2008-2009--1

概率论与数理统计

第一章 P10---1.2.3.4.5 P14--- 1.3.6 P19--- 1.3.6　 P24---1.3.4.6 例题---P19-例 6　　-P23-例 4

第二章 P10---1.2.6.9　 P38--- 1.3.4　P45--- 1.2.5.7.9　P50---1.2.5　　例题---P44-例 4.5.6　　-P48-例 3.4 .5

第三章 P60---2.3.5.6　P68---1.4.6　 P73---1.3.4　 例题---P67-例 7　　-P63-例 2.3

第四章 P81---4.5.6.8.9.10.11　 P87--- 1.3.4.5　 P95---1.2.5.6.7

第五章 P10---1.3

注：主要练习题，只代表涉及的内容及难度

2007-2008 学年第错误!未找到引用源。**学期考试试卷 A 卷**

一、选择题（每题 3 分，共 21 分）

1. 若事件 A 和 B 有 $B \subset A$,则 下述结论正确的是（　　）.

(A) A 与 B 同时发生；　　(B) A 发生，B 必发生；

(C) A 不发生，B 必不发生；　　(D) B 不发生，A 必不发生；

2. 设事件 A 与 B 满足 $P(A)>0$，$P(B)>0$，下面条件（　）成立时，事件 A 与 B 一定独立.

（A）$P(\overline{AB})=P(\overline{A})P(\overline{B})$；　（B）$P(\overline{A\cup B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$；

（C）$P(A|B)=P(B)$；　（D）$P(A|B)=P(\overline{A})$。

3.当常数 b=（　）时，$p_k=\dfrac{2b}{k(k+1)}\ (k=1,2,\cdots)$ 为某一离散型随机变量的概率分布.

（A） 2；　（B） 1；　（C） 1/2；　（D） 3.

4. 设随机变量 $X\sim N(a,a^2)$，且 $Y=aX+b\sim N(0,1)$，则 a,b 应取（　）

（A）$a=2,b=-2$；　（B）$a=-2,b=-1$；

（C）$a=1,b=1$；　（D）$a^2=1,b=-1$.

5. 设 $X\sim B(n,p)$，且 $E(X)=2.4$, $D(X)=1.44$, 则（　　）

（A）$n=4,p=0.6$；　（B）$n=6,p=0.4$；

（C）$n=8,p=0.3$；　（D）$n=24,p=0.1$.

6. 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是取自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，则可作为 σ^2 无偏估计量的是（　　）

（A）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$；　（B）$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i$；　（C）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$；　（D）$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$.

7. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，它们的分布函数分别为 $F_X(x),F_Y(y)$，则 $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数为

（　　）

（A）$F_Z(z)=F_X(z)$　　　　　（B）$F_Z(z)=F_Y(z)$；

（C）$F_Z(z)=\min\{F_X(z),F_Y(z)\}$；　（D）$F_Z(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$.

二、填空题（每题 3 分，共 21 分）

1. 若 $A\supset B$，$A\supset C$，$P(A)=0.9$，$P(\overline{B}\cup\overline{C})=0.8$，则 $P(A-BC)=$ ____.

2. 一批产品，其中 **10** 件正品，**2** 件次品，任意抽取 **3** 次，每次抽 **1** 件，抽出后不再放回，则第 **3** 次抽出的是次品的概率为________ .

3. 设在 **4** 次独立的试验中，事件 A 每次出现的概率相等，若已知事件 A 至少出现 **1** 次的概率是 $65/81$，则 A 在 **1** 次试验中出现的概率为______ .

4. (X, Y) 的分布律为

Y \ X	1	2	3
1	1/6	1/9	1/18
2	1/3	a	b

$P\{X=Y\}=$______；　$a=$_____，$b=$_____ 时，X 与 Y 相互独立.

5. 设 (X_1, X_2) 为 X 的一样本，则 $d_1=\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2$，$d_2=\frac{1}{3}X_1+\frac{2}{3}X_2$ 都是 $E(X)$ 的________估计，比____更有效.

6. 已知一批零件的长度 X（单位：cm）服从正态分布 $N(\mu,\ 1)$，从中抽取 16 个零件，测量得到其平均长度 40（cm），则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为________ .

7. 在假设检验过程中，______________________________称第一类错误；
____称第二类错误。

三、计算及应用题（本题 54 分）

1. （6 分）已知 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=1/16$，求 A，B，C 恰好发生一个的概率。

2. （6 分）某厂有三条生产线生产同一种产品，三条生产线的产量之比为 **3:2:4**，而三条生产线的次品率分别为 **0.02, 0.03, 0.04**，生产的产品混合在一起，现在总产品中任取一件，求：

(1) 所取的产品为次品的概率；

(2) 若取到的是次品，问该次品来自第二条生产线的概率有多大?

3. （12 分）设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(3x+4y)}, & x>0,y>0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，（1）确定常数 k；（2）求 $P\{0<X\le 1,0<Y\le 2\}$；（3）求 $f_x(x),\ f_y(y)$；（4）X 与 Y 是否相互独立？

4. （6 分） 设**(*X,Y*)**的联合分布列为，

Y \ X	1	2	3
1	0.1	0.2	0.2
2	0.3	0.1	0.1

求 ***E*(*X*), *E*(*Y*), *D*(*X*), *D*(*Y*),** ρ_{XY} 。

5. （8 分）

在次品率为 **0.3** 的一大批产品中，任取 **400** 件，试利用中心极限定理计算取得的 **400** 件产品中次品数在 **110** 与 **125** 之间的概率。

6. （8 分）设总体 X 的概率密度

$f(x,\theta)=\begin{cases} \theta\cdot x^{\theta-1}, & 0<x<1, \\ 0, & 其它. \end{cases}$ $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为一样本，试求 θ 的矩估计及最大似然估计。

7. （8 分）

一批电子元件寿命 ***X*** 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，原先均值 $\mu=\mu_0=1650$，现进行了技术改造后，从新产品中随机抽取 **25** 个产品，测得寿命的样本均值为 $\bar{x}=1691$，样本标准差 $s\ =169$，以 $\alpha=0.05$ 的显著性水平检验整批元件平均寿命是否有显著的差异。(即检验 $H_0:\mu=1650$，$H_1:\mu\ne 1650$).

四、证明题（本题 4 分）

设 $X\sim f(x)=\begin{cases} 2x, & 0\le x\le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，证明 $Y=4X$ 的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases} y/8, & 0\le y\le 4 \\ 0, & 其他 \end{cases}$.

附表：标准正态分布数值表　　χ^2 分布数值表　　t 分布数值表

标准正态分布数值表	χ^2 分布数值表	t 分布数值表
$\Phi(1)=0.8413$	$\chi^2_{0.05}(3)=7.815$	$t_{0.025}(24)=2.0639$
$\Phi(0.55)=0.7088$	$\chi^2_{0.025}(3)=9.348$	$t_{0.025}(25)=2.0595$
$\Phi(1.960)=0.975$	$\chi^2_{0.05}(4)=9.448$	$t_{0.05}(8)=1.8595$
$\Phi(1.09)=0.8622$	$\chi^2_{0.025}(4)=11.143$	$t_{0.025}(8)=2.306$

参考答案及评分标准

一、选择题（每题 3 分，共 21 分）

1. （ C ）　.2. （ B ）　3.（ C ）　4.（ D ）

5. （ B ）　6. （ C ）　7.（ D ）.

二、填空题（每题 3 分，共 21 分）

1. __0.7_.

2. __0.2___.

3. __1/3__ .

4. __5/18___； __2/9__，__1/9_

5. _无偏____， d_2__比_d_1.

6. __（39.51，40.49）__ .

7. __当 H_0 为真时，根据样本值作出了拒绝 H_0 的判断；当 H_0 为假时，根据样本值作出了接受 H_0 的判断

三、计算及应用题(54 分)

1.（6 分）

解：{A, B, C 恰好发生一个} = $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$，

……………………2 分

而 $P(A\bar{B}\bar{C})=P(A-AB\cup AC)=P(A)-P(AB\cup AC)$

$=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)$，

同理得 $P(\bar{A}B\bar{C})=P(B)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)$，

$P(\bar{A}\bar{B}C)=P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$，故

$P(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C)=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)$

$=P(A)+P(B)+P(C)-2P(AB)-2P(AC)-2P(BC)+3P(ABC)$，

……………………4 分

因为 $ABC\subset AB$, 故 $P(ABC)\le P(AB)$，由 $P(AB)=0$ 及 $P(ABC)\ge 0$，得

$P(ABC)=0$，从而 $P(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C)=0.5$。

…………………………………………………………6 分

2. （6 分）

解: 设 B={所取的产品为次品}，A_i={所取的产品为第 i 条生产线生产}，i=1,2,3，则 A_1，A_2，A_3 两两互斥且

$$B = A_1B \cup A_2B \cup A_3B,$$

……………2 分

故（1）

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B \mid A_i) = \frac{3}{9}\times 0.02 + \frac{2}{9}\times 0.03 + \frac{4}{9}\times 0.04 = \frac{7}{225} \approx 0.0311;$$

…………………………4 分

（2）$P(A_2 \mid B) = P(A_2)P(B \mid A_2)/P(B) = \dfrac{3}{14} \approx 0.2143$

…………………………6 分

3. （12 分）

解: ① 由概率密度函数的归一性，$\iint_{R^2} f(x,y)d\sigma = 1$ ……………………1 分

$$\iint_{\substack{x>0\\ y>0}} ke^{-(3x+4y)}d\sigma = 1,$$

$k = 12.$ ………………………………………………3 分

②

$$P\{0 < X \le 1, 0 < Y \le 2) = \iint_{\substack{0<X\le 1\\ 0<Y\le 2}} 12e^{-(3x+4y)}dxdy = (1-e^{-3})(1-e^{-8}).$$

………………………………5 分

③ $f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ………………………………7 分

$f_Y(y) = \begin{cases} 4e^{-4y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ ……………………………………9 分

③$\because f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(x)$ ……………………………………10 分

$\therefore X$ 与 Y 相互独立. ………………………………12 分

4. （6 分）

解: $E(X) = 1.9,\ E(X^2) = 4.3,\ D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0.69$；

…………………………………2 分

$$E(Y)=1.5,\ E(Y^2)=2.5,\ D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=0.25$$；

…………………………………4 分

$$E(XY)=2.7,$$

$$\text{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-0.15$$，

$$\rho_{X,Y}=\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=-\sqrt{\frac{3}{23}}$$。…………………………………6 分

5. （8 分）

解：设 400 件产品中的次品数为 X，则 $X\sim B(400,0.3)$，

由中心极限定理得 X 近似服从 $N(120,84)$，

…………………………………3 分

故所求概率为

$$P\{110\le X\le 125\}$$

$$=P\{\frac{-10}{\sqrt{84}}\le\frac{X-120}{\sqrt{84}}\le\frac{5}{\sqrt{84}}\}$$ ……………………5 分

$$\approx\Phi(\frac{5}{\sqrt{84}})-\Phi(\frac{-10}{\sqrt{84}})$$

$$=\Phi(\frac{5}{\sqrt{84}})+\Phi(\frac{10}{\sqrt{84}})-1\approx\Phi(0.55)+\Phi(1.09)-1$$ 。

$$=0.5709$$

…………………………………8 分

6.（8 分）

解：矩估计：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\cdot\theta x^{\theta-1}\mathrm{d}x=\frac{\theta}{\theta+1}$，

…………………………………2 分

解得 $\theta=\frac{E(X)}{1-E(X)}$，

从而得 θ 的矩估计 $\hat{\theta}=\frac{\overline{x}}{1-\overline{x}}$；

…………………………………4 分

最大似然估计:

似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta)=\begin{cases}\theta^n(x_1\cdots x_n)^{\theta-1},\ 0<x_1,\cdots,x_n<1,\\ 0,\ \text{其它}.\end{cases}$$

……………………………………6 分

当 $0\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le 1$ 时，$L(\theta)>0$，取对数得

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\ln(x_1x_2\cdots x_n),$$

从而令 $\dfrac{d}{dx}(\ln L)=\dfrac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，

得 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}=-n\Big/\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

……………………………………8 分

7. （8 分）

解：未知 σ，检验 $H_0:\mu=1650$，$H_1:\mu\neq 1650$，

……………………………………2 分

取统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S\ /\sqrt{n}}$，　　　　……………………………4 分

$t_{\alpha/2}(24)=t_{0.025}(24)=2.0639$，……………………………………5 分

在显著水平 $\alpha=0.05$ 下 H_0 的拒绝域为 $\{|t|>2.0639\}$；

……………………………………6 分

而 t 的取值为 $t=\dfrac{1691-1650}{169/\sqrt{25}}=1.213$，

……………………………………7 分

落在接受域中，所以在 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，即认为整批元件的平均寿命没有显著差异。　　　　……………………………………8 分

四、证明题（4 分）

证明：$Y=4X$ 的分布函数

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(4X\le y)$$
$$=P(X\le\frac{y}{4})=F_X(\frac{y}{4})$$
，

…………………………………………2 分

所以 $Y=4X$ 的密度函数为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{4}f_X(\frac{y}{4})=\begin{cases} y/8, & 0\le y\le 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$ 。

…………………………………………4 分

2007-2008 学年第错误!未找到引用源。**学期考试试卷 A 卷**

一、填空题（每题 4 分, 共 20 分）

1. 设 A、B 为随机事件， $\mathrm{P\,(A)=0.5}$，$\mathrm{P(B)=0.6}$，$\mathrm{P(B|A)=0.8}$，则 $\mathrm{P(B}\cup A)=$___________ .

2. 已知随机变量 X 的密度为 $f(x)=\begin{cases} ax+b, 0<x<1 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$，且 $P\{x>1/2\}=5/8$，则 $a=$_______ ，$b=$_______.

3. 设 $P\{X\ge 0, Y\ge 0\}=\frac{3}{7}$，$P\{X\ge 0\}=P\{Y\ge 0\}=\frac{4}{7}$，则 $P\{\max\{X,Y\}\ge 0\}=$____________ .

4. 设 $D(X)=25, D(Y)=36, \rho_{xy}=0.4$，则 $D(X+Y)=$________________ .

5. 设总体 $X\sim N(\mu, 0.9^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是容量为 9 的简单随机样本，均值 $\overline{x}=5$，则未知参数 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间是_________ .

二、选择题（每题 4 分, 共 20 分）

1. 对于事件 A，B，下列命题正确的是_________ .

（A）若 A，B 互不相容，则 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也互不相容；

（B）若 A，B 相容，那么 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相容；

（C）若 A，B 互不相容，且概率都大于零，则 A，B 也相互独立；

（D）若 A，B 相互独立，那么 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立。

2. 下列函数中，可作为某一随机变量的分布函数是____________ .

(A) $F(x)=1+\frac{1}{x^2}$　　　(B) $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x$

(C) $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-e^{-x}), & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$　(D) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$，其中 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=1$

3. 对于任意两个随机变量 X 和 Y，若 $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$，则__________ .

（A） $D(XY)=D(X)\cdot D(Y)$　　　（B） $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

（C） X 和 Y 独立　　　（D） X 和 Y 不独立

4. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 已知，σ^2 未知，X_1,X_2,X_3 样本，则下列选项中不是统计量的是_________ .

A） $X_1+X_2+X_3$　　B） $\max\{X_1,X_2,X_3\}$　　C） $\sum_{i=1}^{3}\frac{X_i^2}{\sigma^2}$　　D） $X_1-\mu$

5. 设总体 X 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right),X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，σ^2 的无偏估计量是_________ .

（A） $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$　　（B） $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$　　（C） $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$　　（D） $\bar{X}^2$

三、计算题（共 54 分）

1（9 分）. 仓库中有十箱同样规格的产品，已知其中有五箱、三箱、二箱依次为甲、乙、丙厂生产的，且甲厂、乙厂、丙厂生产的这种产品的次品率依次为 1/10, 1/15, 1/20。从这十箱产品中任取一件产品，求取得正品的概率。

2（9 分）. 公共汽车车门的高度是按男子与车门碰头的机会在 0.01 以下来设计的，设

男子的身高 $X\sim N(168,7^2)$，问车门的高度应如何确定？

3（9 分）. 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为：

$$F(x,y)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C+\arctan\frac{y}{3})$$

求：（1） A、B、C 的值；（2） (X,Y) 的联合密度；（3）判断 X、Y 的独立性。

姓名__________

4(9 分). 设二维连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases} k, 0<x<1, 0<y<x \\ 0, \quad \text{其他} \end{cases}$$

求：（1） 常数k；　　（2） $E(XY)$及$D(XY)$。

5(9 分). 某学校有 20000 名住校生，每人以 80%的概率去本校某食堂就餐，每个学生是否去就餐相互独立，问：食堂应至少设多少个座位，才能以 99%的概率保证去就餐的同学都有座位？

6(9 分).某糖厂用自动打包机打包，每包标准重量为 100 公斤，每天开工后需检验一次打包机是否正常工作，某日开工后测得九包重量为

99.3，98.7，100.5，101.2，98.3，99.7，99.5，102.1，100.5 假设每包的重量服从正态分布，在显著性水平为$\alpha=0.05$下，打包机工作是否正常？

五、证明题（6 分）

设 $X\sim f(x)=\begin{cases} 2x, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，

证明：$Y=4X$ 的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases} y/8, & 0\le y\le 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

附表：标准正态分布数值表　　χ^2 分布数值表　　t 分布数值表

$\Phi(1)=0.8413$	$\chi^2_{0.05}(3)=7.815$	$t_{0.025}(24)=2.0639$
$\Phi(0.55)=0.7088$	$\chi^2_{0.025}(3)=9.348$	$t_{0.025}(25)=2.0595$
$\Phi(1.960)=0.975$	$\chi^2_{0.05}(4)=9.448$	$t_{0.05}(8)=1.8595$
$\Phi(2.33)=0.9901$	$\chi^2_{0.025}(4)=11.143$	$t_{0.025}(8)=2.306$

专业班级________ 学号________ 姓名________ 装订线

以下练习仅供参考

第一章“概率的基本概念”复习自测题

一、单项选择题

1、设事件 ***A*** 与 ***B*** 互不相容，且 ***P***(***A***)＞0，***P***(***B***)＞0，则一定有（　　）

（A）$P(A)=1-P(B)$；　（B）$P(A|B)=P(A)$；　（C）$P(A|\overline{B})=1$；　（D）$P(\overline{A}|B)=1$。

2、设事件 ***A*** 与 ***B*** 相互独立，且 ***P***(***A***)＞0，***P***(***B***)＞0，则（　　）一定成立

（A）$P(\overline{A}|\overline{B})=1-P(A)$；　（B）$P(A|B)=0$；

（C）$P(A)=1-P(B)$；　（D）$P(A|B)=P(B)$。

3、设事件 ***A*** 与 ***B*** 满足 ***P***(***A***)＞**0**，***P***(***B***)＞**0**，下面条件（　　）成立时，事件 ***A*** 与 ***B***

一定独立

（A）$P(\overline{AB})=P(\overline{A})P(\overline{B})$；　（B）$P(\overline{A\cup B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$；

（C）$P(A|B)=P(B)$；　（D）$P(A|B)=P(\overline{A})$。

4、设事件 ***A*** 和 ***B*** 有关系 $B\subset A$，则下列等式中正确的是

（A）$P(AB)=P(A)$；　（B）$P(A\cup B)=P(A)$；

（C）$P(B|A)=P(B)$；　（D）$P(B-A)=P(B)-P(A)$。

5、设 ***A*** 与 ***B*** 是两个概率不为 **0** 的互不相容的事件，则下列结论中肯定正确的是

（A）$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容；　（B）$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容；

（C）$P(AB)=P(A)P(B)$；　（D）$P(A-B)=P(A)$。

6、设 ***A***、***B*** 为两个对立事件，且 ***P***(***A***)≠**0**，***P***(***B***) ≠**0**，则下面关系成立的是

（A）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$；　（B）$P(\overline{A}\cup\overline{B})\neq P(\overline{A})+P(\overline{B})$；

（C）$P(AB)=P(A)P(B)$；　（D）$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$。

7、对于任意两个事件 ***A*** 与 ***B***，$P(A-B)$ 等于（　　）

（A）$P(A)-P(B)$　（B）$P(A)-P(B)+P(AB)$；

（C）$P(A)-P(AB)$；　（D）$P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})$。

二、填空题

1、若 $A \supset B$，$A \supset C$，$P(A)$=**0.9**，$P(\overline{B} \cup \overline{C}) = 0.8$，则 $P(A - BC)$=_________。

2、设 $P(A)$=**0.3**，$P(B)$=**0.4**，$P(A|B)$=**0.5**，则 $P(B|A)$=_______，$P(B \mid A \cup B)$=_______。

3、一批产品，其中 **10** 件正品，**2** 件次品，任意抽取 **2** 次，每次抽 **1** 件，抽出后不再

放回，则第 **2** 次抽出的是次品的概率为_____________。

4、设在 **4** 次独立的试验中，事件 A 每次出现的概率相等，若已知事件 A 至少出现 **1** 次

的概率是 $65/81$，则 A 在 **1** 次试验中出现的概率为_________。

5、设事件 A，B 的概率分别为 $P(A) = 1/3, P(B) = 1/6$，　①若 A 与 B 相互独立，则

$P(\overline{A} \cup B) =$________；　②若 A 与 B 互不相容，则 $P(\overline{A}\,\overline{B}) =$__________。

6、有 **10** 个球，其中有 **3** 个红球和 **7** 个绿球，随机地分给 **10** 个小朋友，每人 **1** 个，则最后 **3** 个分到球的小朋友中恰有 **1** 个得到红球的概率为__________。

7、两射手彼此独立地向同一目标射击，设甲击中的概率为 **0.8**，乙击中的概率为 **0.7**，则目标被击中的概率为

___________。

三、计算题

1、某工厂生产的一批产品共 **100** 个，其中有 **5** 个次品；从这批产品中任取一半来检查，求取到的次品不多于 **1** 个的概率。

2、某城市的电话号码为六位数，且第一位为 **6** 或 **8**；求 (1) 随机抽取的一个电话号码由完全不相同的数字组成的概率； (2) 随机抽取的电话号码末位数是 **8** 的概率。

3、已知 $P(A) = P(B) = P(C) = 1/4$，$P(AB)$=**0**，$P(AC) = P(BC) = 1/16$，求 A，B，C 恰好发生一个的概率。

4、设 **10** 件产品中有 **4** 件不合格品，从中任取 **2** 件，已知所取 **2** 件中有一件是

不合格品，求另外一件也是不合格品的概率。

5、猎人在距离 **100** 米处射击一动物，击中的概率为 **0.6**；如果第一次未击中，则进行第二次射击，但由于动物逃跑而使距离变为 **150** 米；如果第二次又未击中，则进行第三次射击，这时距离变为 **200** 米；假定击中的概率与距离成反比，求猎人击中动物的概率。

6、一个工厂有一，二，三 3 个车间生产同一个产品，每个车间的产量占总产量的

45%，**35%**，**20%**，如果每个车间成品中的次品率分别为 **5%**，**4%**，**2%**，

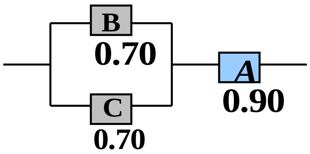
①从全厂产品中任意抽取 **1** 个产品，求取出是次品的概率；

②从全厂产品如果抽出的 **1** 个恰好是次品，求这个产品由一车间生产的概率。

7、有两箱同类零件，第一箱装 **50** 只 (其中一等品 **10** 只)，第二箱装 **30** 只(其中一等品 **18** 只)；今从两箱中任挑

一箱，然后从该箱中依次不放回地取零件两次，每次一只；已知第一次取到的是一等品，求第二次取到的也是一等品的概率。

8、右边是一个串并联电路示意图， A、B、C 都是电路中的元件，它们下方的数是它们各自独立正常工作的概率(可靠性)，求电路的可靠性。



四、证明：若 $P(B\mid\overline{A})=P(B\mid A)$，则事件 A 与 B 相互独立。

第一章复习自测题参考解答

一、单项选择题

1、（D）。 **2**、（A）。 **3**、（B）。 **4**、（B）。 **5**、（D）。 **6**、（A）。 **7**、（C）。

二、填空题

1、 **0.7** 。 **2**、 **2/3**， **0.8** 。 **3**、 **1/6** 。 **4**、 **1/3** 。

5、**13/18**； **1/2** 。 **6**、 $C_3^1C_7^2\big/C_{10}^3=21/40$ 。 **7**、**0.94** 。

三、计算题

1、**解**：$P=\dfrac{C_{95}^{50}+C_5^1C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}=\dfrac{1739}{9603}$ 。

2、**解**：令 A={抽取的电话号码由完全不相同的数字组成}，

B={抽取的电话号码末位数是 8}，则 $P(A)=\dfrac{2\times A_9^5}{2\times10^5}$， $P(B)=\dfrac{2\times10^4}{2\times10^5}$ 。

3、**解**：{A，B，C 恰好发生一个}= $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$，而

$$P(A\overline{B}\,\overline{C})=P(A-AB\cup AC)=P(A)-P(AB\cup AC)$$
$$=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC),$$

同理得 $P(\overline{A}B\overline{C})=P(B)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)$，

$P(\overline{A}\,\overline{B}C)=P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$，故

$$P(A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C)=P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-2P(AB)-2P(AC)-2P(BC)+3P(ABC),$$

因为 $ABC\subset AB,$ 故 $P(ABC)\le P(AB)$，由 $P(AB)=0$ 及 $P(ABC)\ge0$，得

$P(ABC)=0$，从而 $P(A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C)=0.5$。

4、**解**：令 A={ 2 件中有 1 件为次品}， B={另一件也为次品}，欲求 $P(B\mid A)$，

而 $P(AB)=\dfrac{C_4^2}{C_{10}^2}$，$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\dfrac{C_6^2}{C_{10}^2}$，故 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{1}{5}$。

5、解：设 A_i={猎人在第 i 个次击中动物}，　i=1,2,3，由已知得

$P(A_1)=0.6, P(A_2|\overline{A_1})=0.4, P(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2})=0.3$，所求为

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(\overline{A_3}|\overline{A_1}\,\overline{A_2})=0.832\text{。}$$

6、解：设 A={任取一件产品为次品}，B_i={任取一件产品是第 i 个车间生产的}，　i=1,2,3，

则 $A=B_1A\cup B_2A\cup B_3A$，且 B_1A, B_2A, B_3A 两两互不相容；

已知 $P(B_1)=0.45, P(B_2)=0.35, P(B_3)=0.20$，

$P(A|B_1)=0.05, P(A|B_2)=0.04, P(A|B_3)=0.02$；

① $P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)=0.0405$；

② $P(B_1|A)=\dfrac{P(B_1A)}{P(A)}=\dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\dfrac{5}{9}$。

7、解：设 A_i = {第 i 次取到一等品}，B_i = {取到第 i 号箱}，　i =1, 2,

$A_1=B_1A_1\cup B_2A_1$，且 B_1A_1, B_2A_1 两两互不相容，从而

$$P(A_1)=P(B_1)P(A_1|B_1)+P(B_2)P(A_1|B_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{50}+\frac{1}{2}\cdot\frac{18}{30}=\frac{2}{5}\text{；}$$

$A_1A_2=B_1A_1A_2\cup B_2A_1A_2$，且 $B_1A_1A_2, B_2A_1A_2$ 两两互不相容，从而

$$P(A_1A_2)=P(B_1)P(A_1A_2|B_1)+P(B_2)P(A_1A_2|B_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{A_{10}^2}{A_{50}^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{A_{18}^2}{A_{30}^2}=\frac{276}{1421}\text{；}$$

所求为 $P(A_2|A_1)=\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\dfrac{690}{1421}\approx 0.4856$

8、解：以 A、B、C 分别表示元件 A 、B、C 正常工作之事，由于各元件独立工作，故 A、B、C 相互独立，且

$P(A)=0.90, P(B)=0.70, P(C)=0.70$，

所求为 $P(AB\cup AC)=P(AB)+P(AC)-P(ABC)$

$=P(A)P(B)+P(A)P(C)-P(A)P(B)P(C)=0.819$。

四、证：$P(B|\bar{A})=\dfrac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$，$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，

代入 $P(B|\bar{A})=P(B|A)$ 得 $P(AB)=P(A)P(B)$，故 A 与 B 相互独立。

第二、三章 随机变量及其分布复习自测题

一、单项选择题

1、当常数 b=（　　）时，$p_k=\dfrac{b}{k(k+1)}\ (k=1,2,\cdots)$ 为某一离散型随机变量的概率分布

（A） 2；　（B） 1；　（C） 1/2；　（D） 3。

2、设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，且 $f(-x)=f(x)$，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则对任意实数 a，有（　　）

（A）$F(-a)=1-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$；　（B）$F(-a)=\dfrac{1}{2}-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$；

（C）$F(-a)=F(a)$；　（D）$F(-a)=2F(a)-1$。

3、设随机变量 $X\sim N(a,a^2)$，且 $Y=aX+b\sim N(0,1)$，则 a,b 应取（　　）

（A）$a=2,b=-2$；　（B）$a=-2,b=-1$；

（C）$a=1,b=-1$；　（D）$a=-1,b=1$。

4、设某一连续型随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上等于 $\sin x$，而在此区间外等于 0，则区间 $[a,b]$ 为（　　）

（A）$[0,\pi/2]$；　（B）$[0,\pi]$；　（C）$[-\pi/2,0]$；　（D）$[0,3\pi/2]$。

5、设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则随 σ 的增大，则 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$（　　）

（A）单调增加；　（B）单调减少；　（C）保持不变；　（D）增减不定。

6、设两个随机变量 X 与 Y 相互独立且同分布，$P\{X=-1\}=P\{Y=-1\}=1/2$，$P\{X=1\}=P\{Y=1\}=1/2$，则下列式子成立的是（　　）

（A）$P\{X=Y\}=1/2$；　（B）$P\{X=Y\}=1$；

（C）$P\{X+Y=0\}=1/4$；　（D）$P\{XY=1\}=1/4$。

7、设随机变量 X 与 Y 相互独立，它们的分布函数分别为 $F_X(x),F_Y(y)$，则 $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数为（　　）

（A）$F_Z(z)=F_X(z)$　　　　（B）$F_Z(z)=F_Y(z)$；

（C）$F_Z(z)=\min\{F_X(z),F_Y(z)\}$；　（D）$F_Z(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$。

二、填空题

1、设离散型随机变量 ***X*** 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0,\ x<-1,\\ a,-1\le x<1,\\ \dfrac{2}{3}-a,1\le x<2,\\ a+b,\ x\ge 2,\end{cases}$ 且 $P\{X=2\}=1/2$，

则 $a=$_____，$b=$______，***X*** 的分布为______________________________。

2、设随机变量 ***X*** 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}a-\dfrac{b}{x^2},\ x>1,\\ 0,\ \ x\le 1,\end{cases}$

则 $a=$_____，$b=$______，$P\{-1<X<2\}=$________，

X 的概率密度 $f(x)=$______________。

3、将一颗均匀骰子重复独立地掷 **10** 次，设 ***X*** 表示 3 点朝上的次数，则 ***X*** ~ __________，***X*** 的概率分布为________

_____。

4、设随机变量 ***X*** 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}4x^3,0<x<1,\\ 0,\text{其它},\end{cases}$ 则使 $P\{X>a\}=P\{X<a\}$ 成立的常数 $a=$___

___。

5、设电源电压 ***X*** 伏，$X\sim N(220, 625)$，则电源电压在 **200~240** 伏的概率为________。

6、设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其概率密度 $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\{-\dfrac{(x+3)^2}{4}\}$，则 $\mu=$____,$\sigma=$____。

7、 **(*X*, *Y*)** 的分布律为

Y \ *X*	**1**	**2**	**3**
1	**1/6**	**1/9**	**1/18**
2	**1/3**	***a***	***b***

则 ***X*** 的分布律为________________________，***Y*** 的分布律为________________________；

$P\{X=Y\}=$________________；

a =_____ , b =_____ 时， X 与 Y 相互独立。

8、设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X、Y 的分布律分别为

X	-3	-2	-1
P	1/4	1/4	1/2

Y	1	2	3
P	2/5	1/5	2/5

则 X 与 Y 的联合分布律为______________________________；

$Z=X+Y$ 的分布律为______________________________ 。

9、设 D 由 $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e^2$ 围成， (X, Y) 在 D 上服从均匀分布，

则 (X, Y) 的概率密度为________________ 。

10、若 X 与 Y 独立， 而 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则 $X+Y\sim$ _____________ 。

11、X 与 Y 相互独立，且 $X \sim U(-1, 1), Y \sim e(1)$即 $f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0, \\ 0, & y \le 0, \end{cases}$，

则 X 与 Y 的联合概率密度 $f(x,y)=$______________________，

$Z=\begin{cases} 1, & X>Y, \\ 0, & X \le Y, \end{cases}$ 的分布为________________________ 。

三、计算题

1、3 个不同的球，随机地投入编号为 1，2，3，4 的四个盒子中，X 表示有球盒子的最小号码，求 X 的分布律。

2、某产品表面的疵点数服从泊松分布，规定没有疵点为特等品， 1 个为一等品， 2 至 4 个为二等品，4 个以上为废品，经检测特等品的概率为 0.4493，则试求产品的废品率。

3、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} a/x, & 1 \le x \le e, \\ 0, & 其它. \end{cases}$

试求 (1) a； (2) $P\{2<X<4\}$; (3) X 的分布函数 $F(x)$。

4、设某人造卫星偏离预定轨道的距离（米）服从 $\mu=0, \sigma=4$ 的正态分布，观测者把偏离值超过 10 米时称作“失败”，使求 5 次独立观测中至少有 2 次“失败”的概率。

5、设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} x^2+axy, & 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 2, \\ 0, & 其它, \end{cases}$

试求(1) a ；（2）$P\{X+Y \ge 1\}$ ； (3) X 与 Y 是否相互独立?

6、设随机变量 $X \sim e(2)$ 即 $f_X(x)=\begin{cases} 2e^{-x}, & x>0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$ 证明：$Y=1-e^{-2X} \sim U(0,\ 1)$。

随机变量及其分布复习自测题

一、单项选择题

1、（B）。 2、（B）。 3、（C）。 4、（A）。 5、（C）。 6、（A）。 7、（D）。

二、填空题

1、$a=$ 1/6，$b=$ 5/6，X 的分布为

X	−1	1	2
P	1/6	2/6	1/2

2、$a=$ 1，$b=$ 1，$P\{-1<X<2\}=$ 3/4，X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^3}, & x>1, \\ 0, & x \le 1. \end{cases}$

3、$X \sim B(10, 1/6)$，X 的概率分布为 $P\{X=k\}=C_{10}^{k}(\frac{1}{6})^{k}(\frac{5}{6})^{10-k}, k=0,1,\cdots,10.$

4、$a=1/\sqrt[4]{2}$ 。

5、$\Phi(0.8)-\Phi(-0.8)=2\Phi(0.8)-1=0.5762$ 。

6、$\mu=-3$，$\sigma=\sqrt{2}$。

7、 X 的分布律为

X	1	2	3
P	1/2	a+1/9	b+1/18

Y 的分布律为

Y	1	2
P	1/3	a+b+1/3

$P\{X=Y\}=a+\frac{1}{6}$ ； $a=$ 2/9 , $b=$ 1/9 时， X 与 Y 相互独立。

8、X 与 Y 的联合分布律为

Y \ X	−3	−2	−1
1	1/10	1/10	1/5
2	1/20	1/20	1/10

3	1/10	1/10	1/5

$Z=X+Y$ 的分布律为

Z	-2	-1	0	1	2
P	1/10	3/20	7/20	1/5	1/5

9、$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 1\le x\le \mathrm{e}^2,\ 0\le y\le \dfrac{1}{x}, \\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

10、$N(\mu_1+\mu_2,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2)$。

11、$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-y}, & -1<x<1,\ y>0, \\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ Z 的分布为

Z	0	1
P	1－1/2e	1/2e

三、计算题

1、解: X 的分布律为

X	1	2	3	4
P	$(4^3-3^3)/4^3$	$(3^3-2^3)/4^3$	$(2^3-1)/4^3$	$1/4^3$

2、解: 令疵点数为 X，$X\sim\pi(\lambda)$，分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\ k=0,1,\cdots,$

已知 $P\{X=0\}=0.4493$，故 $\mathrm{e}^{-\lambda}=0.4493$，$\lambda=-\ln 0.4493\approx 0.8$，

所求为 $P\{X>4\}=1-\sum_{k=0}^{4}P\{X=k\}=1-0.4493\sum_{k=0}^{4}\dfrac{0.8^k}{k!}\approx 0.0091$

3、解: (1) 由归一性得 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{a}{x}\mathrm{d}x=a\ln x\big|_1^{\mathrm{e}}=a\overset{\text{令}}{=}1,$

(2) $P\{2<X<4\}=\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_2^{\mathrm{e}}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=1-\ln 2$

(3) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & x<1, \\ \int_1^x\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x, & 1\le x\le \mathrm{e}, \\ 1, & x>\mathrm{e}.\end{cases}$

4、解: 设某人造卫星偏离预定轨道的距离为 X，5 次独立观测中“失败”的次数为 Y，

则 $X \sim N(0,4^2)$，每次观测“失败”的概率为 $P\{|X|>10\}=1-P\{\left|\frac{X}{4}\right|\le 2.5\}$

$=2-2\Phi(2.5)=0.0124$，由此得 $Y \sim B(5,0.0124)$，所求概率为

$$P\{Y\ge 2\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}=1-(0.9876)^5-C_5^1(0.0124)(0.9876)^4\approx 0.0015$$

5、解: (1) 由归一性得 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^2(x^2+kxy)\mathrm{d}y=\int_0^1(2x^2+2kx)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}+k\overset{令}{=}1,\text{ 得 }k=\frac{1}{3}$$

(2) $$P\{X+Y\ge 1\}=\iint_{x+y\ge 1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^2(x^2+\frac{xy}{3})\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1(\frac{x}{2}+\frac{4x^2}{3}+\frac{5x^3}{6})\mathrm{d}x=\frac{65}{72}$$

(3) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^2(x^2+\frac{xy}{3})\mathrm{d}y=2x^2+\frac{2x}{3},\ 0\le x\le 1,\\ 0,\ 其它.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^1(x^2+\frac{xy}{3})\mathrm{d}x=\frac{1}{3}+\frac{y}{6},\ 0\le y\le 2,\\ 0,\ 其它.\end{cases}$$

在 $f(x,y)$ 的非零区域内 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立。

6、证明: Y 的分布函数 $F_Y(y)=P\{1-\mathrm{e}^{-2X}\le y\}=P\{\mathrm{e}^{-2X}\ge 1-y\}$

$$=\begin{cases}1,\ y\ge 1,\\ P\{X\le -\frac{\ln(1-y)}{2}\}=F_X[-\frac{\ln(1-y)}{2}],\ y<1.\end{cases}$$

$y<1$ 时，$f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X[-\frac{\ln(1-y)}{2}]\cdot\frac{1}{2(1-y)}=\begin{cases}1,\ 0<y<1,\\ 0,\ y\le 0.\end{cases}$

故 $f_Y(y)=\begin{cases}1,\ 0<y<1,\\ 0,\ 其它.\end{cases}$ 所以 $Y=1-\mathrm{e}^{-2X}\sim U(0,\ 1)$

第四、五章 随机变量的数字特征与
中心极限定理复习自测题

一、单项选择题

1、设 X 为随机变量，x_0 是任意实数，则（　　）

（A）$E[(X-x_0)^2]=E(X^2)-x_0^2$；　　（B）$E[(X-x_0)^2]=E[(X-E(X))^2]$；

（C）$E[(X-x_0)^2]<E[(X-E(X))^2]$；　（D）$E[(X-x_0)^2]\geq E[(X-E(X))^2]$。

2、设 $X\sim B(n,p)$，且 $E(X)=2.4,\ D(X)=1.44$，则（　　）

（A）$n=4,p=0.6$；（B）$n=6,p=0.4$；（C）$n=8,p=0.3$；（D）$n=24,p=0.1$。

3、设随机变量 X 与 Y 满足 $E(XY)=E(X)E(Y)$，则（　　）

（A）$D(XY)=D(X)D(Y)$；　　（B）$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$；

（C）X 与 Y 独立；　　（D）X 与 Y 不独立。

4、设随机变量 X 与 Y 独立同分布，记 $U=X+Y,V=X-Y$，则 U 与 V 必（　　）

（A）独立；　（B）不独立；　（C）不相关；　（D）相关系数不为零。

5、设 X 的概率密度 $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\exp\{-\dfrac{(x+1)^2}{8}\}$，则 $E(2X^2-1)=$（　　）

（A）1；　（B）6；　（C）4；　（D）9。

6、设随机变量 X 的期望及方差都存在，则 $P\{|X-E(X)|>2\sqrt{D(X)}\}\leq$（　　）

（A）$D(X)$；　（B）$2\sqrt{D(X)}$；　（C）$4D(X)$；　（D）$1/4$。

二、填空题

1、设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，且都服从 $N(\mu,\sigma^2)$，而 $Y=(X_1+X_2+X_3)/3$，

则 $Y\sim$ ________________，$1-2Y\sim$ ____________________。

2、设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $E[(X-1)(X-2)]=1$，则 $\lambda=$ _____。

3、设 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim U(0,2),Y\sim U(2,4)$，则 $E(XY)=$ ___,$D(X-Y)=$ ___。

4、设 X 服从均值为 $1/2$ 的指数分布，则 $P\{X>\sqrt{D(X)}\}=$ ___________。

5、设 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0.9$，若 $Z=X-0.4$，则 Y 与 Z 的相关系数为_____。

6、设 $E(X)=E(Y)=0, E(X^2)=E(Y^2)=2$，$\rho_{XY}=0.5$，则 $E[(X+Y)^2]=$______。

7、设随机变量 $X \sim U(-1,2)$，$Y=\begin{cases}1, X>0,\\ 0, X=0,\\ -1, X<0,\end{cases}$ 则 $D(Y)=$__________。

8、 (X, Y) 的分布律为

Y \ X	0	1	2
−1	1/10	1/20	7/20
2	3/10	1/10	1/10

则 $E(X)=$_______，$E(Y)=$_______，$E(XY)=$_________。

9、设 $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，且都服从参数为 λ 的泊松分布，

那么，对任意实数 x 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}<x\right\}=$ _________。

三、计算及证明题

1、某保险公司规定：如一年中顾客的投保事件 A 发生，则赔 a 元；经统计一年中 A

发生的概率为 p，若公司期望得到收益的为 $a/10$，则要求顾客交多少保险费?

2、设 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}ax, & 0<x<2,\\ bx+c, & 2\le x<4,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

且 $E(X)=2, P\{1<X<3\}=3/4$, 求（1） a、b、c （2） $E(\mathrm{e}^X)$。

3、设 (X,Y) 在以 $(0,1),(1,0),(1,1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布，试求 $D(X+Y)$。

4、设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$ 试求 ρ_{XY}。

5、某网站的电子邮件系统有 1000 个用户，在同一时刻每一邮箱的使用率为 0.05，

试求在同一时刻有 40~60 个邮箱被使用的概率(利用中心极限定理)。

6、一包装工平均每 3 分钟完成一件包装，假设他完成一件包装所用的时间服从指数

分布，试求他完成 100 件包装需要 5 到 6 小时的概率(利用中心极限定理)。

7、设 X 与 Y 相互独立，且具有有限的方差，试证明

$$D(XY)=D(X)D(Y)+[E(X)]^2D(Y)+[E(Y)]^2D(X)$$

随机变量的数字特征与中心极限定理复习自测题解答

一、单项选择题

1、（D）。 **2**、（B）。 **3**、（B）。 **4**、（C）。 **5**、（D）。 **6**、（D）。

二、填空题

1、$\underline{N(\mu,\sigma^2/3)}$ ， $\underline{N(1-2\mu,4\sigma^2/3)}$ 。 2、__1__。 3、__3__， __2/3__。

4、$\underline{\int_{1/2}^{+\infty}2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-1}}$。 5、__0.9__。 6、__6__。 7、$\underline{E(Y^2)-[E(Y)]^2=1-(1/3)^2=8/9}$。

8、__21/20__， __1/2__， __－3/20__ 。 9、 __Φ(*x*)__ 。

三、计算及证明题

1、**解**：设保险费为 x 元，收益 Y 元，则 $Y=\begin{cases} x, & A\text{发生},\\ x-a, & A\text{不发生},\end{cases}$ Y 的分布律为

Y	*x*	*x-a*
P	*1-p*	*p*

故 $E(Y)=x-ap\overset{\text{令}}{=}\dfrac{a}{10}$，求得 $x=ap+\dfrac{a}{10}$。

2、**解**：（1）由归一性得 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 ax\,\mathrm{d}x+\int_2^4(bx+c)\mathrm{d}x=2a+6b+2c\overset{\text{令}}{=}1$；

而 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 x\cdot ax\,\mathrm{d}x+\int_2^4 x(bx+c)\mathrm{d}x=\dfrac{8a}{3}+\dfrac{56b}{3}+6c\overset{\text{令}}{=}2$；

$P\{1<X<3\}=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 ax\mathrm{d}x+\int_2^3(bx+c)\mathrm{d}x=\dfrac{3a}{2}+\dfrac{5b}{2}+c\overset{\text{令}}{=}\dfrac{3}{4}$；

解得 $a=\dfrac{1}{4},\ b=-\dfrac{1}{4},\ c=1$

（2）$E(\mathrm{e}^X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\mathrm{e}^x\cdot\dfrac{x}{4}\mathrm{d}x+\int_2^4\mathrm{e}^x(1-\dfrac{x}{4})\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^4-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2+\dfrac{1}{4}$。

3、**解**：(X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2, & 0\le x\le 1,\ \ 1-x\le y\le 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^1(x+y)2\mathrm{d}y=\int_0^1(x^2+2x)\mathrm{d}x=\frac{4}{3},$$

$$E[(X+Y)^2]==\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 (x+y)^2 2dy=\int_0^1 \frac{2}{3}[(x+1)^3-1]dx=\frac{11}{6},$$

$$D(X+Y)=E[(X+Y)^2]-[E(X+Y)]^2=\frac{1}{18}。$$

4、解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy \ =\int_0^1 dx\int_0^1 x(x+y)dy=7/12$，

$E(X^2)=\int_0^1 dx\int_0^1 x^2(x+y)dy=5/12$，$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=11/144$；

由对称性得 $E(Y)=\frac{7}{12},\ D(Y)=\frac{11}{144}$；而 $E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^1 xy(x+y)dy=\frac{1}{3}$，

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{1}{144}$，$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=-\frac{1}{11}$。

5、解：设 X 为同一时刻被使用的邮箱数，则 $X\sim B(1000,0.05)$，

由 De Moivre-Laplace 中心极限定理得 $\frac{X-50}{\sqrt{47.5}}$ 近似服从 $N(0,1)$，

所求概率为 $P\{40\le X\le 60\}=P\{\frac{-10}{\sqrt{47.5}}\le\frac{X-50}{\sqrt{47.5}}\le\frac{10}{\sqrt{47.5}}\}\approx 2\Phi(\frac{10}{\sqrt{47.5}})-1$

$\approx 2\Phi(1.45)-1=0.853$。

6、解：设 Y 为该包装工完成 100 件包装需要的时间（单位：分）， X_i 为该包装工包装第 i 件所用时间（单位：分）(i=1,2,⋯,100)，则 $X_1,\cdots,X_{100}$ 独立同分布，$X_i\sim e(1/3)$，

故 $E(X_i)=3\ ,D(X_i)=9,\ E(Y)=300\ ,D(Y)=900,$

由中心极限定理得 $\frac{Y-300}{30}$ 近似服从 $N(0,1)$，

所求概率为 $P\{300\le Y\le 360\}=P\{0\le\frac{Y-300}{30}\le 2\}\approx\Phi(2)-\Phi(0)=0.4772$。

7、证：左式化简并结合 X 与 Y 相互独立得，

左式 $=\{D(X)+[E(X)]^2\}D(Y)+[E(Y)]^2D(X)=E(X^2)D(Y)+[E(Y)]^2D(X)$

$=E(X^2)\{E(Y^2)-[E(Y)]^2\}+[E(Y)]^2\{E(X^2)-[E(X)]^2\}$

$=E(X^2)E(Y^2)-[E(X)E(Y)]^2=E[(XY)^2]-[E(XY)]^2=D(XY)$。