第一章　复数与复变函数

第二讲 复变函数及其极限与连续性

数学与统计学院
吴慧卓

主要内容

1 复平面上的区域

2 复变函数的概念

3 复变函数的极限与连续性

主要内容

1 复平面上的区域

2 复变函数的概念

3 复变函数的极限与连续性

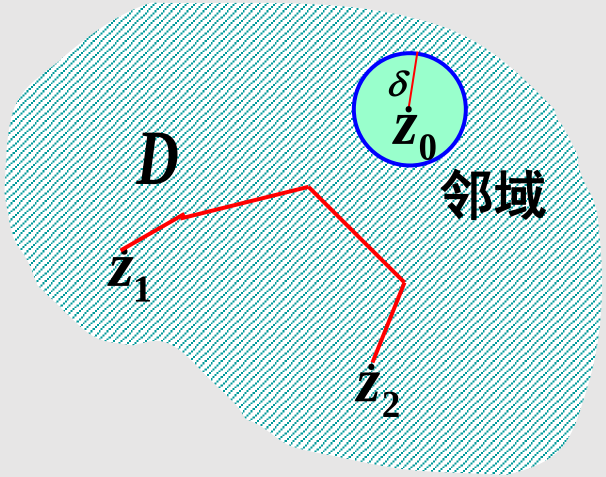
1 复平面上的区域

内点 $z_0 \in D \subseteq C,\ \exists U\left(z_0, \delta\right) \subseteq D$

开集 全体内点构成的集合

连通集

区域 连通的开集 D



边界点

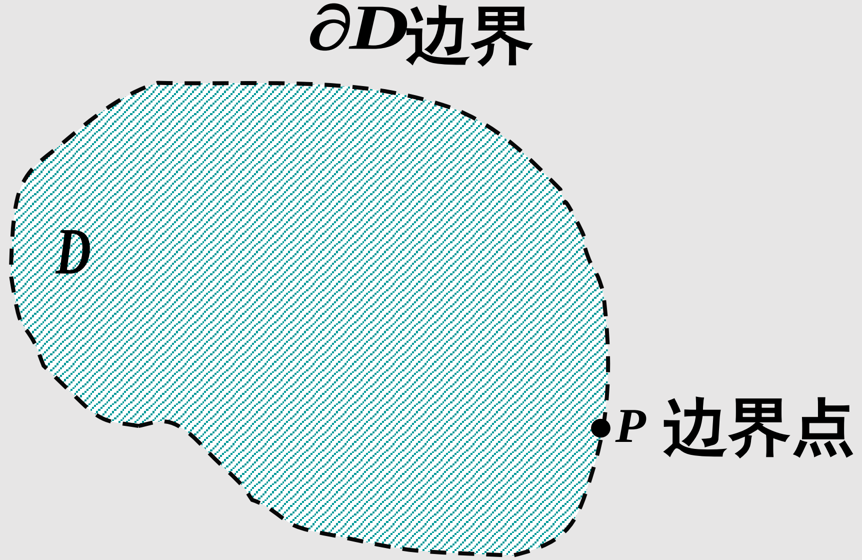
边界　边界点的全体. 记做∂D

注意：区域不包含它的边界

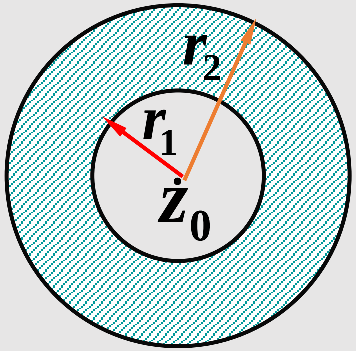
闭区域 $\overline{D} = D + \partial D$

有界区域和无界区域

$$\exists M > 0, \forall z_0 \in D, |z_0| \le M$$



例1 判断下列区域是否有界?

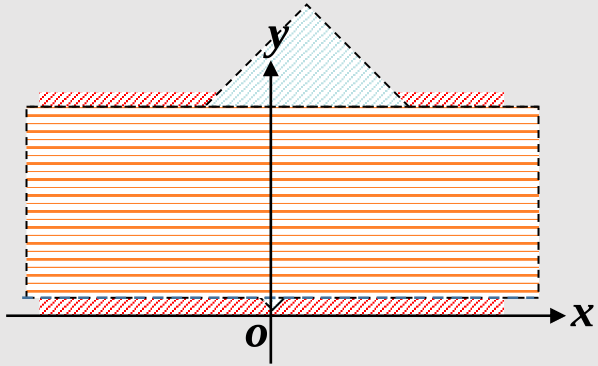


(1) 圆环域: $r_1 < |z - z_0| < r_2$;

(2) 上半平面: $\operatorname{Im} z > 0$;

(3) 角形域: $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$;

(4) 带形域: $a < \operatorname{Im} z < b$.



连续曲线 如果 $x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (a \le t \le b)$

为连续函数时，则称 $C:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} (\alpha \le t \le \beta)$ 为**连续曲线**.

光滑曲线 $z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (\alpha \le t \le \beta).$

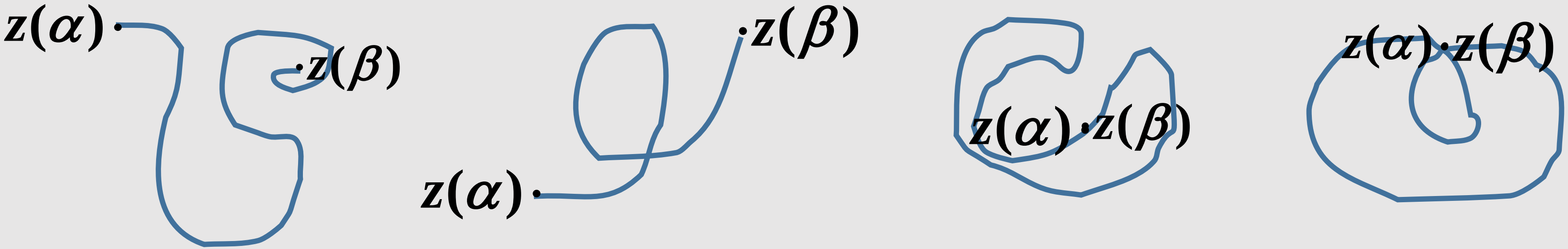
如果 $x'(t), y'(t)$ 均连续，且

$\forall t, [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$，则称曲线是**光滑的**.

分段光滑曲线

简单曲线或约当曲线

没有重点或除起点和终点重合外，自身不相交的曲线.



单连通域与多连通域

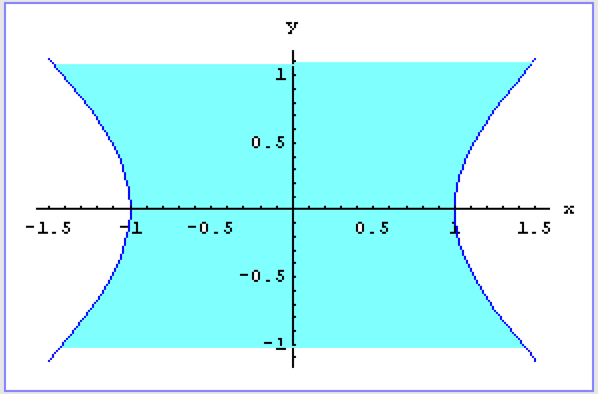
单连通域

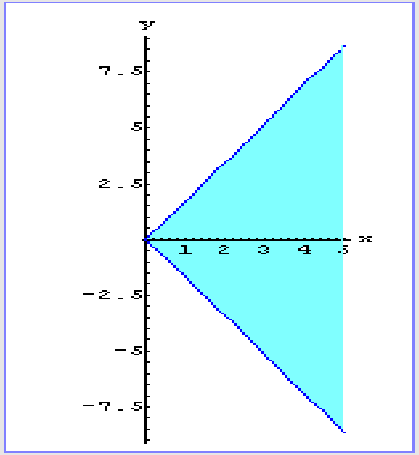
多连通域

例2 指出下列不等式所确定的点集，是否区域？是否有界？

如果是区域，单连通的还是多连通的？

(1) $\mathrm{Re}(z^2) \le 1$; (2) $|\arg z| \le \dfrac{\pi}{3}$; (3) $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 3$; (4) $|z-1| + |z+1| < 4$.





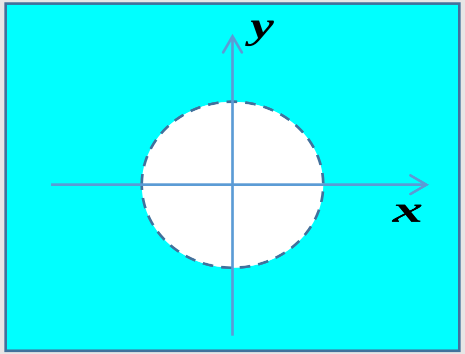
$$\mathrm{Re}(z^2) \le 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 \le 1$$

$$|\arg z| \le \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \le \arg z \le \frac{\pi}{3}$$

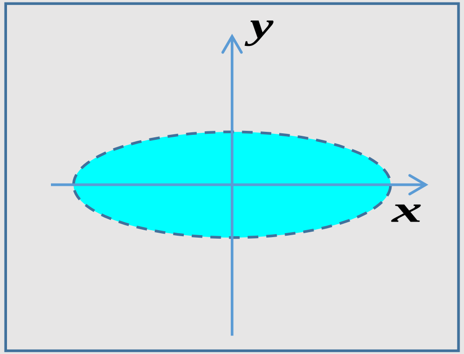
例2 指出下列不等式所确定的点集，是否区域？是否有界？

如果是区域，单连通的还是多连通的？

$$(1)\,\mathrm{Re}(z^2)\le 1;\ \ (2)\,|\arg z|\le\frac{\pi}{3};\ \ (3)\left|\frac{1}{z}\right|<3;\ \ (4)\,|z-1|+|z+1|<4.$$



$$\left|\frac{1}{z}\right|<3\Leftrightarrow|z|>\frac{1}{3}$$



$$|z-1|+|z+1|<4$$

主要内容

1 复平面上的区域

2 复变函数的概念

3 复变函数的极限与连续性

2 复变函数的概念

复变函数的定义

设G是复平面上的点集, 若对任何 $z\in G$, 都存在惟一确定的复数 w和 z对应, 称在 G上确定了一个单值复变函数, 用$w=f(z)$表示.

当$z\in G$所对应的 w不止一个时, 称在G上确定了一个多值复变函数.

G称为函数的定义域, 对应于 z 的所有 w 的全体 称为函数的值域.

复变函数与自变量之间的关系

令 $z = x + iy$, $w = u + iv$, $\quad w = f(z) = u + iv$,

相当于两个关系式 $\quad u = u(x,y), v = v(x,y)$

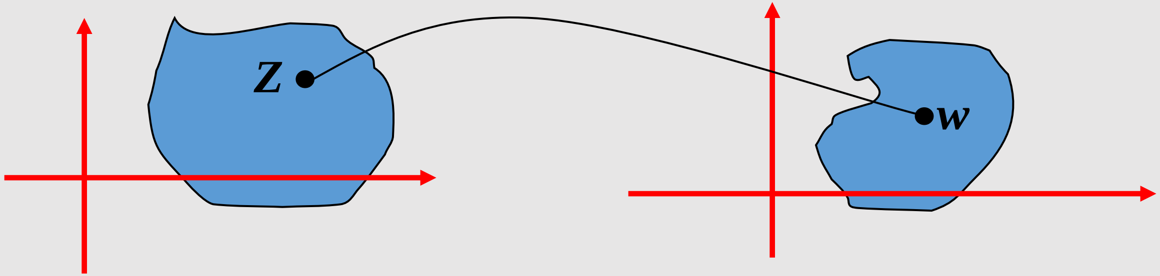
例如, 函数 $w = z^2$,

$$w = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$u = x^2 - y^2, v = 2xy$$

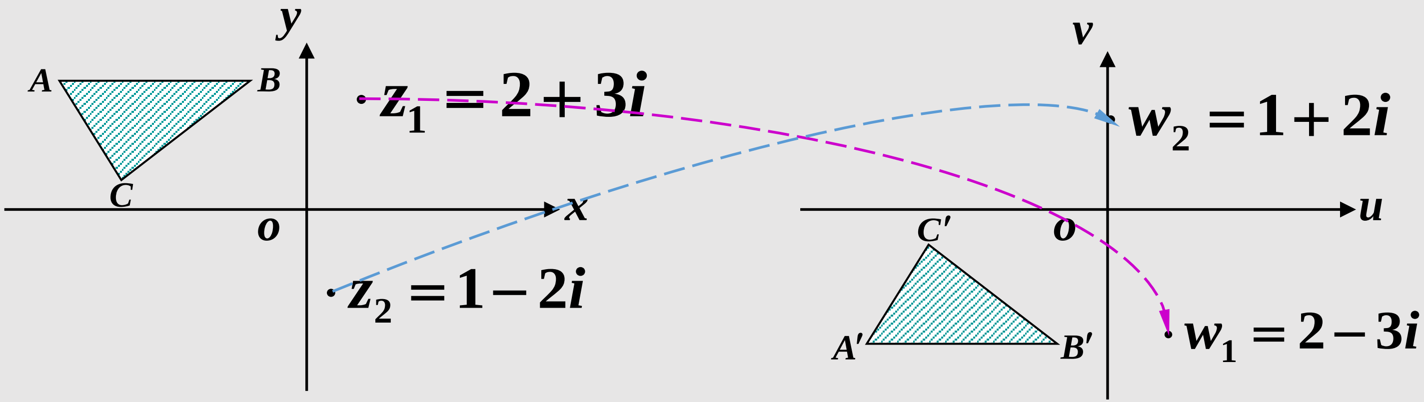
映射

由于一个复变函数反映了两对变量 u,v和 x,y之间的对应关系，因而无法用同一平面内的几何图形来表示，必须看成是两个复平面上的点集之间的对应关系.



两个特殊的映射

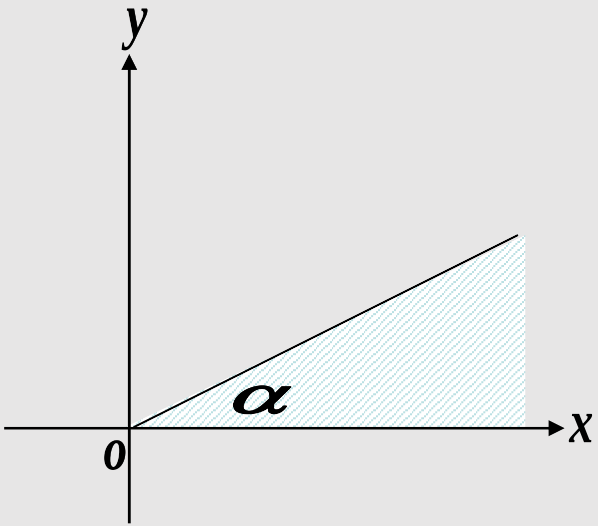
(1) $w=\overline{z}$ 关于实轴的对称映射，而且对应图形是全同的.

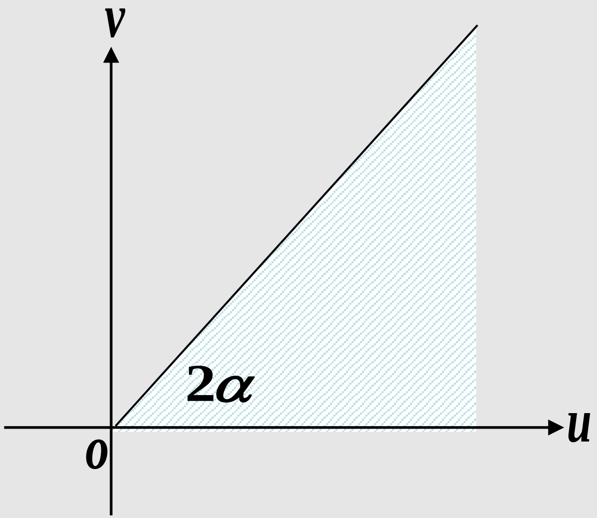


$z_1\to w_1$, $z_2\to w_2$, $\Delta ABC\to\Delta A'B'C'$.

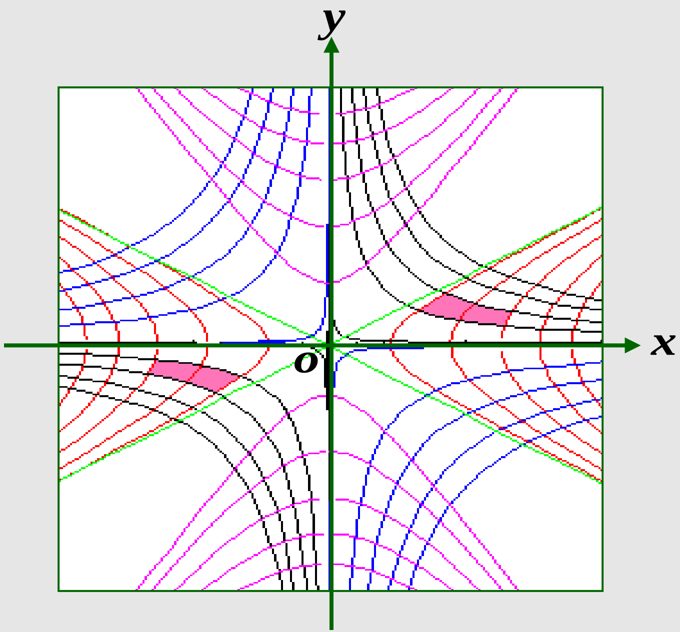
$(2)\, w = z^2$

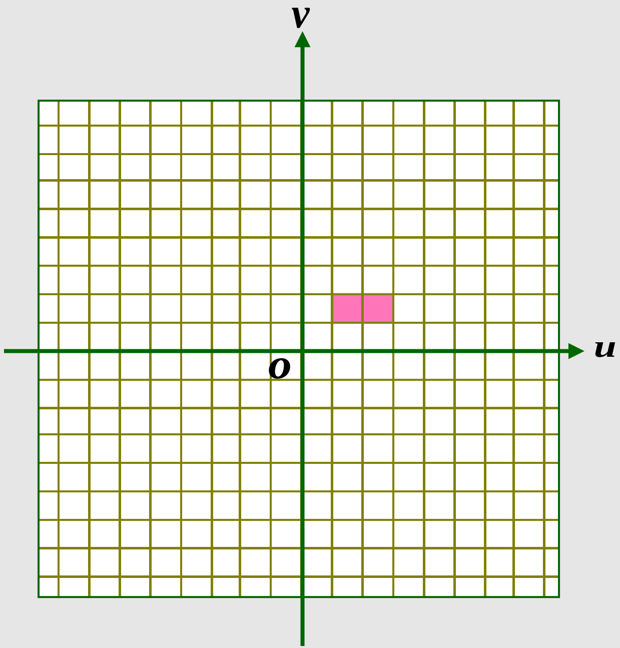
①将一个幅角为 α 的角形域映射为幅角 2α 的角形域





②将z平面上的两族双曲线 $x^2 - y^2 = c_1, 2xy = c_2$映射为 w 平面上的两族平行直线.



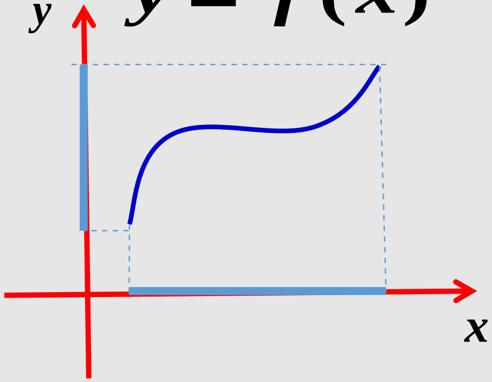


关于复变函数的几点说明：（棚拍）

（1）复变函数的定义在**形式**上与实一元函数的定义几乎完全一致，但反映的问题实质则不同. 复变函数反映的是z平面上的点集与w**平面上点集间**的对应关系，而实一元函数反映**两个实轴上**的点集间的对应关系，只需用平面上的一条曲线就可以直观地表示，显然要简单得多.

（2）$w=f(z)$相当于两个实二元函数$u=u(x,y),v=v(x,y)$讨论一个复变函数的极限和分析性质可借助于实二元函数中相应的理论.

$$y = f(x)$$



$$w = f(z)$$

$$\boxed{w = f(z) = u + iv, z = x + iy}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{u = u(x, y), v = v(x, y)}$$

复合函数与反函数

复变函数中复合函数与反函数的定义形式上与实变函数是类似的.

如果$w=f(z)$和其反函数 $z=f^{-1}(w)$ 都是单值的，则称 $w=f(z)$ 是从定义域 G 到值域 G^* 上的一一映射，此时也称 $w=f(z)$ 为单叶函数. 且有

$$z=f^{-1}[f(z)]$$

例3 映射 $w=z+\dfrac{1}{z}$，求圆周 $|z|=2$ 的像.

解 令 $z=x+iy,\ w=u+iv,$

映射 $w=z+\dfrac{1}{z}\Rightarrow u+iv=x+iy+\dfrac{x-iy}{x^2+y^2},$

于是 $u=x+\dfrac{x}{x^2+y^2},\quad v=y-\dfrac{y}{x^2+y^2},$

$$|z|=2\Rightarrow u=\frac{5}{4}x, v=\frac{3}{4}y\Rightarrow x=\frac{4}{5}u, y=\frac{4}{3}v$$

$$\left(\frac{4}{5}u\right)^2+\left(\frac{4}{3}v\right)^2=4$$

关键：利用题设条件，消掉x和y, 寻找u和v之间的依赖关系.

主要内容

1 复平面上的区域

2 复变函数的概念

3 复变函数的极限与连续性

3 复变函数的极限与连续性

回顾

一元函数的极限

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当} 0 < |x - x_0| < \delta \text{时},$$

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon.$

一元函数的连续 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

复变函数的极限

设复变函数$w=f(z)$在z_0的某个去心邻域内$\mathring{U}(z_0,\rho)$有定义,

A是复常数. 若对任意给定的$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0(\delta\le\rho)$

使得当 $0<|z-z_0|<\delta$时, 总有$|f(z)-A|<\varepsilon$

成立, 则称当 z 趋于 z_0时, $f(z)$以A为极限, 并记作

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \quad \text{或} \quad f(z)\to A\ (z\to z_0).$$

注意: 定义中 $z\to z_0$的方式是任意的.

定理1　极限存在的充要条件

设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y), A=u_0+iv_0, z_0=x_0+iy_0$

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \iff \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0, \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$$

“复变化实变”是研究复变函数重要的思想方法.

复变函数极限的性质

（1）唯一性　　（2）有界性　　（3）有理运算法则

例4 当 $z \to 0$ 时, 函数 $f(z)=\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{\bar{z}}$ 极限不存在.

解 $f(z)=\dfrac{x}{x-yi}=\dfrac{x(x+yi)}{x^2+y^2}$, $u=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$, $v=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

方法1 沿 $y=kx$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k^2}{1+k^2}.$$

依赖于k, 故极限不存在

例5 当 $z\to 0$ 时, 函数 $f(z)=\dfrac{\operatorname{Re}(z)}{\bar{z}}$ 极限不存在.

解 方法2 沿不同射线

$\arg z=\theta,$ $$f(z)=\frac{\operatorname{Re}(z)}{\bar{z}}=\frac{r\cos\theta}{r(\cos\theta-i\sin\theta)}$$

z沿正实轴趋近于0时，$f(z)\to 1,$

z沿正虚轴趋近于0时，$f(z)\to 0,$

故当 $z\to 0$ 时极限不存在.

例6 试证 $\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\overline{z}}-\frac{\overline{z}}{z}\right)$不存在.

解 $$\lim_{z\to 0}\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2}{z\overline{z}}-\frac{\overline{z}^2}{z\overline{z}}\right)$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{1}{2i}\left(\frac{x^2-y^2+2xyi}{z\overline{z}}-\frac{x^2-y^2-2xyi}{z\overline{z}}\right)$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

极限不存在

复变函数的连续性

设 $f(z)$在 z_0 的邻域内有定义，且$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$

则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.

若 $f(z)$ 在区域 D 内的每一点都连续，则称 $f(z)$在

区域 D 上连续.

定理2 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, 则 $f(x)$

在 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续的充分必要条件是 $u(x,y)$,

$v(x,y)$, 都在 (x_0,y_0) 点连续.

连续函数的性质

(1) 连续函数的和、差、积、商（分母不为0）是连续函数;

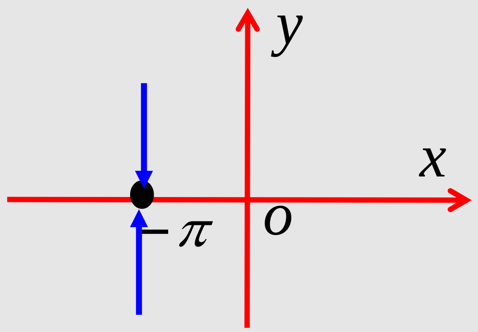
(2) 连续函数的复合函数是连续函数.

例7 试证 argz在原点与负实轴上不连续.

证明

（仅证在负实轴上不连续）

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x} & x>0\\ \pm\dfrac{\pi}{2} & x=0, y\neq 0\\ \arctan\dfrac{y}{x}\pm\pi & x<0, y\neq 0\\ \pi & x<0, y=0\end{cases}$$



$$x<0, y\neq 0, \arg z=\arctan\frac{y}{x}\pm\pi$$

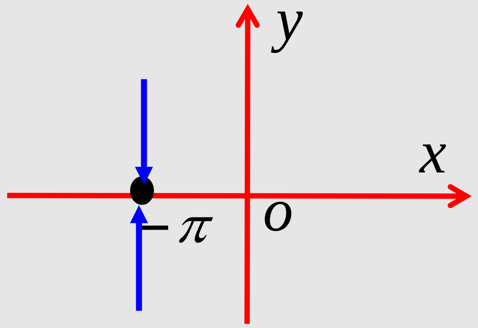
$$\lim_{y\to 0^+}\arg z=\lim_{y\to 0^+}\arctan\frac{y}{x}+\pi=\pi \qquad \lim_{y\to 0^-}\arg z=\lim_{y\to 0^-}\arctan\frac{y}{x}-\pi=-\pi$$

例7 试证 argz在原点与负实轴上不连续.

证明

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x} & x>0\\ \pm\dfrac{\pi}{2} & x=0,y\neq 0\\ \arctan\dfrac{y}{x}\pm\pi & x<0,y\neq 0\\ \pi & x<0,y=0\end{cases}$$

（仅证在负实轴上不连续）



所以，argz在原点与负实轴上不均连续.

进一步，容易证明 argz在除去原点与负实轴的平面上均连续.