 ; 　(C) k^3 ; 　(D) k^4

2．设 A, B 为同阶可逆方阵，则 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的逆为(　　　　) .

（A）$\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$ ；（B）$\begin{pmatrix} O & A^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$；（C）$\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$；（D）$\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & A^{-1} \end{pmatrix}$ 。

3．若向量 $\alpha_1 = (1, a, 1)^T, \alpha_2 = (0, a, 1)^T, \alpha_3 = (1,1,1)^T$ 线性相关，则 $a =$(　　　　).

（A）1 ；　　（B）0 ；　　（C）-1；　　（D）2 。

4.设 n 阶方阵 A 是奇异阵，则 A 中 (　　　　).

（A）必有一列元素为 0 ；　　（B）必有两列元素对应成比例；

（C）必有一列向量是其余列向量的线性组合；

（D）任意一列向量是其余列向量的线性组合。

5.若 n 阶矩阵 A 的秩为 n-3（$n \geq 4$），则 A 的伴随矩阵 A^* 的秩为(　　　　).

（A）n-2　　（B）0　　（C）1　　（D）不确定

二 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1．设 $\mathbf{A}$ 为三阶方阵，且 $|\mathbf{A}| = -6$, 若将 $\mathbf{A}$ 按列分块为 $\mathbf{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$，则

$|\boldsymbol{\alpha}_3 + 3\boldsymbol{\alpha}_1, 2\boldsymbol{\alpha}_2, 4\boldsymbol{\alpha}_1| =$ ______________________。

2．设矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2 + 4\mathbf{A} + 2\mathbf{E} = \mathbf{O}$，则 $(\mathbf{A} + 2\mathbf{E})^{-1} =$ ______________。

3．已知三阶方阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $2,2,3$，则行列式 $|\mathbf{A}^* - 6\mathbf{A}^{-1}| =$ __________________。

4.　设 $A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{pmatrix}$，则当 $a =$ ______________ 时，$r(A) = 2$。

5. 设矩阵 $A = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}$，且 $R(A) = 3$, 则 $k =$ ______________。

三、解答题（共 50 分）(解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

1. **（本题 8 分）** 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a & a_3 \\ a_3 & a_3 & a_3 & a \end{vmatrix}$

2.（**本题 10 分**）已知 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，四阶矩阵 $\mathbf{A}$ 满足关系式：$(2\mathbf{E}-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{A}^T=\mathbf{C}^{-1}$，其中 $\mathbf{E}$ 是四阶单位矩阵，$\mathbf{A}^T$ 是 $\mathbf{A}$ 的转置矩阵，求 $\mathbf{A}$。

3．**（本题 8 分）**给定$\alpha_1=(1,4,1,0)$, $\alpha_2=(2,1,-1,-3)$, $\alpha_3=(1,0,-3,-1)$,

$\alpha_4=(0,2,-6,3)$，试求其秩和一个极大无关组，并用它表示其余的向量。

4．（本题 12 分）当b取何值时，方程组$\begin{cases} x+by+2z=1 \\ x+(2b-1)y+3z=1 \\ x+by+(b+3)z=2b-1 \end{cases}$ 有唯一解、无穷解、无解， 无穷解时求其解。

5．（本题 12 分）已知实对称矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$，求一个正交矩阵 $\mathbf{P}$，使 $\mathbf{P}^T\mathbf{AP}$ 为对角矩阵。

四、 证明题 （本题 10 分，）

1. **（本题 6 分）**若 A, B, C 均为正交矩阵，则 $A^T B\, C^{-1}$ 也为正交矩阵。

2．**（本题 4 分）**若 A, B 都是 n 阶可逆矩阵，且 A, B 相似，则 A^{-1} 与 B^{-1} 也相似。

13 浙江理工大学 2009-2010 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 B 卷

一、选择题（每小题 4 分,共 20 分）

1. 若向量组 $\alpha_1=(1,3,6,2)^T$， $\alpha_2=(2,1,2,-1)^T$， $\alpha_3=(1,-1,a,-2)^T$ 的秩为 2，
   则 a 为 (　　).
   (A) 1.　　(B) -2.　　(C) 2.　　(D) -1.

2．设 A 为 n 阶方阵，且｜A｜＝5，则 $|(3A^{-1})^T|=$（　　）。

   (A) $\frac{3}{5^n}$　　(B) $\frac{5}{3^n}$　　(C) $\frac{3^n}{5}$　　(D) $\frac{5^n}{3}$

3．设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组中线性无关的是（　　）。

   （A） $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$　　（B） $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3+\alpha_1$

   （C） $\alpha_1,\alpha_2,2\alpha_1-3\alpha_2$　　（D） $\alpha_2,\alpha_3,2\alpha_2+\alpha_3$

4．若 n 阶矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$,则不正确的结论是（　　）。

（A） $|A|=0$　　(B) tr(A)=0　　(C) R(A)=0　　(D) $|\lambda E-A|=\lambda^n$

5. 设 A 为 n 阶方阵，且 $R(\mathbf{A})=n-1$，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是 $\mathbf{Ax}=b$ 的两个不同的解，则 $\mathbf{Ax}=0$ 的通解为（　　）。

（A） $\mathbf{x}=k\boldsymbol{\xi}_1$　　(B) $\mathbf{x}=k\boldsymbol{\xi}_2$　　(C) $\mathbf{x}=k(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2)$　　(D) $\mathbf{x}=k(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)$

二、填空题（每小题 4 分,共 20 分）

1.设 A 满足 $A^2+2A+E=0$,则 A 有特征值____________

2.二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+ax_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$ 正定,则 a 满足条件____________.

3.设方阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵 $\begin{pmatrix}5&&\\&t&\\&&-4\end{pmatrix}$,则 $t=$_________.

4 已知 $D=\begin{vmatrix}1&0&2&3\\-1&1&2&0\\1&2&1&1\\-1&2&5&4\end{vmatrix}$，则 $A_{41}+2A_{42}+A_{43}+A_{44}=$_________.

5．设 A 为 n 阶可逆阵，且 $A^2=|A|E$，则 $A^*=$_________.

三、计算题：(50 分)

1、(8 分) 计算 n 阶行列式 D= $\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$.

2.（10 分）设 X 满足 $AX=2X+B$，其中 $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&-1\\0&1&4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\0&-3\end{pmatrix}$．求 X．

3.（8 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&1&1&1\\1&a&1&1\\1&1&a&1\\1&1&1&a\end{pmatrix}$，$A$ 的秩为 3，求 a．

4. （12 分）已知线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\quad = 1 \\ x_1 \qquad\quad - x_3 = 1 \\ x_1 + a x_2 + x_3 = b \end{cases}$，（1）常数$a,b$取何值时，方程组有无穷多解、唯一解、无解？（2）当方程组有无穷多解时，求出其通解.

5．（12 分）设三阶方阵A的特征值为$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$，对应的特征向量分别为

$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$又设向量$\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，求$A^n \beta$.

四、证明题 (10 分)

1、设 A 为 n 阶方阵，且 $A^2+A-5E=0$ 。证明(A+2E)可逆，并求其逆。（4 分）

2.若 A 为 n 阶方阵（n≥ 2）,则当 $R(A)=n-1$ 时，$R(A^*)=1$;（6 分）

14 浙江理工大学 2008-2009 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 B 卷

一、单选题（每题 4 分，共 20 分）

1、设$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1$,则$\begin{vmatrix} 2a_1 & b_1+c_1 & 5c_1 \\ 2a_2 & b_2+c_2 & 5c_2 \\ 2a_3 & b_3+c_3 & 5c_3 \end{vmatrix} = ($　　$)$.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 5　　(D)10

2、设A,B均为n阶矩阵,则必有(　　).

(A)$|A+B| = |A| + |B|$　　　　(B) $AB = BA$

(C)$|AB| = |BA|$　　　　(D)$|A-B| = |A| - |B|$

3、设A,B,C均为n阶矩阵,且$AB = BC = CA = E$,则$A^2 + B^2 + C^2 = ($　　$)$.

(A)$3E$　　(B)$2E$　　(C)E　　(D)0

4、设$a_1 = (2,1,1)^T, a_2 = (-1,2,7)^T, b = (1,2,t)^T$,若$b$可由$a_1, a_2$线性表示,则$t = ($　　　$)$.

(A) -5　　(B) 5　　(C) -2　　(D) 2

5、设n阶矩阵A为正交矩阵,则下列矩阵不是正交矩阵的是(　　).

(A) A^T　　(B) A^2　　(C)$-A$　　(D)$2A$

二、填空题(每题 4 分，共 24 分)

1、设$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$,则$a =$_______.

2、设$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,则$(A^*)^{-1} =$______________.

3、已知向量组$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,则$R(a_1, a_2, a_3) =$_____;一个极大无关组是_______.

4、向量组$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$线性无关,则$x, y$必满足关系式_________.

5、设$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$是非齐次线性方程组$AX = b$的$s$个解，若$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s$也是它的解，则$k_1 + k_2 + \cdots + k_s =$______________.

6、设$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$是三阶矩阵$A$的特征值，则$|A| =$________，伴随阵$A^*$的特征值是____________.

三、解答题（8＋8＋10＋10＋10，共 46 分）

1、计算行列式$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$ (8 分)

2、已知$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，且$AB = A + 2B$，求$B$.(8 分)

3、设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix}$,问 k 为何值时,(1) $R(A)=3$;(2) $R(A)=2$; (3) $R(A)=1$. (10 分)

4、非齐次线性方程组 $\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=-2, \\ x_1-2x_2+x_3=\lambda, \\ x_1+x_2-2x_3=\lambda^2 \end{cases}$ 当 λ 取何值时有解？求出它的通解。(10 分)

5、已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$. (1)求 A 的特征值及线性无关的特征向量;(2)求可逆矩阵 P ,使得 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角阵. (10 分)

四、证明题（每题 5 分,共 10 分）

1、设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A,\ E$ 为 n 阶矩阵,证明: $R(A)+R(A-E)=n$.

2、设 λ_1,λ_2 是 n 阶方阵 A 的两个特征值，$\lambda_1\neq\lambda_2$ ，$p_1,\,p_2$ 是对应的特征向量，证明 p_1+p_2 不是 A 的特征向量.

15　《线性代数 B》模拟试题一

一、单项选择题（每小题 3 分，共 27 分）

1. 对于 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{B}$，则下列等式中（　　）不成立.

(A) $\left|(\boldsymbol{AB})^{-1}\right| = \left|\boldsymbol{A}^{-1}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}^{-1}\right|$　　(B) $\left|(\boldsymbol{AB})^{-1}\right| = (1/\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|) \cdot (1/\left|\boldsymbol{B}^{-1}\right|)$

(C) $\left|(\boldsymbol{AB})^{-1}\right| = \left|\boldsymbol{A}\right|^{-1} \cdot \left|\boldsymbol{B}\right|^{-1}$　　(D) $\left|(\boldsymbol{AB})^{-1}\right| = 1/\left|\boldsymbol{AB}\right|$

2. 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{0}$，则矩阵 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1} =$（　　）.

（A）$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2$　（B）$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2$　（C）$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2$　（D）$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是上（下）三角矩阵，那么 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素为（　　）.

(A) 全都非负　（B） 不全为零　（C）全不为零　（D）没有限制

4. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{3\times 3}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，那么（　　）.

（A）$\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{B}$　（B）$\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{B}$　（C）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$　（D）$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$

5. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则向量组内（　　）可由向量组其余向量线性表示.

（A）至少有一个向量　（B）没有一个向量　（C）至多有一个向量　（D）任何一个向量

6. 若 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，其秩 $R(\boldsymbol{A}) =$（　　）.

（A）1　（B）2　（C）3　(D)　4

7. 若方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 中方程的个数小于未知量的个数，则有（　　）.

（A） $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 必有无穷多解　（B） $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 必有非零解

（C） $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 仅有零解　（D） $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 一定无解

8. 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵，则下列矩阵中不是正交阵的是（　　）.

（A） $\boldsymbol{A}^{-1}$　（B）$2\boldsymbol{A}$　（C） $\boldsymbol{A}^4$　（D） $\boldsymbol{A}^T$

9. 若满足条件（　　），则 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

（A） $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$　（B） $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$　（C） $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同特征多项式

（D） $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值且 n 个特征值各不相同

二、填空题（每空格 3 分，共 21 分）

1. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性_______________.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶方阵，且 $R(\boldsymbol{A})=3$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=0$ 的基础解系所含的解向量的个数是__________________.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ -1,\ 2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,\ k,\ 5)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,\ -6,\ 1)$ 线性相关，则 $k=$__________.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&5&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=$______________________________.

5. 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 4，5，6，则 $|\boldsymbol{A}|=$________，$\boldsymbol{A}^T$ 的特征值为______________，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值为______________________.

三、**计算题**（共 42 分）

1.（6 分）计算行列式

$$\begin{vmatrix}a+b&b&b&b\\-b&a-b&-b&-b\\b&b&a+b&b\\-b&-b&-b&a-b\end{vmatrix}$$

2.（8 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{10}$.

3.（**10 分**）设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i = i\boldsymbol{\alpha}_i \quad (i = 1,2,3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (2,-2,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (-2,-1,2)^T$，求 $\boldsymbol{A}$.

4．（**6 分**）在向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中，取两组基：

（I）$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$ （II）$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix},$

设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 I 下的坐标为 $(1,\quad 1,\quad 3)^T$，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 II 下的坐标.

5. （12 分）λ 取何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+\lambda x_2-x_3=2 \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=5 \\ x_1+10x_2-6x_3=1 \end{cases}$$

（1）有惟一解；（2）无解；　（3）有无穷多解，并求其通解.

四、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆阵，$A^2=|\boldsymbol{A}|E$. 证明 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}$.

2. 若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$. 证明 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是不可逆的.

16　《线性代数 B》模拟试题二

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、设 A 为 n 阶方阵，A^* 为其伴随阵。下列条件中（　　）是 A 可逆的充要条件。

（A）$A \neq O$；　（B）　$A^* \neq O$；　（C）$AA^* = |A|E$；　（D）$R(A^*) = n$。

2. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ 线性相关，则（　　）.

（A）α_1 可由其余向量线性表示；　（B）$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ 至少有一个零向量；

（C）$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ 中至少有一个向量可以由其余向量线性表示；

（D）$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ 任两个向量成比例.

3、设矩阵 A 的秩 $R(A) = r$，则（　）.

（A）A 的 $r-1$ 阶子式都不为 0；　（B）A 至少有一个 r 阶子式不为 0;

（C）A 是一个 r 阶方阵;　（D）A 的 r 阶子式都不为 0.

4．若方阵 A 与 B 相似，则下列命题不成立的是（　）.

（A）$|A|=|B|$;　（B）A 与 B 的秩相同;

（C）A 与 B 具有相同的特征值;　（D）A 与 B 具有相同的特征向量。

5.行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}$ 中 d 的代数余子式为（　）.

（A）$c_1(a_1b_2 - a_2b_1)$；（B）$c_1(a_2b_1 - a_1b_2)$；　（C）$a_1b_2 - a_2b_1$；（D）$a_2b_1 - a_1b_2$。

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1．设 A 为 3×3 矩阵，$|A|=-2$，把 A 按列分块为 $A=(A_1, A_2, A_3)$，其中 A_j $(j=1,2,3)$ 是 A 的第 j 列，则 $|A_3 - 2A_1, 3A_2, A_1| =$ ＿＿＿＿＿ .

2．设矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 $A^3 - A^2 + 3A - 2E = \mathbf{0}$，则 $(E-A)^{-1} =$ ＿＿＿＿＿＿.

3．已知三阶方阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $-2,1,2$，则行列式 $|2\mathbf{A}^* + \mathbf{E}| =$ ＿＿＿＿＿＿.

4．已知 4×3 矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩为 $R(\mathbf{A})=2$，$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，则 $R(\mathbf{AB}) =$ ＿＿＿＿＿.

5.　设 $\boldsymbol{\alpha\alpha\alpha\beta}(1, 4, 1)$, $_2 = (2, 1, -5)$, $_3 = (6, 2, -16)$, $= (2, t, 3)$，且 $\boldsymbol{\beta}$ 可用 $\boldsymbol{\alpha\alpha\alpha}$ $_2$, $_3$ 线性表出，则 $t =$ ＿＿＿＿＿ .

三、解答题（共 50 分）(解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

1.（**本题 8 分**）求行列式$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$的值。

2.（**本题 10 分**）已知$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，矩阵 $\mathbf{X}$ 满足关系式：

$\mathbf{X}(\mathbf{E}-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B})^T \mathbf{C}^T = \mathbf{E}$，求 $\mathbf{X}$.

3.（**本题 8 分**）求向量组 $\alpha_1=(1,2,-1,4)^{\mathrm{T}}, \alpha_2=(9,100,10,4)^{\mathrm{T}}, \alpha_3=(-2,-4,2,-8)^{\mathrm{T}}$. 的秩，并求一个最大线性无关组，并把其余向量用该极大线性无关组线性表示。

4．（本题 12 分） 问λ取何值时，线性方程组$\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2-x_3=1 \\ \lambda x_1-x_2+x_3=2 \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1 \end{cases}$无解，有惟一解或无穷多解？并在有无穷多解时给出方程组的通解。

5. **（本题 12 分）** 试求一个正交的相似变换矩阵，将对称阵$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$化为对角阵.

四、证明题。**（本题 10 分）**

设向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，证明向量$2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+5\alpha_3,2\alpha_3+3\alpha_1$也线性无关。

数学通识必修课系列试卷汇总

（试题册和答案册配套，为两个小册子，这里为了节省空间，就将两本册子写在了一块儿）
（版本号与年份有关；发行次数会根据当年发行情况进行修改）

高等数学 A2 期末系列：（具体内容请见高等数学 B2 试题册尾页）
高等数学 A2 期末试题册、答案册上 2022 第二版第 1 次发行.pdf
高等数学 A2 期末试题册、答案册下 2022 第二版第 1 次发行.pdf
高等数学 A2 期末试题册、答案册五套 2022 第二版第 1 次发行.pdf

高等数学 B2 期末系列：（具体内容请见高等数学 B2 试题册尾页）
高等数学 B2 期末试题册、答案册 2022 第二版第 1 次发行.pdf
高等数学 B2 期末试题册、答案册五套 2022 第二版第 1 次发行.pdf

线性代数 A 期末系列：
线性代数 A 期末试题册、答案册 2022 第二版第 1 次发行.pdf
线性代数 A 期末试题册、答案册五套 2022 第二版第 1 次发行.pdf

线性代数 B 期末系列：
线性代数 B 期末试题册、答案册上 2022 第二版第 1 次发行.pdf
线性代数 B 期末试题册、答案册下 2022 第二版第 1 次发行.pdf
线性代数 B 期末试题册、答案册五套 2022 第二版第 1 次发行.pdf

概率论与数理统计 A 期末系列：
概率论与数理统计 A 期末试题册、答案册上 2022 第二版第 1 次发行.pdf
概率论与数理统计 A 期末试题册、答案册下 2022 第二版第 1 次发行.pdf
概率论与数理统计 A 期末试题册、答案册五套 2022 第二版第 1 次发行.pdf

概率论与数理统计 B 期末系列：
概率论与数理统计 B 期末试题册、答案册 2022 第二版第 1 次发行.pdf

概率论与数理统计期末练习系列：
概率论与数理统计练习试题册、答案册 2022 第二版第 1 次发行.pdf