

第0章 绪论

0.1 工程力学的任务与内容

- 工程力学的研究对象：各种工程结构的力学模型在力作用下表现出来的行为与结果
- 打桩时，桩杆在锤击力和地下阻力之间的作用



- 球员踢球时足球的运动
- 粉笔在受到拉力作用后被拉断
- 房梁受到楼板作用而发生弯曲



- 两个方面的行为与结果：
- 1. 结构受到力作用后所表现的整体的运动与平衡效应，称为力对物体的外效应

外效应可能使物体发生整体运动（平衡）

足球在受到球员脚踢之后，飞出去的过程，就是外效应的实例

- 2. 结构受到力作用后所产生的变形以及由变形而引起的内部应力、应变等力学量变化，称为力对物体的内效应

内效应可能使物体破坏或失效

足球在球员脚接触的时间内，会发生变形（压缩、恢复两个阶段）



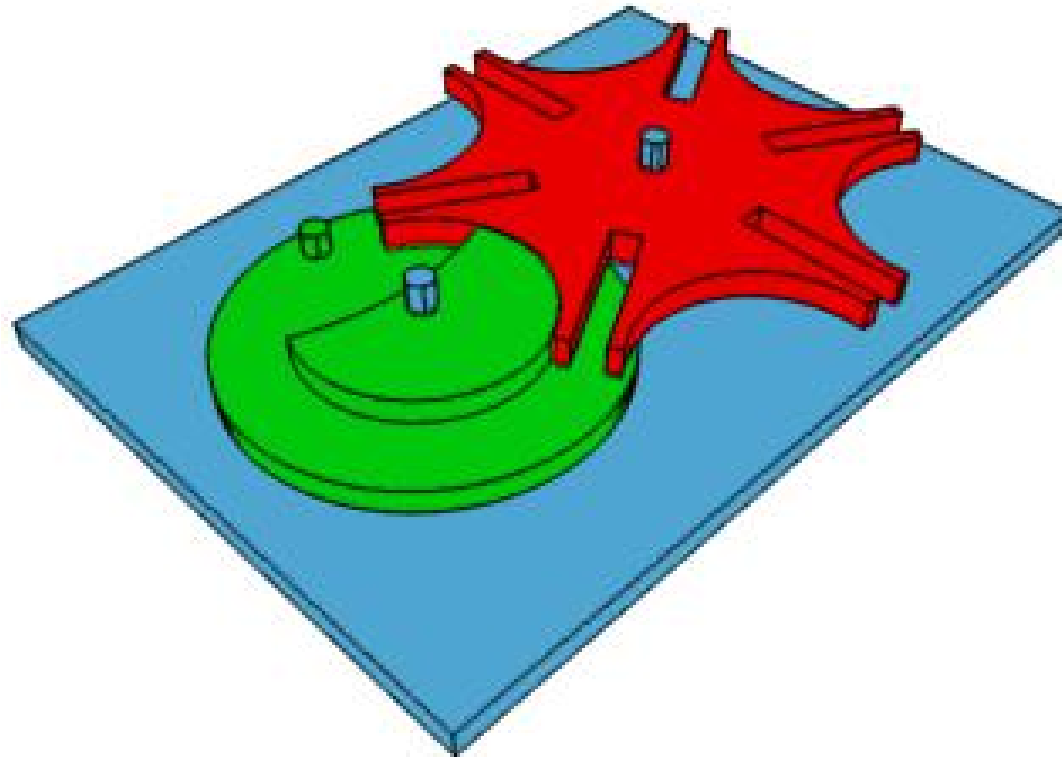
- 定义：工程力学是研究物体在力作用下所产生的效应（外效应和内效应）的一般规律的学科
- 实际工程问题中，力的内效应和外效应是联在一起的（称为耦合），使得工程力学问题变得复杂
- 刚体：从实际固体中抽象出来的力学模型，即认为在外力作用下不发生变形的物体
- 刚体是一个理想的物体“模型”，在实际中并不真正存在

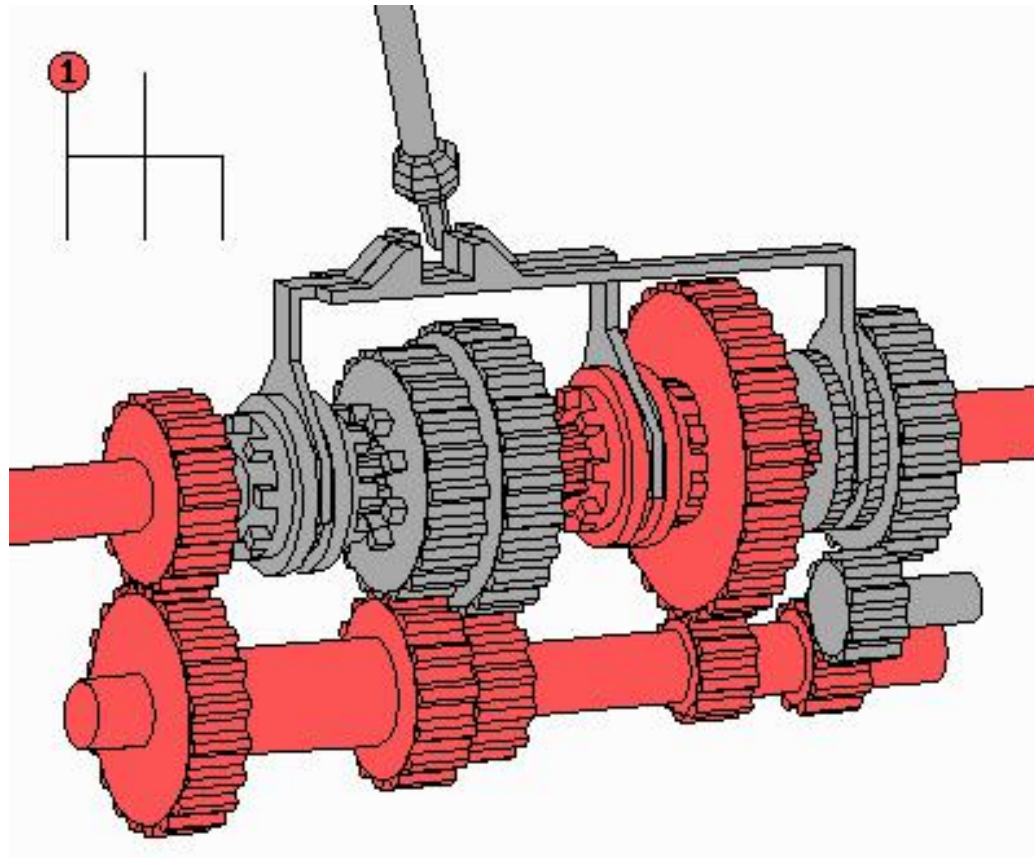
- 利用刚体概念，可以实现力的效应的解耦
- 工程力学的两个基本模块：
 - 1. 仅考虑物体在力作用下的外效应，而暂时忽略其内效应—刚体（理论）力学模块
 - 2. 考虑物体在力作用下的内效应，而暂时忽略其外效应—变形体（材料）力学模块

- 刚体力学模块
- 研究物体（刚体）的机械运动及其规律
- 包含3部分：
 1. 静力学：研究刚体平衡时刚体上所受到的力（主动力和约束力）之间所需满足的关系（平衡方程）
- 静力学的平衡方程可以解决结构内部之间、结构与外界的约束力



- 运动学：从数学角度研究刚体运动时所满足的几何规律
- 运动学可以解决有关机械运动的问题，如齿轮的传动、各种机构的运动等
- 动力学：在静力学和运动学的基础上，研究刚体所受到的力与运动之间的关系
- 静力学研究所涉及的物体处于平衡状态，而工程实际中绝大多数的物体都是处于运动之中的，需要采用动力学方法研究其运动与受到的力之间的关系





变形体模块

- 变形体（材料力学）模块，主要研究物体受力作用下的内效应
- 涉及到物体受到外界力（外力）作用，而产生的物体变形，以及由此变形引起的内力、应力、应变等
- 物体的变形、应力、应变等都将导致物体不能安全、正常地工作

安全工作条件：

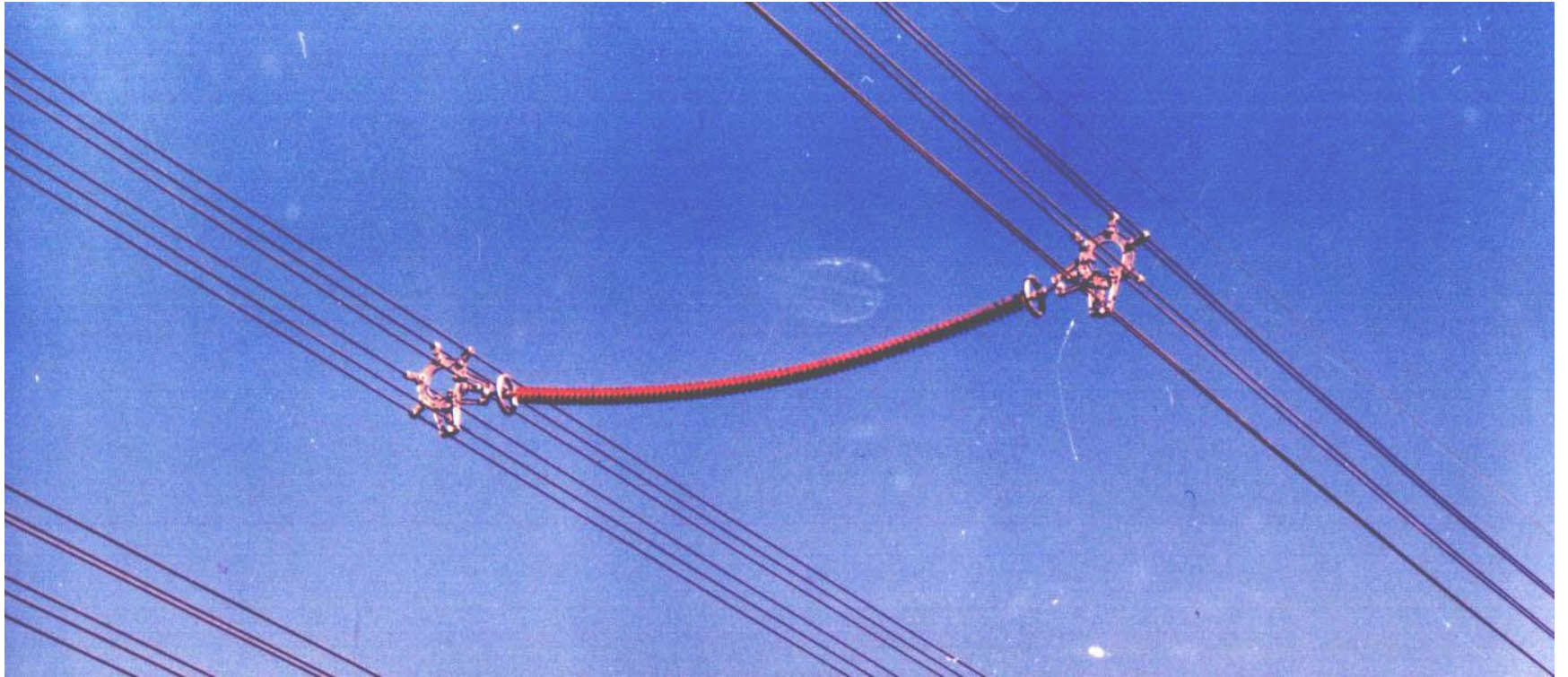
- 强度—构件具有足够的抵抗破坏的能力，即结构在工作时不发生断裂、不可恢复的变形等破坏、失效形式
- 强度保证了构件工作的基本安全
- 一些构件受力并达到一定程度后，构件将发生断裂，称为断裂破坏
- 另外一些构件在受力达到一定程度后，将产生某种变形，而这种变形将永久地存在，不会随着外力的消失而消失，称为塑性失效
- 构件的强度要求构件不能发生断裂破坏，也不能产生塑性失效

传动轴断裂

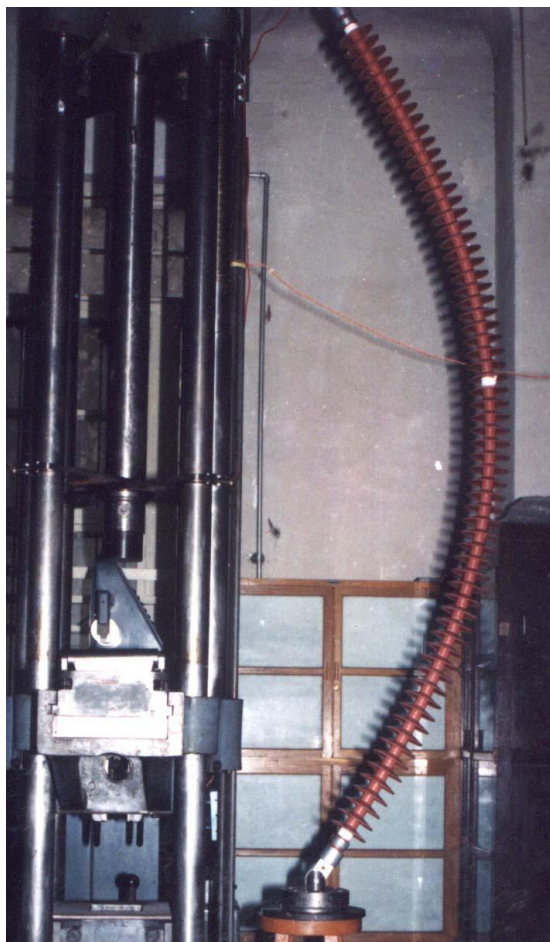


减速器行星架断裂

- 刚度—构件具有的受到载荷作用后不发生过大的弹性变形的能力
- 构件在受到外力作用后都将发生一定的变形，这种变形将随着载荷的消失而消失，称为弹性变形
- 工程结构一般都允许结构发生弹性变形，但对弹性变形有严格的限制，不能超过一定的限额，否则将造成结构工作状态的恶化、联接障碍等



- 稳定性—构件具有足够的保持原有平衡形式的能力
- 受压构件在压力作用下，能够从某一平衡位置偏移到另外的平衡位置，从而带来稳定性问题
- 工程中大量存在的受压构件，其稳定性是安全工作的必要保证
- 千斤顶、建筑工地的脚手架等都是压杆存在的实例，也是稳定性问题研究的重点对象

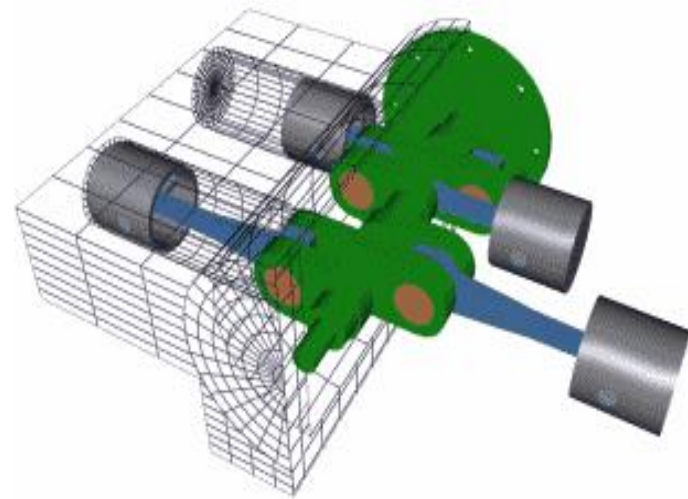


清华大学范钦珊教授在进行结构稳定性试验

工程力学研究

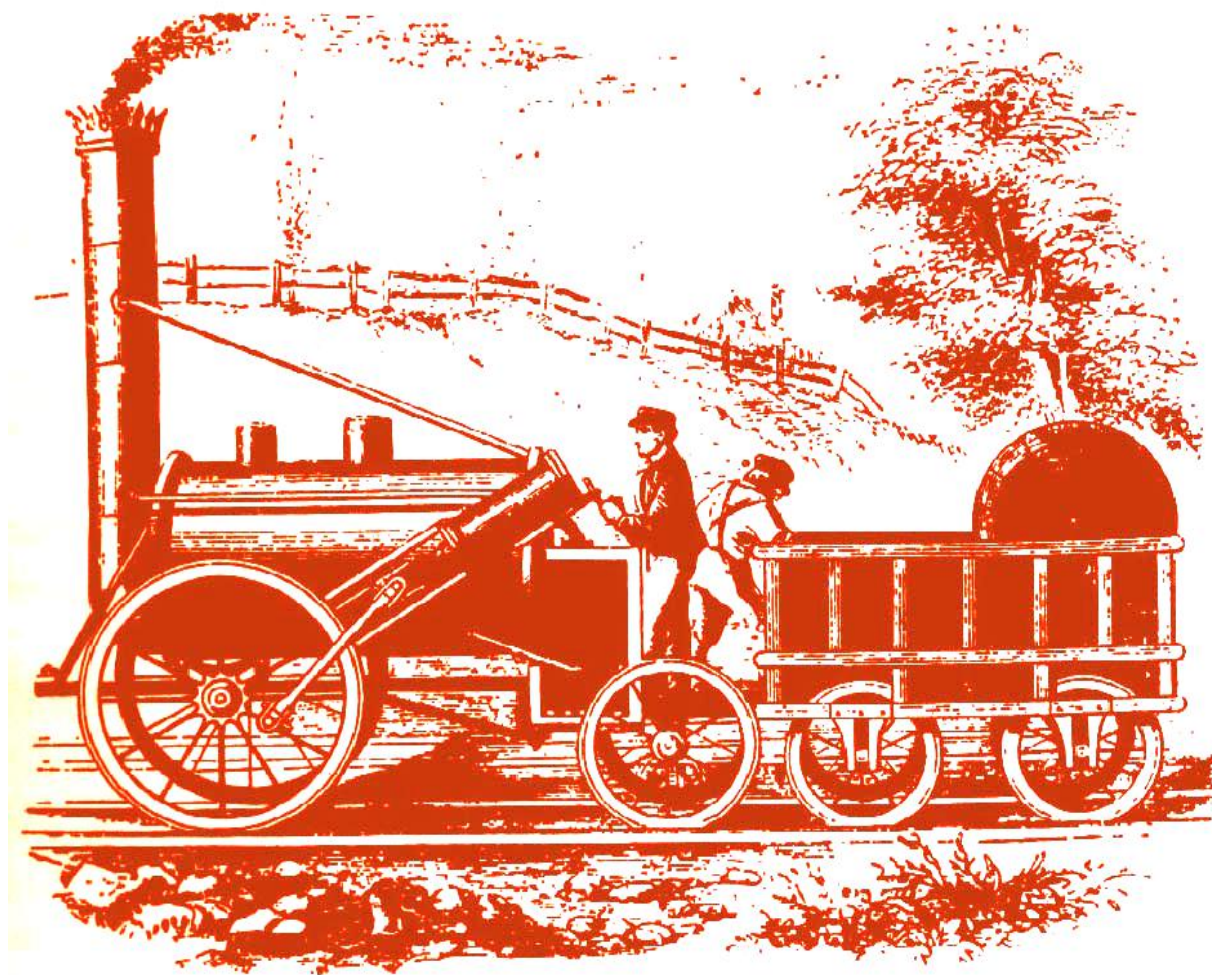
- 工程力学主要解决工程中的机构部件的力学计算问题，为工程设计提供计算方法和理论依据
- 工程力学的计算，贯穿于整个设计、分析过程
- 需要综合应用刚体力学、变形体力学等工程力学的诸多模块

- 设计曲柄-连杆传动系统的工程力学问题：
- 1. 分析系统设计的传动要求和条件，如位移、速度、加速度等的大小、变化，属于运动学
- 2. 对曲柄、连杆的连接方式进行分析，属于静力学范畴
- 3. 结合运动学要求和工作原动力，分析计算连杆等构件的内力及变化，属于动力学范畴
- 4. 根据动力学结果，找出连杆的最大内力，根据连杆的材料，在强度、刚度要求下，设计连杆的截面几何尺寸，属于变形体力学范畴
- 5. 如果考虑连杆的连续周期运行，则分析其疲劳强度，属于动变形体力学模块



0.2 工程力学的应用

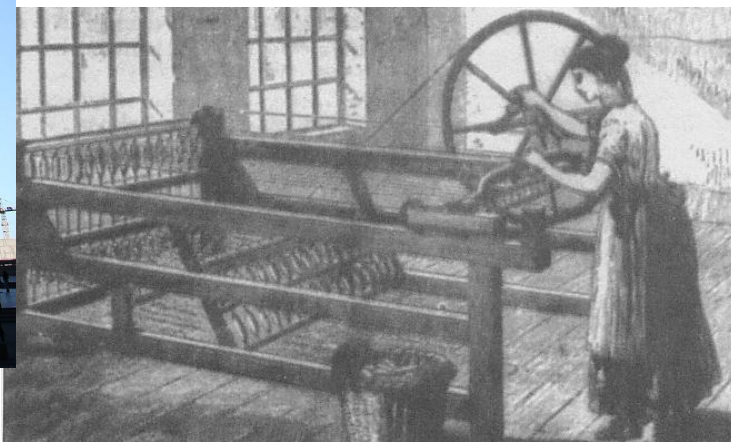
- 工程力学与工程密切相关
- 20世纪以前，推动近代科学技术与社会进步的蒸汽机、内燃机、铁路、桥梁、船舶、兵器等，都是在力学知识的累积、应用和完善的基础上逐渐形成和发展起来的。





科隆大教堂

珍妮纺织机



中国古建筑



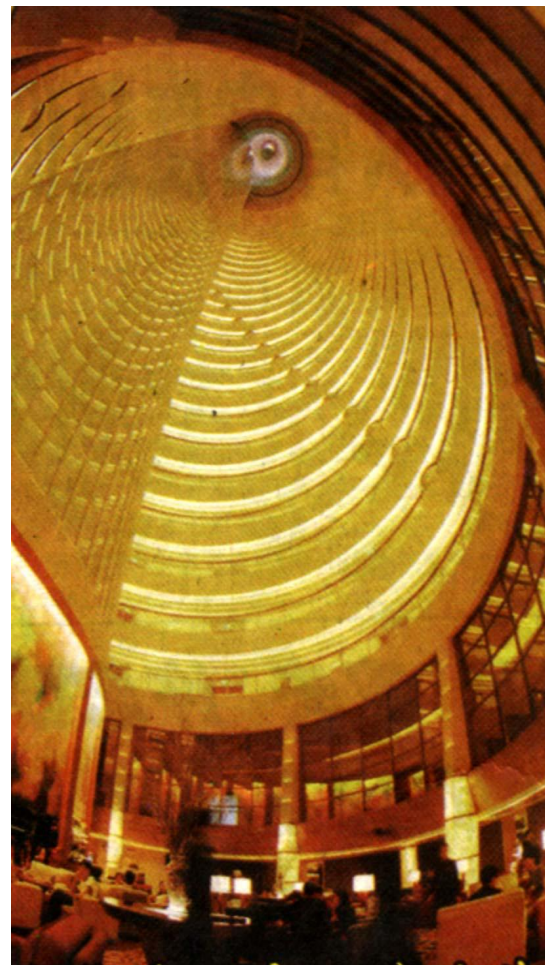
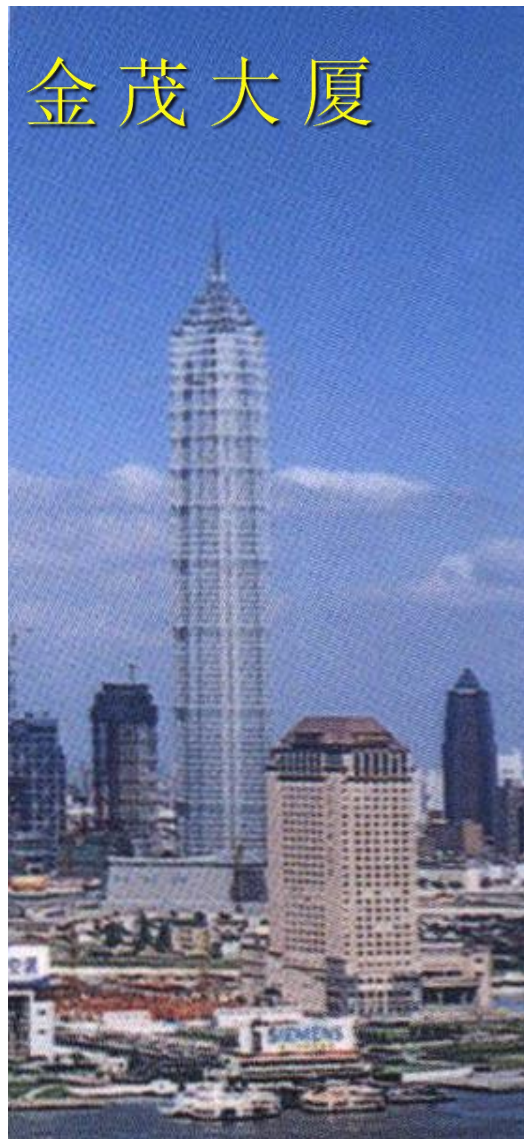
20世纪产生的诸多高新技术，如高层建筑、大跨度悬索桥、海洋平台、精密仪器、航空航天器、机器人、高速列车以及大型水利工程等许多重要工程更是在工程力学指导下得以实现，并不断发展完善的。

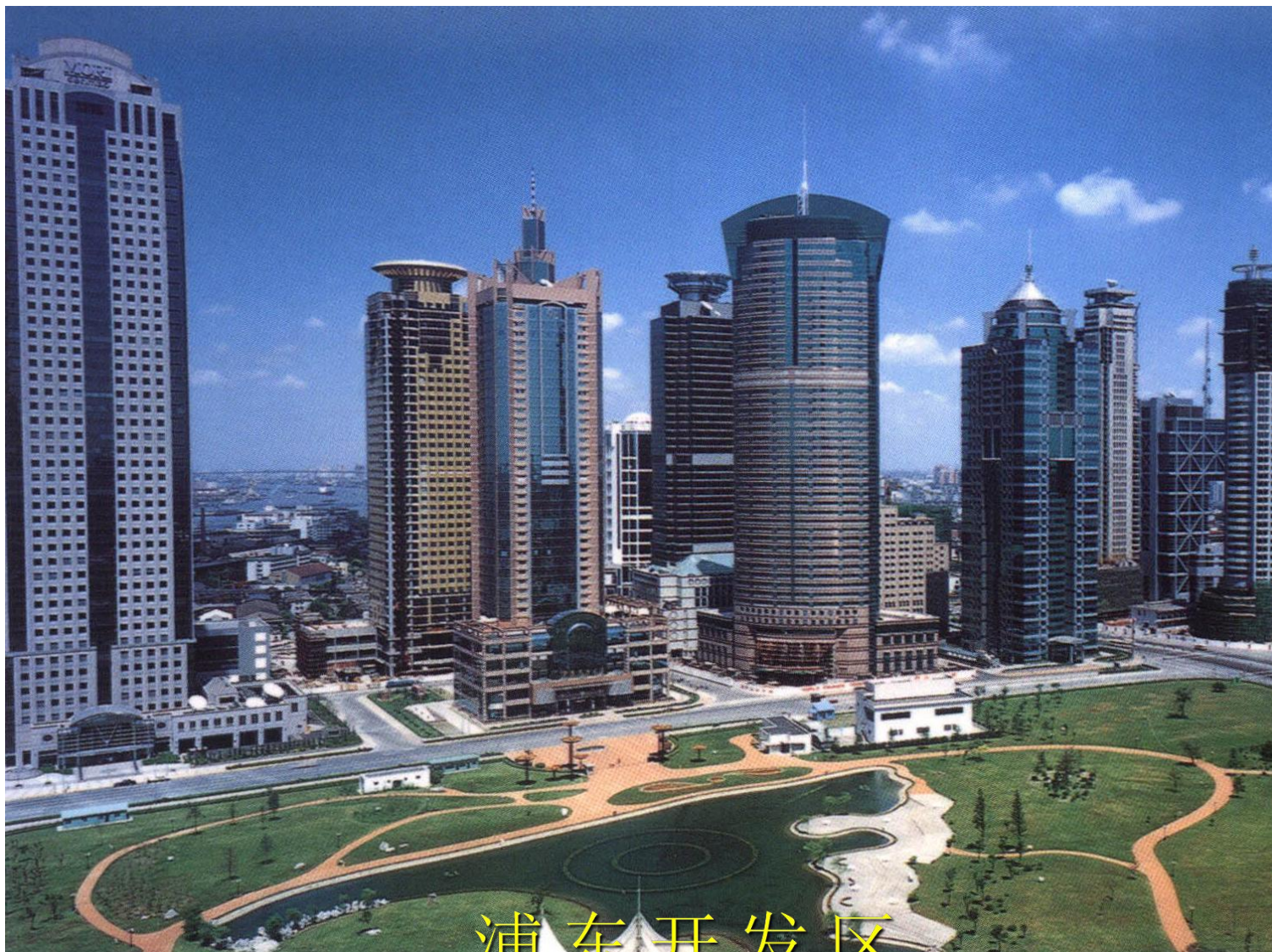


浦江两岸

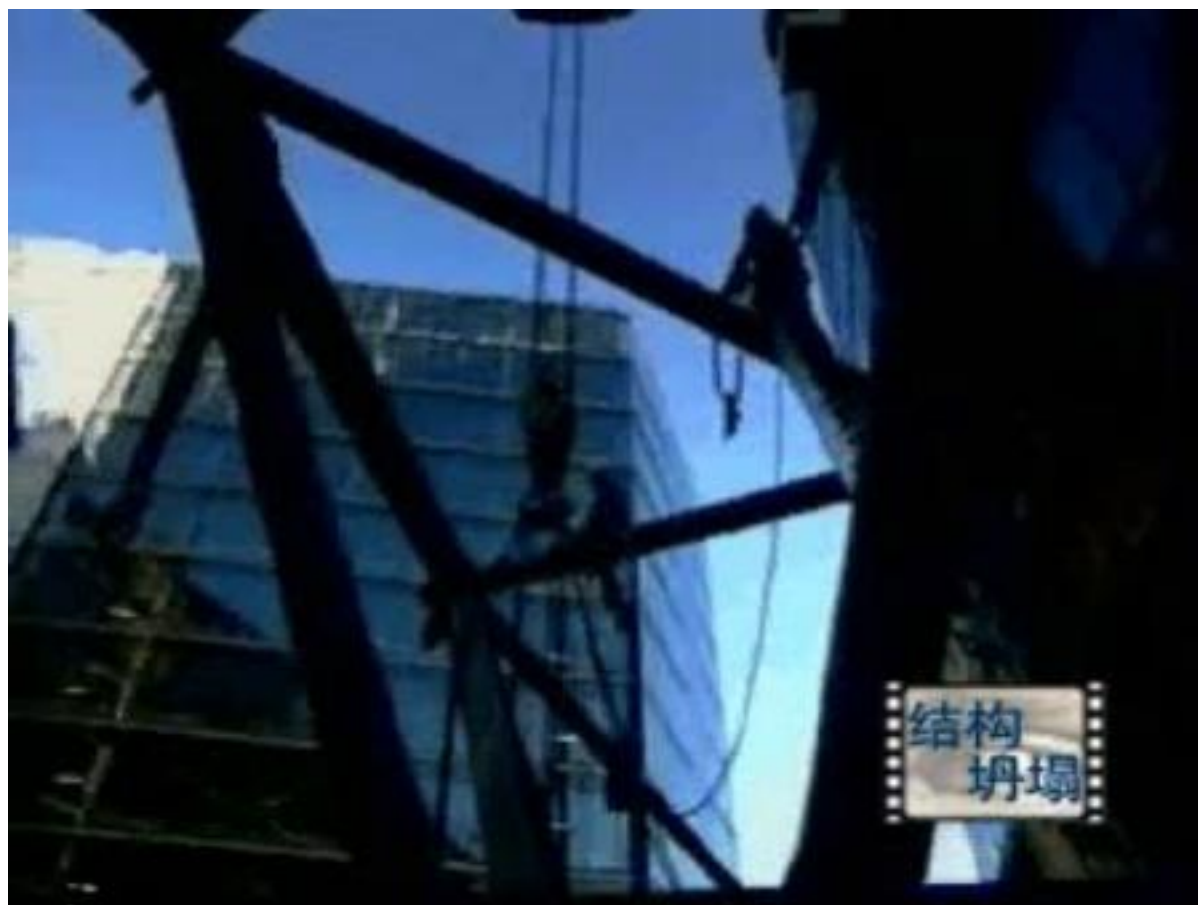
金茂大厦

楼 高
420.5m
共 88 层





浦东开发区





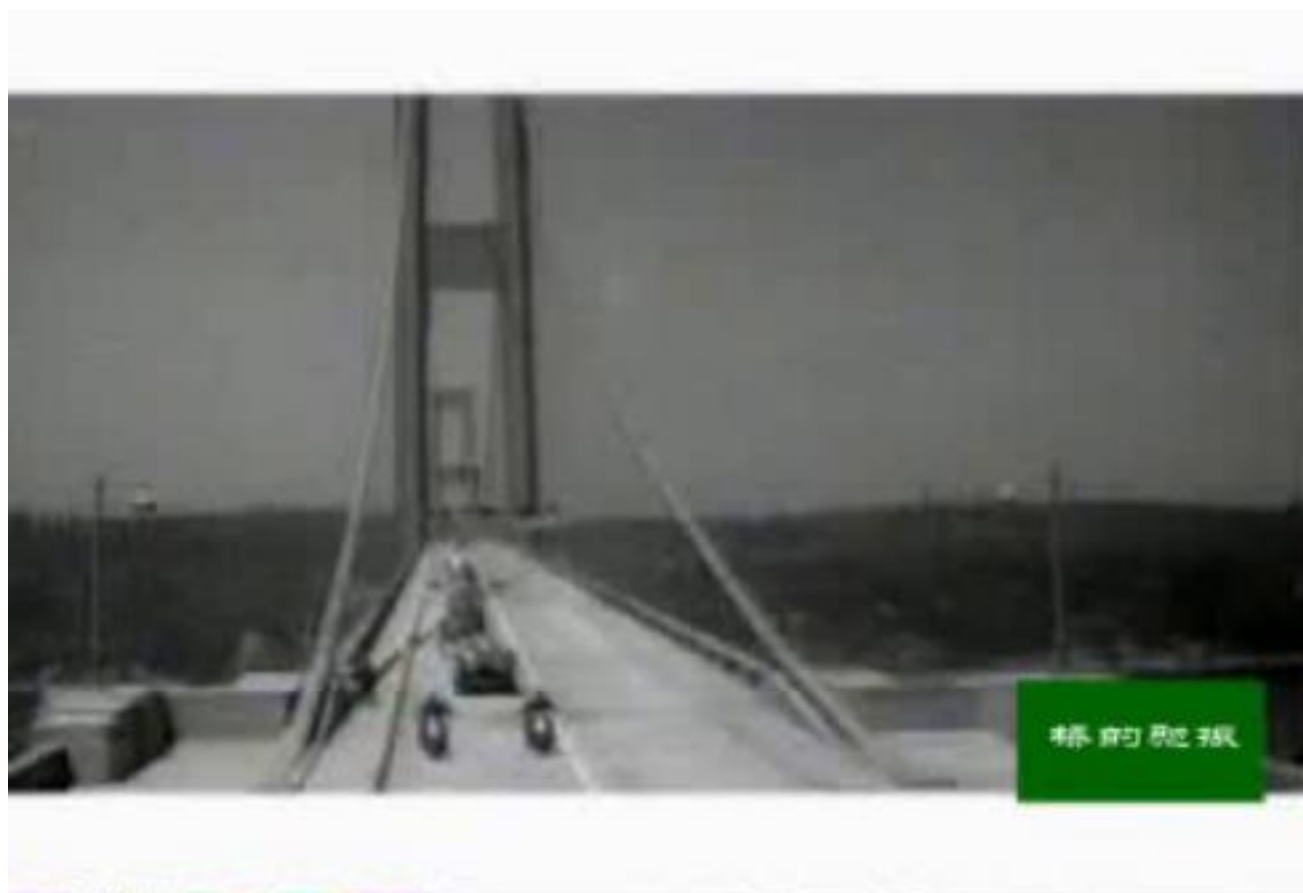
缆索与立柱



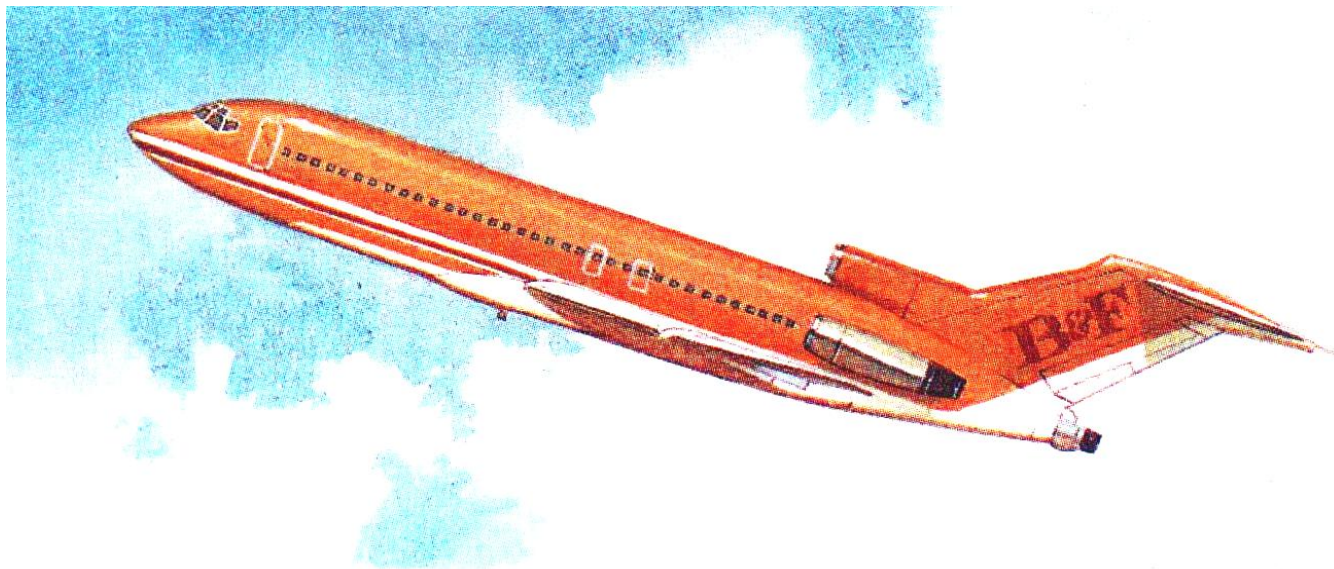
桥墩

桥面结构



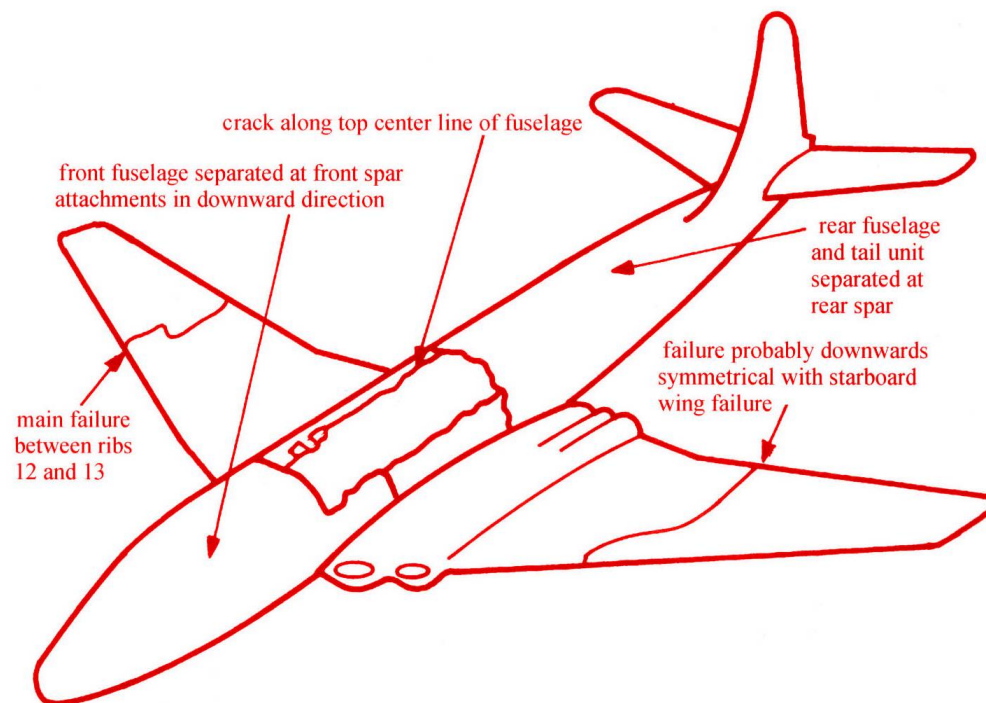


民用航空飞机





疲劳引起的破坏



惊心动魄三小时

——东方航空公司 2173 飞机成功迫降纪实

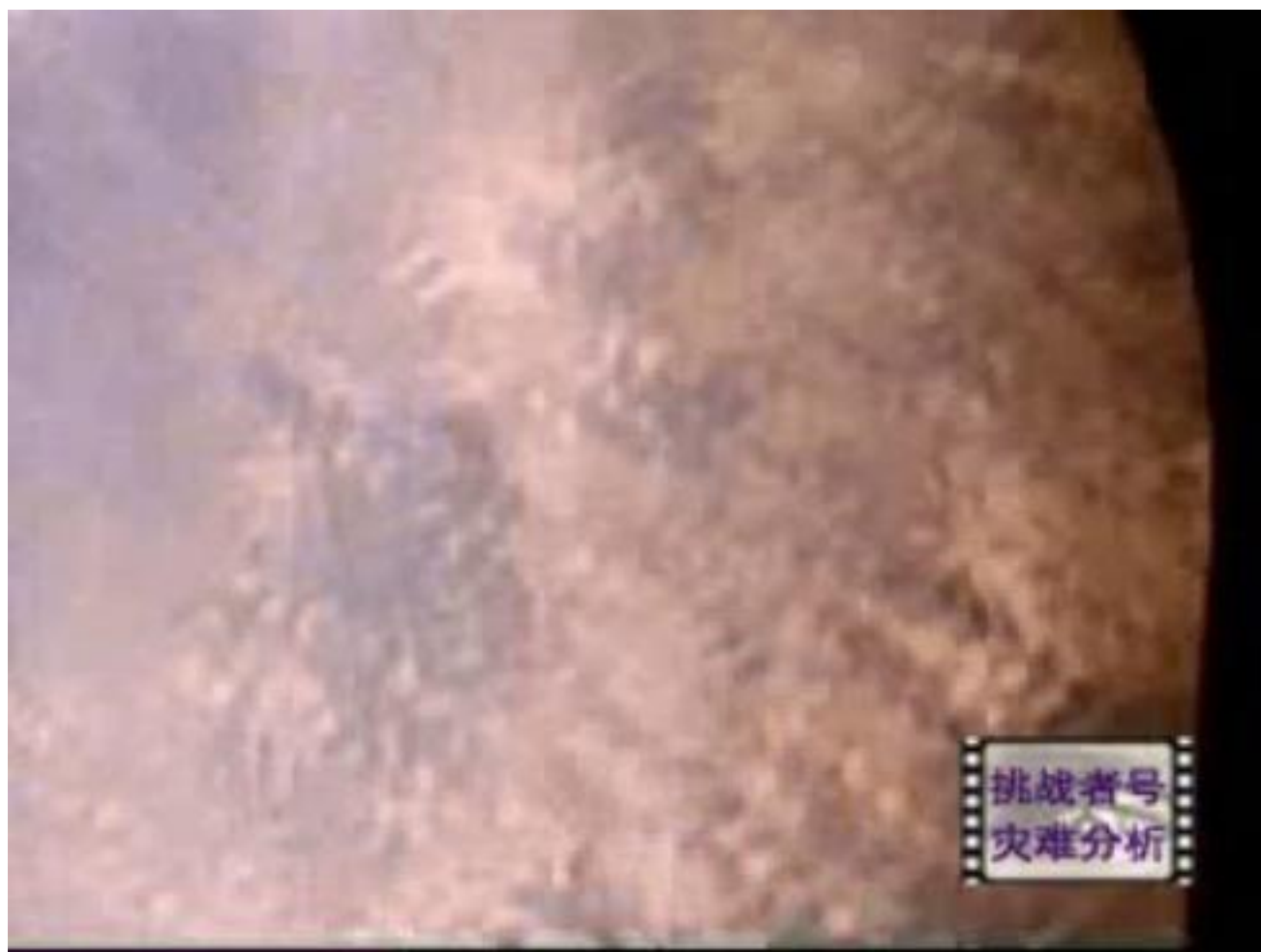
Soul-Stirring 3 hour—Report on the Successful Forced

Landing of China Eastern Flight MU 2173

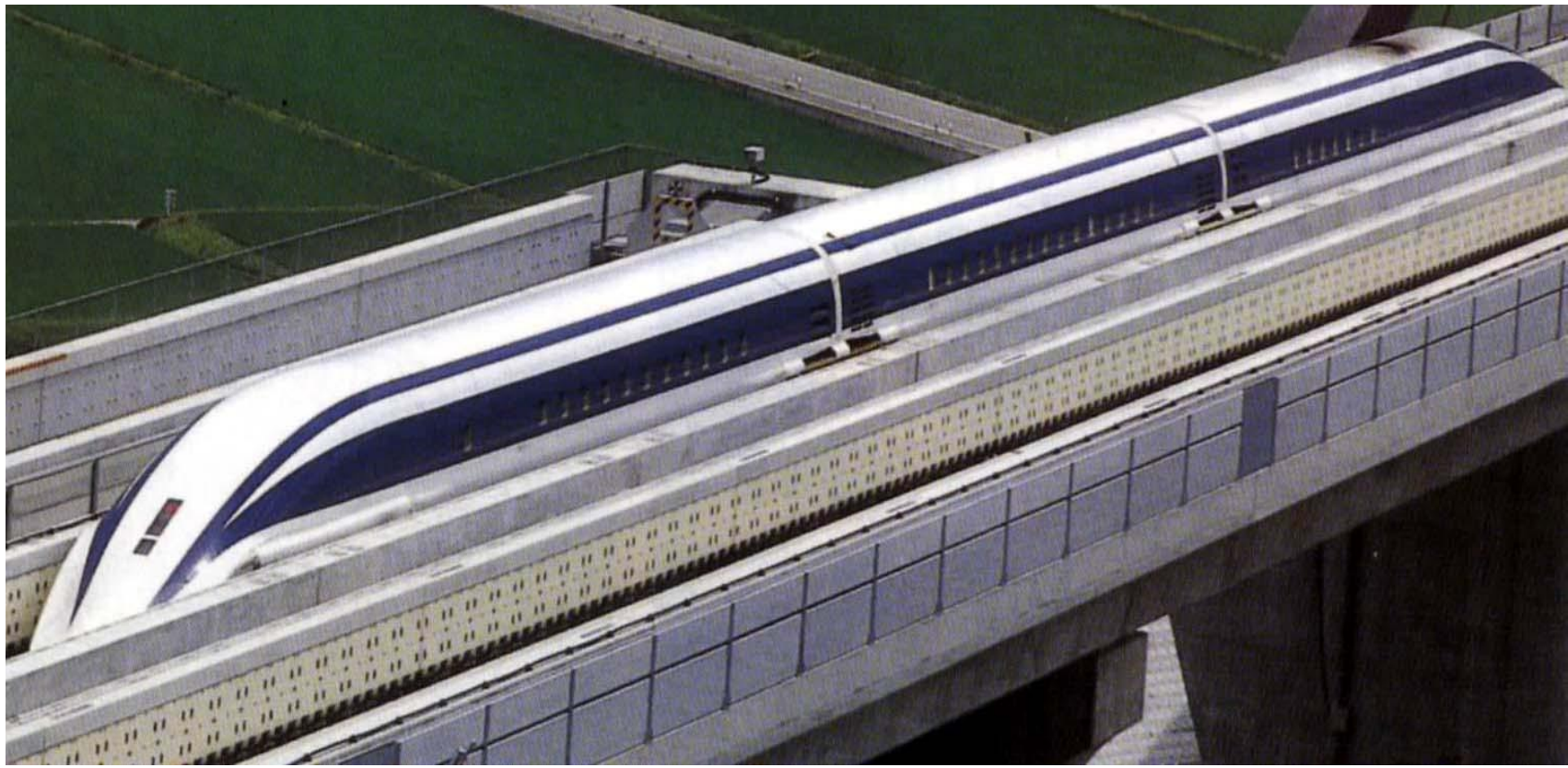
安全迫降的 2173 号飞机

前起落架锁连杆
安装螺栓(销子)意外断裂





挑战者号
灾难分析



车 头



车 身





德国高铁事故-疲劳破坏

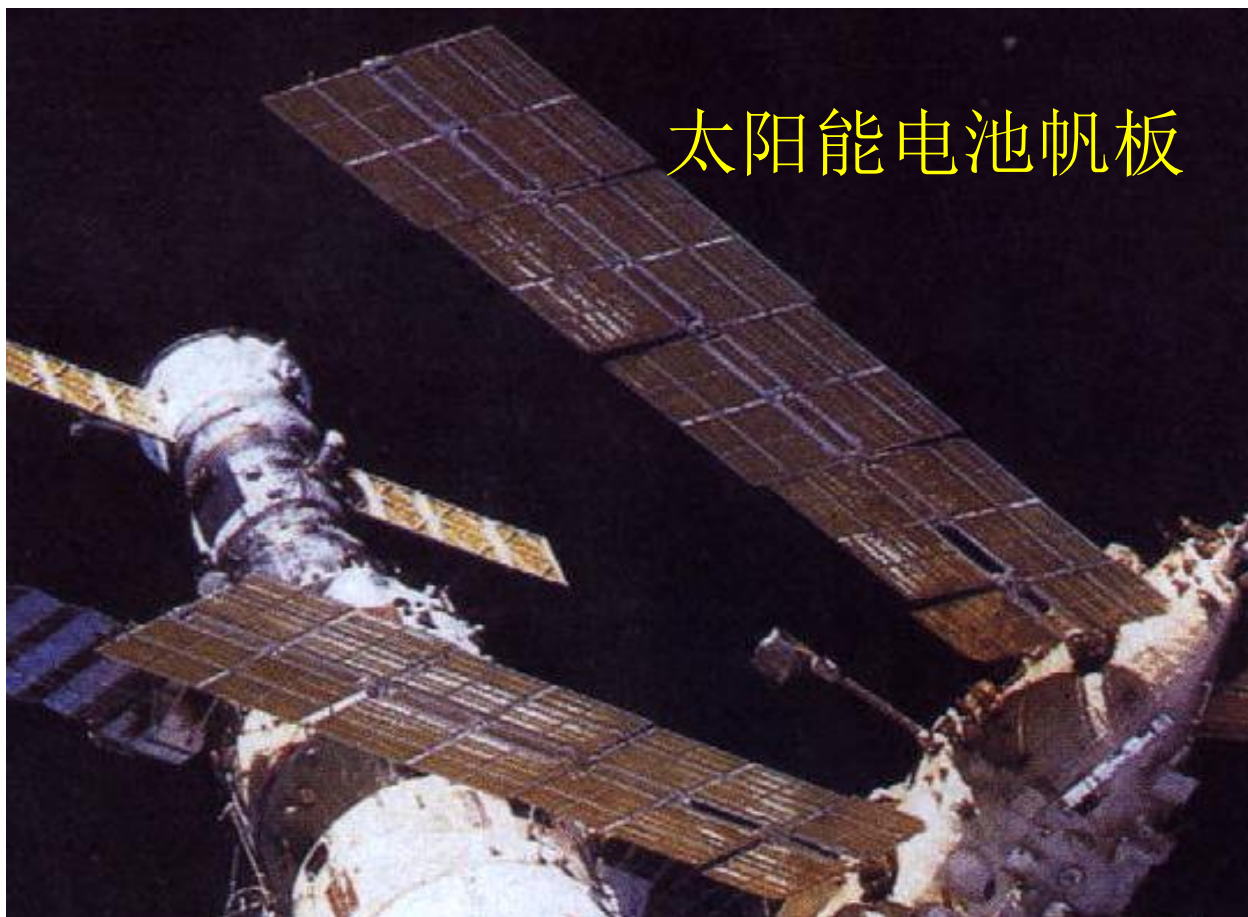


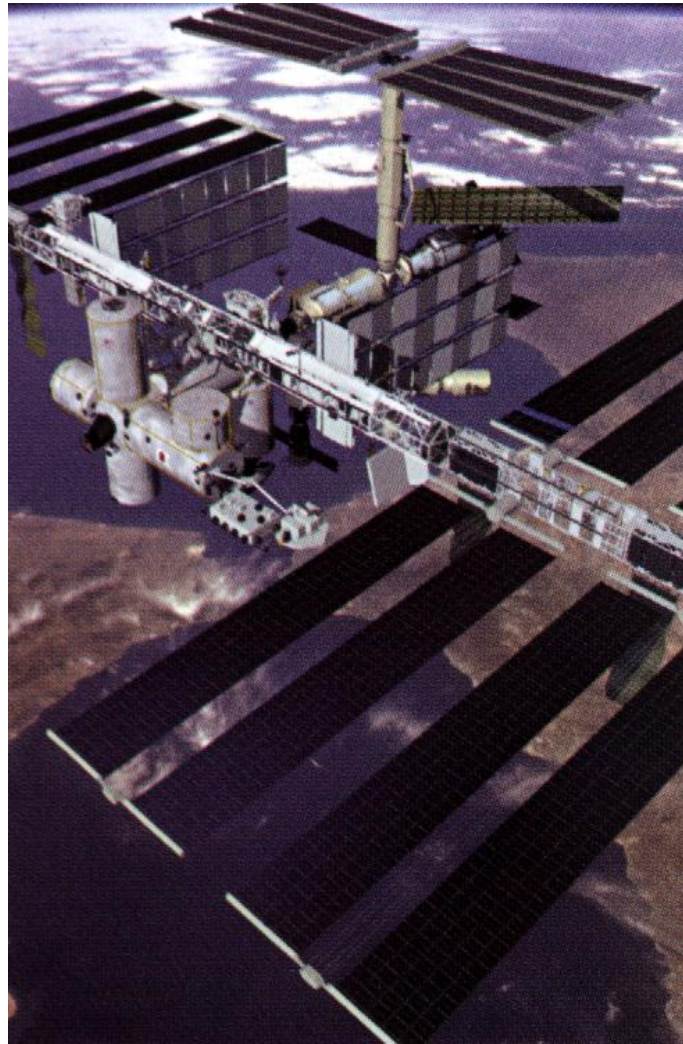
疲劳破坏

和平号空间站



太阳能电池帆板

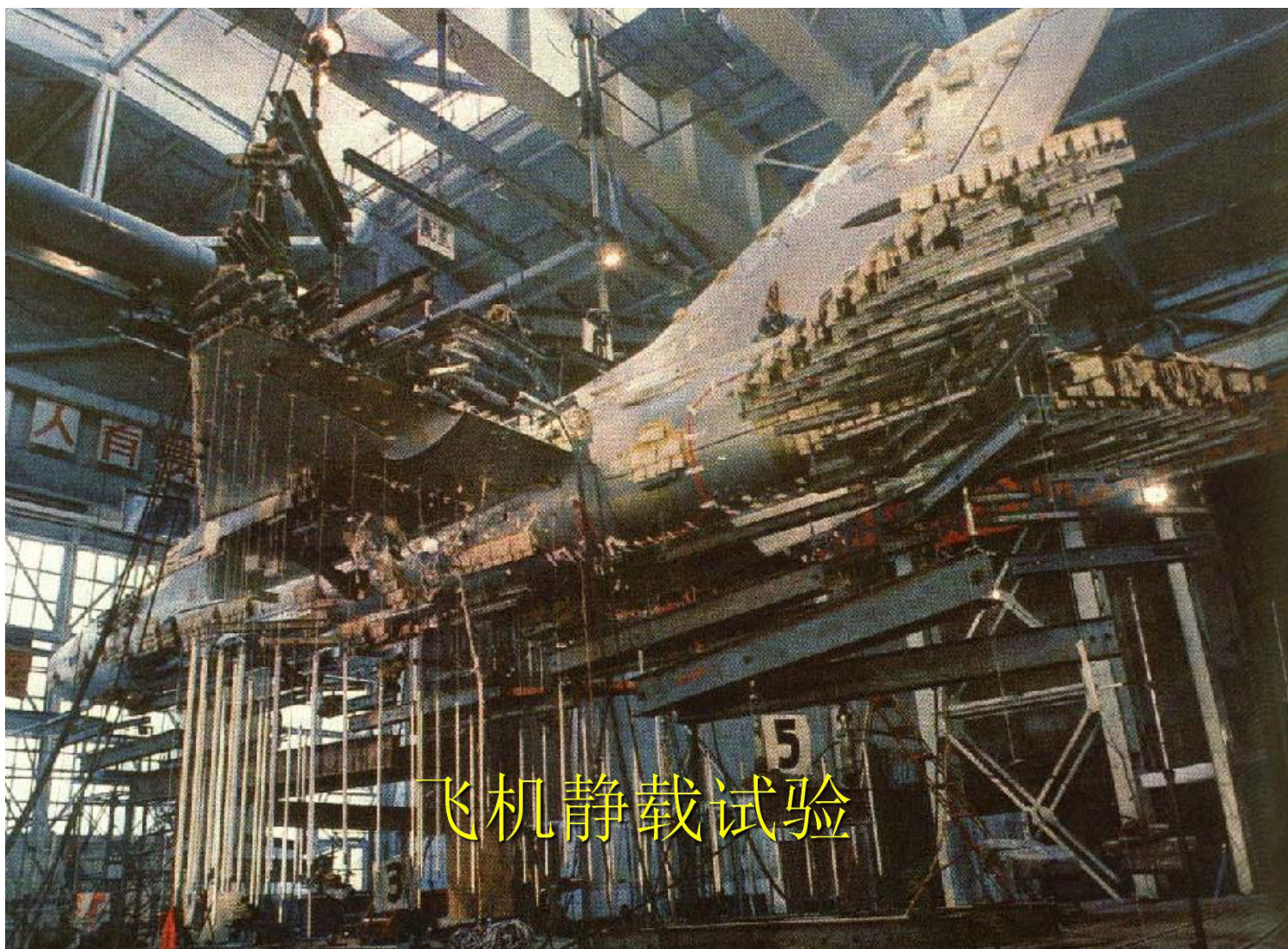


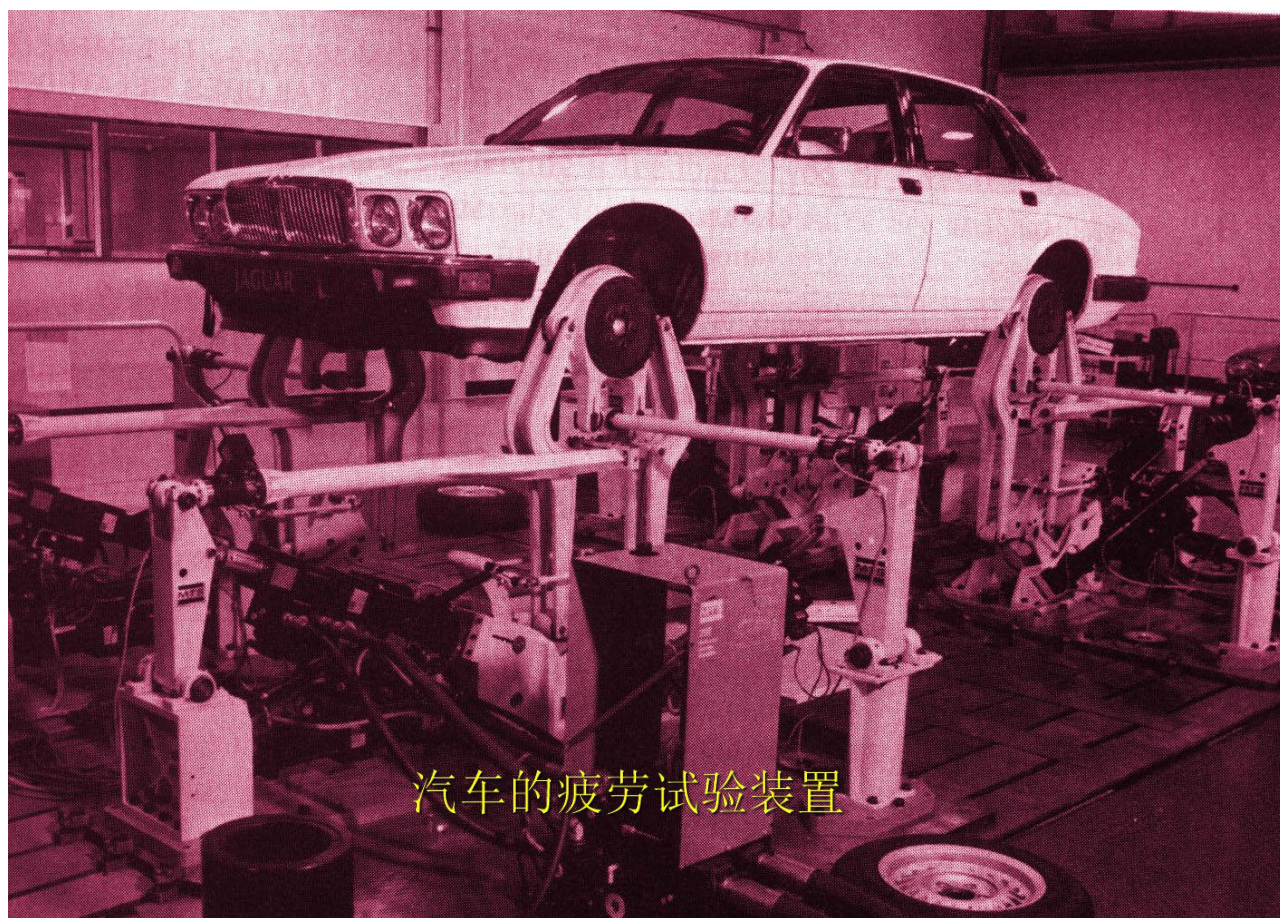




□ 工程力学与工程密切相关







汽车的疲劳试验装置



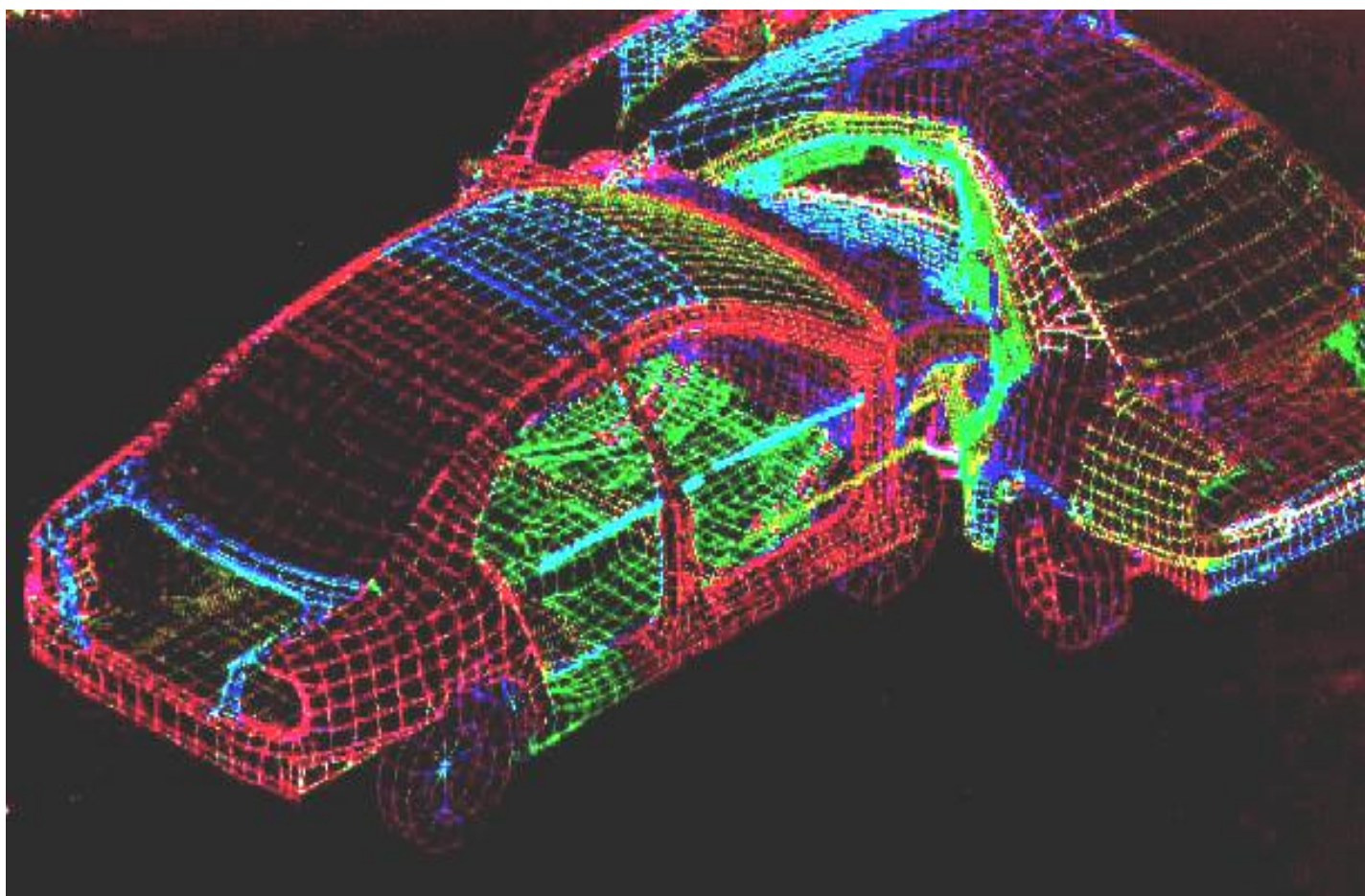


冲击试验





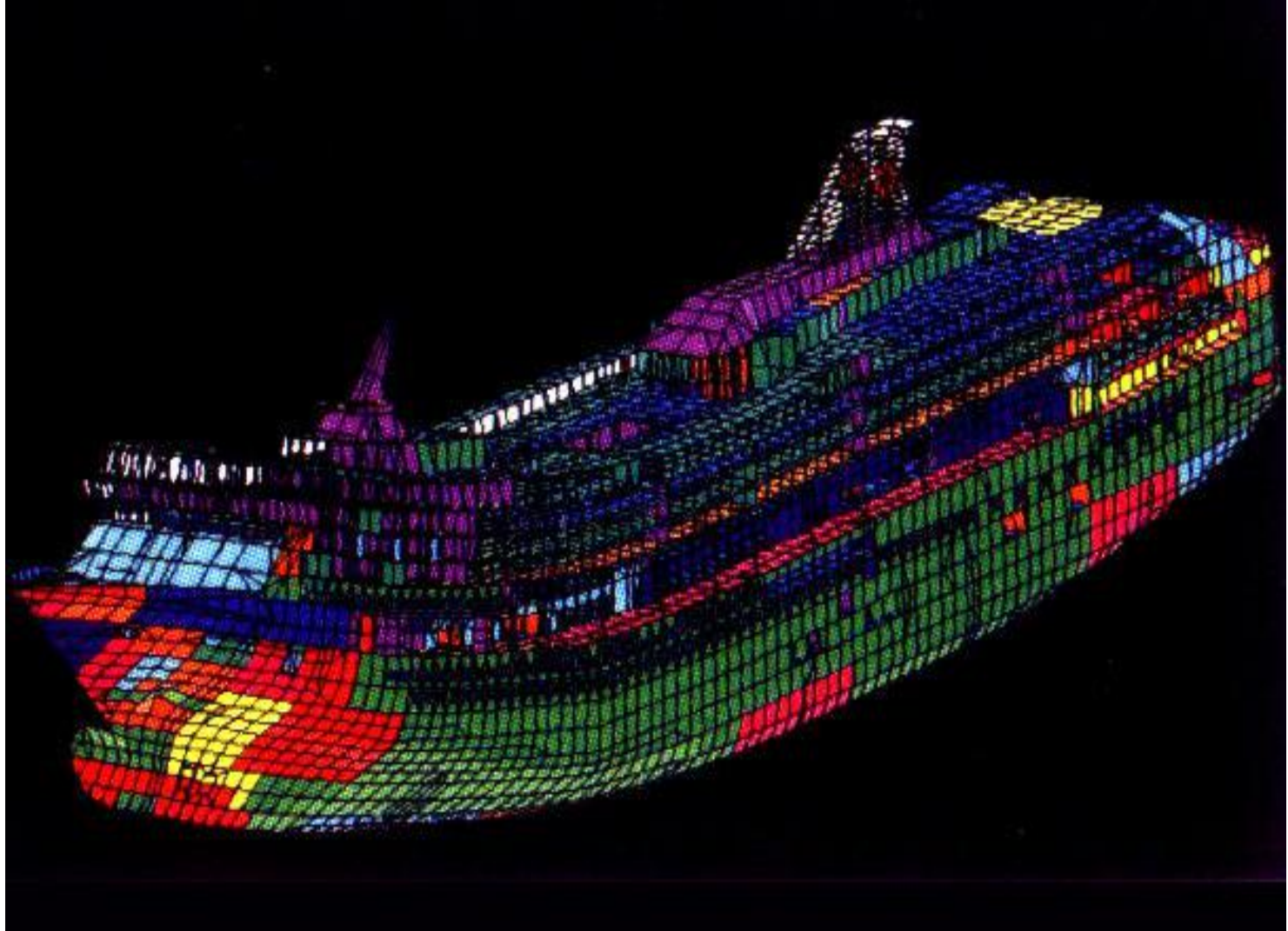
Page 10 of 100



STEP 4 TIME = 4.9999088E+001









第1章 工程力学的基本概念



1.1 力和力系

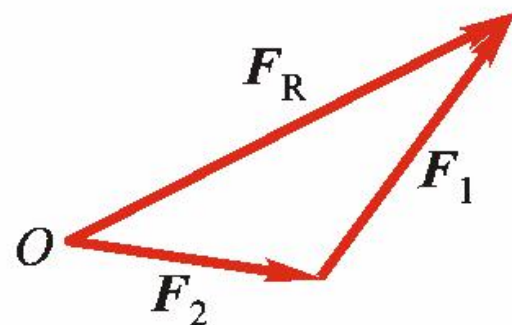
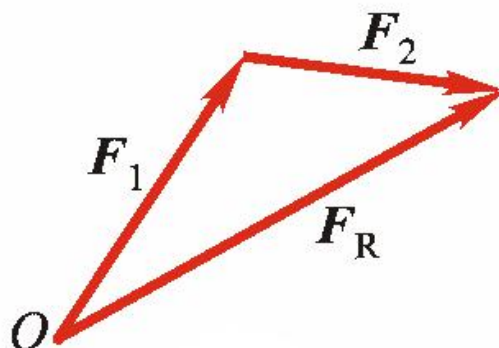
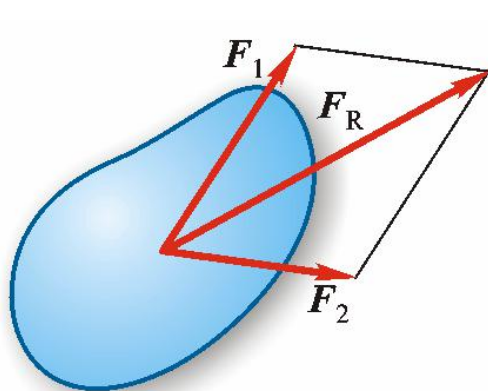
- 力：力是问题之间的相互作用，其作用效果是使物体的运动状态发生改变
- 力是矢量，大小、方向、作用点为其要素
- 集中力：作用于物体上一点的力
- 分布力：连续作用在物体上某一线段、面积、体积上的力



静力学公理

公理1 力的平行四边形法则

作用在物体上同一点的两个力，可以合成为一个合力。合力的作用点也在该点，合力的大小和方向，由这两个力为边构成的平行四边形的对角线确定。

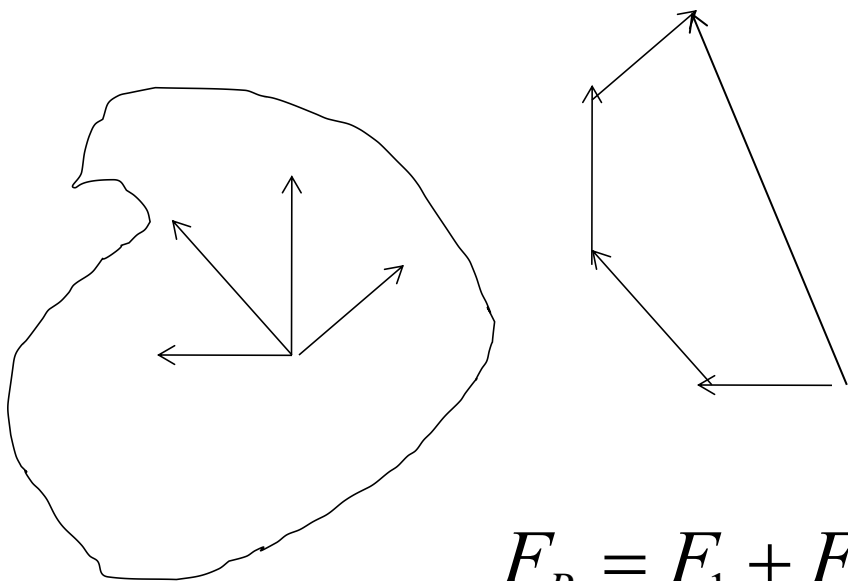


合力(合力的大小与方向) $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (矢量和)
亦可用力三角形求得合力矢



推论1 力的多边形法则

作用在物体上同一点的多个力，可以合成
为一个合力，合力作用在原力作用点上，
大小和方向等于各力的矢量和



$$F_R = F_1 + F_2 + \cdots F_n$$



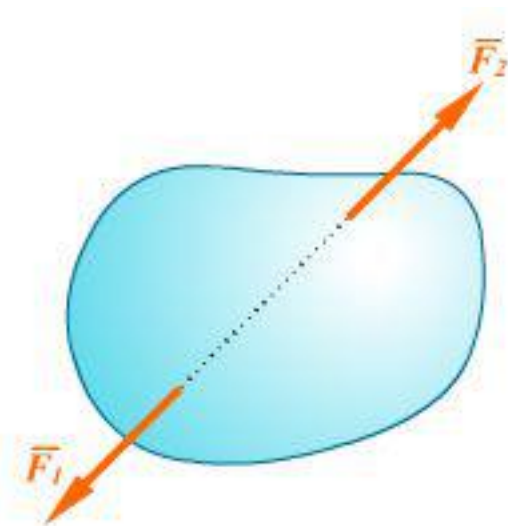
公理2 二力平衡条件

作用在刚体上的两个力，使刚体保持平衡的必要和充分条件是：这两个力的大小相等，方向相反，且作用在同一直线上。

使刚体平衡的充分必要条件

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

最简单力系的平衡条件

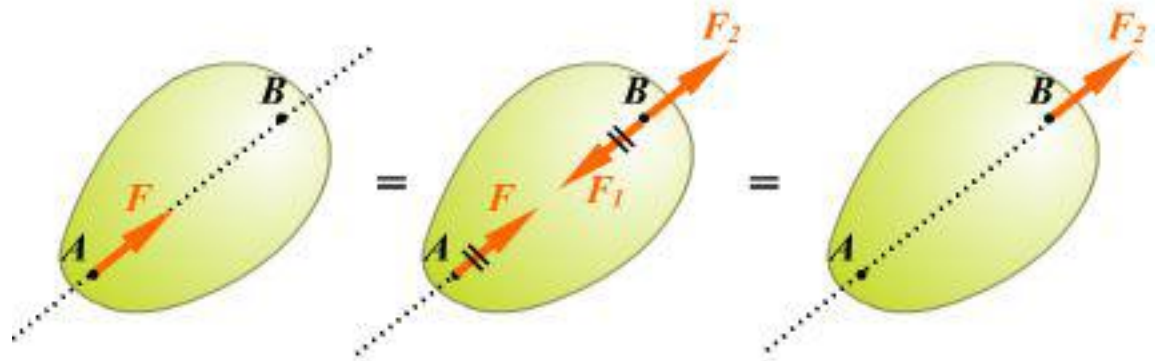


公理3 加減平衡力系原理

在已知力系上加上或減去任意的平衡力系，并不改变原力系对刚体的作用。

推理2 力的可传性

作用于刚体上某点的力，可以沿着它的作用线移到刚体内任意一点，并不改变该力对刚体的作用。

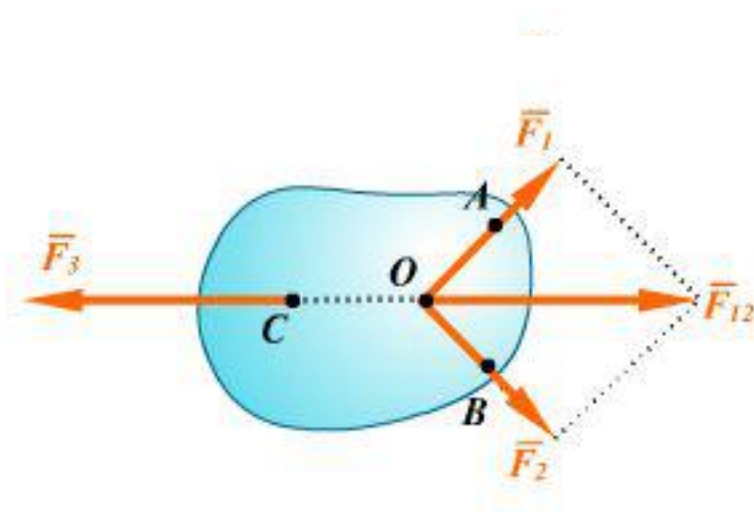


作用在刚体上的力是滑动矢量，力的三要素为大小、方向和作用线



推理3 三力平衡汇交定理

作用于刚体上三个相互平衡的力，若其中两个力的作用线汇交于一点，则此三力必在同一平面内，且第三个力的作用线通过汇交点。



公理4 作用和反作用定律

作用力和反作用力总是同时存在，同时消失，等值、反向、共线，作用在相互作用的两个物体上。

在画物体受力图时要注意此公理的应用。



公理5 刚化原理

变形体在某一力系作用下处于平衡，如将此变形体刚化为刚体，其平衡状态保持不变。



柔性体（受拉力平衡）

反之不一定成立。



刚化为刚体（仍平衡）



刚体（受压平衡）

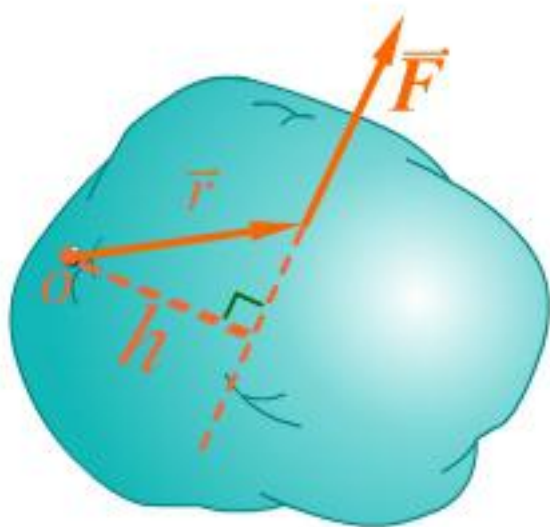


柔性体（受压不能平衡）



1.2 力矩和力偶

1. 平面力对点之矩（力矩）



力可以使物体发生转动，力对物体的转动效应，用力矩来度量

力矩作用面， O 称为矩心， O 到力的作用线的垂直距离 h 称为力臂

两个要素：

1. 大小：力 F 与力臂的乘积
2. 方向：转动方向



$$M_o(\vec{F}) = \pm F \cdot h$$

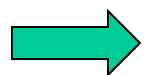
在平面内，力对点之矩是一个代数量，它的绝对值等于力的大小与力臂的乘积，它的正负：力使物体绕矩心逆时针转向时为正，反之为负。常用单位：N·m 或



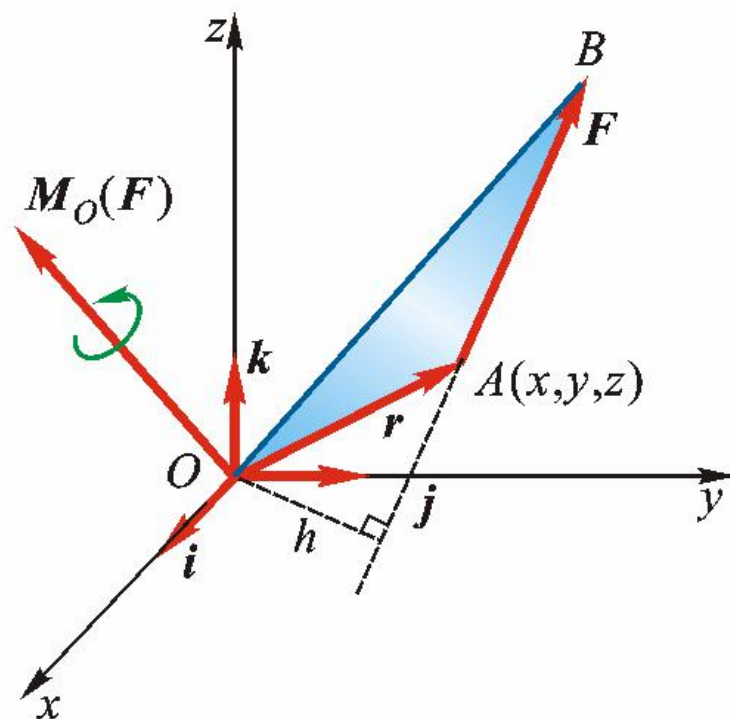
如果考虑空间问题，注意到力与矩心组成一个平面，
但这个平面随着力的方位而改变，则空间力矩是矢量
力对点的矩以矢量表示 —— 力矩矢

三要素：

- (1) 大小：力 \vec{F} 与力臂的乘积
- (2) 方向：转动方向
- (3) 作用面：力矩作用面。



$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

→ $\vec{M}_O(\vec{F}) = (\vec{r} \times \vec{F}) = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \times (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k})$

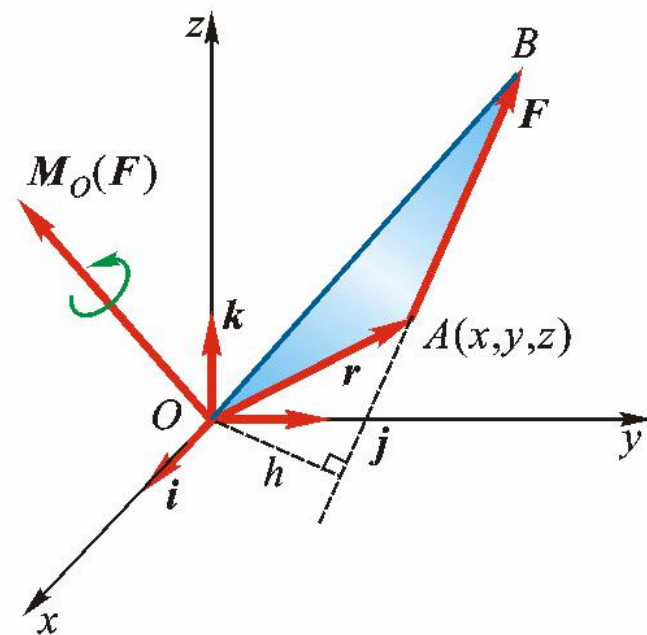
$$= (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

→ 力对点 O 的矩在三个坐标轴上的投影为

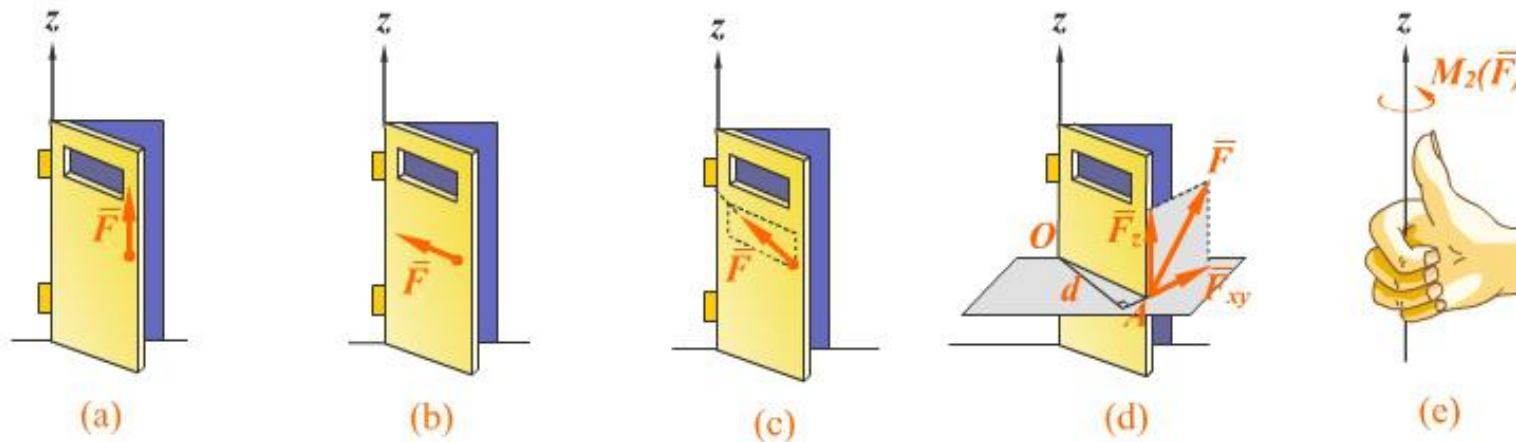
$$[\vec{M}_O(\vec{F})]_x = yF_z - zF_y$$

$$[\vec{M}_O(\vec{F})]_y = zF_x - xF_z$$

$$[\vec{M}_O(\vec{F})]_z = xF_y - yF_x$$



2. 力对轴的矩



$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h$$

力与轴相交或与轴平行（力与轴在同一平面内），力对该轴的矩为零。



3. 力对点的矩与力对过该点的轴的矩的关系

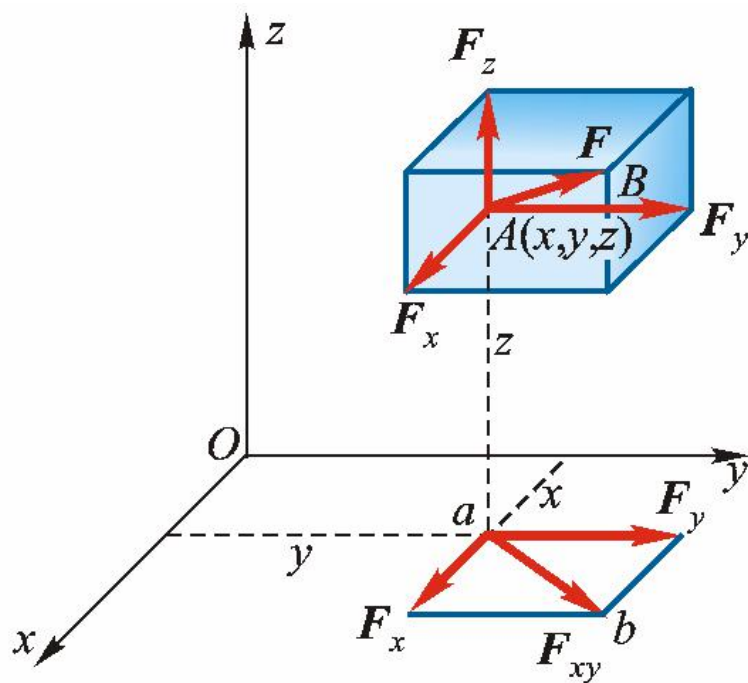
$$M_x(\vec{F}) = M_x(\vec{F}_x) + M_x(\vec{F}_y) + M_x(\vec{F}_z) = F_z \cdot y - F_y \cdot z$$

$$M_y(\vec{F}) = M_y(\vec{F}_x) + M_y(\vec{F}_y) + M_y(\vec{F}_z) = F_x \cdot z - F_z \cdot x$$

$$M_z(\vec{F}) = F_y \cdot x - F_x \cdot y$$

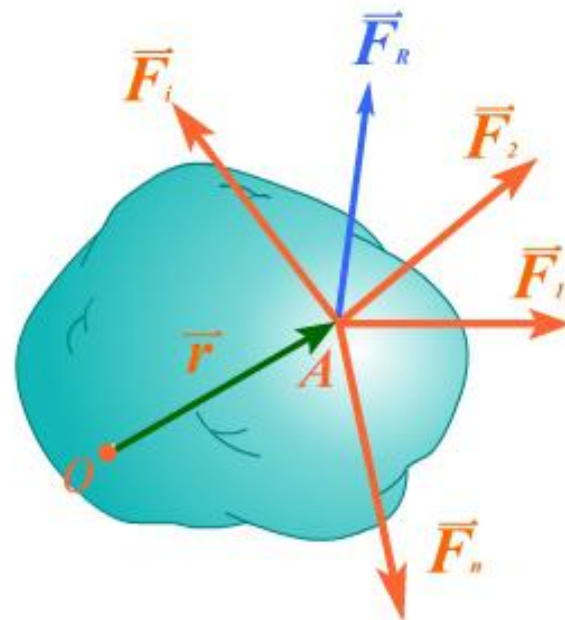


$$\begin{aligned} [\vec{M}_O(\vec{F})]_x &= yF_z - zF_y = M_x(\vec{F}) \\ [\vec{M}_O(\vec{F})]_y &= zF_x - xF_z = M_y(\vec{F}) \\ [\vec{M}_O(\vec{F})]_z &= xF_y - yF_x = M_z(\vec{F}) \end{aligned}$$



二、合力矩定理

$$M_O(\vec{F}_R) = \sum M_O(\vec{F}_i)$$

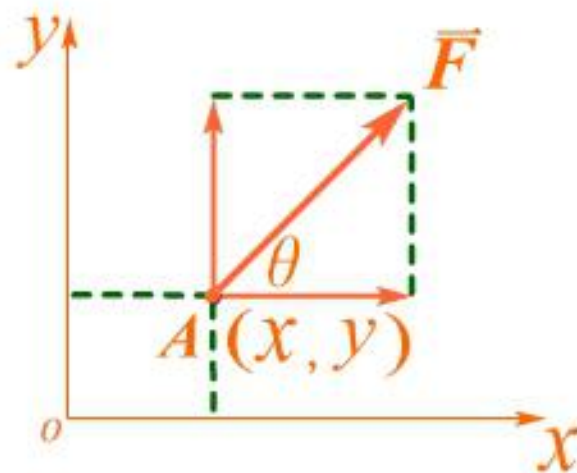


三、力矩与合力矩的解析表达式

$$\begin{aligned}M_o(\vec{F}) &= M_o(\vec{F}_y) - M_o(\vec{F}_x) \\&= x \cdot F \cdot \sin \theta - y \cdot F \cdot \cos \theta \\&= xF_y - yF_x\end{aligned}$$

$$M_o(\vec{F}_R) = \sum M_o(\vec{F}_i)$$

$$M_o(\vec{F}_R) = \sum (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix})$$

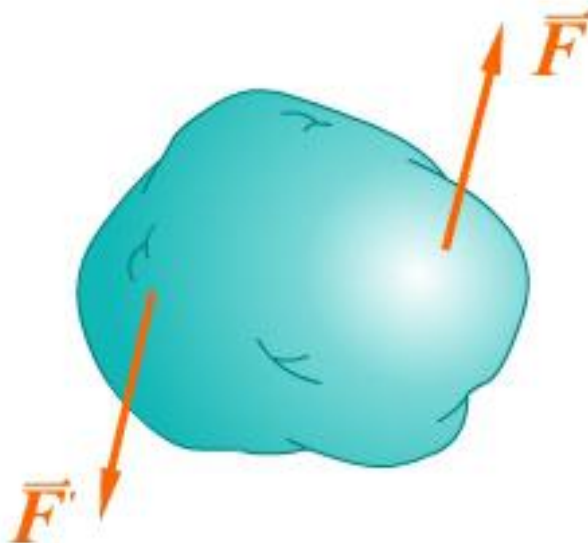
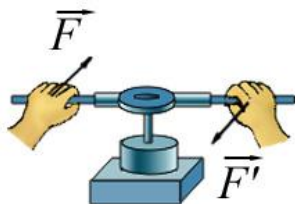
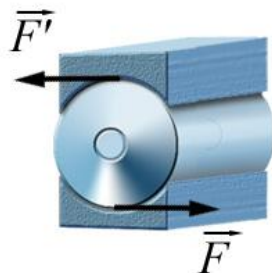
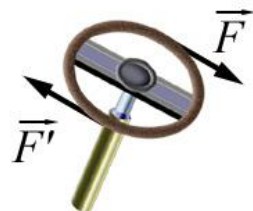
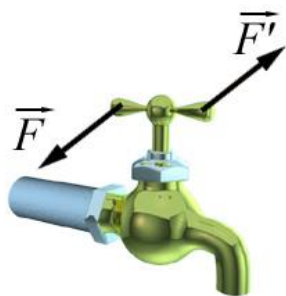


力偶

一. 力偶和力偶矩

1. 力偶

由两个等值、反向、不共线的（平行）力组成的力系称为力偶，记作 (\vec{F}, \vec{F}')



2. 力偶矩

力偶中两力所在平面称为力偶作用面.

力偶两力之间的垂直距离称为力偶臂.

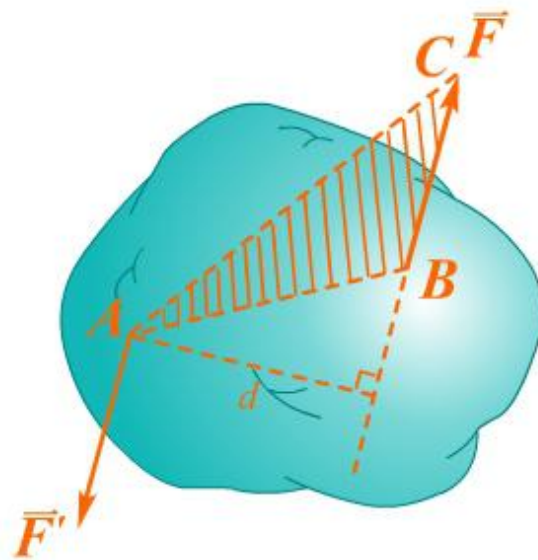
两个要素

a. 大小：力与力偶臂乘积

b. 方向：转动方向

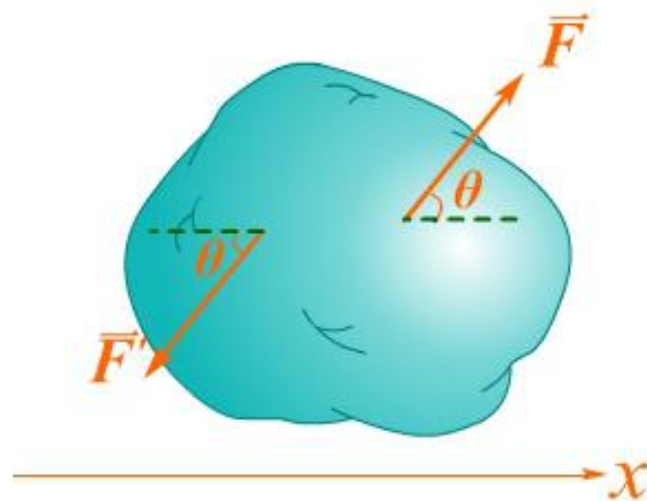
力偶矩

$$M = \pm F \cdot d = \pm 2\Delta ABC$$

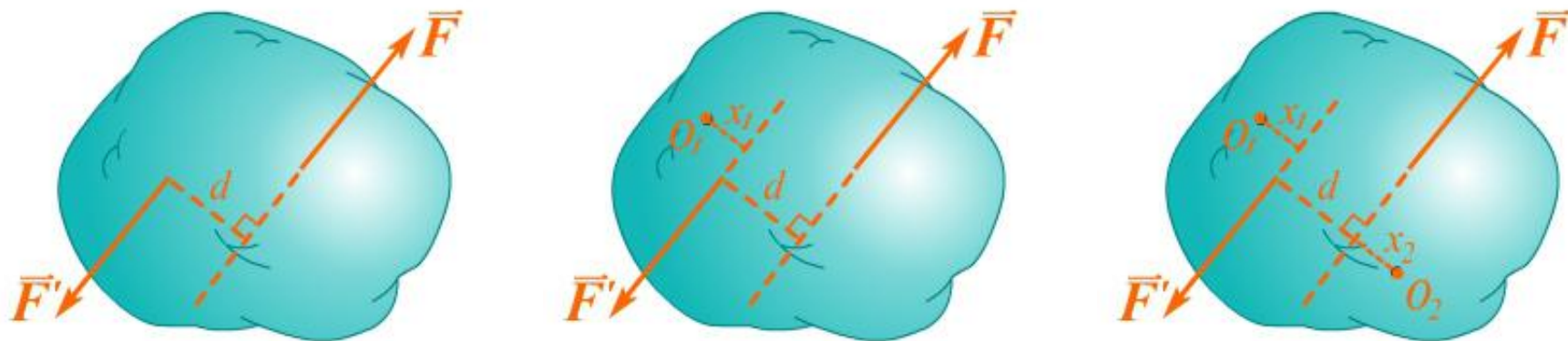


二. 力偶与力偶矩的性质

1. 力偶在任意坐标轴上的投影等于零



2. 力偶对任意点取矩都等于力偶矩，不因矩心的改变而改变.



$$M_{O_1}(\vec{F}, \vec{F}') = M_{O_1}(\vec{F}) + M_{O_1}(\vec{F}')$$

$$= F \cdot (d + x_1) - F \cdot x_1 = Fd$$

$$M_{O_2}(\vec{F}, \vec{F}') = F' \cdot (d + x_2) - F \cdot x_2$$

$$= F'd = Fd$$

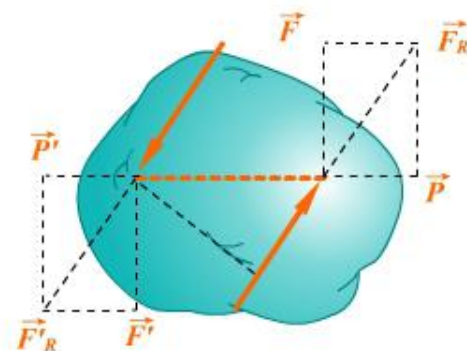
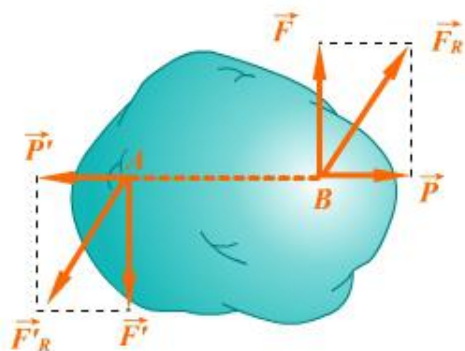
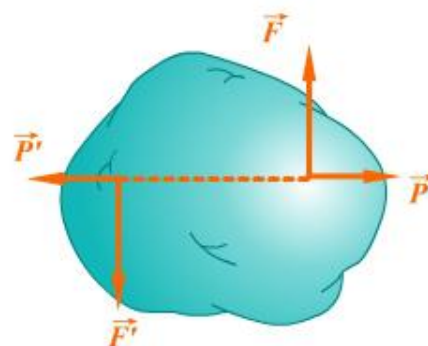
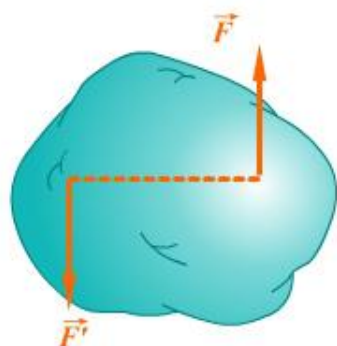


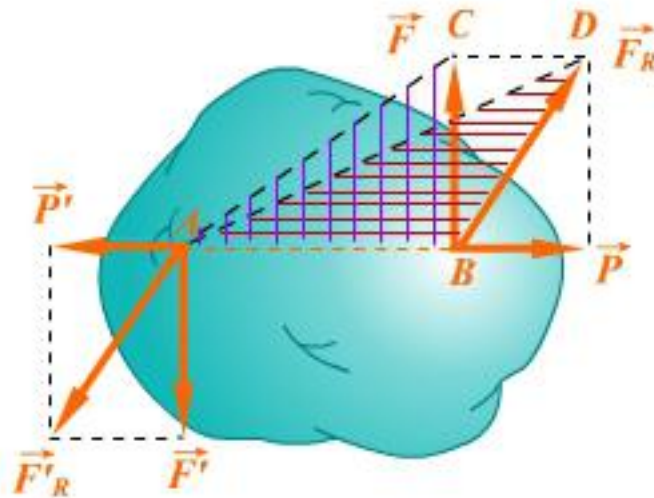
力偶矩的符号

M



3. 只要保持力偶矩不变，力偶可在其作用面内任意移转，且可以同时改变力偶中力的大小与力偶臂的长短，对刚体的作用效果不变.





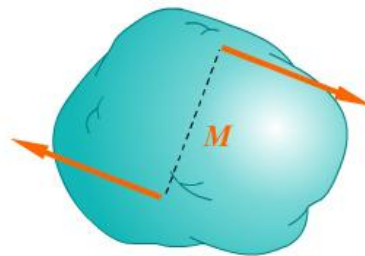
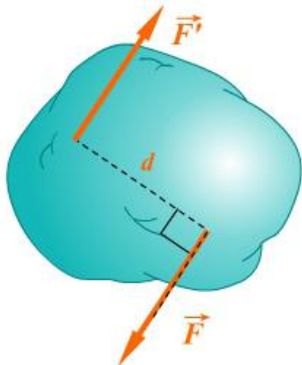
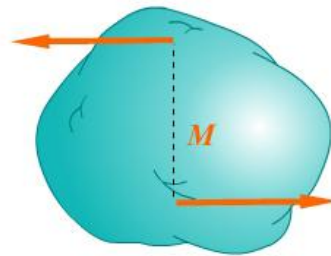
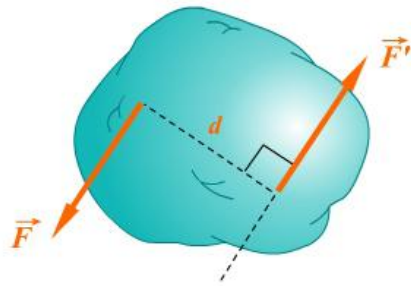
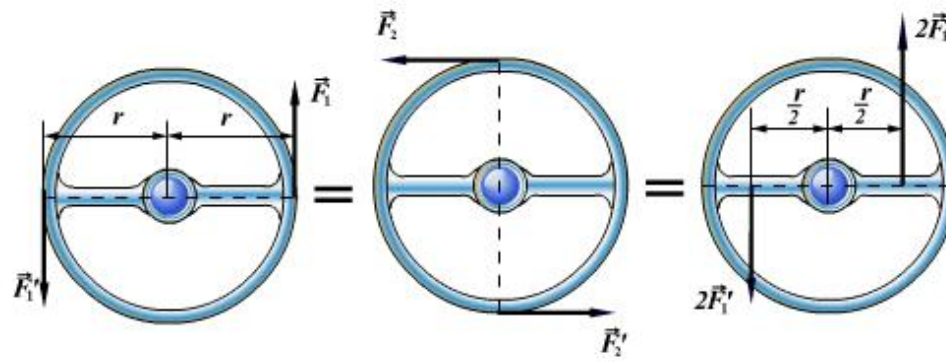
$$\Delta ABC \text{ ? } \Delta ABD$$

$$\Delta ABC = \Delta ABD$$

$$M(\vec{F}_R, \vec{F}'_R) = F_R d_1 = 2\Delta ABD$$

$$M(\vec{F}, \vec{F}') = Fd = 2\Delta ABC$$



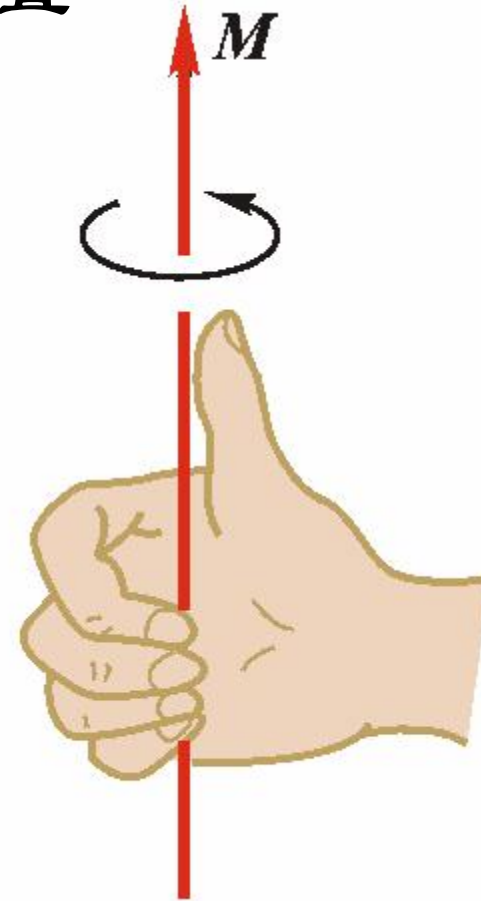
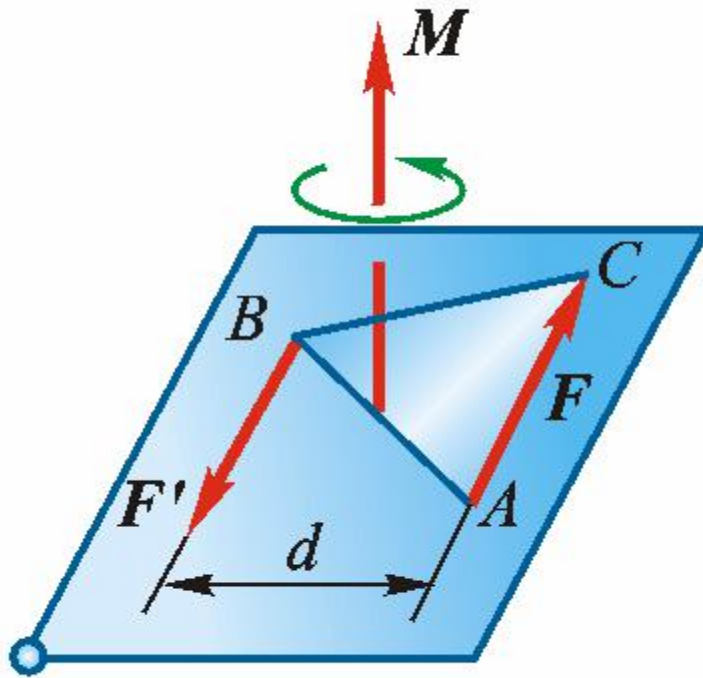


4. 力偶没有合力，力偶只能由力偶来平衡.



力偶是一个空间矢量

力偶矩矢量与力偶作用平面垂直



$$\vec{M} = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}$$

2、力偶的性质

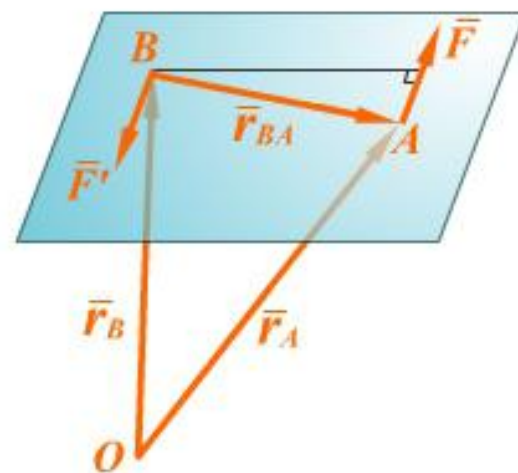
- (1) 力偶中两力在任意坐标轴上投影的代数和为零。
- (2) 力偶对任意点取矩都等于力偶矩，不因矩心的改变而改变。

$$\begin{aligned}\vec{M}_O(\vec{F}, \vec{F}') &= \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{F}') \\ &= \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times \vec{F}'\end{aligned}$$

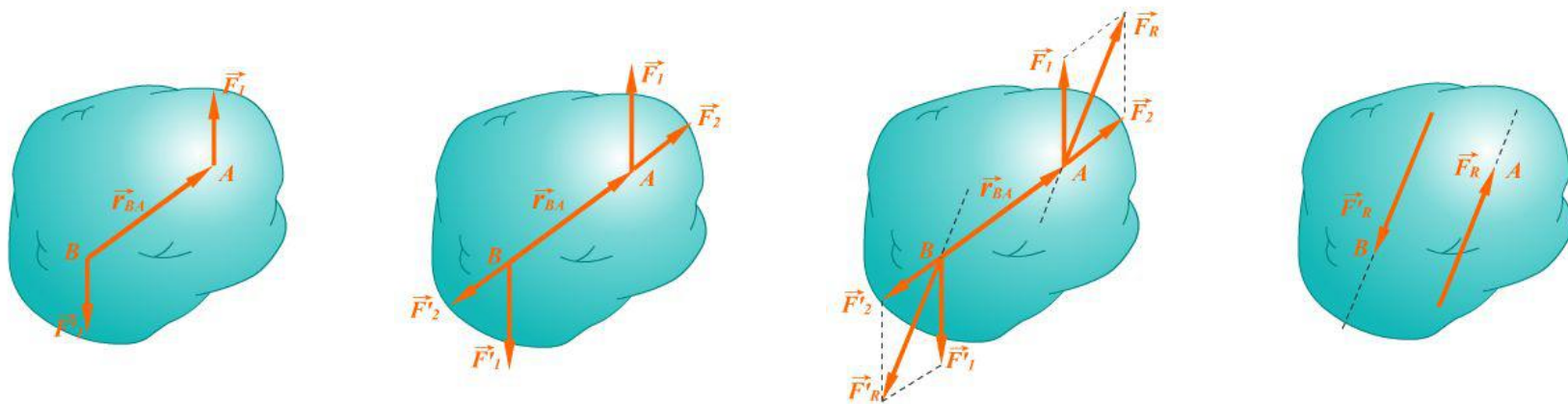
$$\vec{F}' = -\vec{F}$$



$$\vec{M}_O(\vec{F}, \vec{F}') = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F} = \vec{M}$$



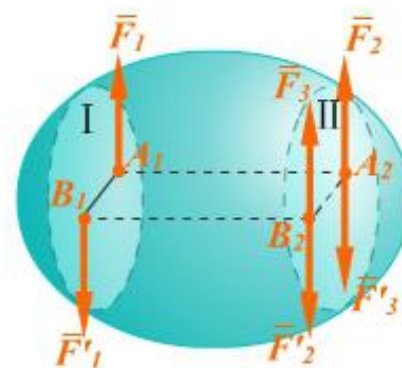
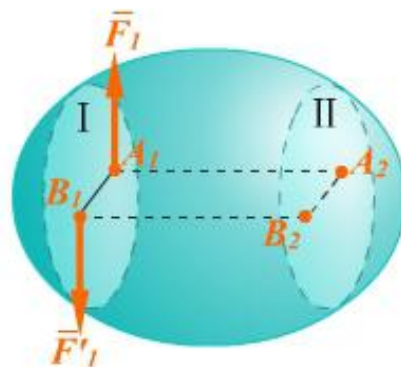
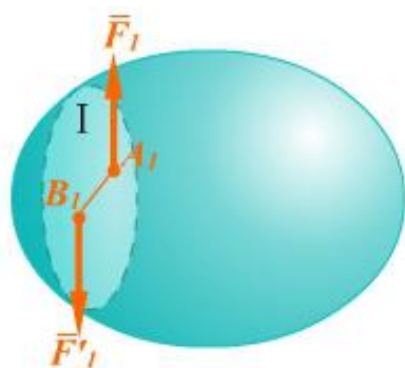
(3) 只要保持力偶矩不变，力偶可在其作用面内任意移转，且可以同时改变力偶中力的大小与力偶臂的长短，对刚体的作用效果不变。



$$\begin{aligned}
 \vec{M}(\vec{F}_R, \vec{F}_R') &= \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_R = \vec{r}_{BA} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \\
 &= \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_2 \\
 &= \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_1 = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_1')
 \end{aligned}$$

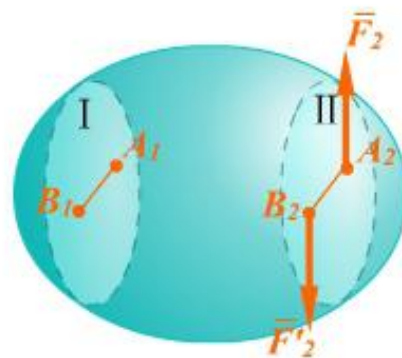
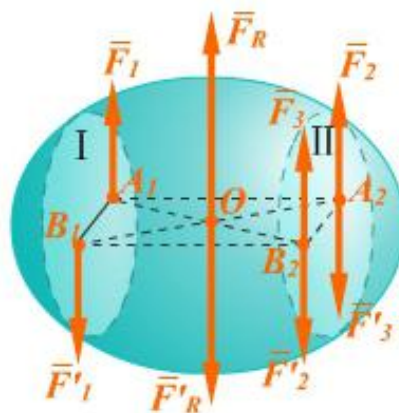


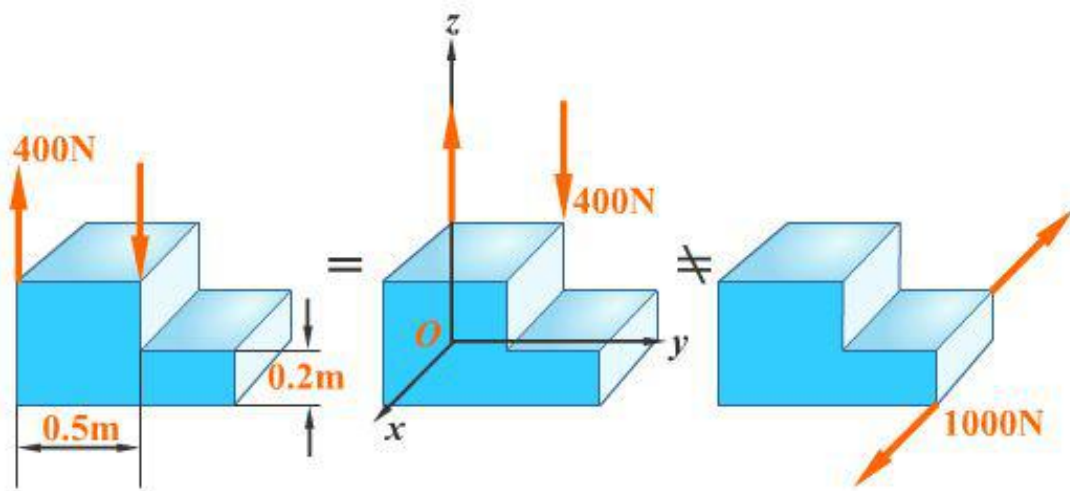
(4) 只要保持力偶矩不变，力偶可从其所在平面移至另一与此平面平行的任一平面，对刚体的作用效果不变。



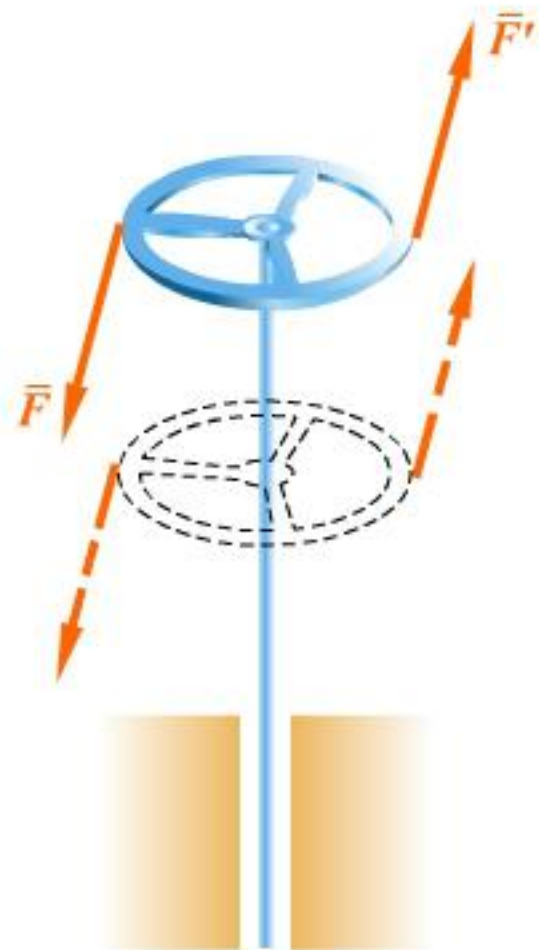
$$F_1 = F'_1 = F_2$$

$$= F'_2 = F_3 = F'_3$$





定位矢量 滑移矢量 自由矢量



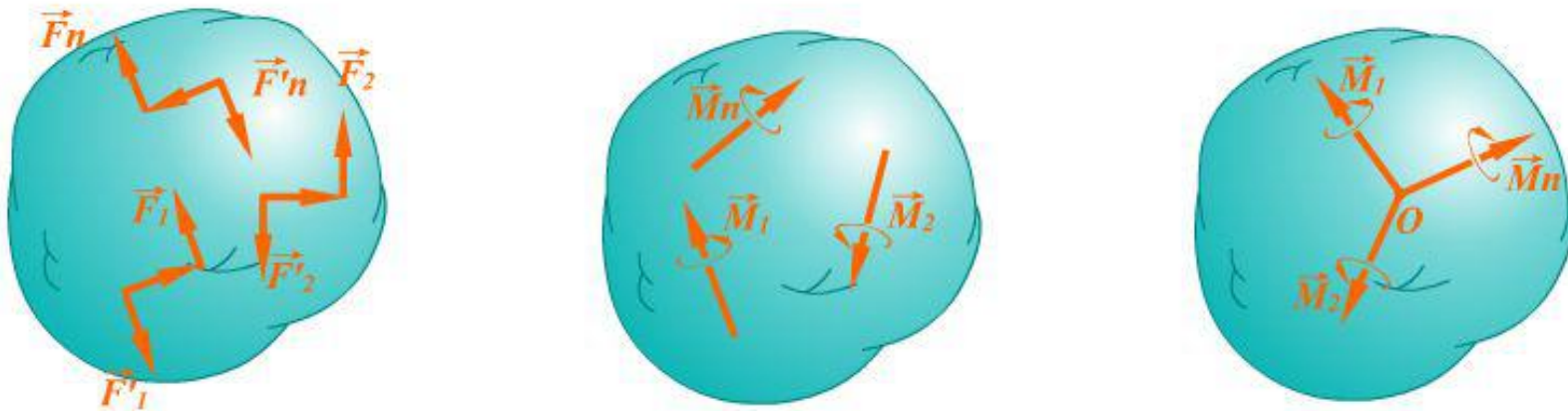
力偶矩矢是自由矢量

力偶矩相等的力偶等效

(5) 力偶没有合力，力偶只能由力偶来平衡。



3. 力偶系的合成



$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1, \vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2, \dots, \vec{M}_n = \vec{r}_n \times \vec{F}_n$$



$$\vec{M} = \sum \vec{M}_i$$

\vec{M} 为合力偶矩矢，等于各分力偶矩矢的矢量和。



$$M_x = \sum M_x, M_y = \sum M_y, M_z = \sum M_z$$

$$M = \sqrt{(\sum M_x)^2 + (\sum M_y)^2 + (\sum M_z)^2}$$

$$\cos \theta = \frac{\sum M_x}{M} \quad \cos \beta = \frac{\sum M_y}{M} \quad \cos \gamma = \frac{\sum M_z}{M}$$

空间力偶系平衡的充分必要条件是：合力偶矩矢等于零，即

$$\vec{M} = 0$$

$$\rightarrow \sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

--称为空间力偶系的平衡方程.

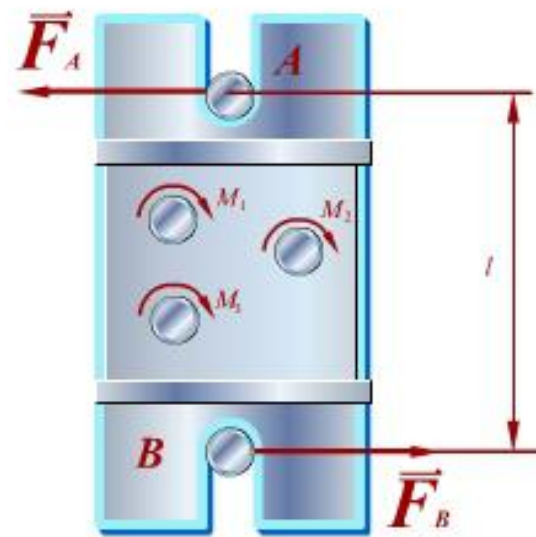


例1-1

已知： $M_1 = M_2 = 10 \text{ N} \cdot \text{m}$, $M_3 = 20 \text{ N} \cdot \text{m}$, $l = 200 \text{ mm}$;

求： 光滑螺柱 AB 所受水平力.

解： 由力偶只能由力偶平衡的性质，
其受力图为



$$\sum M = 0$$

$$F_A l - M_1 - M_2 - M_3 = 0$$

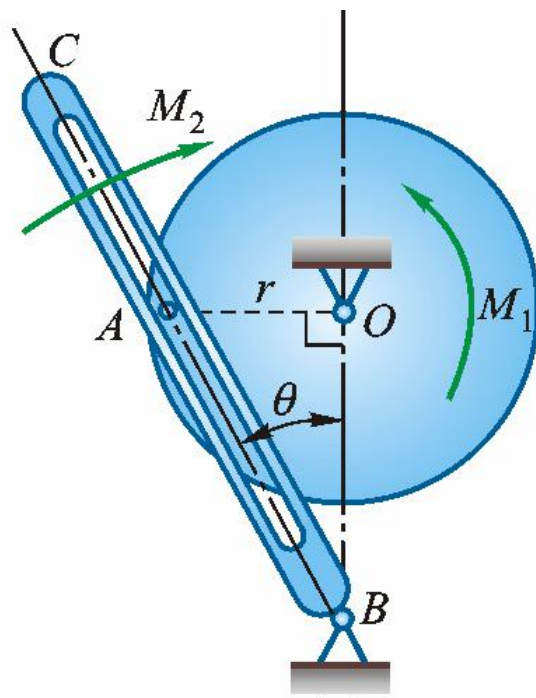
$$F_A = F_B = \frac{M_1 + M_2 + M_3}{l} = 200 \text{ N}$$



例1-2

已知 $M_1 = 2\text{kN}\cdot\text{m}$, $OA = r = 0.5\text{m}$, $\theta = 30^\circ$;

求：平衡时的 M_2 及铰链 O, B 处的约束力。



解：取轮，由力偶只能由力偶平衡的性质，画受力图。

$$\sum M = 0 \quad M_1 - F_A \cdot r \sin \theta = 0$$

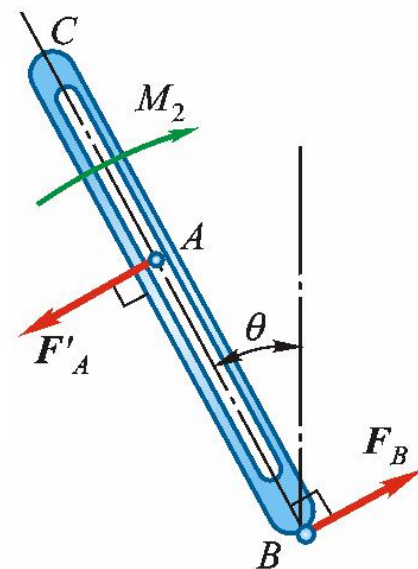
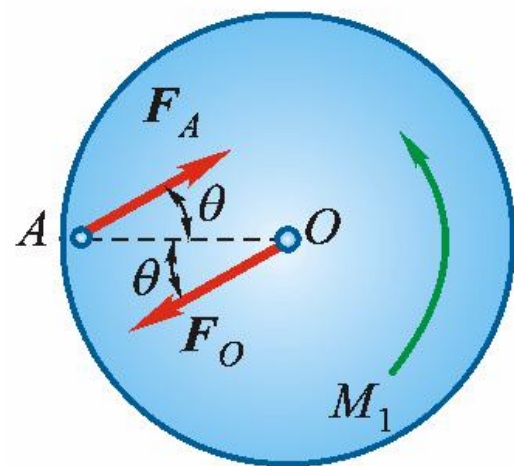
$$F_O = F_A = 8\text{kN}$$

取杆 BC ，画受力图。

$$\sum M = 0 \quad F'_A \cdot \frac{r}{\sin \theta} - M_2 = 0$$

$$M_2 = 8\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$F_B = F_A = 8\text{kN}$$



1.3 约束和约束力

约束： 对非自由体的位移起限制作用的物体.

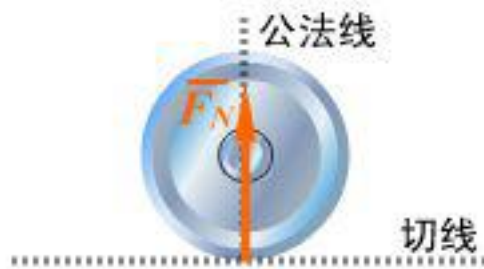
约束力： 约束对非自由体的作用力.

约束力 { 大小——待定
 方向——与该约束所能阻碍的位移方向相反
 作用点——接触处

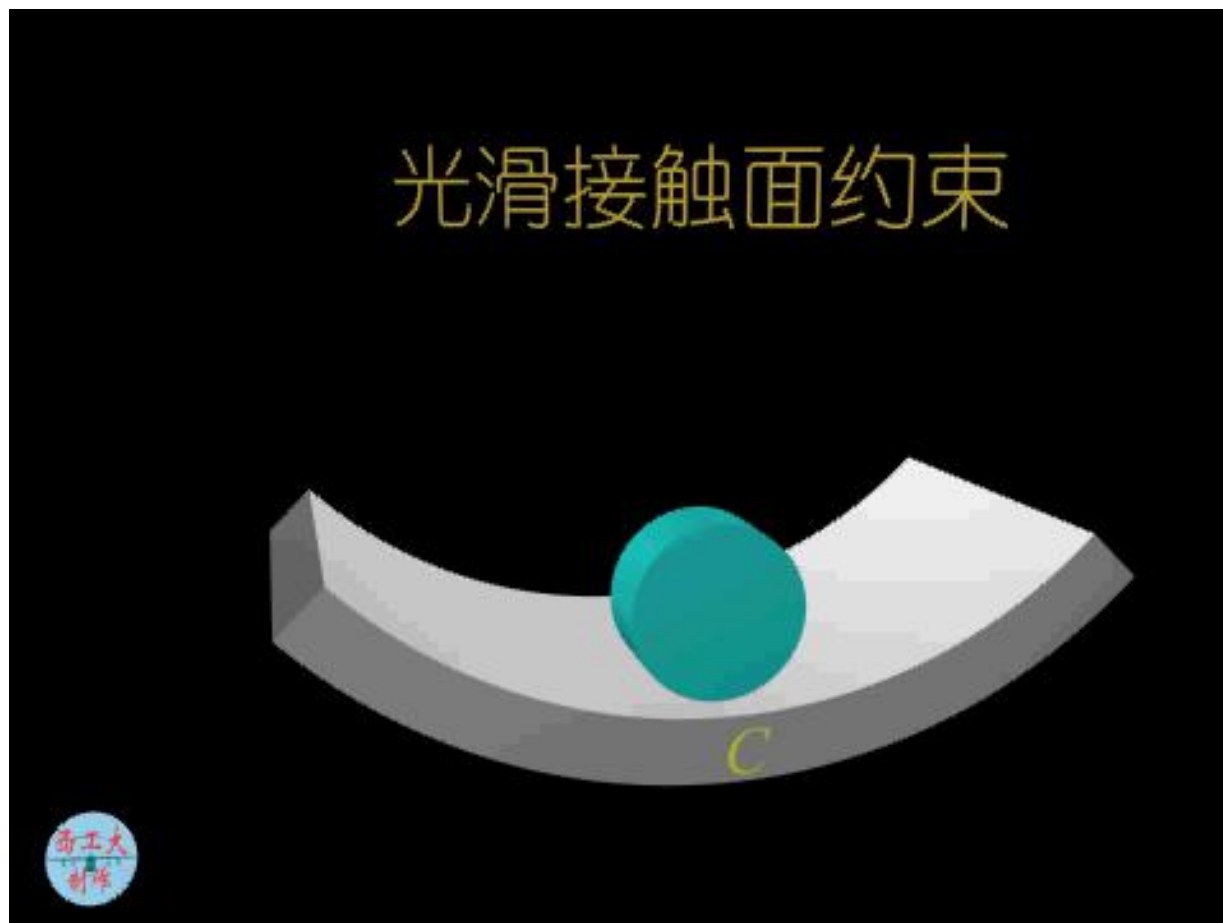


工程中常见的约束

1、具有光滑接触面（线、点）的约束（光滑接触约束）



光滑接触面约束





光滑支承接触对非自由体的约束力，作用在接触处；方向沿接触处的公法线并指向受力物体，故称为法向约束力，用 \vec{F}_N 表示。

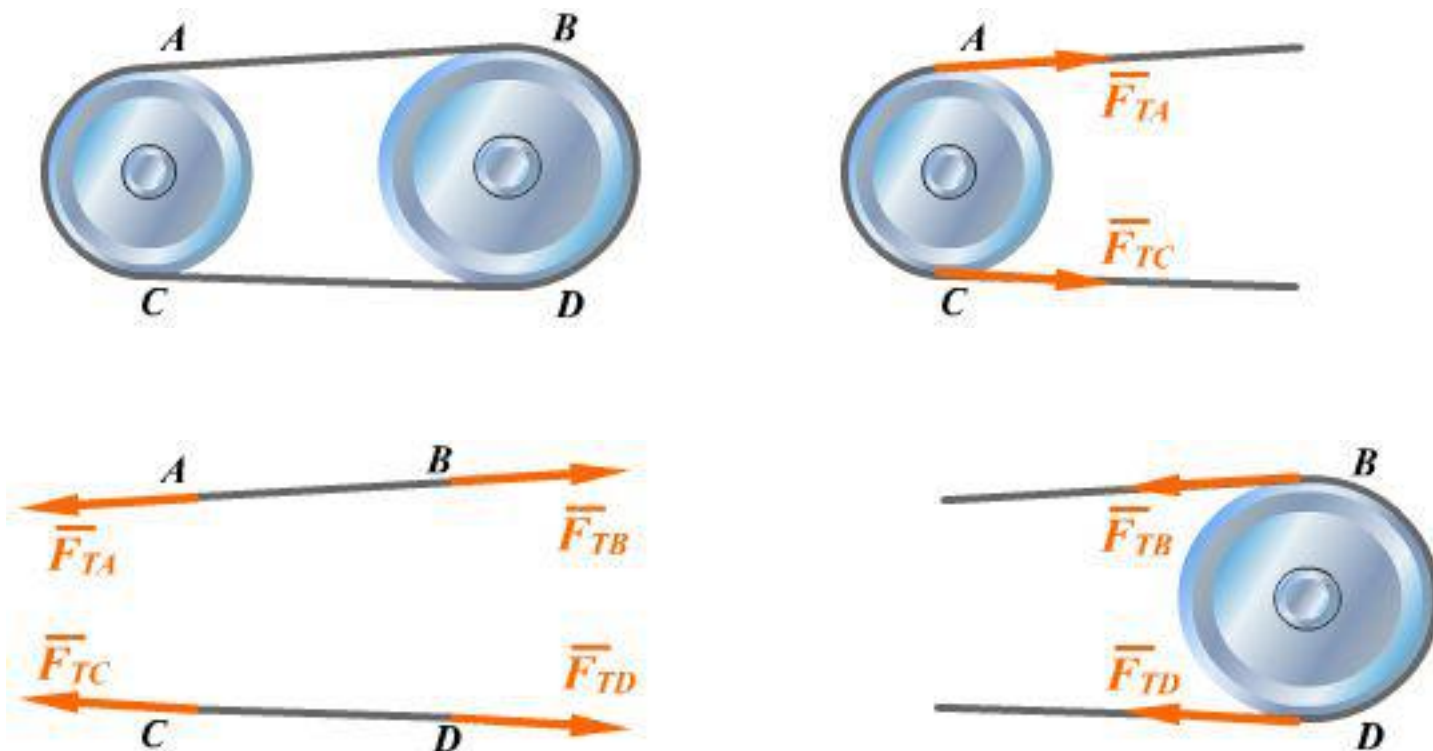


2、由柔软的绳索、胶带或链条等构成的约束



柔索只能受拉力，又称张力. 用 \vec{F}_T 表示.





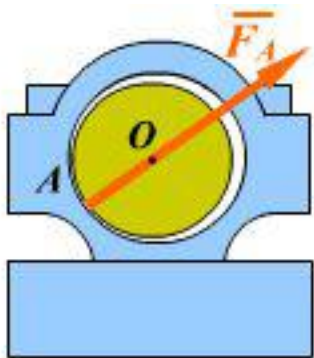
柔索对物体的约束力沿着柔索背向被约束物体.

胶带对轮的约束力沿轮缘的切线方向，为拉力.



3 、光滑铰链约束（径向轴承、圆柱铰链、固定铰链支座等）

（1） 径向轴承（向心轴承）



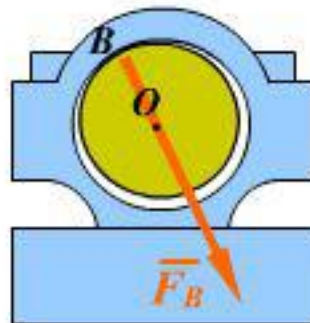
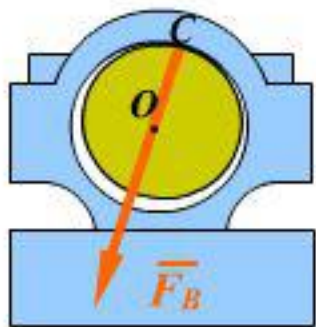
约束特点：

轴在轴承孔内，轴为非自由体、
轴承孔为约束。

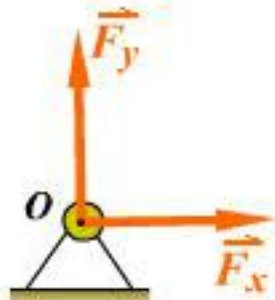
约束力： 当不计摩擦时，轴与孔在接触处为光滑接触约束——法向约束力。约束力作用在接触处，沿径向指向轴心。



当外界载荷不同时，接触点会变，则约束力的大小与方向均有改变。

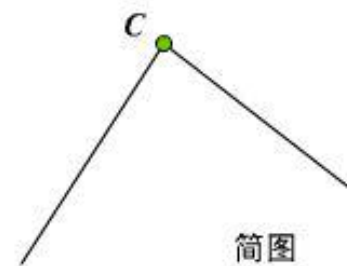
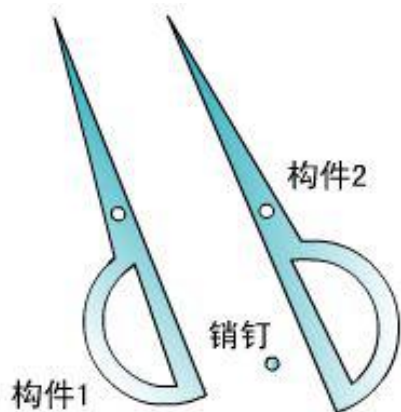


可用二个通过轴心的正交分力 \vec{F}_x, \vec{F}_y 表示.

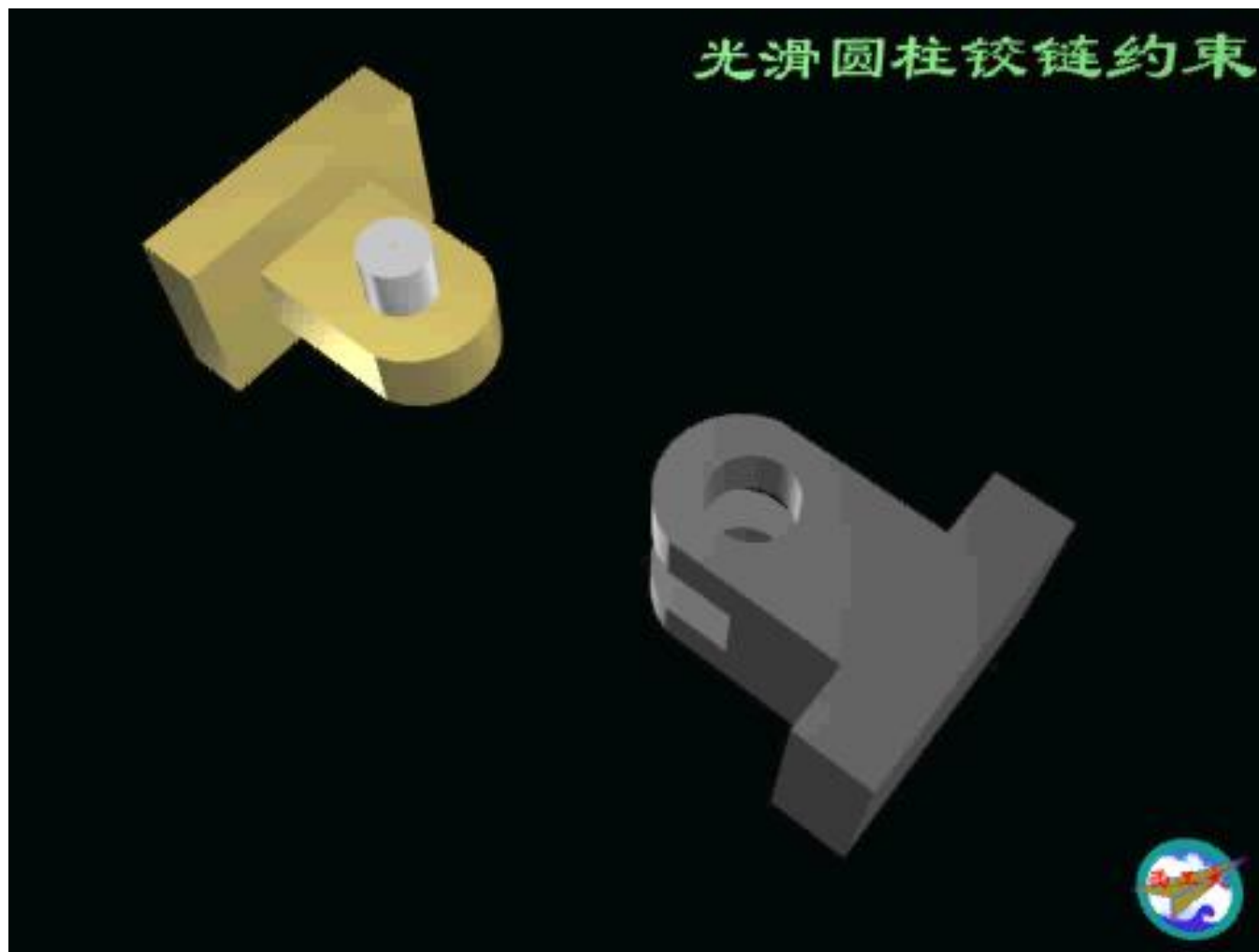


(2) 光滑圆柱铰链

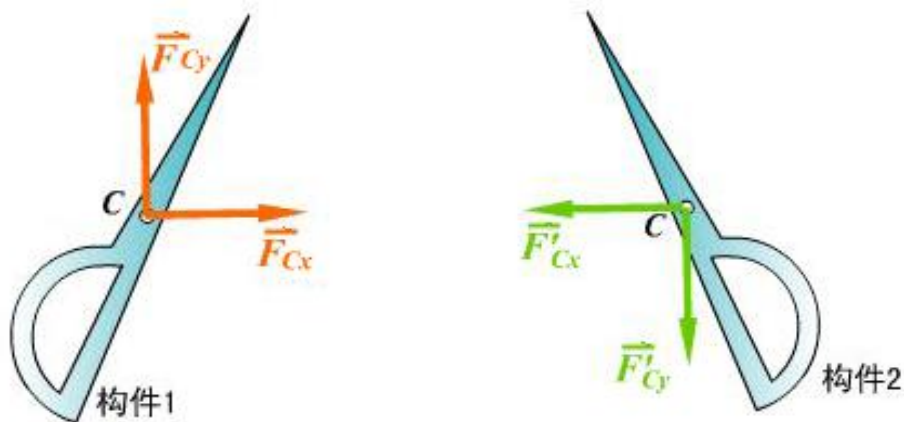
约束特点：由两个各穿孔的构件及圆柱销钉组成，如剪刀。



光滑圆柱铰链约束



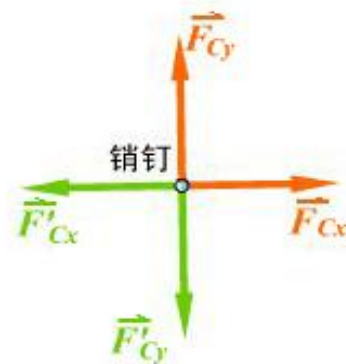
光滑圆柱铰链：亦为孔与轴的配合问题，与轴承一样，可用两个正交分力表示。



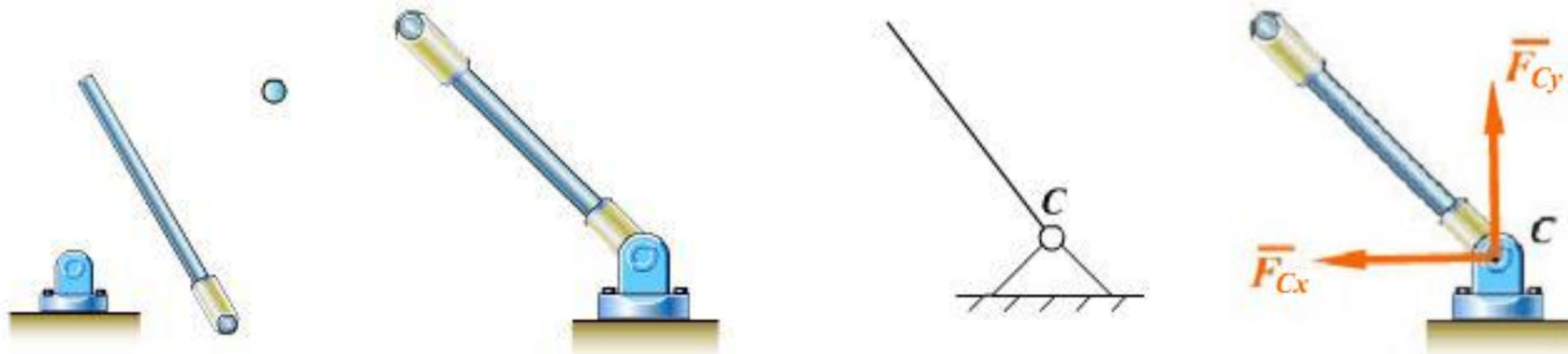
其中有作用反作用关系

$$\vec{F}_{Cx} = -\vec{F}'_{Cx}, \vec{F}_{Cy} = -\vec{F}'_{Cy}$$

一般不必分析销钉受力，当要分析时，必须把销钉单独取出。



(3) 固定铰链支座



约束特点：

由上面构件1或2 之一与地面或机架固定而成.

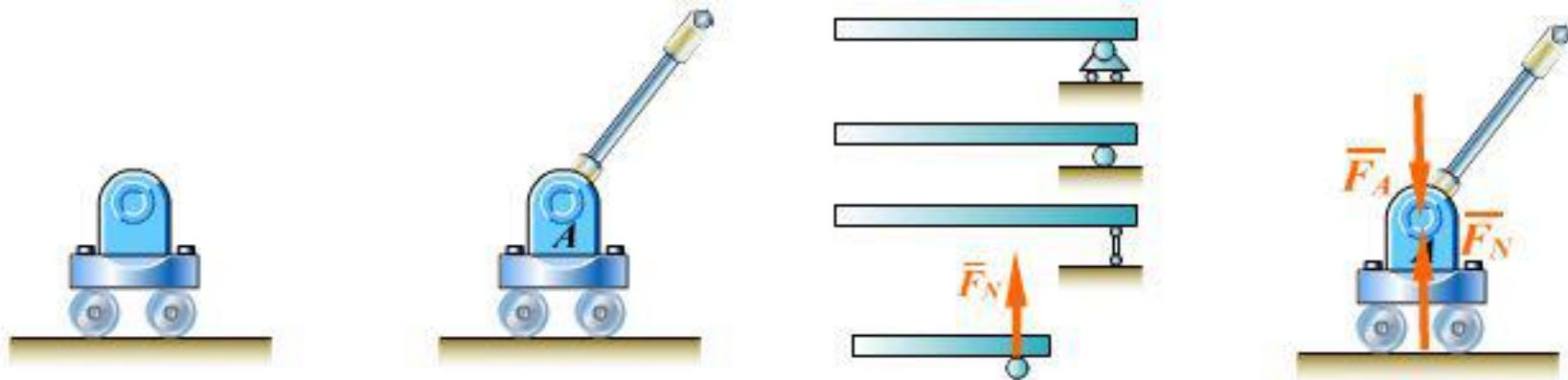
约束力：与圆柱铰链相同

以上三种约束（径向轴承、光滑圆柱铰链、固定铰链支座）其约束特性相同，均为轴与孔的配合问题，都可称作光滑圆柱铰链。



4、其它类型约束

(1) 滚动支座



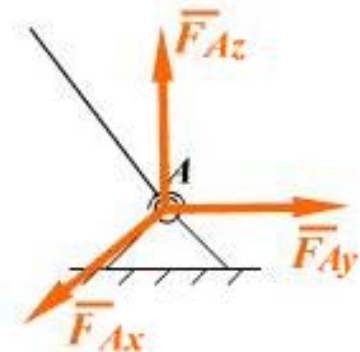
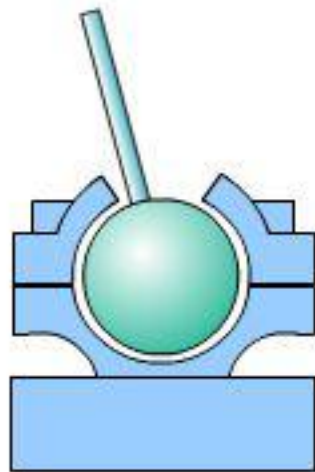
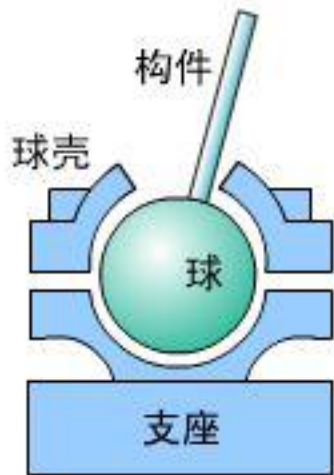
约束特点：

在上述固定铰支座与光滑固定平面之间装有光滑辊轴而成。

约束力：构件受到垂直于光滑面的约束力。



(2) 球铰链



约束特点：通过球与球壳将构件连接，构件可以绕球心任意转动，但构件与球心不能有任何移动。

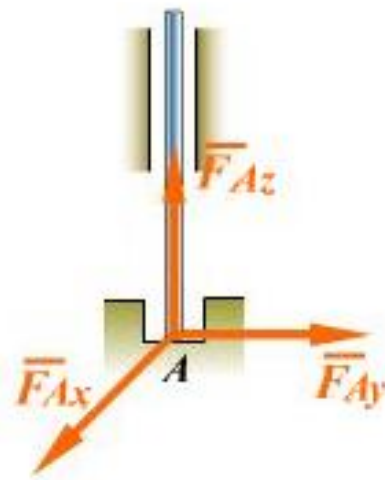
约束力：当忽略摩擦时，球与球座亦是光滑约束问题。约束力通过接触点，并指向球心，是一个不能预先确定的空间力。可用三个正交分力表示。



(3) 止推轴承

约束特点：

止推轴承比径向轴承多一个轴向的位移限制。



约束力：比径向轴承多一个轴向的约束力，亦有三个正交分力 \vec{F}_{Ax} , \vec{F}_{Ay} , \vec{F}_{Az} 。



总结

(1) 光滑面约束——法向约束力 \vec{F}_N

(2) 柔索约束——张力 \vec{F}_T

(3) 光滑铰链—— \vec{F}_{Ay} , \vec{F}_{Ax}

(4) 滚动支座—— $\vec{F}_N \perp$ 光滑面

球铰链——空间三正交分力

止推轴承——空间三正交分力



1.4 物体的受力和受力图

在受力图上应画出所有力，主动力和约束力（被动力）

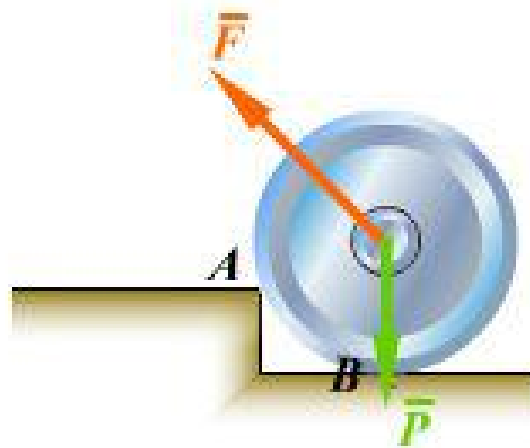
画受力图步骤：

- 1、取所要研究物体为研究对象（分离体），画出其简图
- 2、画出所有主动力
- 3、按约束性质画出所有约束（被动）力



例1-1

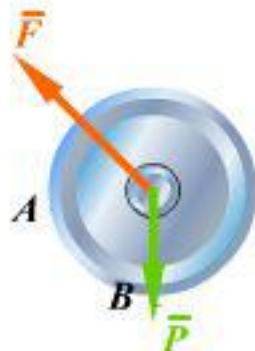
碾子重为 \vec{P} ，拉力为 \vec{F} ， A 、 B 处光滑接触，画出碾子的受力图。



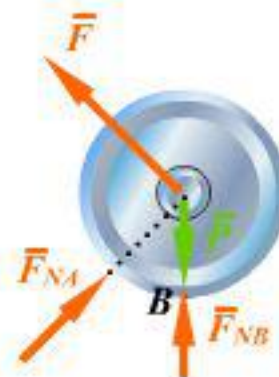
解：画出简图



画出主动力



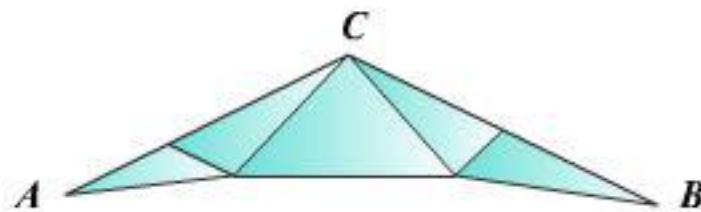
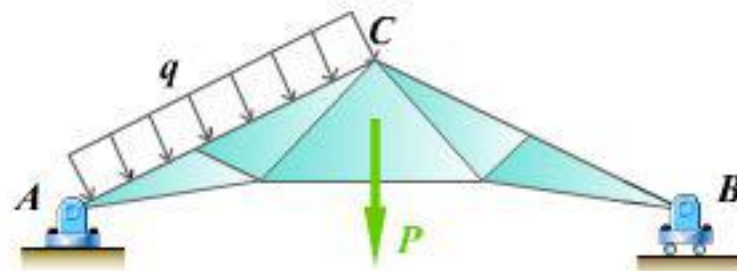
画出约束力



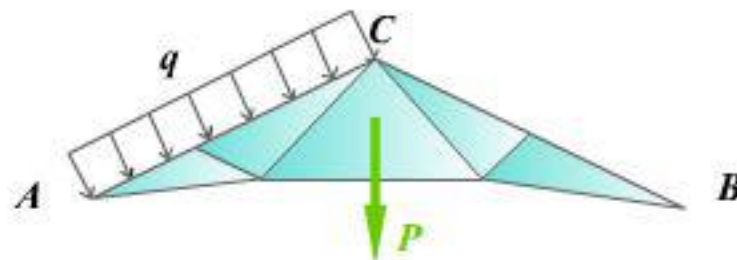
例1-2

屋架受均布风力 q (N/m)，
屋架重为 \bar{P} ，画出屋架的受力图。

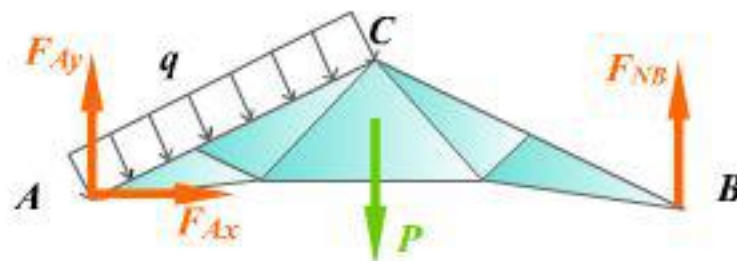
解：取屋架 画出简图



画出主动力

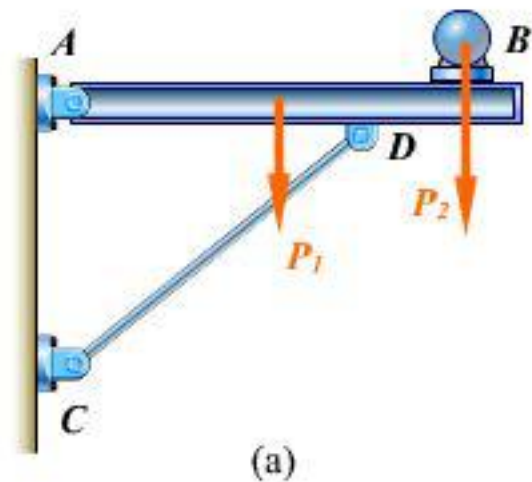


画出约束力



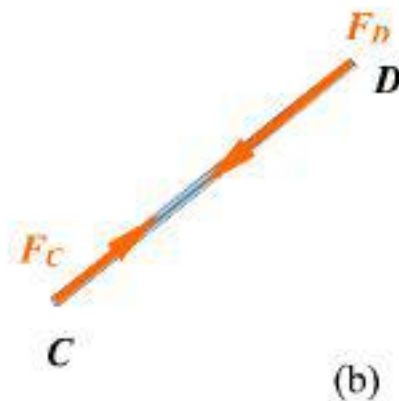
例1-3

水平均质梁 AB 重为 \vec{P}_1 ，电动机重为 \vec{P}_2 ，不计杆 CD 的自重，画出杆 CD 和梁 AB 的受力图。

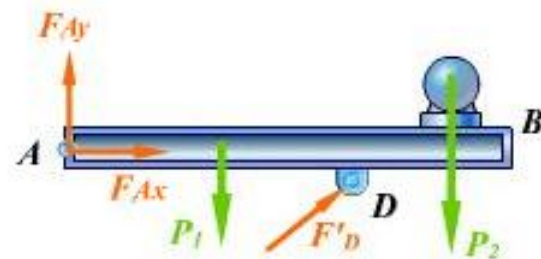


解：

取 CD 杆，其为二力构件，简称二力杆，其受力图如图 (b)

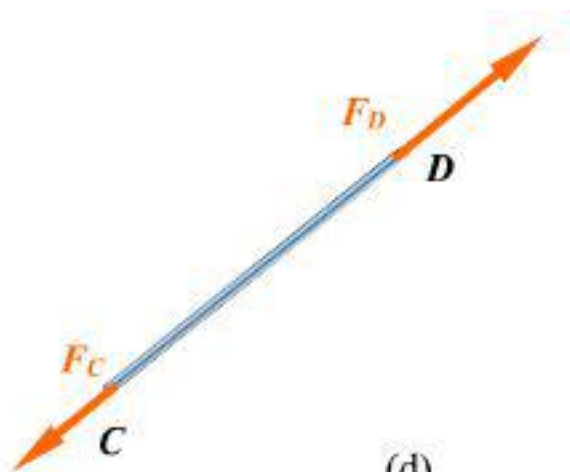


取 AB 梁，其受力图如图 (c)



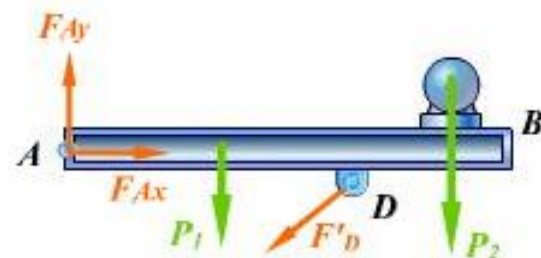
(c)

CD 杆的受力图能否画为图 (d) 所示?



(d)

若这样画，梁 AB 的受力图又如何改动?

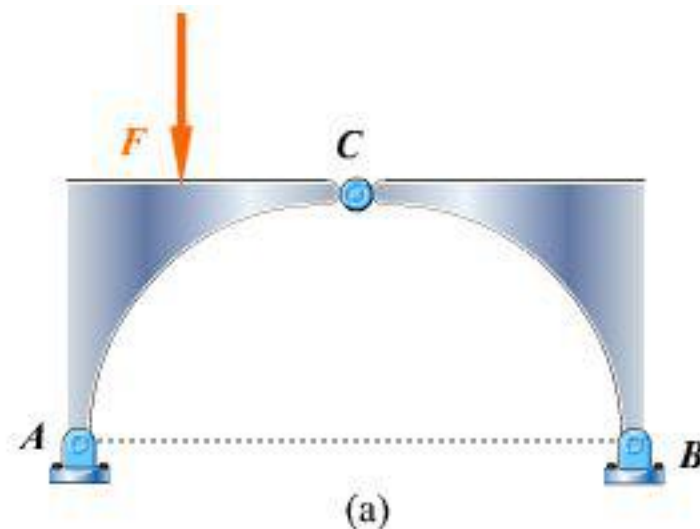


(e)



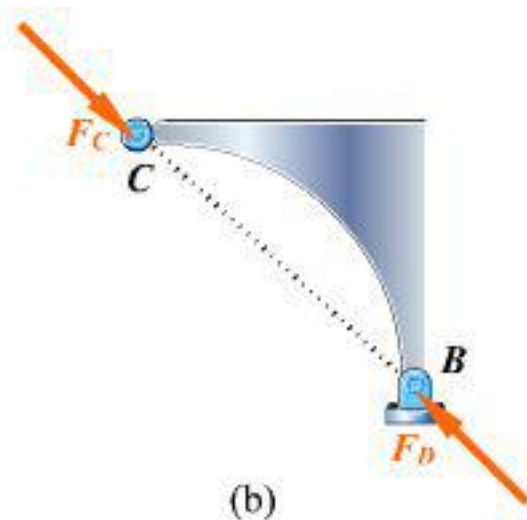
例1-4

不计三铰拱桥的自重与摩擦，
画出左、右拱 AB, CB 的受力图
与系统整体受力图。

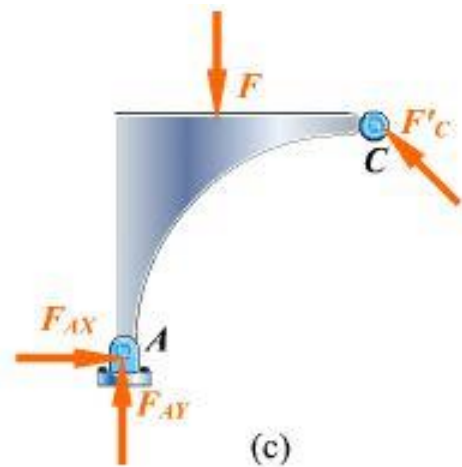


解：

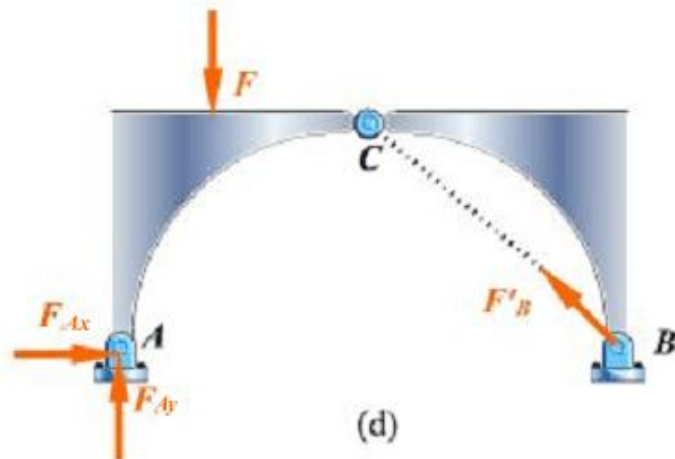
右拱 CB 为二力构件，其受力
图如图 (b) 所示



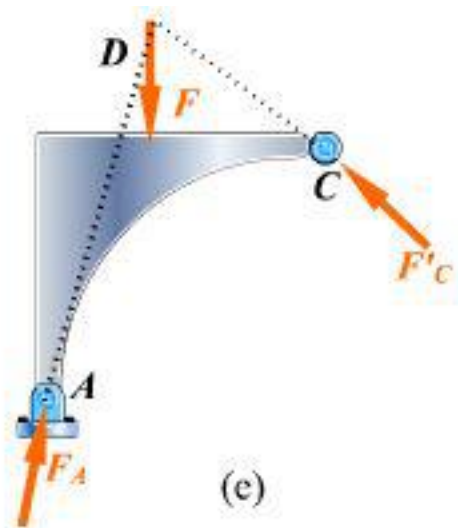
取左拱 AC , 其受力图如图
(c) 所示



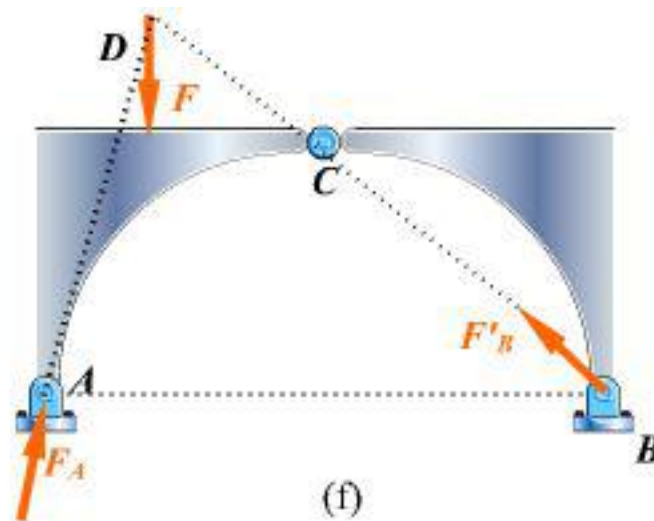
系统整体受力图如图
(d) 所示



考虑到左拱 AC 三个力作用下平衡，也可按三力平衡汇交定理画出左拱 AC 的受力图，如图 (e) 所示

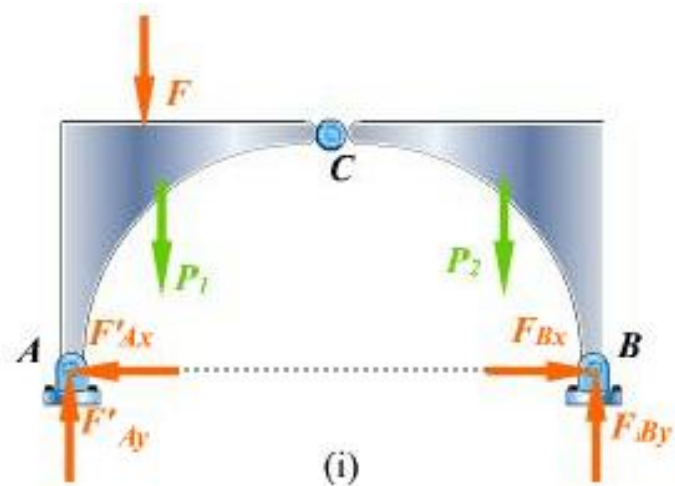
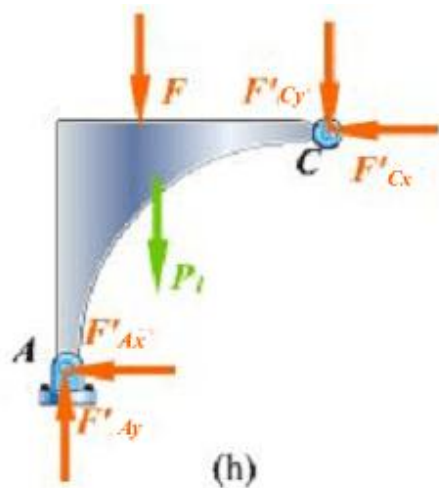
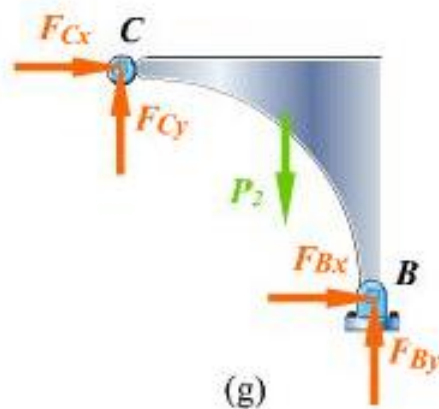


此时整体受力图如图 (f) 所示



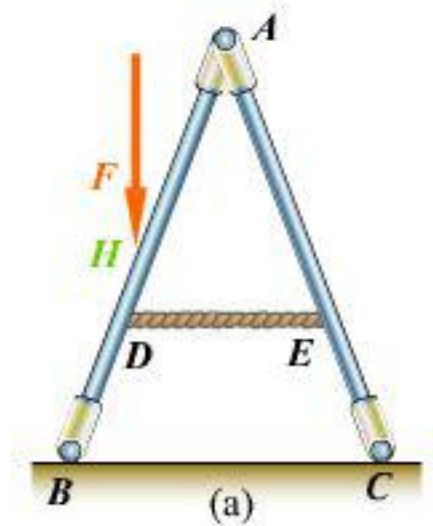
讨论：若左、右两拱都考虑自重，如何画出各受力图？

如图 (g) (h) (i)



例1-5

不计自重的梯子放在光滑水平地面上，画出梯子、梯子左右两部分与整个系统受力图。



解：

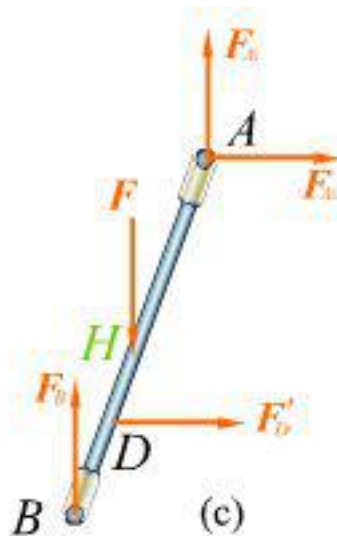
绳子受力图如图 (b) 所示



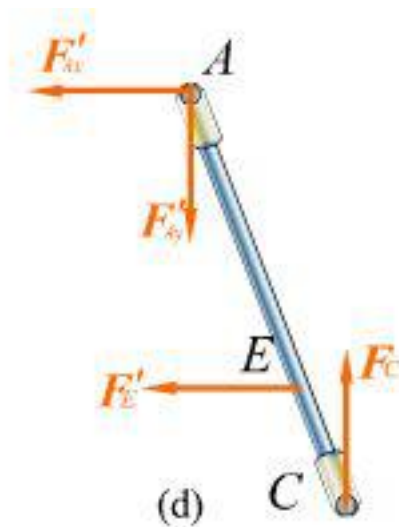
(b)



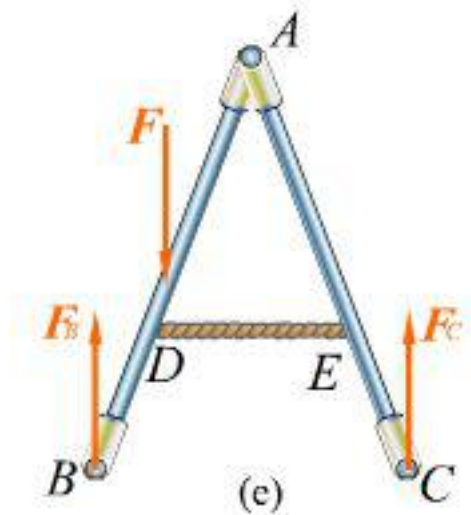
梯子左边部分受力图
如图 (c) 所示



梯子右边部分受力图
如图 (d) 所示



整体受力图如图 (e) 所示



提问：左右两部分梯子在 A 处，绳子对左右两部分梯子均有力作用，为什么在整体受力图没有画出？

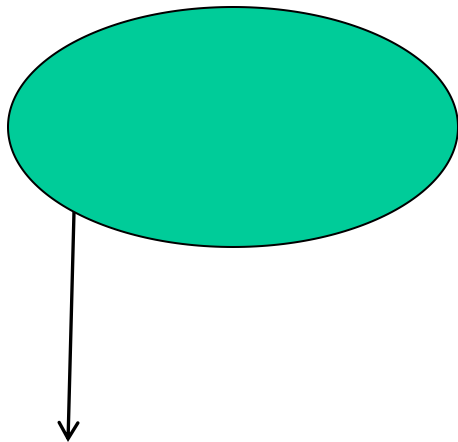


第2章 力系的平衡

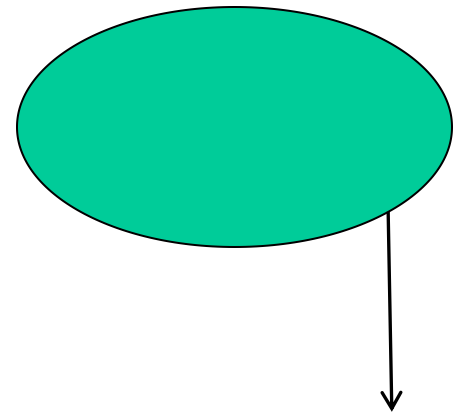


2.1 力线平移定理

- 力是滑移矢量，可以沿着作用线自由移动一力的可传性
- 力是否可以平行地移动？
- 从矢量数学的角度看，矢量沿原直线移动和平行偏移，都不改变矢量的数学本质



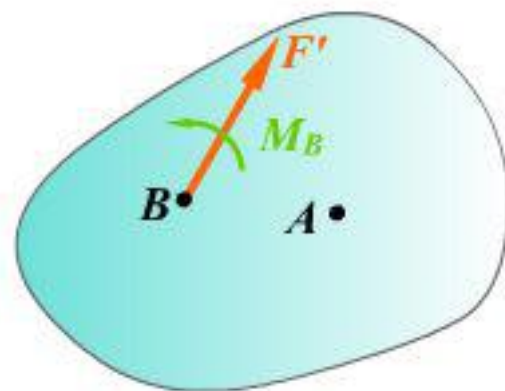
\neq



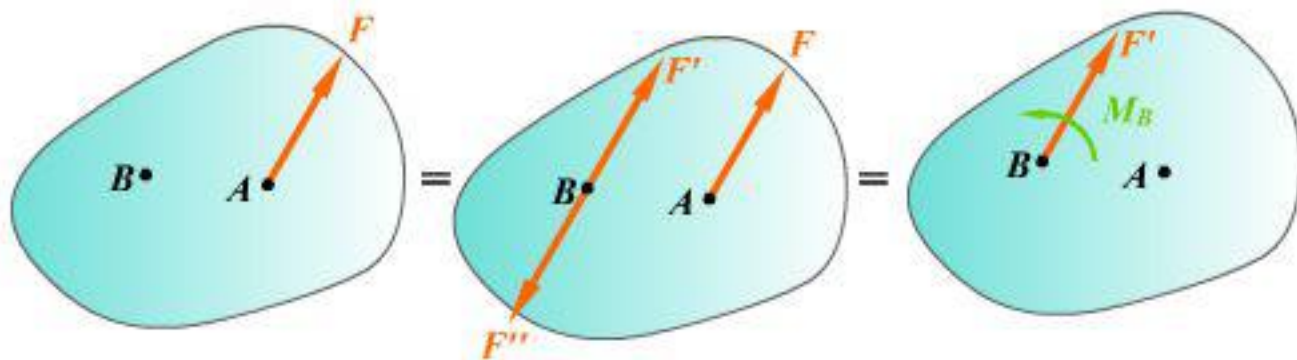
如何实现力的作用线的平行移动

力的平移定理

可以把作用在刚体上点 A 的力 F 平行移到任一点 B ，但同时必须附加一个力偶，这个附加力偶的矩等于原来的力 F 对新作用点 B 的矩。

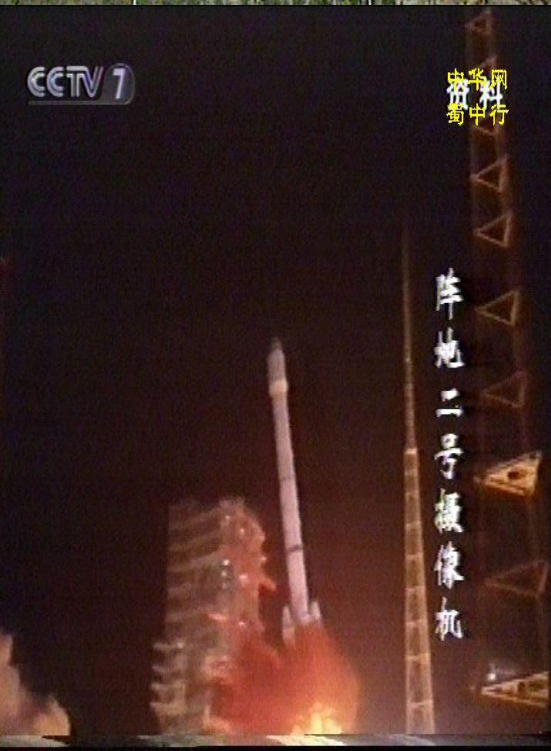


$$M_B = M_B(\vec{F}) = Fd$$

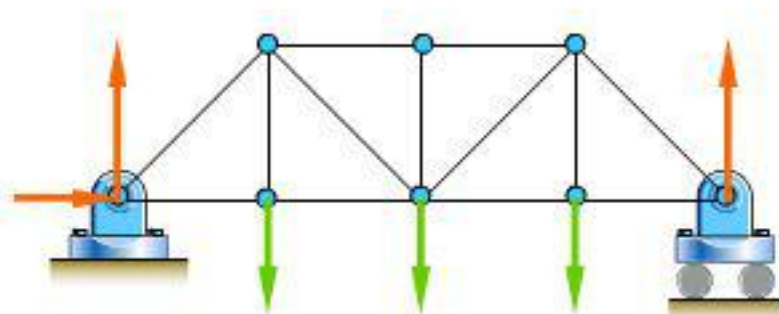
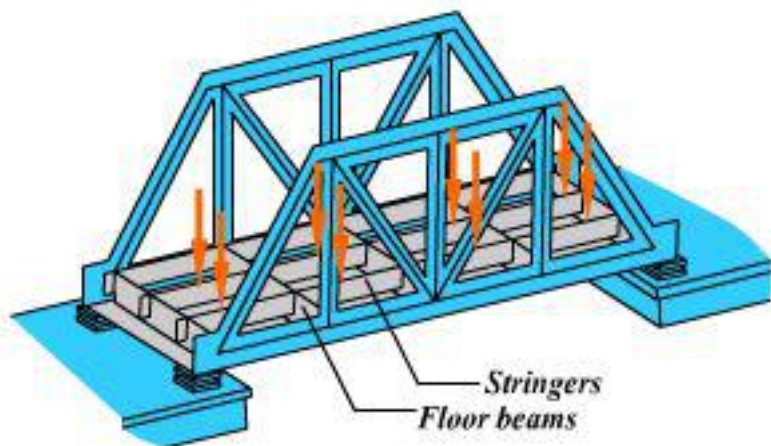


- 工程中有很多利用力线平移定理的实例，如火箭、轮船等用一个发动机推进，并实现转向
- 利用力线平移定理，还可以实现复杂力系的简化，成为力系简化的基础





2.2 力系的简化

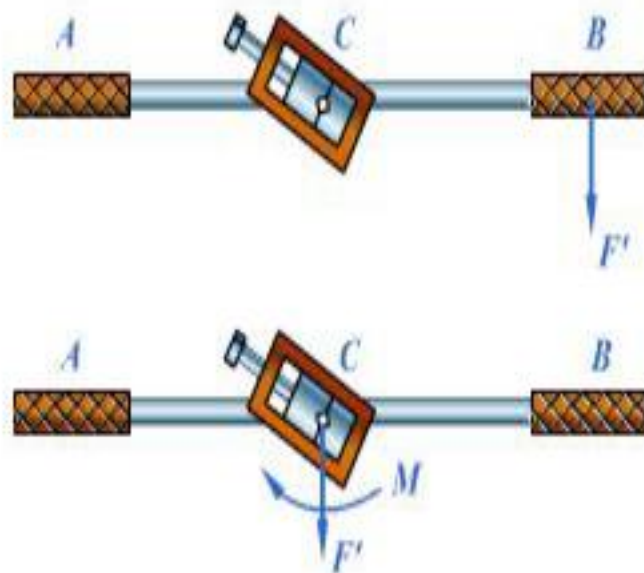
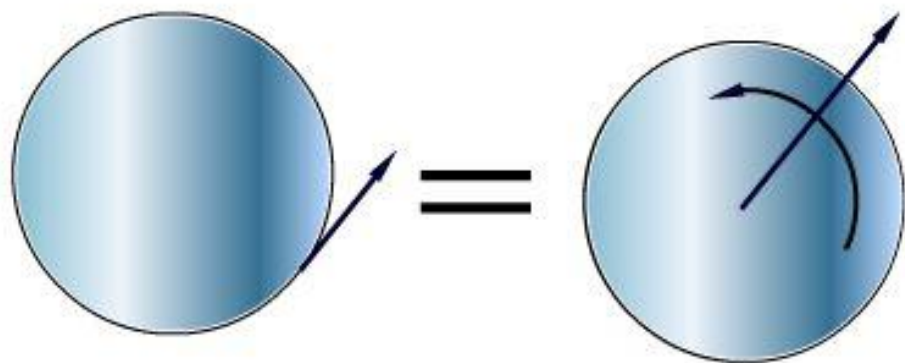


平面任意力系实例

力系可以分成：汇交力系、力偶系、任意力系

任意力系也称复杂力系，其作用线为任意状态
任意力系的处理，需要通过力系平移进行简化





设有平面任意力系, $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_n$

平面任意力系向作用面内一点简化 • 主矢和主矩

$$\vec{F}'_1 = \vec{F}_1 \quad M_1 = M_O(\vec{F}_1)$$

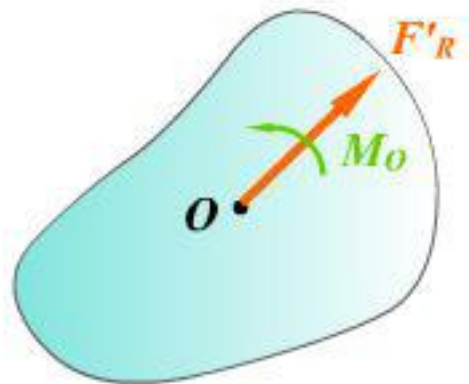
$$\vec{F}'_2 = \vec{F}_2 \quad M_2 = M_O(\vec{F}_2)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

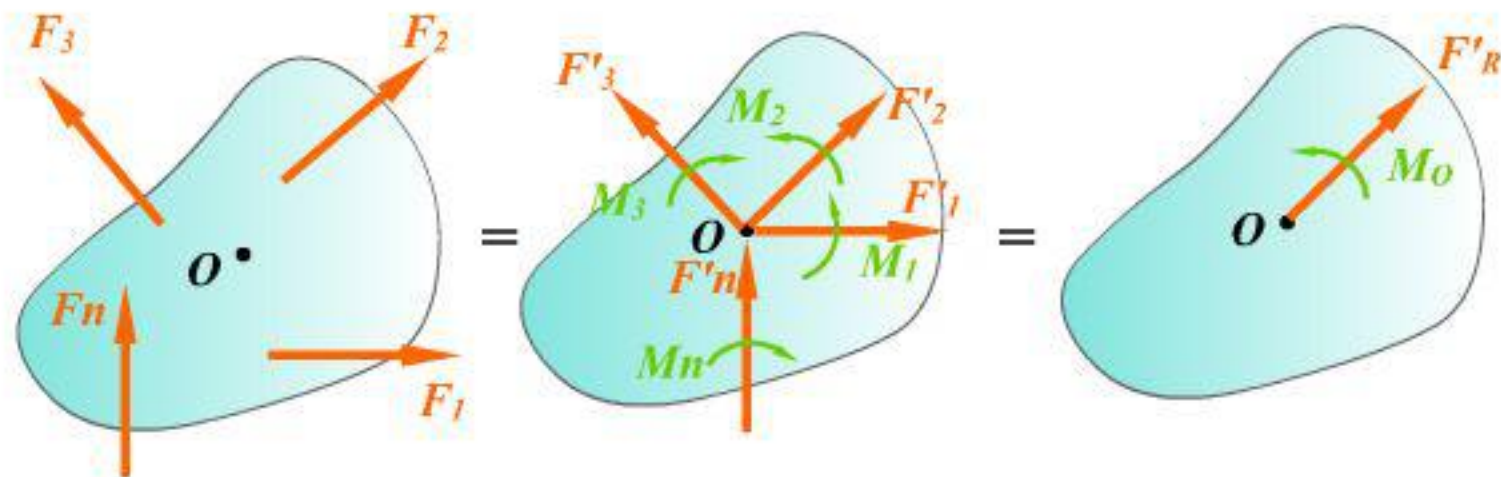
$$\vec{F}'_n = \vec{F}_n \quad M_n = M_O(\vec{F}_n)$$

$$\vec{F}'_R = \sum \vec{F}'_i = \sum \vec{F}_i$$

$$M_O = \sum M_i = \sum M_O(\vec{F}_i)$$



主矢 $\vec{F}'_R = \Sigma \vec{F}_i$ 主矩 $M_o = \Sigma M_o(\vec{F}_i)$



主矢与简化中心无关，而主矩一般与简化中心有关.

$$F_{Rx}' = \sum F_{ix}' = \sum F_{ix} = \sum F_x$$

$$F_{Ry}' = \sum F_{iy}' = \sum F_{iy} = \sum F_y$$

主矢大小

$$F_R' = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2}$$

方向

$$\cos(\vec{F}_R', \vec{i}) = \frac{\sum F_{ix}}{F_R'}$$

$$\cos(\vec{F}_R', \vec{j}) = \frac{\sum F_{iy}}{F_R'}$$

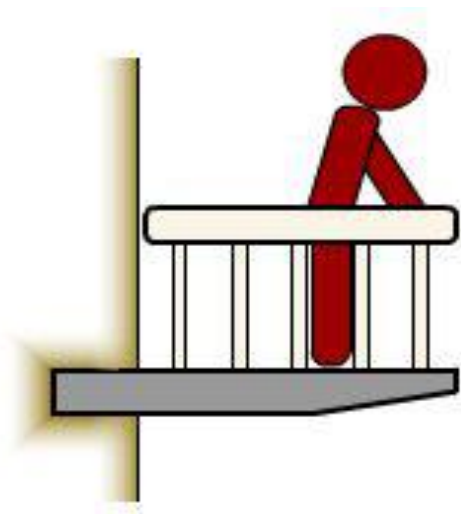
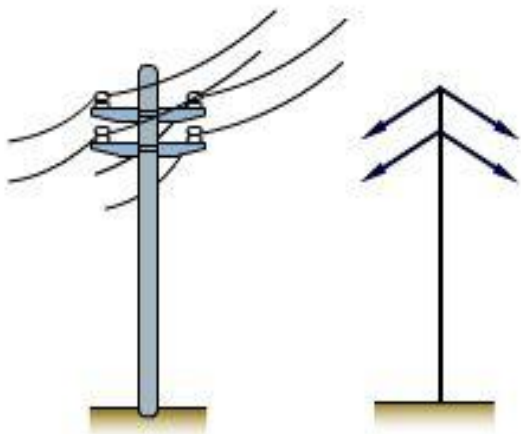
作用点 作用于简化中心上

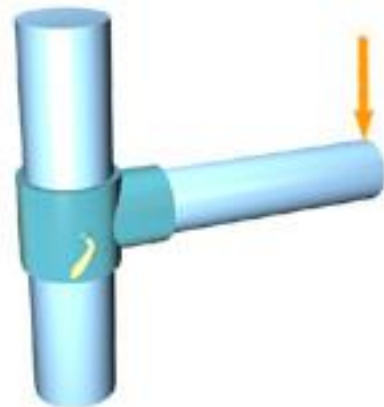
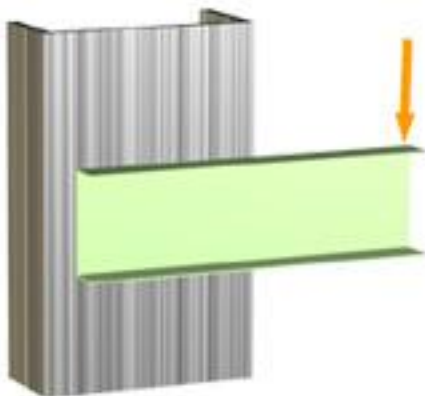
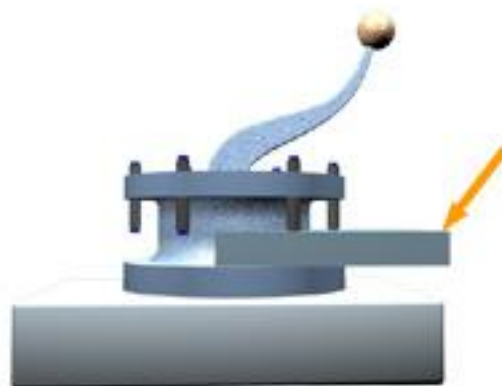
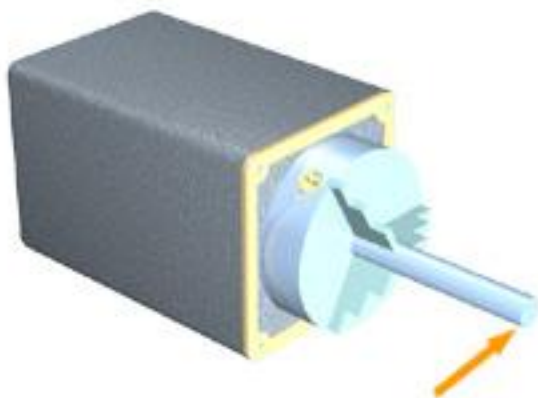
主矩

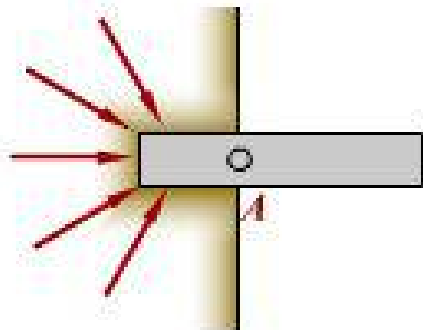
$$M_O = \sum M_O(\vec{F}_i)$$



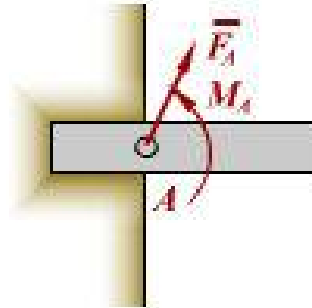
平面固定端约束



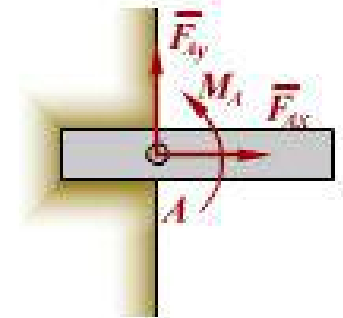




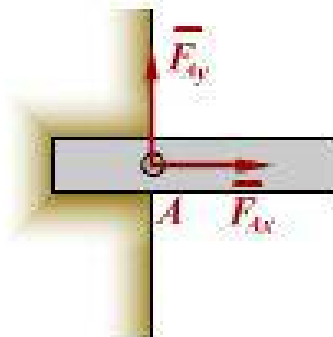
=



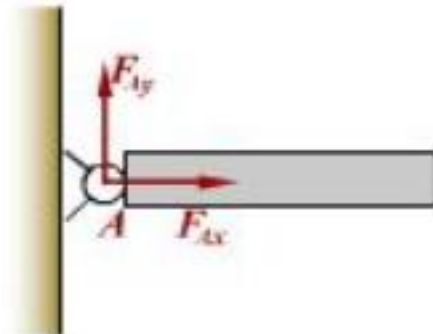
=



\neq

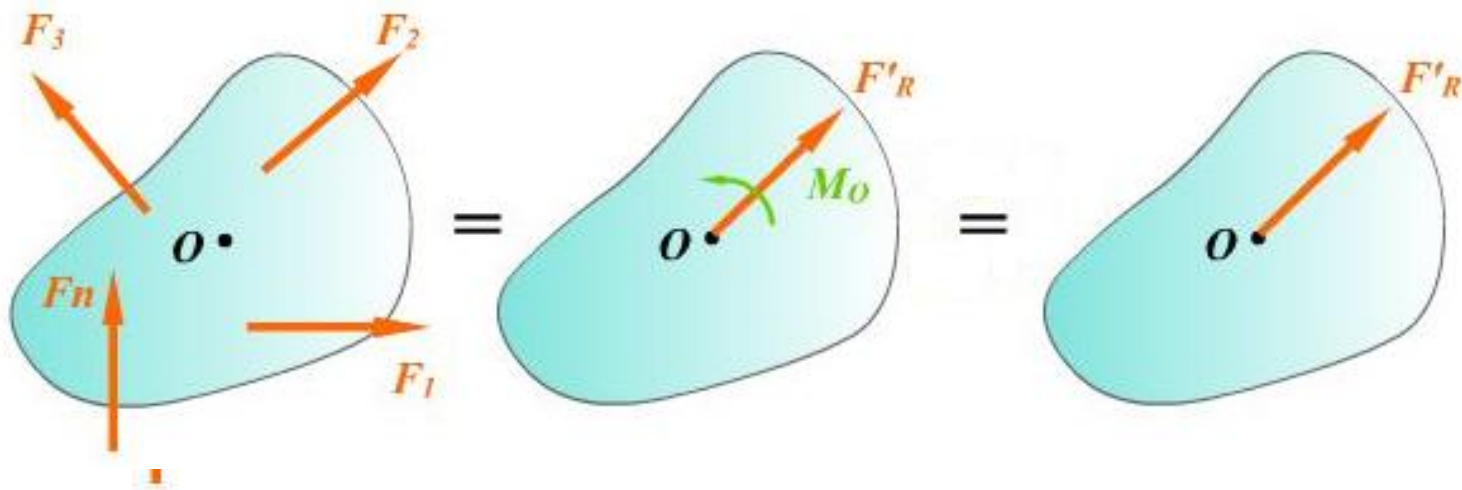


=



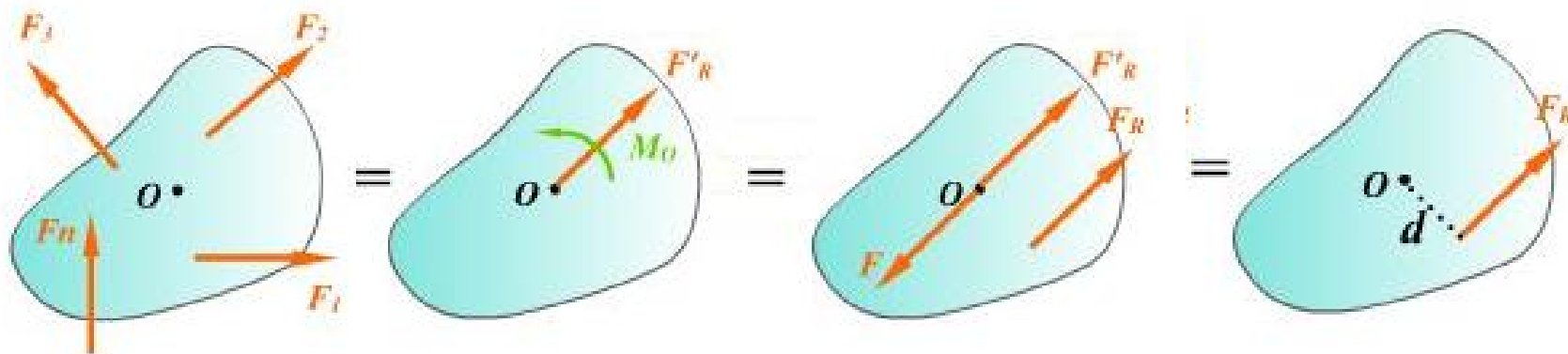
平面任意力系的简化结果分析

$\bar{F}'_R \neq 0 \quad M_O = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{合力作用线过简化中心}$



$\bar{F}'_R \neq 0 \quad M_O \neq 0 \quad \longrightarrow$ 合力，作用线距简化中心

$$\frac{M_O}{|F'_R|}$$



$$d = \frac{M_O}{F'_R}$$

$$M_O = F'_R d$$

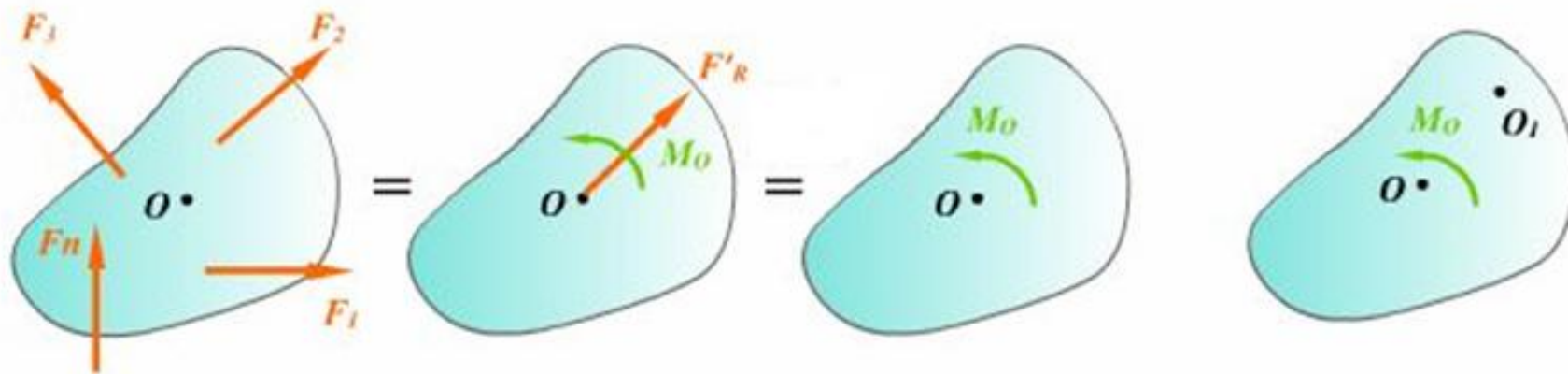
$$F_R = F'_R = F$$

合力矩定理

$$M_O(\bar{F}_R) = M_O = \sum M_O(\bar{F}_i)$$



$\bar{F}'_R = 0$ $M_O \neq 0$ \longrightarrow 合力偶
 与简化中心的位置无关

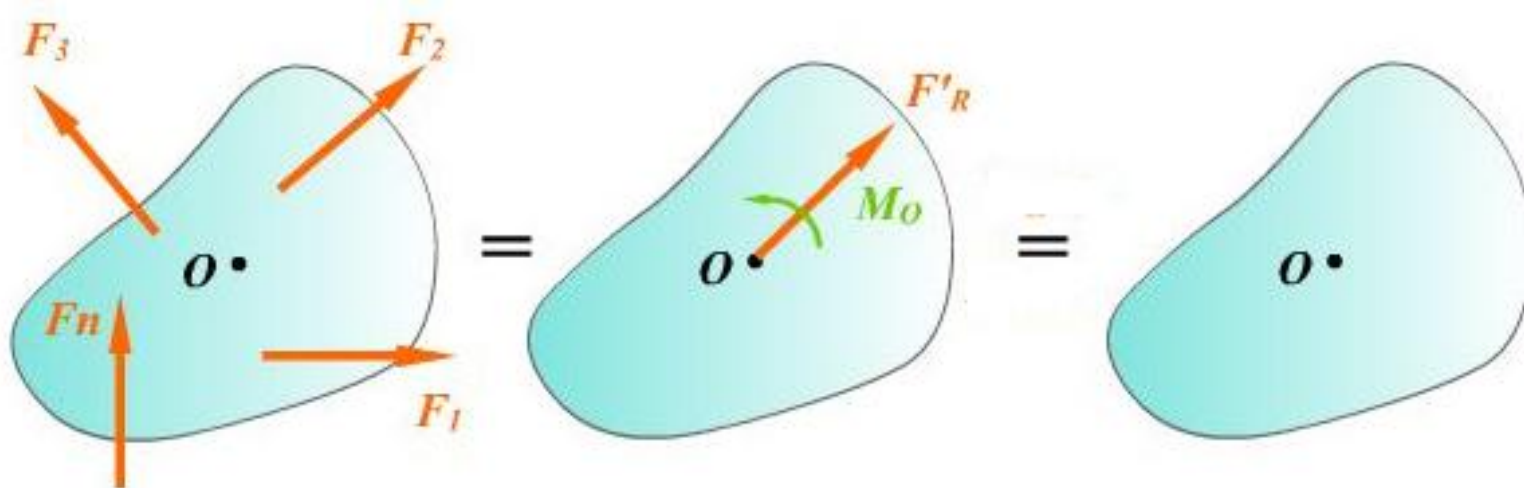


若力系向 O_1 点简化，结果如何？



$$\overline{F}'_R = 0 \quad M_O = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{平衡}$$

与简化中心的位置无关

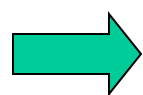


2.3 力系的平衡与应用

1. 平面任意力系的平衡方程

平面任意力系平衡的充要条件是：

力系的主矢和对任意点的主矩都等于零



$$\bar{F}'_R = 0$$

$$M_O = 0$$

因为

$$F'_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \qquad M_O = \sum M_O(\bar{F}_i)$$



平面任意力系的平衡方程

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_O = 0 \end{cases}$$

一般式

平面任意力系平衡的解析条件是：所有各力在两个任选的坐标轴上的投影的代数和分别等于零，以及各力对于任意一点的矩的代数和也等于零。

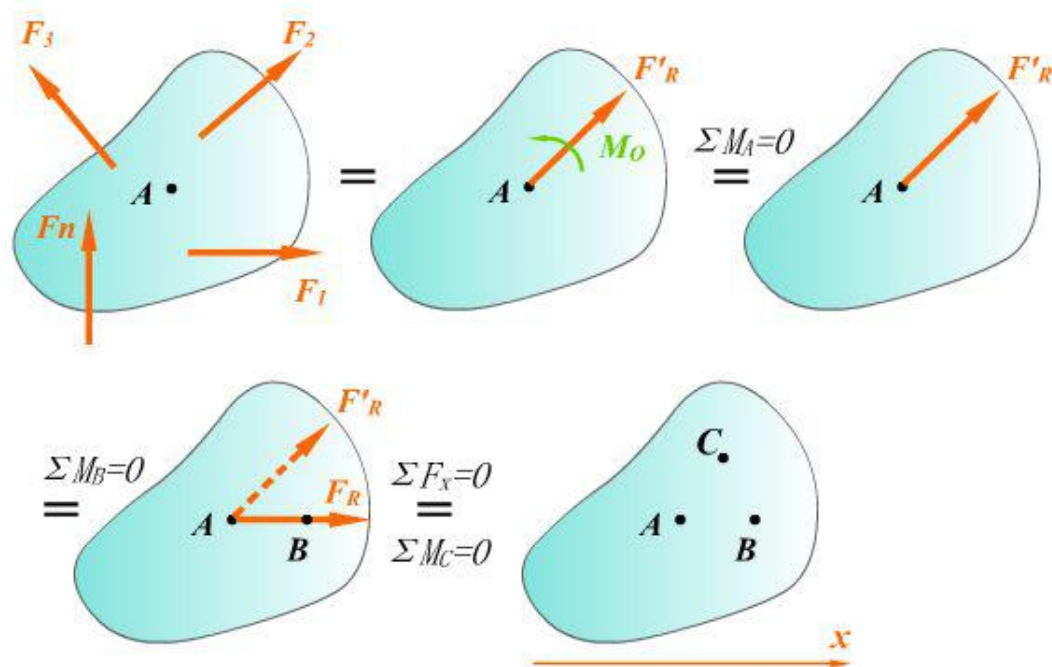


平面任意力系的平衡方程另两种形式

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases}$$

二矩式

两个取矩点连线，不得与投影轴垂直



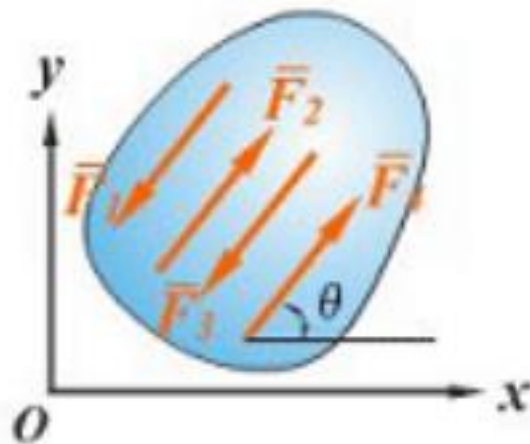
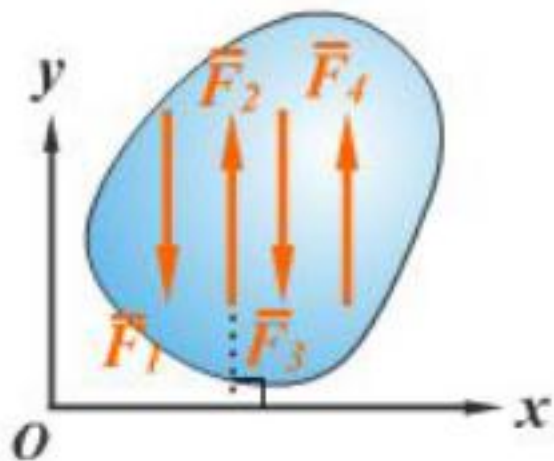
$$\begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{cases}$$

三矩式

三个取矩点，不得共线



2. 平面平行力系的平衡方程



$$\sum F_x = 0 \qquad 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

$$\sum F_x = 0 \qquad F_1 \cos \theta - F_2 \cos \theta + F_3 \cos \theta + \dots = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_1 \sin \theta - F_2 \sin \theta + F_3 \sin \theta + \dots = 0$$



平面平行力系的方程为两个，有两种形式

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases}$$

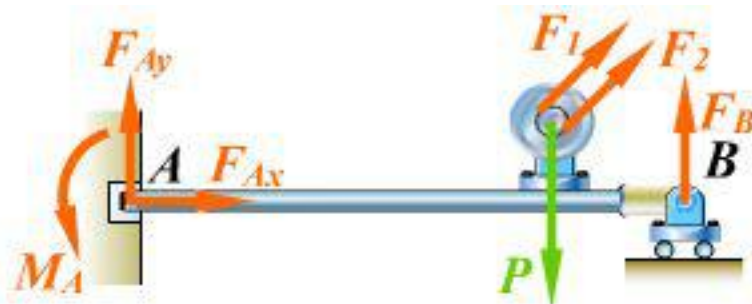
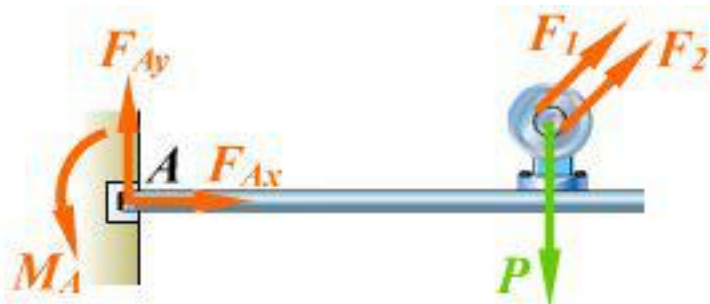
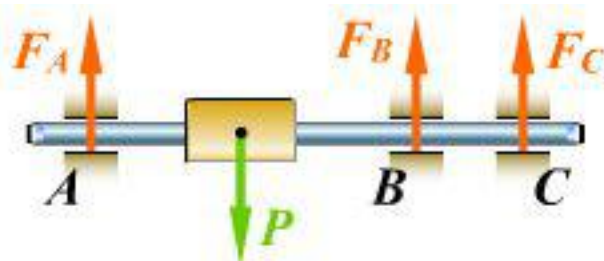
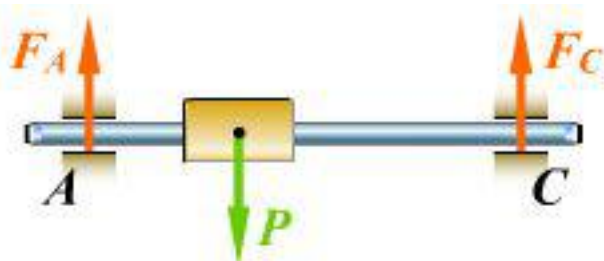
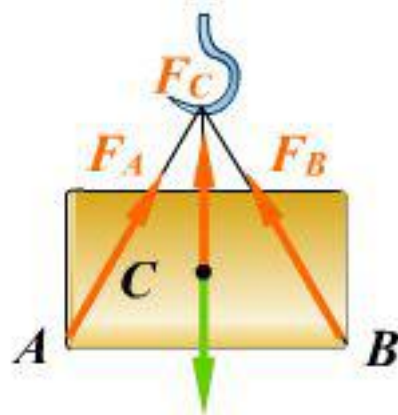
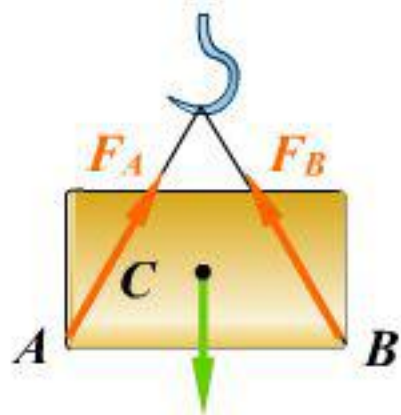
各力不得与投影轴垂直

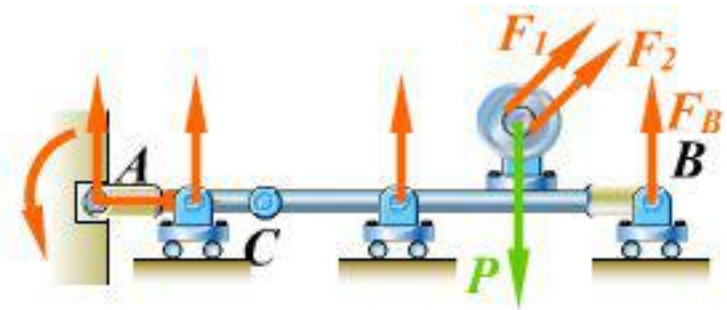
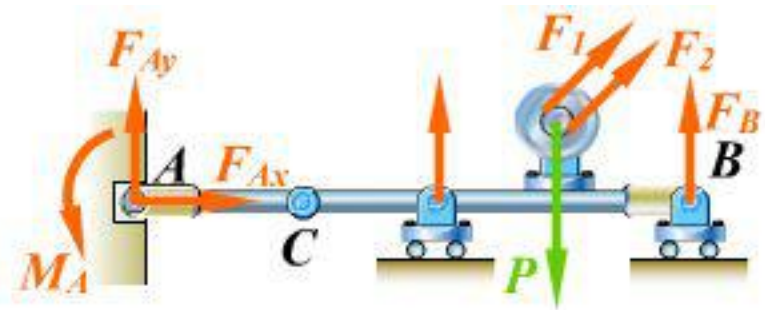
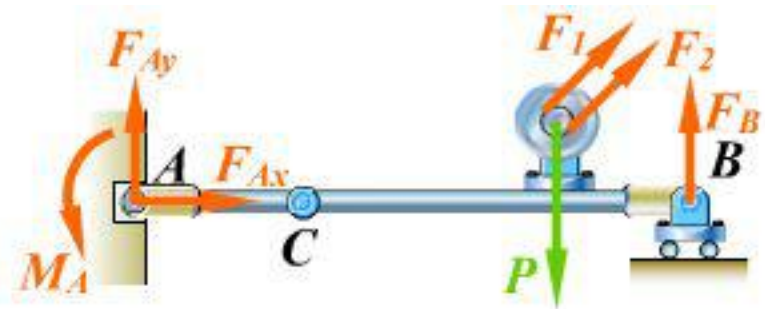
$$\begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases}$$

两点连线不得与各力平行



物体系的平衡 • 静定和超静定问题





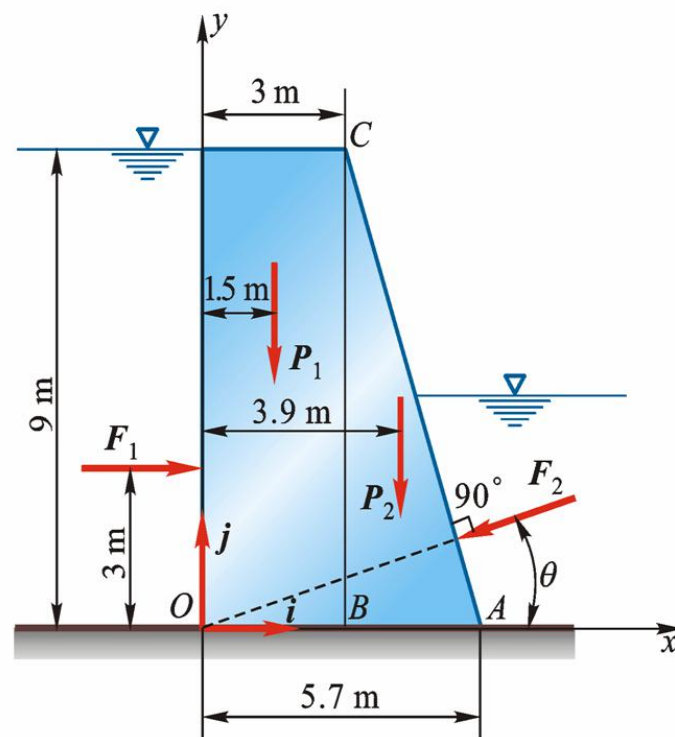
例2-1

已知： $P_1 = 450\text{kN}$, $P_2 = 200\text{kN}$, $F_1 = 300\text{kN}$, $F_2 = 70\text{kN}$

求：力系向 O 点的简化结果；

合力与 OA 的交点到点 O 的距离 x ；

合力作用线方程。



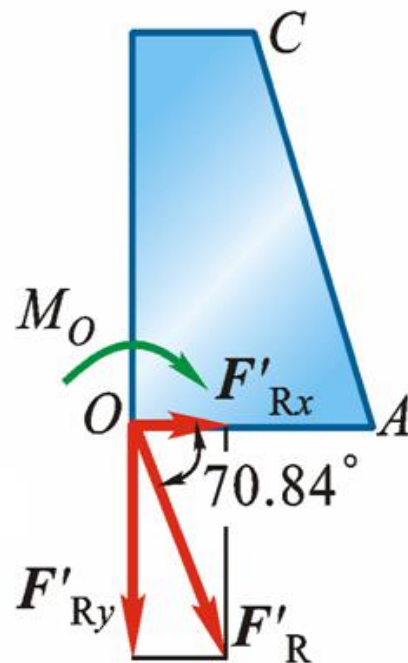
解:

(1) 主矢:

$$\sum F_x = F_1 - F_2 \cos \theta = 232.9 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = -P_1 - P_2 - F_2 \sin \theta = -670.1 \text{ kN}$$

→ $F_R' = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = 709.4 \text{ kN}$



$$\cos(\vec{F}_R', \vec{i}) = \frac{\sum F_x}{F_R'} = 0.3283, \cos(\vec{F}_R', \vec{j}) = \frac{\sum F_y}{F_R'} = -0.9446$$

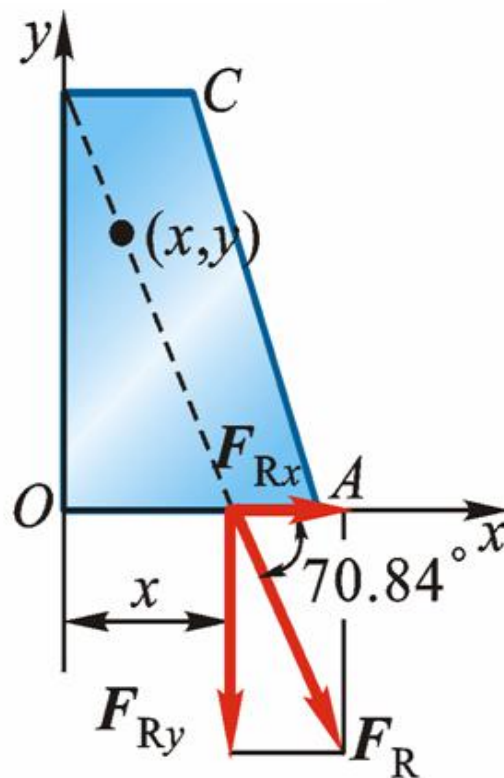
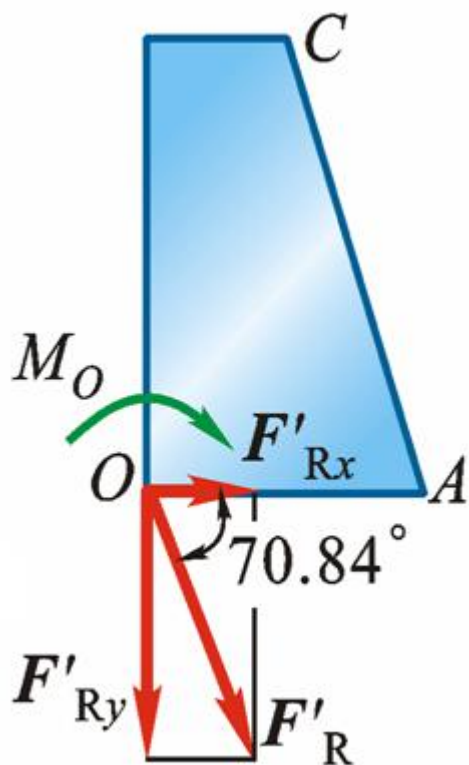
→ $\angle(\vec{F}_R', \vec{i}) = \pm 70.84^\circ, \angle(\vec{F}_R', \vec{j}) = 180^\circ \pm 19.16^\circ$

主矩:

$$M_O = \sum M_O(\vec{F}) = -3F_1 - 1.5P_1 - 3.9P_2 = -2355 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



(2) 求合力及其作用线位置:



$$x = \frac{d}{\cos(90^\circ - 70.84^\circ)} = 3.514\text{m}$$

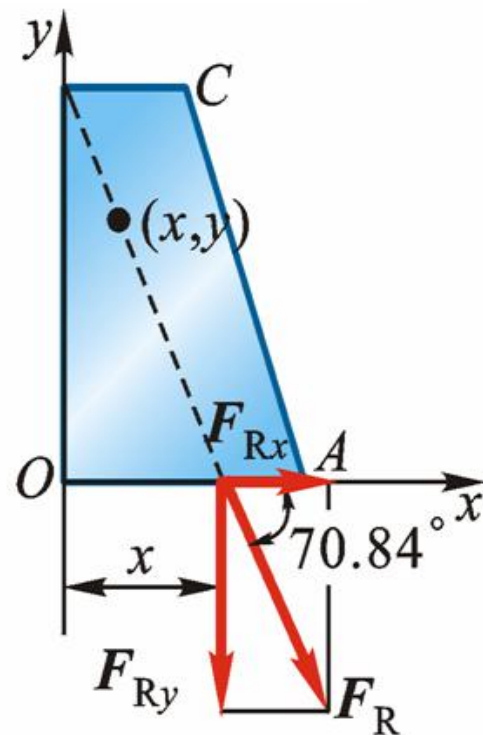


(3) 求合力作用线方程:

$$M_O = \sum M_O(\vec{F}_R) = x \cdot F_{Ry} - y \cdot F_{Rx} = x \cdot F'_{Ry} - y \cdot F'_{Rx}$$

$$\rightarrow -2355 = x(-670.1) - y(232.9)$$

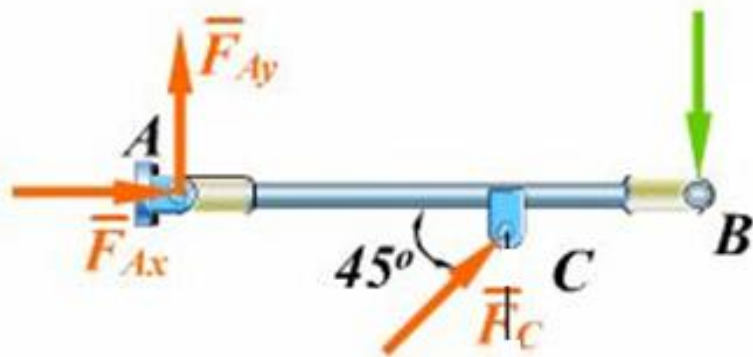
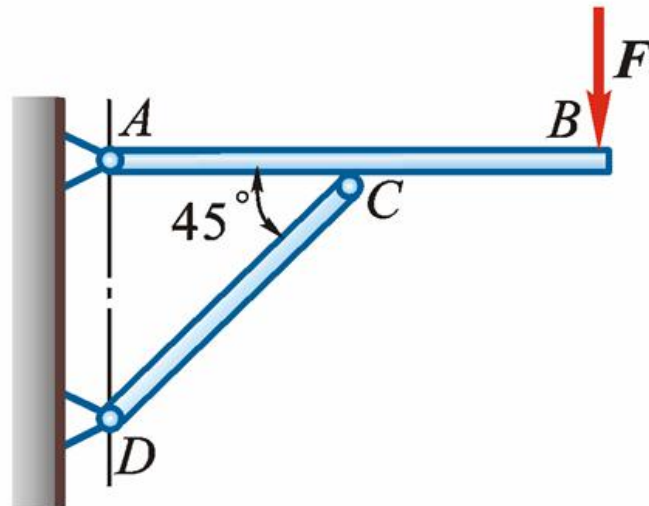
$$\rightarrow 607.1x - 232.9y - 2355 = 0$$



例2-2

已知: $AC = CB = l, F = 10\text{kN}$

求: 铰链 A 和 DC 杆受力.



解: 取 AB 梁, 画受力图.

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} + F_C \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_C \sin 45^\circ - F = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad F_C \cos 45^\circ \cdot l - F \cdot 2l = 0$$

解得 $F_C = 28.28\text{kN}, F_{Ax} = -20\text{kN}, F_{Ay} = -10\text{kN}$



例2-3

已知： $P_1 = 10\text{kN}$, $P_2 = 40\text{kN}$, 尺寸如图。

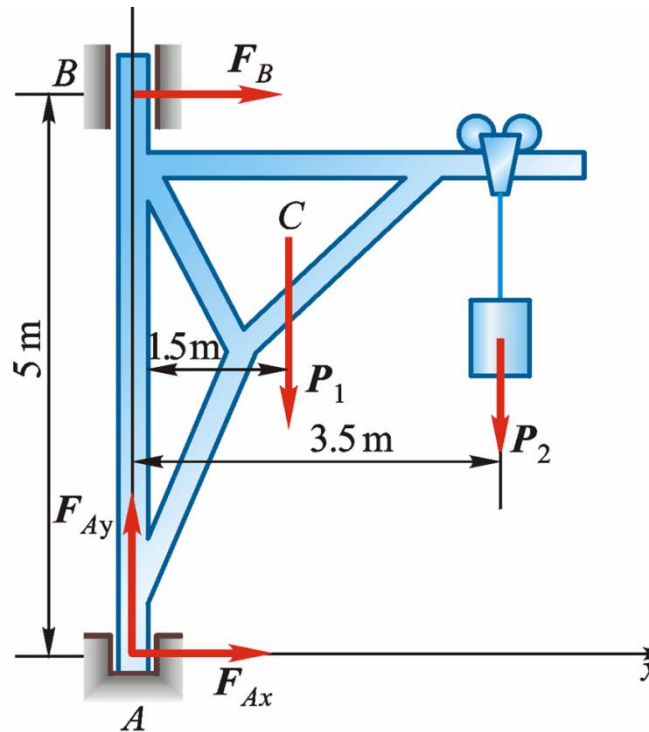
求： 轴承 A, B 处的约束力。

解： 取起重机，画受力图。

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} + F_B = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} - P_1 - P_2 = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad -F_B \cdot 5 - 1.5 \cdot P_1 - 3.5 \cdot P_2 = 0$$



解得

$$F_{Ay} = 50\text{kN} \quad F_B = -31\text{kN} \quad F_{Ax} = 31\text{kN}$$

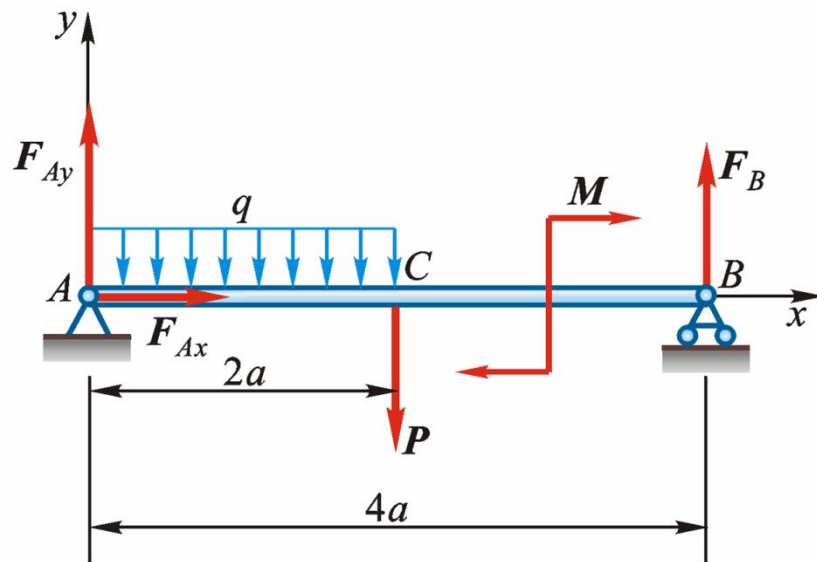


例2-4

已知: $P, q, a, M = qa$ 。

求: 支座 A, B 处的约束力。

解: 取 AB 梁, 画受力图。



$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad F_B \cdot 4a - M - P \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a = 0$$

$$F_B = \frac{3}{4}P + \frac{1}{2}qa$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} - q \cdot 2a - P + F_B = 0$$

$$F_{Ay} = \frac{P}{4} + \frac{3}{2}qa$$



例2-5

已知: $P = 100\text{kN}$, $M = 20\text{kN}\cdot\text{m}$,
 $q = 20\text{kN/m}$, $F = 400\text{kN}$, $l = 1\text{m}$

求: 固定端 A 处约束力.

解: 取 T 型刚架, 画受力图.

其中 $F_1 = \frac{1}{2}q \times 3l = 30\text{kN}$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} + F_1 - F \sin 60^\circ = 0$$

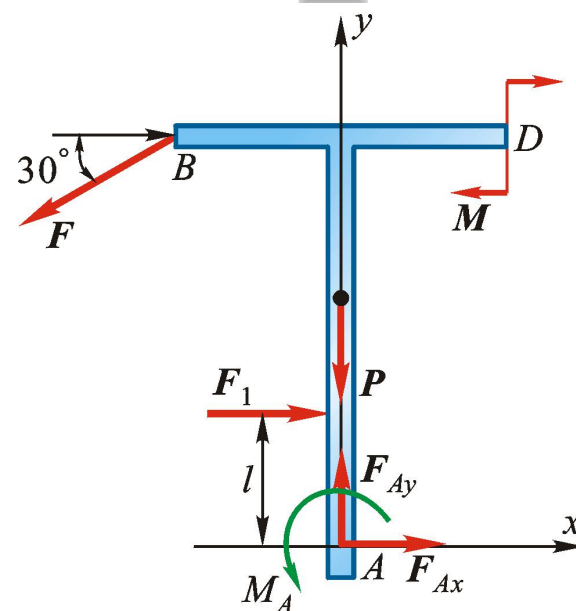
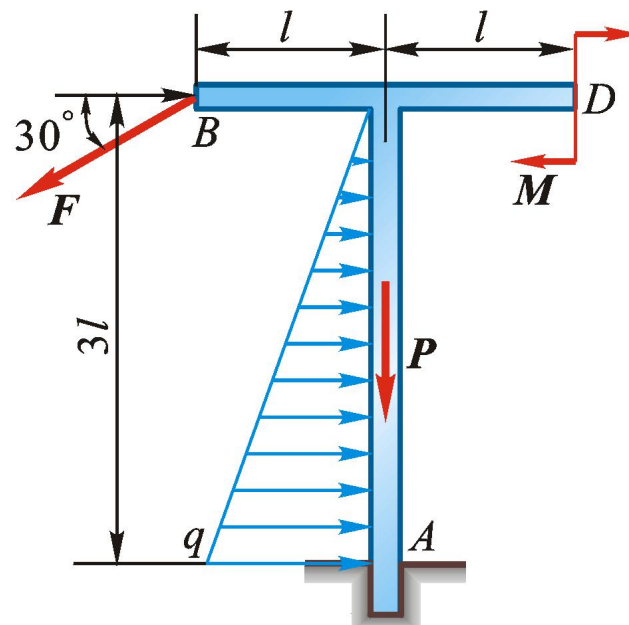
$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} - P - F \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$M_A - M - F_1 \cdot l + F \cos 60^\circ \cdot l + F \sin 60^\circ \cdot 3l = 0$$

→ $F_{Ax} = 316.4\text{kN} \quad F_{Ay} = 300\text{kN}$

$$M_A = -1188\text{kN}\cdot\text{m}$$



例2-6 已知: $P_1 = 700\text{kN}$, $P_2 = 200\text{kN}$, $AB = 4\text{m}$

求: (1) 起重机满载和空载时不翻倒, 平衡载重 P_3 ;
(2) $P_3 = 180\text{kN}$, 轨道 AB 给起重机轮子的约束力。

解: 取起重机, 画受力图.

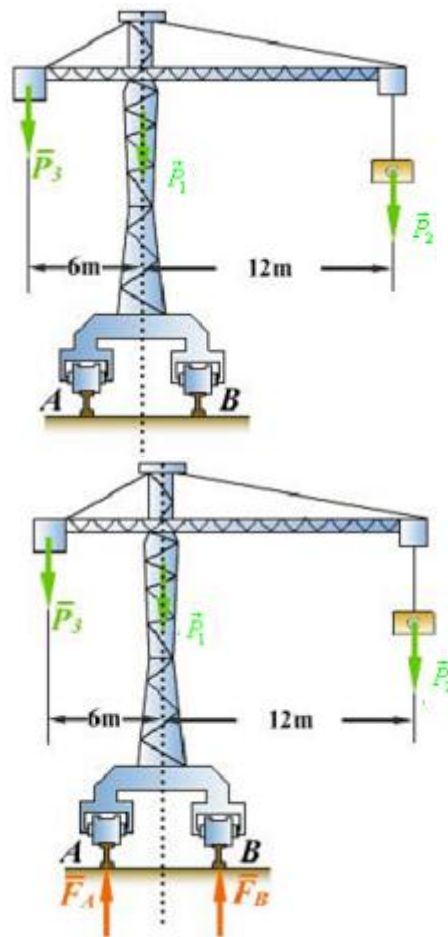
满载时, $\vec{F}_A = 0$,

为不安全状况

$$\Sigma M_B = 0$$

$$P_{3\min} \cdot 8 + 2P_1 - 10P_2 = 0$$

解得 $P_{3\min} = 75\text{kN}$



空载时, $\vec{F}_B = 0$, 为不安全状况

$$\sum M_A = 0 \quad 4P_{3\max} - 2P_1 = 0$$

解得 $F_{3\max} = 350\text{kN}$

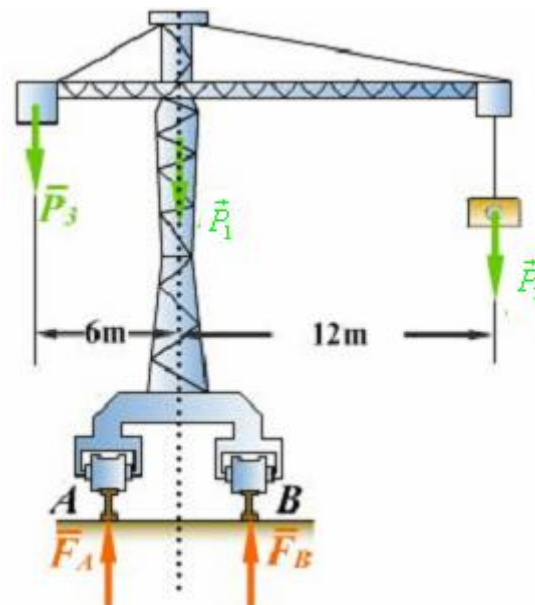
$$75\text{kN} \leq P_3 \leq 350\text{kN}$$

$P_3 = 180\text{kN}$ 时

$$\sum M_A = 0 \quad 4P_3 - 2P_1 - 14P_2 + 4F_B = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0 \quad F_A + F_B - P_1 - P_2 - P_3 = 0$$

$$F_A = 210\text{kN} \quad F_B = 870\text{kN}$$



例2-7 已知: $OA = R, AB = l, \vec{F}$, 不计物体

自重与摩擦, 系统在图示位置平衡;

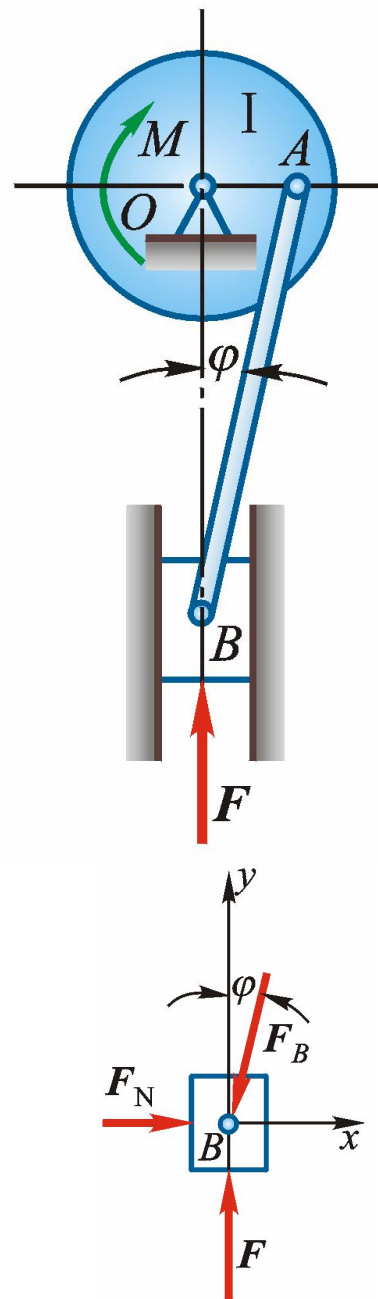
求: 力偶矩 M 的大小, 轴承 O 处的约束力, 连杆 AB 受力, 冲头给导轨的侧压力.

解: 取冲头 B , 画受力图.

$$\sum F_y = 0 \quad F - F_B \cos \varphi = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_N - F_B \sin \varphi = 0$$

$$F_B = \frac{F}{\cos \varphi} = \frac{Fl}{\sqrt{l^2 - R^2}} \quad F_N = F \tan \varphi = \frac{FR}{\sqrt{l^2 - R^2}}$$



取轮, 画受力图.

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ox} + F_A \cos \varphi = 0$$

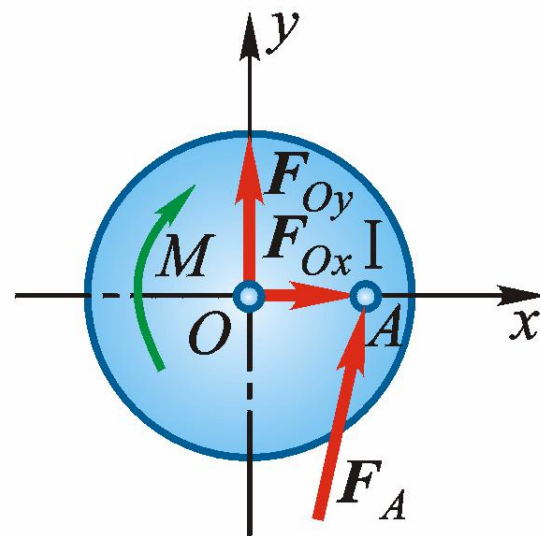
$$\sum F_y = 0 \quad F_{Oy} + F_A \sin \varphi = 0$$

$$\sum M_O = 0 \quad F_A \cos \varphi - M = 0$$

$$F_{Ox} = -\frac{FR}{\sqrt{l^2 - R^2}}$$

$$F_{Oy} = -F$$

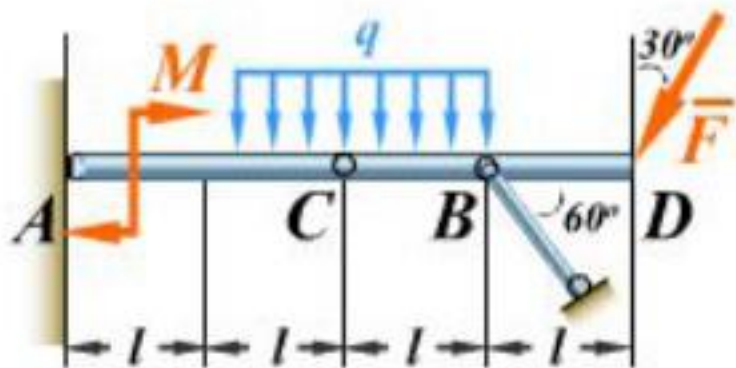
$$M = FR$$



例2-8 已知： $F=20\text{kN}$, $q=10\text{kN/m}$, $M=20\text{kN}\cdot\text{m}$, $l=1\text{m}$;

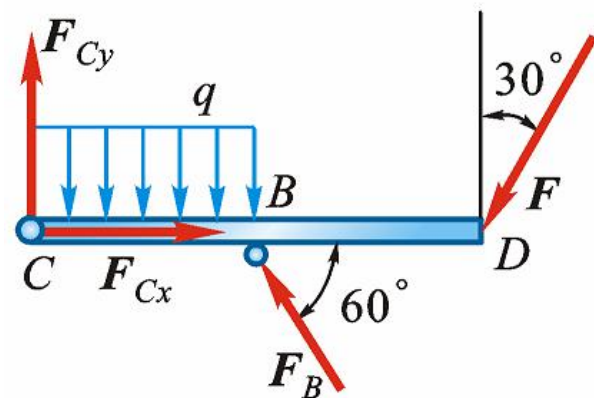
求： A, B 处的约束力.

解： 取 CD 梁, 画受力图.



$$\sum M_C = 0$$

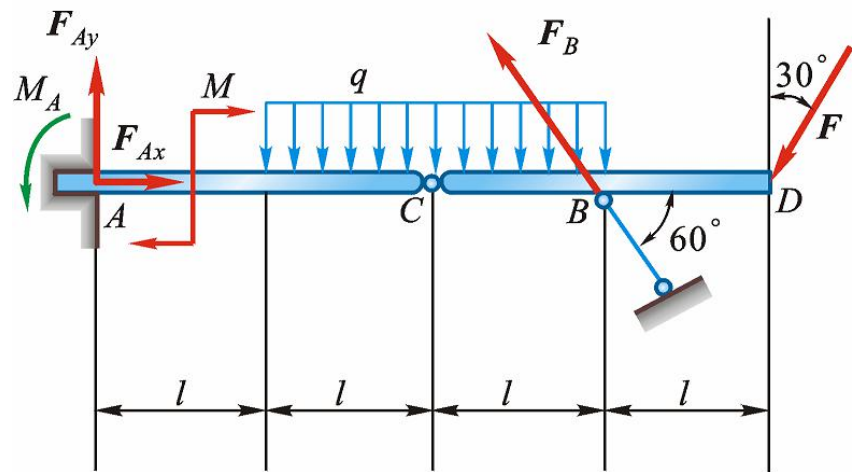
$$F_B \sin 60^\circ \cdot l - ql \cdot \frac{l}{2} - F \cos 30^\circ \cdot 2l = 0$$



→ $F_B = 45.77\text{kN}$



取整体, 画受力图.



$$\sum F_x = 0$$

$$F_{Ax} - F_B \cos 60^\circ - F \sin 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{Ay} - F_B \sin 60^\circ - 2ql - F \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

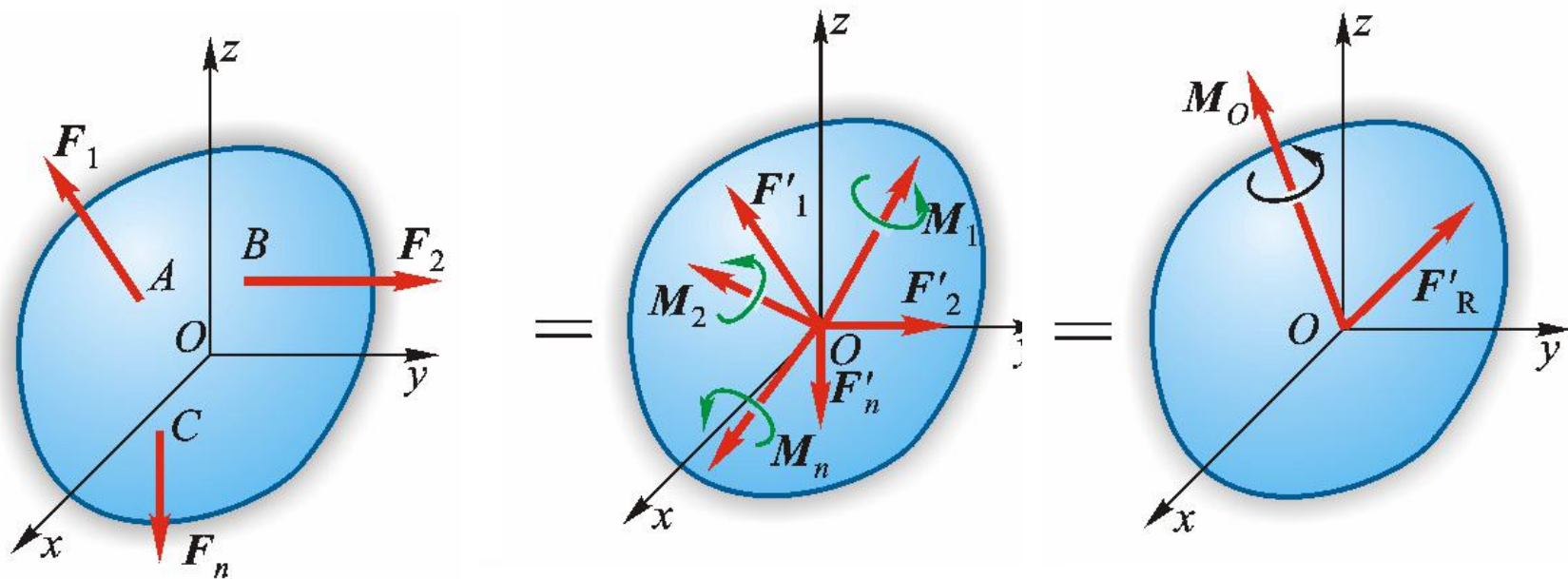
$$M_A - M - 2ql \cdot 2l + F_B \sin 60^\circ \cdot 3l - F \cos 30^\circ \cdot 4l = 0$$

➡ $M_A = 10.37 \text{ kN} \cdot \text{m}$ $F_{Ax} = 32.89 \text{ kN}$ $F_{Ay} = -2.32 \text{ kN}$



空间任意力系向一点的简化 • 主矢和主矩

1. 空间任意力系向一点的简化



$$\vec{F}'_i = \vec{F}_i \quad \vec{M}_i = \vec{M}_O(\vec{F}_i) \quad \longrightarrow$$

空间汇交与空间力偶系等效代替一空间任意力系.



空间汇交力系的合力

$$\vec{F}'_R = \sum \vec{F}_i = \sum F_x \vec{i} + \sum F_y \vec{j} + \sum F_z \vec{k} \quad \longrightarrow \quad \text{主矢}$$

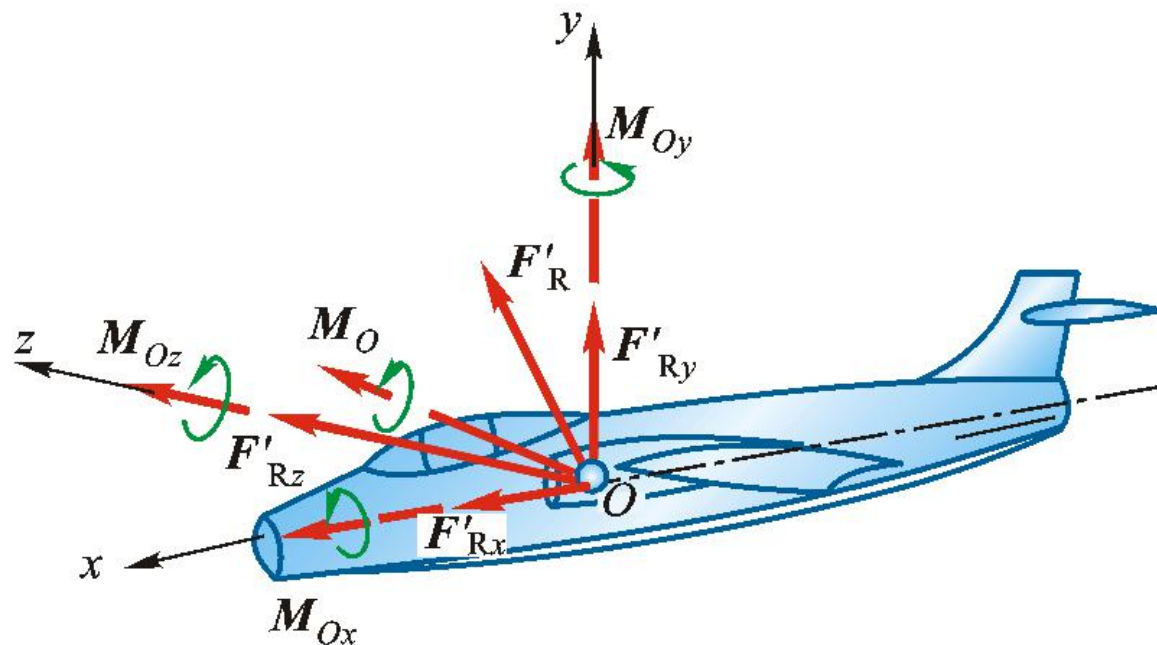
空间力偶系的合力偶矩

$$\vec{M}_O = \sum \vec{M}_i = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i) \quad \longrightarrow \quad \text{主矩}$$

由力对点的矩与力对轴的矩的关系，有

$$\vec{M}_O = \sum M_x(\vec{F}) \vec{i} + \sum M_y(\vec{F}) \vec{j} + \sum M_z(\vec{F}) \vec{k}$$





\vec{F}'_{Rx} — 有效推进力

飞机向前飞行

\vec{F}'_{Ry} — 有效升力

飞机上升

\vec{F}'_{Rz} — 侧向力

飞机侧移

\vec{M}_{Ox} — 滚转力矩

飞机绕x轴滚转

\vec{M}_{Oy} — 偏航力矩

飞机转弯

\vec{M}_{Oz} — 俯仰力矩

飞机仰头

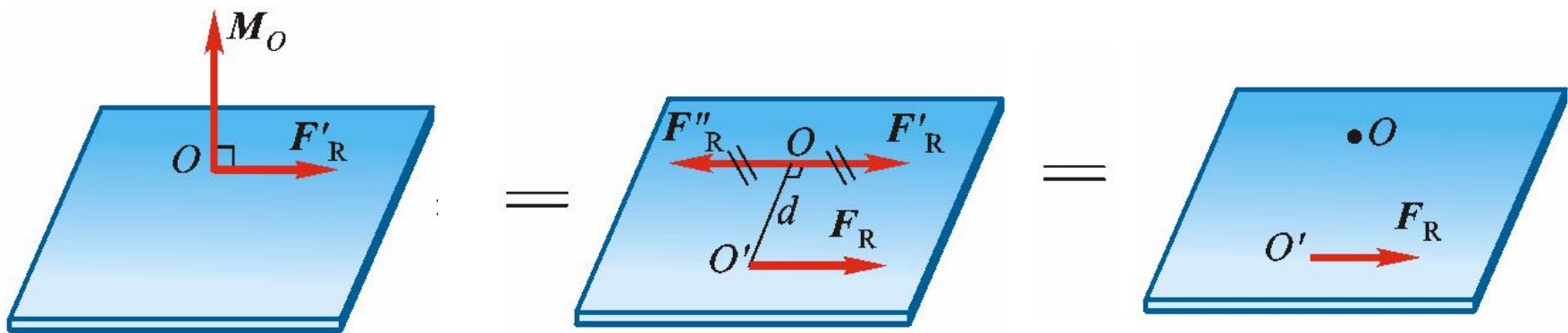


2. 空间任意力系的简化结果分析（最后结果）

(1) 合力

$\vec{F}'_R \neq 0, \vec{M}_O = 0 \longrightarrow$ 过简化中心合力

$\vec{F}'_R \neq 0, \vec{M}_O \neq 0, \vec{F}'_R \perp \vec{M}_O \longrightarrow$ 合力.合力作用线距简化中心为

$$d = |\vec{M}_O| / F'_R$$


$$\vec{M}_O = \vec{d} \times \vec{F}_R = \vec{M}_O(\vec{F}_R) = \sum \vec{M}_O(\vec{F})$$

合力矩定理：合力对某点(轴)之矩等于各分力对同一点（轴）之矩的矢量和。

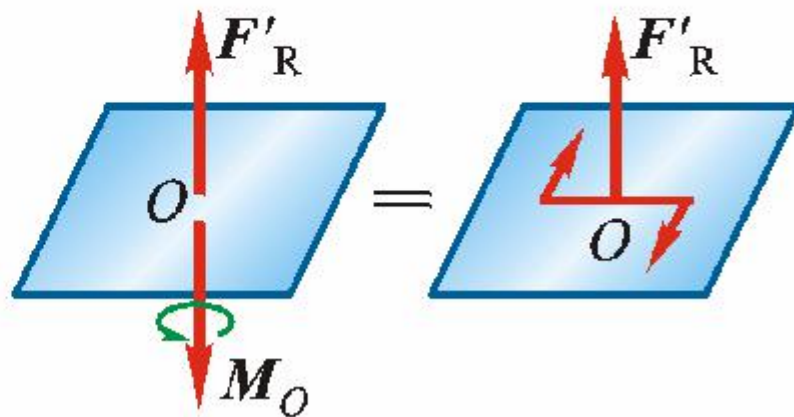
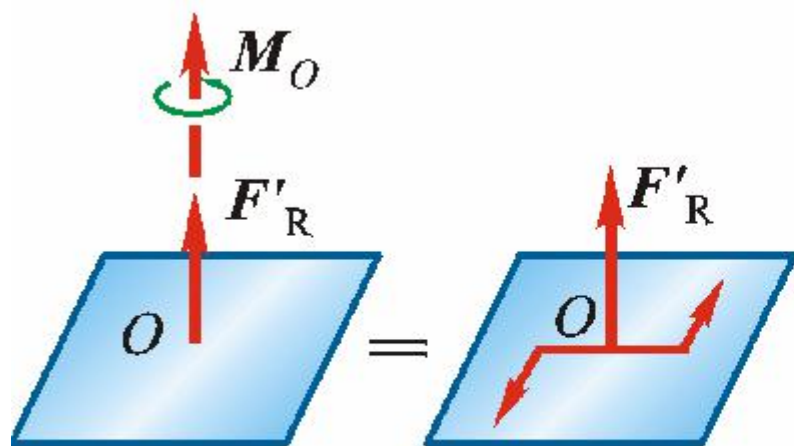


(2) 合力偶

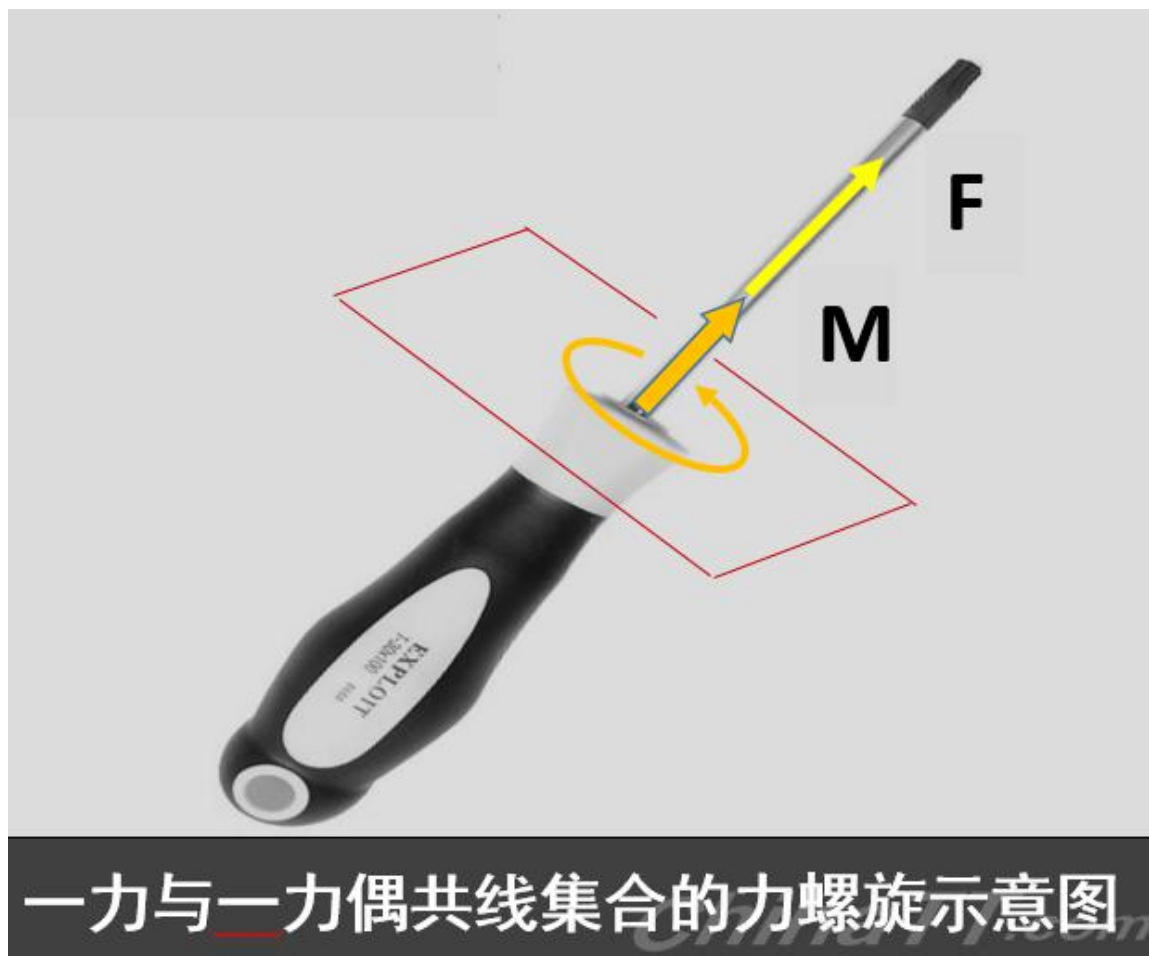
$\vec{F}'_R = 0, \vec{M}_O \neq 0 \rightarrow$ 一个合力偶，此时与简化中心无关。

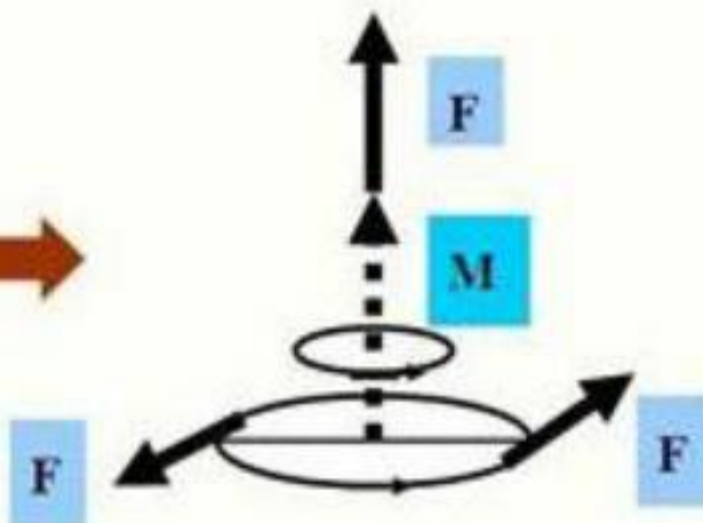
(3) 力螺旋

$F'_R \neq 0, M_O \neq 0, F'_R \parallel M_O \rightarrow$ 中心轴过简化中心的力螺旋



钻头钻孔时施加的力螺旋



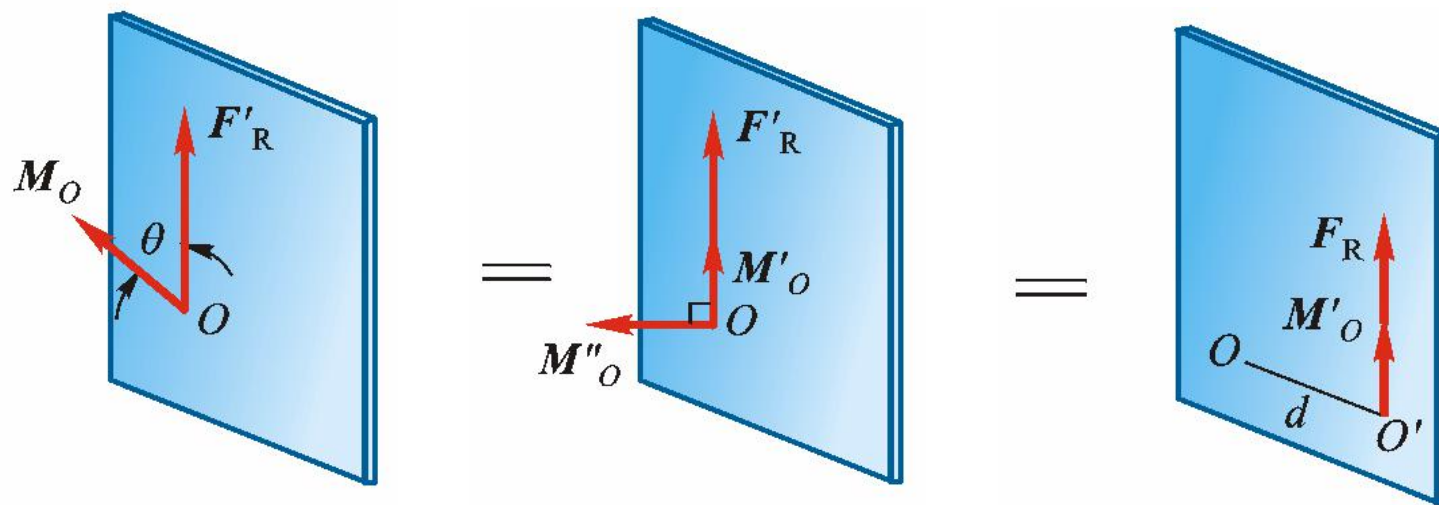


龙卷风模型与力螺旋示意图 happydingpang.cn



$\vec{F}'_R \neq 0, \vec{M}_O \neq 0, \vec{F}'_R, \vec{M}_O$ 既不平行也不垂直

→ 力螺旋中心轴距简化中心为 $d = \frac{M_O \sin \theta}{F'_R}$



(4) 平衡

$\vec{F}'_R = 0, \vec{M}_O = 0$ → 平衡



空间任意力系的平衡方程

1. 空间任意力系的平衡方程

空间任意力系平衡的充要条件：

该力系的主矢、主矩分别为零。



$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$

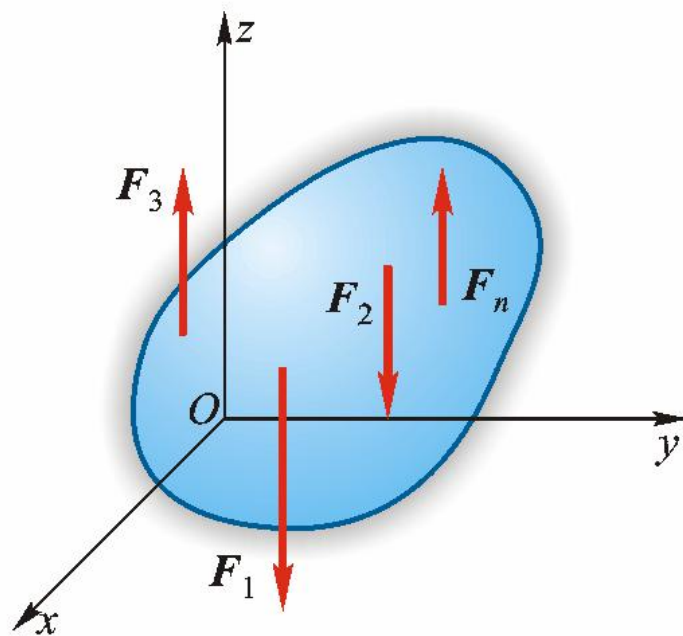
$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

空间任意力系平衡的充要条件：所有各力在三个坐标轴中每一个轴上的投影的代数和等于零，以及这些力对于每一个坐标轴的矩的代数和也等于零。



空间平行力系的平衡方程

$$\sum F_z = 0 \quad \sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0$$

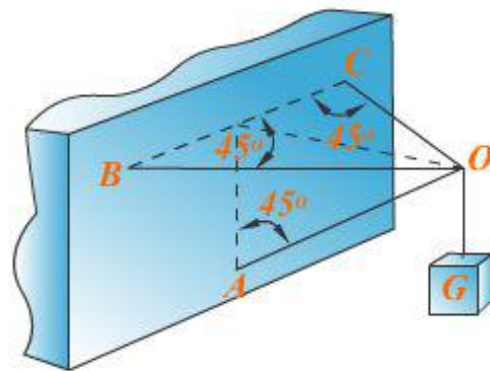


例2-9

已知： $P=1000\text{N}$ ，各杆重不计。

求： 三根杆所受力。

解： 各杆均为二力杆，取球铰 O ，画受力图。



$$\sum F_x = 0 \quad F_{OB} \sin 45^\circ - F_{OC} \sin 45^\circ = 0$$

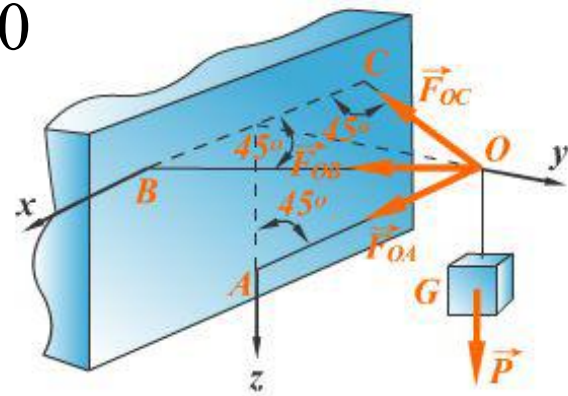
$$\sum F_y = 0$$

$$-F_{OB} \cos 45^\circ - F_{OC} \cos 45^\circ - F_{OA} \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_z = 0 \quad F_{OA} \sin 45^\circ - P = 0$$



$$F_{OA} = -1414\text{N} \quad F_{OB} = F_{OC} = 707\text{N} \text{ (拉)}$$



例2-10

已知: F, l, a, θ

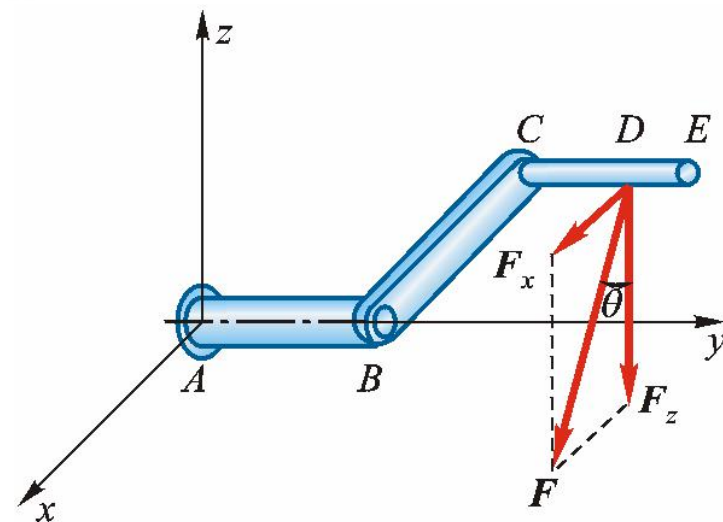
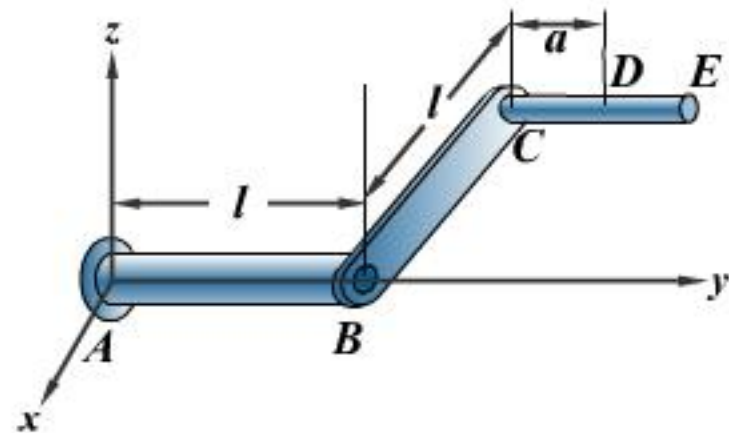
求: $M_x(\vec{F}), M_y(\vec{F}), M_z(\vec{F})$

解: 把力 \vec{F} 分解如图

$$M_x(\vec{F}) = -F(l + a)\cos\theta$$

$$M_y(\vec{F}) = -Fl\cos\theta$$

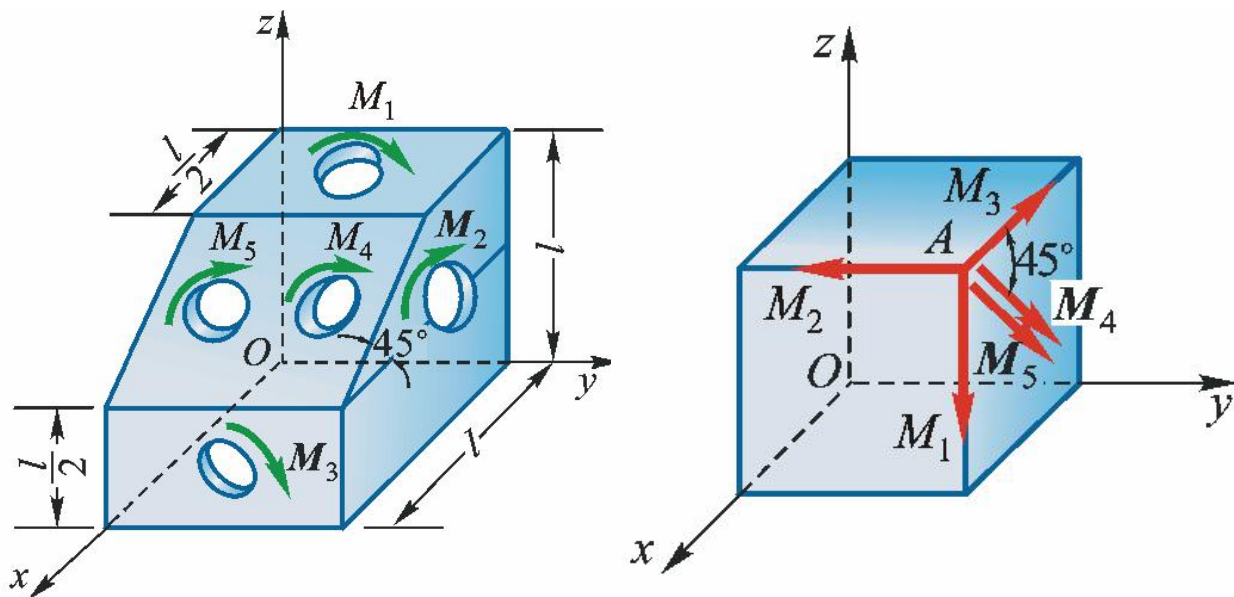
$$M_z(F) = -F(l + a)\sin\theta$$



例2-11 已知：在工件四个面上同时钻5个孔，每个孔所受切削力偶矩均为 $80\text{N} \cdot \text{m}$ 。

求：工件所受合力偶矩在 x, y, z 轴上的投影

解：把力偶用力偶矩矢表示，平行移到点 A 。



$$M_x = \sum M_{ix} = -M_3 - M_4 \cos 45^\circ - M_5 \cos 45^\circ = 193.1\text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_y = \sum M_{iy} = -M_2 = -80\text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_z = \sum M_{iz} = -M_1 - M_4 \cos 45^\circ - M_5 \cos 45^\circ = -193.1\text{N} \cdot \text{m}$$

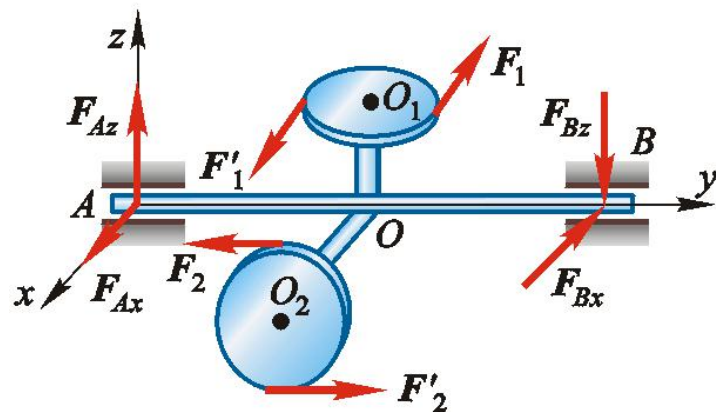
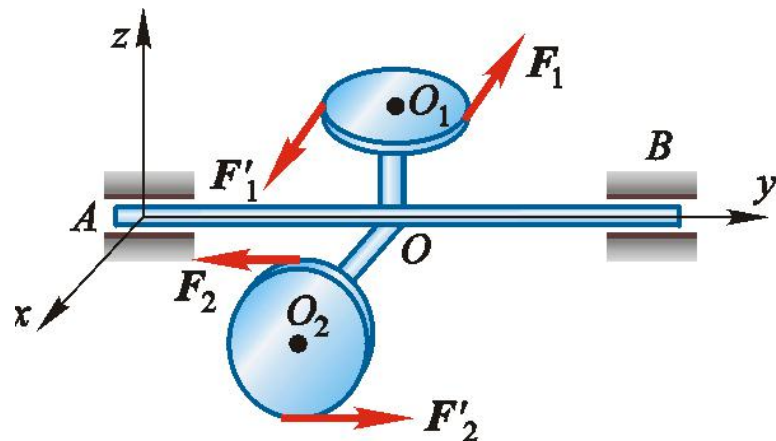


例2-12

已知：两圆盘半径均为200mm， $AB=800\text{mm}$ ，圆盘面 O_1 垂直于 z 轴，圆盘面 O_2 垂直于 x 轴，两盘面上作用有力偶， $F_1=3\text{N}$ ， $F_2=5\text{N}$ ，构件自重不计。

求：轴承 A, B 处的约束力。

解：取整体，受力图如图所示。



$$\sum M_x = 0 \quad F_2 \cdot 400 - F_{Bz} \cdot 800 = 0$$

$$\sum M_z = 0 \quad F_1 \cdot 400 + F_{Bx} \cdot 800 = 0$$



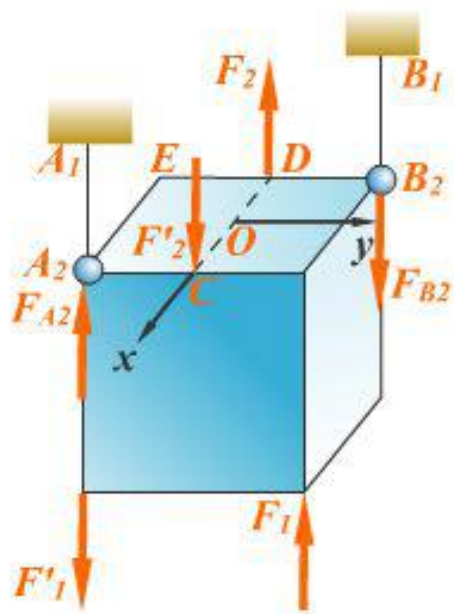
$$F_{Ax} = F_{Bx} = -1.5\text{N} \quad F_{Az} = F_{Bz} = 2.5\text{N}$$



例2-13

已知：正方体上作用两个力偶 $(\vec{F}_1, \vec{F}_1'), (\vec{F}_2, \vec{F}_2')$,
 $CD \parallel A_2E$, 不计正方体和直杆自重.

求：正方体平衡时，力 \vec{F}_1, \vec{F}_2 的关系和两根杆受力.



(a)



解：两杆为二力杆，取正方体，画受力图建坐标系如图b

以矢量表示力偶，如图c

$$\sum M_x = 0 \quad M_1 - M_3 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum M_y = 0 \quad M_2 - M_3 \sin 45^\circ = 0$$

→ $M_1 = M_2$

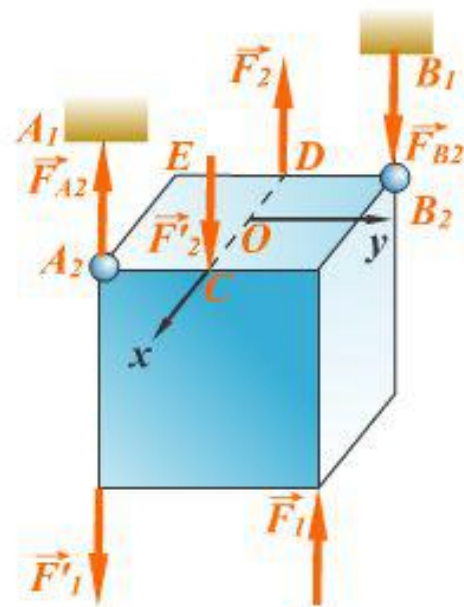
设正方体边长为 a ，有

$$M_1 = F_1 \cdot a = M_2 = F_2 \cdot a$$

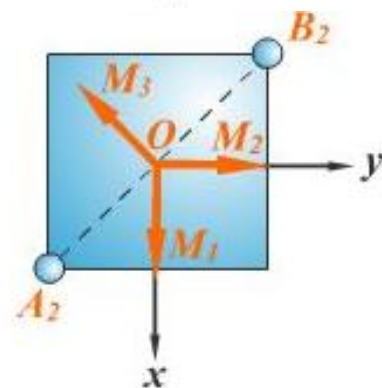
有 $F_1 = F_2 \quad M_3 = F_{A2} \cdot \sqrt{2}a$

→ $F_{A2} = F_{B2} = F_1 = F_2$

杆 A_1A_2 受拉，杆 B_1B_2 受压。



(b)



(c)

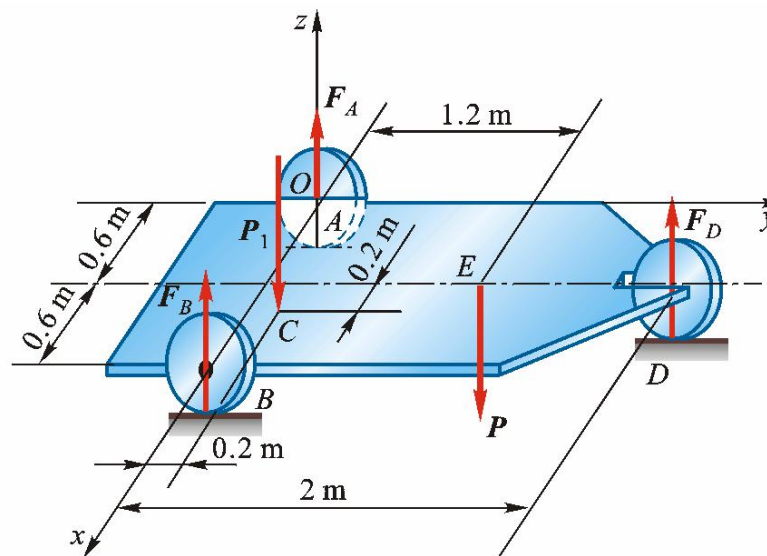


例2-14 已知： $P=8\text{kN}$, $P_1=10\text{kN}$, 各尺寸如图

求： A 、 B 、 C 处约束力

解：研究对象：小车

列平衡方程



$$\sum F_z = 0 \quad -P - P_1 + F_A + F_B + F_D = 0$$

$$\sum M_x(F) = 0 \quad -0.2P_1 - 1.2P + 2F_D = 0$$

$$\sum M_y(F) = 0 \quad 0.8P_1 + 0.6P - 1.2F_B - 0.6F_D = 0$$

→ $F_D = 5.8\text{kN}, F_B = 7.777\text{kN}, F_A = 4.423\text{kN}$

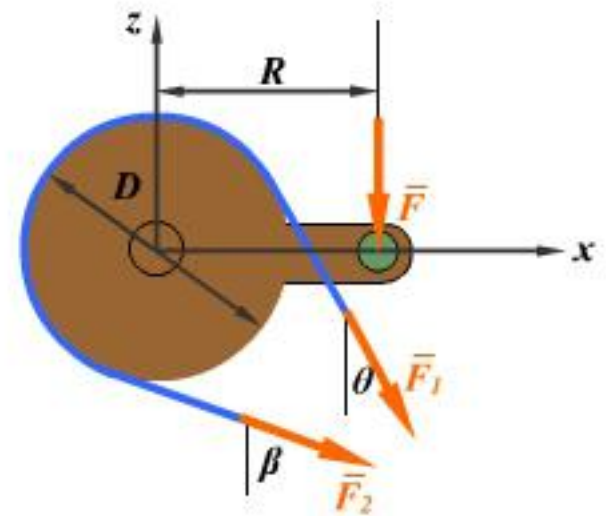
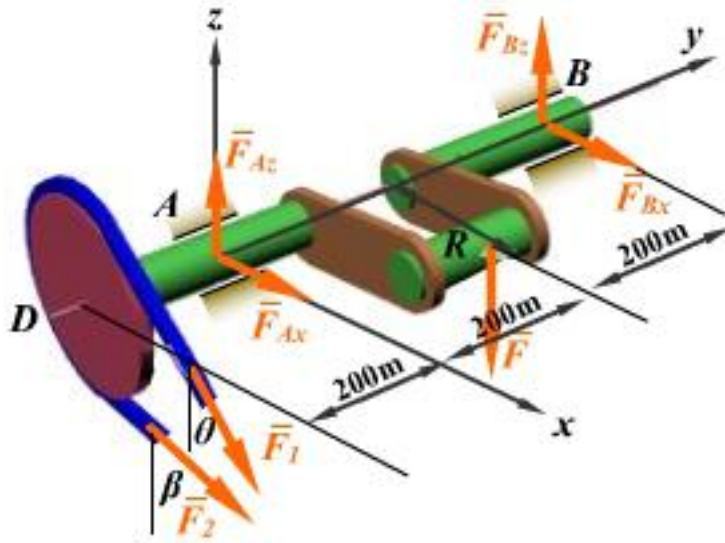


例2-15

已知： $F = 2000\text{N}$, $F_2 = 2F_1$, $\theta = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, 各尺寸如图

求： F_1, F_2 及 A, B 处约束力

解：研究对象，曲轴

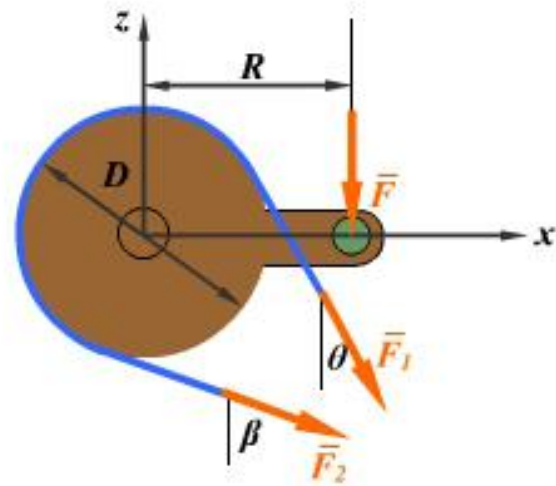
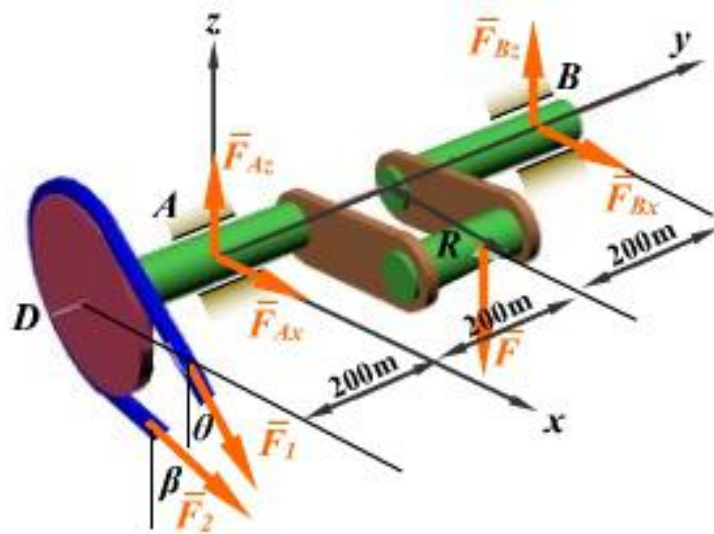


列平衡方程

$$\sum F_x = 0 \quad F_1 \sin 30^\circ + F_2 \sin 60^\circ + F_{Ax} + F_{Bx} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad 0 = 0$$





$$\sum F_z = 0 \quad -F_1 \cos 30^\circ - F_2 \cos 60^\circ - F + F_{Az} + F_{Bz} = 0$$

$$\sum M_x(F) = 0$$

$$F_1 \cos 30^\circ \times 200 + F_2 \cos 60^\circ \times 200 - F \times 200 + F_{Bx} \times 400 = 0$$

$$\sum M_y(F) = 0 \quad F \cdot R - \frac{D}{2} \times (F_2 - F_1) = 0$$

$$\sum M_z(F) = 0 \quad (F_1 \sin 30^\circ - F_2 \sin 60^\circ) \times 200 - F_{Bx} \times 400 = 0$$





$$F_1 = 3000\text{N}, F_2 = 6000\text{N},$$

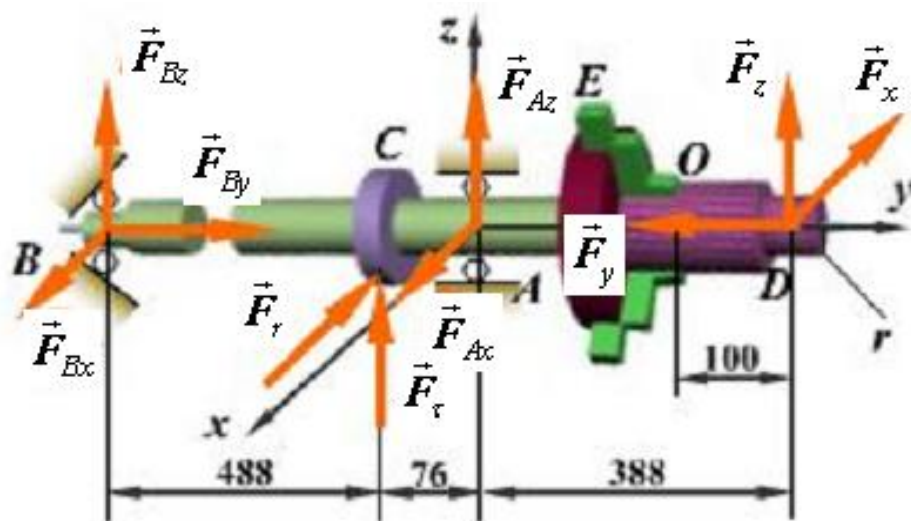
$$F_{Ax} = -1004\text{N}, F_{Az} = 9397\text{N},$$

$$F_{Bx} = 3348\text{N}, F_{Bz} = -1799\text{N},$$



例2-16

已知: $F_x = 4.25\text{N}$, $F_y = 6.8\text{N}$, $F_z = 17\text{N}$,
 $F_r = 0.36F_\tau$, $R = 50\text{mm}$, $r = 30\text{mm}$ 各尺寸如图



求: (1) \vec{F}_r, \vec{F}_τ (2) A、B处约束力 (3) O 处约束力



解：研究对象1：主轴及工件，受力图如图

$$\sum F_x = 0 \quad -F_t + F_{Bx} + F_{Ax} - F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{By} - F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0 \quad F_r + F_{Bz} + F_{Az} + F_z = 0$$

$$\sum M_x(F) = 0 \quad -(488 + 76)F_{Bz} - 76F_r + 388F_z = 0$$

$$\sum M_y(F) = 0 \quad F_t \cdot R - F_z \cdot r = 0$$

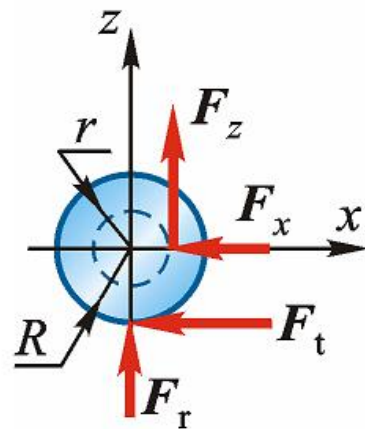
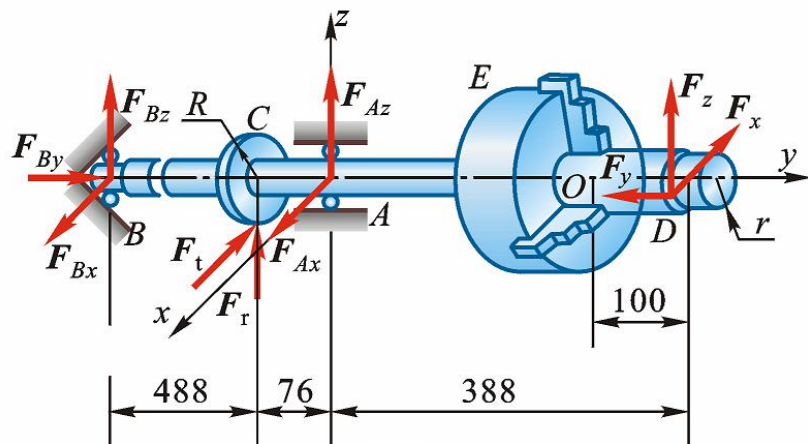
$$\sum M_z(F) = 0 \quad (488 + 76)F_{Bx} - 76F_t + 388F_x - 30F_y = 0$$

又： $F_r = 0.36F_t$,



$$F_t = 10.2\text{kN} \quad F_r = 3.67\text{kN} \quad F_{Ax} = 15.64\text{kN}$$

$$F_{Bx} = -1.19\text{kN} \quad F_{By} = 6.8\text{kN} \quad F_{Bz} = 11.2\text{kN}$$



研究对象2：工件受力图如图, 列平衡方程

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ox} - F_x = 0$$

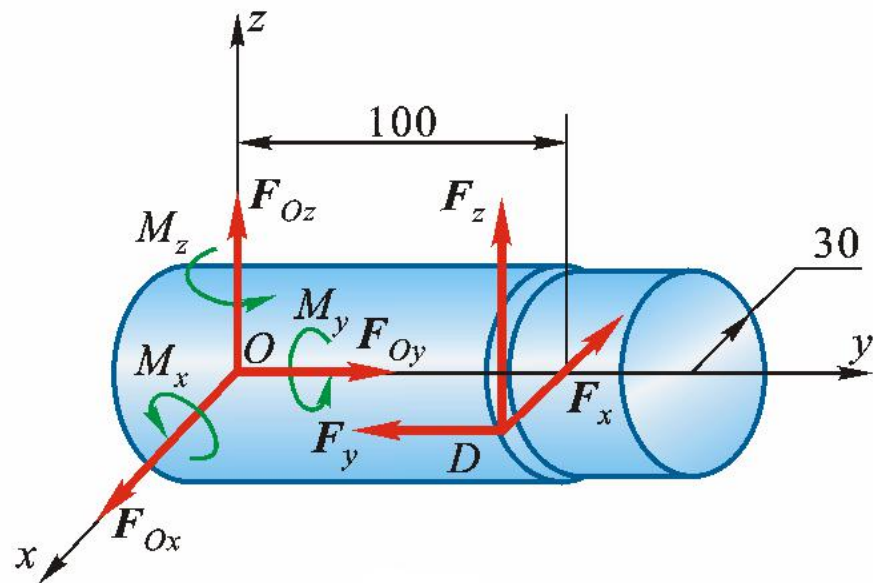
$$\sum F_y = 0 \quad F_{Oy} - F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0 \quad F_{Oz} + F_z = 0$$

$$\sum M_x(F) = 0 \quad 100F_z + M_x = 0$$

$$\sum M_y(F) = 0 \quad -30F_z + M_y = 0$$

$$\sum M_z(F) = 0 \quad 100F_x - 30F_y + M_z = 0$$



$$F_{Ox} = 4.25\text{kN}, F_{Oy} = 6.8\text{kN}, F_{Oz} = -17\text{kN}$$

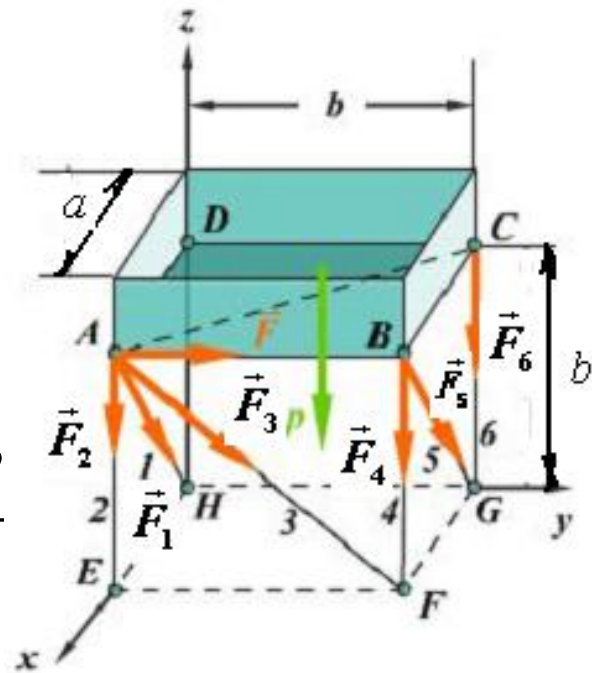
$$M_x = -1.7\text{kN} \cdot \text{m}, M_y = 0.51\text{kN} \cdot \text{m}, M_z = -0.22\text{kN} \cdot \text{m}$$



例2-18 已知: F 、 P 及各尺寸

求: 杆内力

解: 研究对象, 长方板, 列平衡方程



$$\sum M_{AB}(\vec{F}) = 0 \quad -F_6 \cdot a - \frac{a}{2} \cdot P = 0 \quad F_6 = -\frac{P}{2}$$

$$\sum M_{AE}(\vec{F}) = 0 \quad F_5 = 0$$

$$\sum M_{AC}(\vec{F}) = 0 \quad F_4 = 0$$

$$\sum M_{EF}(\vec{F}) = 0 \quad -F_6 \cdot a - \frac{a}{2} \cdot P - F_1 \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0 \quad F_1 = 0$$

$$\sum M_{FG}(\vec{F}) = 0 \quad Fb - \frac{b}{2} \cdot P - F_2 b = 0 \quad F_2 = 1.5P$$

$$\sum M_{BC}(\vec{F}) = 0 \quad -F_2 \cdot b - \frac{b}{2} \cdot P - F_3 \cdot \cos 45^\circ \cdot b = 0 \quad F_3 = -2\sqrt{2}P$$



例2-19

已知：均质等厚Z字型薄板尺寸如图所示。

求：其重心坐标

解：厚度方向重心坐标已确定，只求重心的 x, y 坐标即可。

用虚线分割如图，为三个小矩形，其面积与坐标分别为

$$x_1 = -15\text{mm} \quad y_1 = 45\text{mm} \quad A_1 = 300\text{mm}^2$$

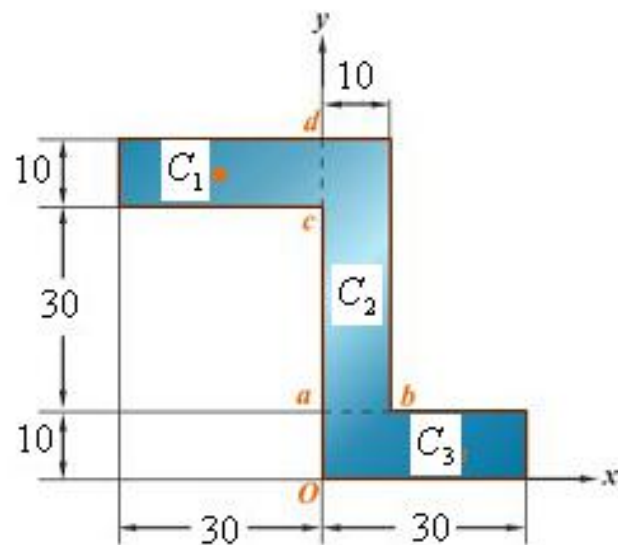
$$x_2 = 5\text{mm} \quad y_2 = 30\text{mm} \quad A_2 = 400\text{mm}^2$$

$$x_3 = 15\text{mm} \quad y_3 = 5\text{mm} \quad A_3 = 300\text{mm}^2$$

则

$$x_C = \sum \frac{A_i x_i}{A} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = 2\text{mm}$$

$$y_C = \sum \frac{A_i y_i}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = 27\text{mm}$$



例2-20

已知：等厚均质偏心块的 $R = 100\text{mm}$, $r = 17\text{mm}$, $b = 13\text{mm}$

求：其重心坐标.

解：用负面积法，为三部分组成.

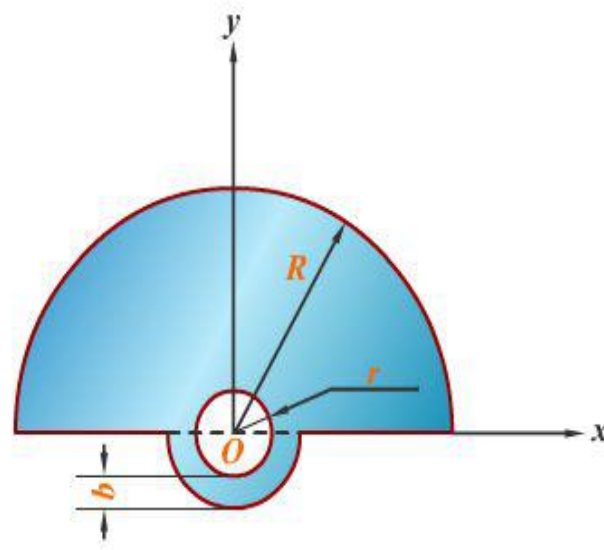
由对称性，有 $x_C = 0$

$$A_1 = \frac{\pi}{2}R^2, A_2 = \frac{\pi}{2}(r+b)^2, A_3 = -\pi r^2$$

$$y_1 = \frac{4R}{3\pi}, y_2 = -\frac{4(r+b)}{3\pi}, y_3 = 0$$

$$\text{由 } y_C = \frac{\sum A_i y_i}{A}$$

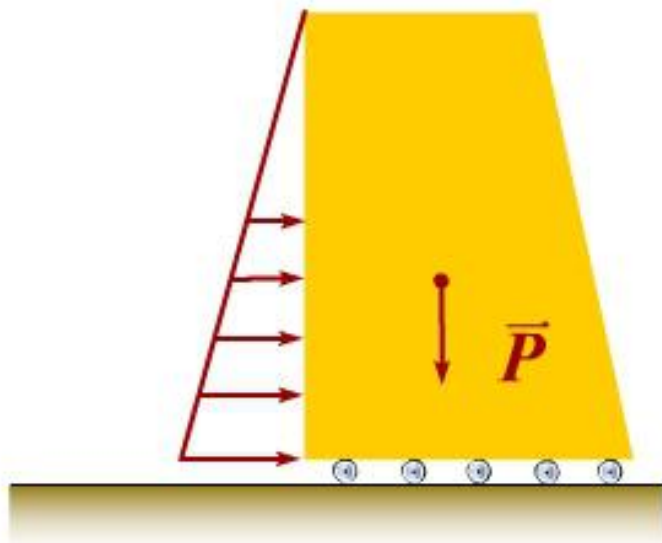
$$\text{得 } y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = 40.01\text{mm}$$



2.4 考虑摩擦的平衡问题

摩擦是一种自然现象，行走、开车、传动等等现象都有着摩擦在其中的作用





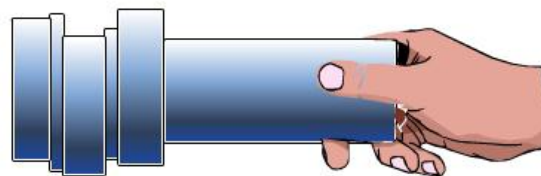
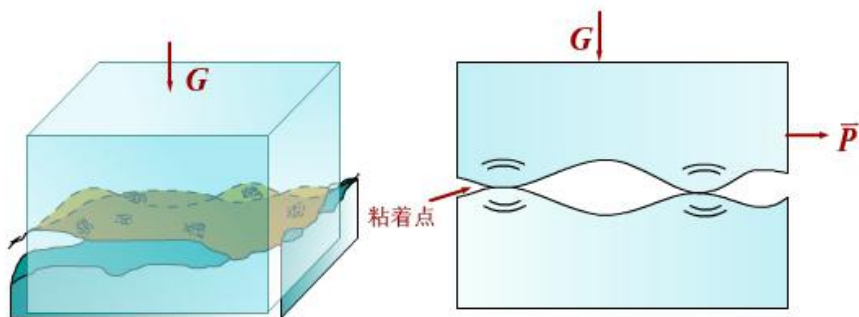
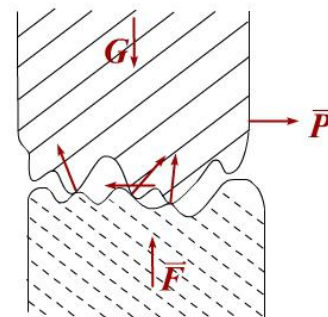
摩擦

滑动摩擦
滚动摩擦

静滑动摩擦
动滑动摩擦
静滚动摩擦
动滚动摩擦

摩擦

干摩擦
湿摩擦



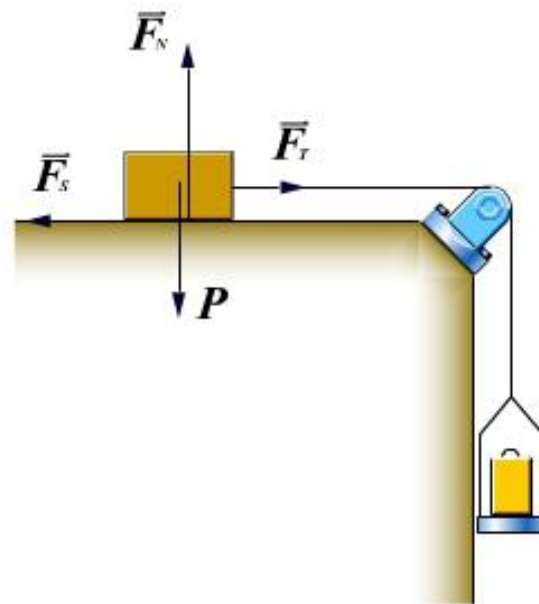
$$\sum F_x = 0 \quad F_T - F_S = 0 \quad F_S = F_T$$

静滑动摩擦力的特点

方向：沿接触处的公切线，
与相对滑动趋势反向；

大小： $0 \leq F_s \leq F_{\max}$

$$F_{\max} = f_s F_N \quad (\text{库仑摩擦定律})$$

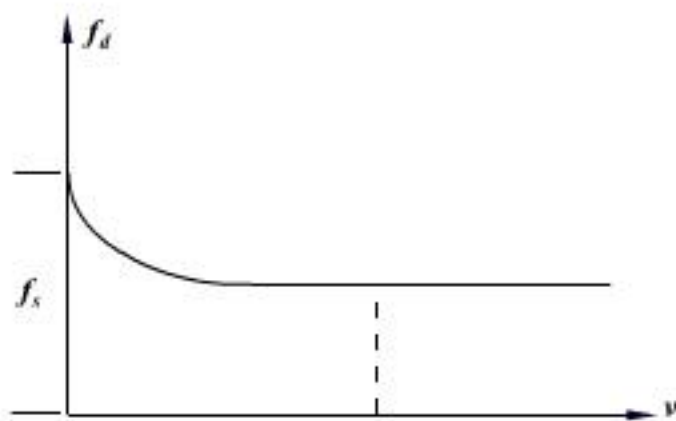


动滑动摩擦力的特点

方向：沿接触处的公切线，与相对滑动趋势反向；

大小： $F_d = f_d F_N$

$f_d < f_s$ （对多数材料，通常情况下）



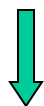
摩擦角和自锁现象

1 摩擦角

\vec{F}_{RA} --- 全约束力

物体处于临界平衡状态时，全约束力和法线间的夹角——摩擦角

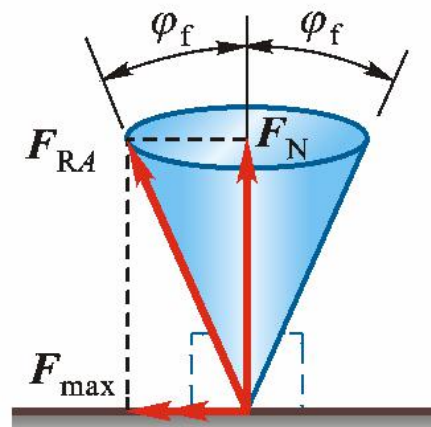
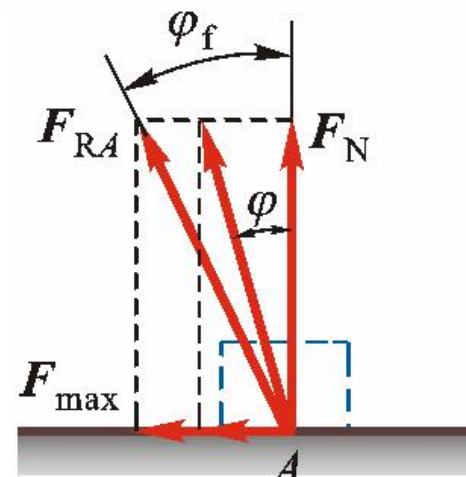
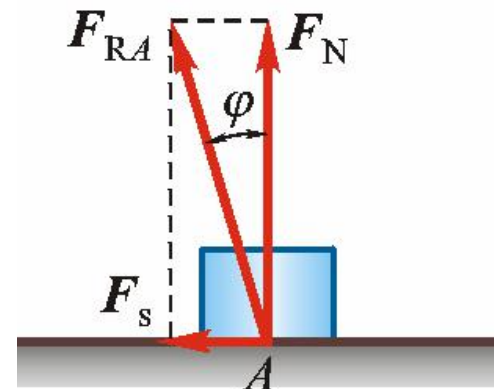
$$\tan \varphi_f = \frac{F_{\max}}{F_N} = \frac{f_s F_N}{F_N} = f_s$$



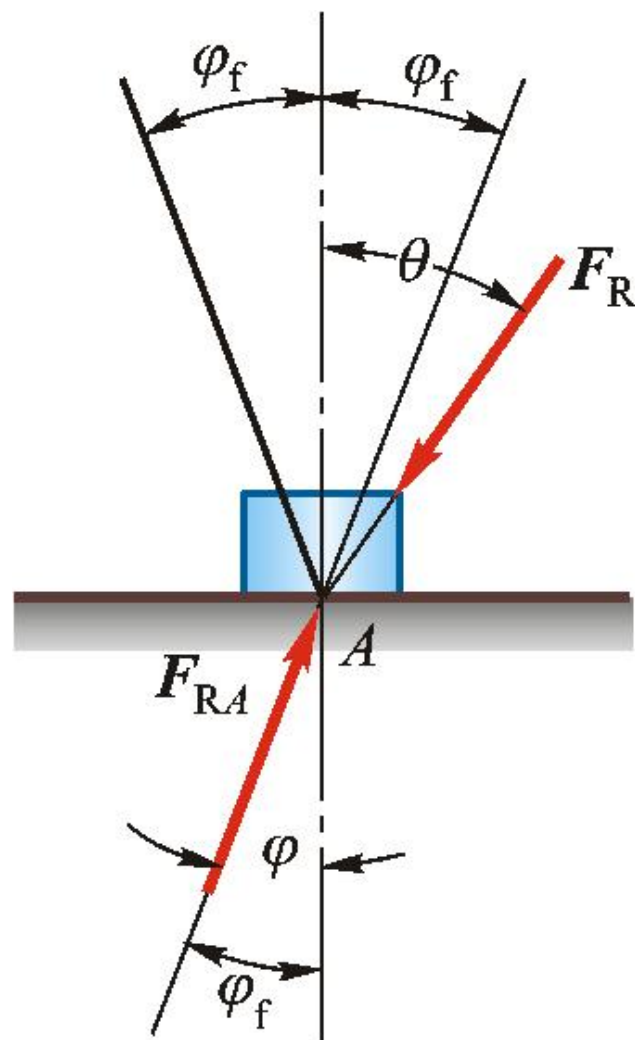
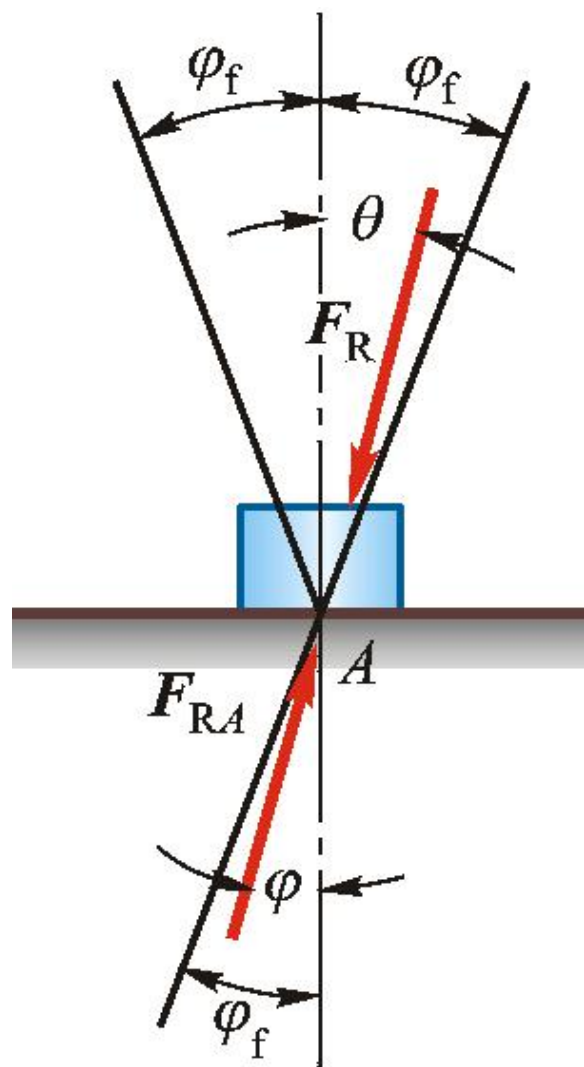
全约束力和法线间的夹角的正切等于静滑动摩擦系数。

摩擦锥

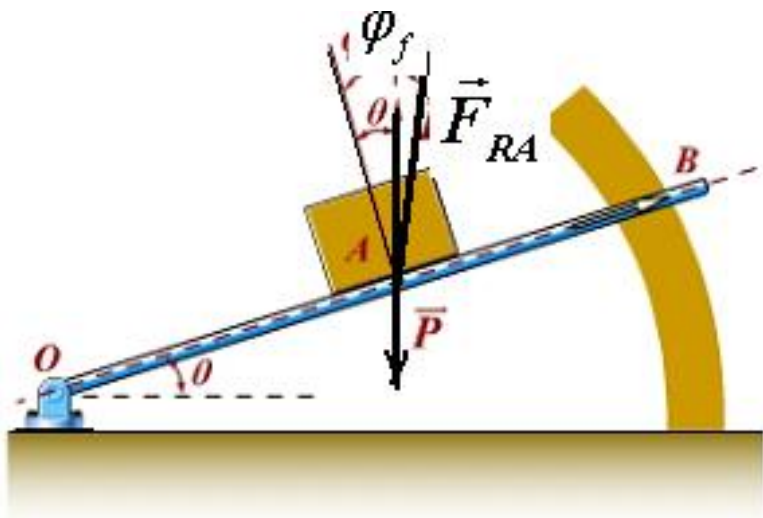
$$0 \leq \varphi \leq \varphi_f$$



2 自锁现象



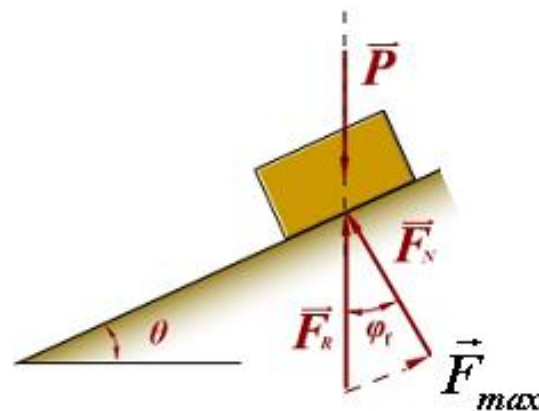
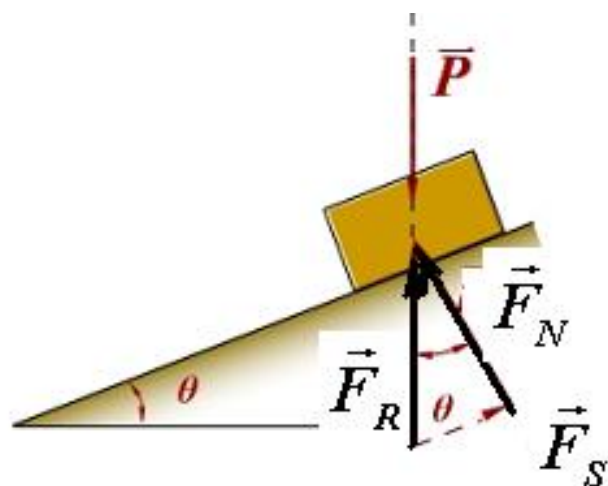
3 测定摩擦系数的一种简易方法，斜面与螺纹自锁条件



$$\tan \theta = \tan \varphi_f = f_s$$

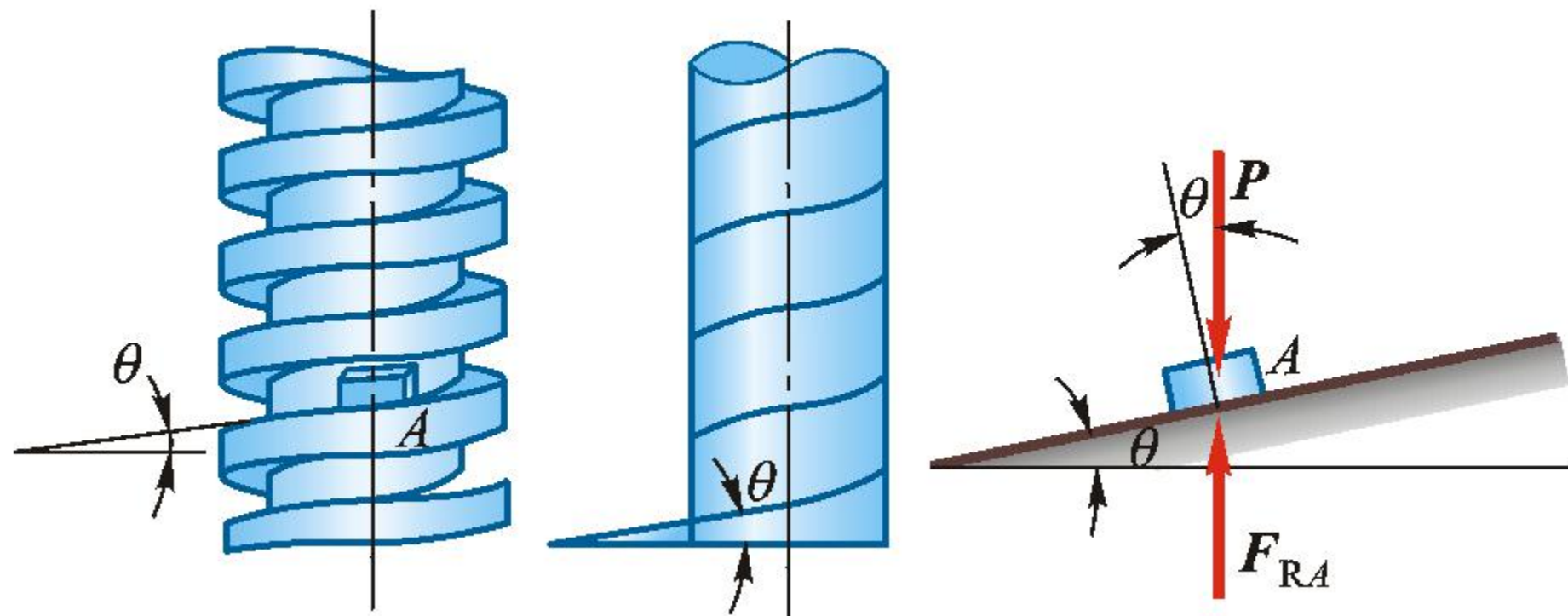
斜面自锁条件

$$\theta \leq \varphi_f$$



螺纹自锁条件

$$\theta \leq \varphi_f$$



考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

仍为平衡问题，仍然使用平衡方程求解，但由于增加了摩擦力（约束力），需要增加相应的补充方程，求解步骤与前面基本相同。

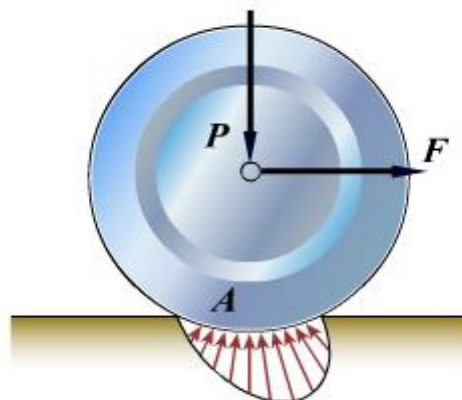
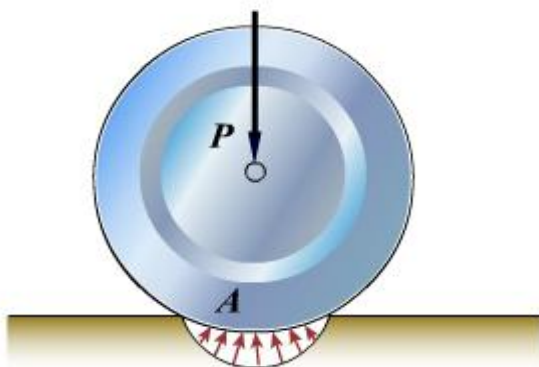
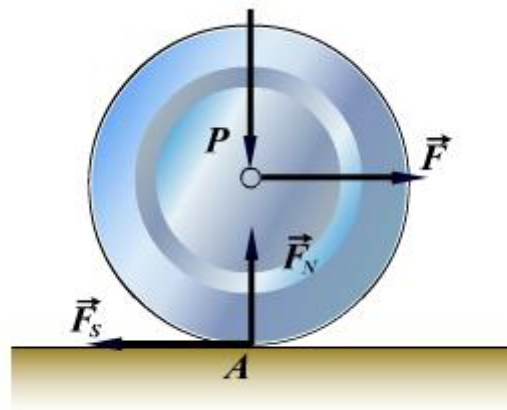
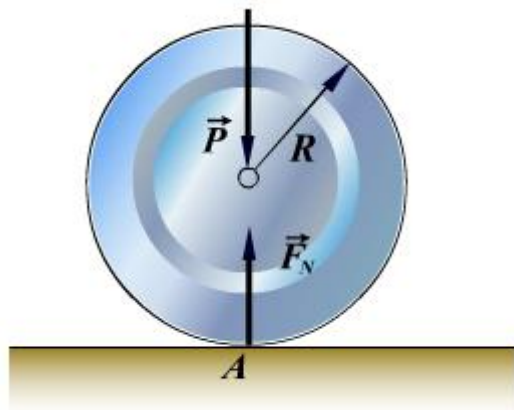
几个新特点

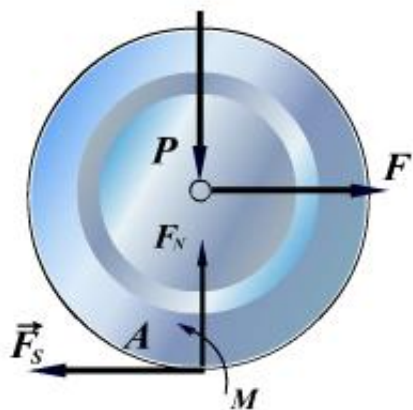
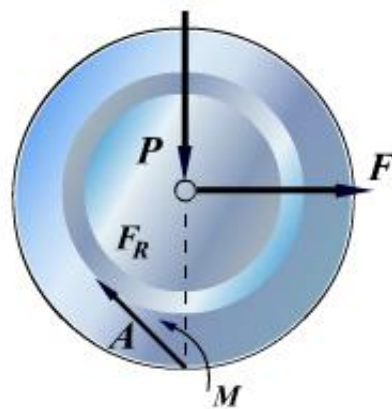
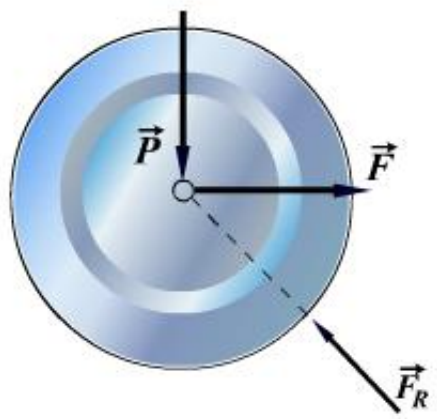
- 1 画受力图时，必须考虑摩擦力；
- 2 严格区分物体处于临界、非临界状态；
- 3 因 $0 \leq F_s \leq F_{\max}$ ，问题的解有时在一个范围内。



滚动摩阻（擦）的概念

静滚动摩阻（擦）





$$\Sigma F_x = 0 \quad F - F_s = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad M - FR = 0$$

$$0 \leq F_s \leq F_{\max}$$

$$0 \leq M \leq M_{\max}$$

$$F_{\max} = f_s F_N$$

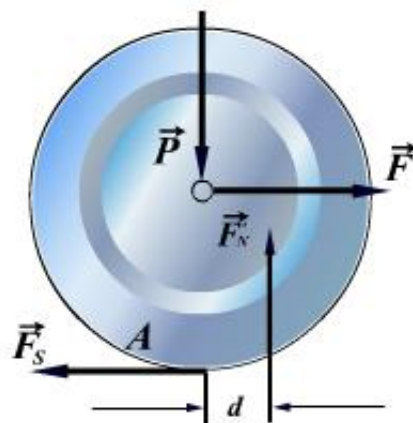
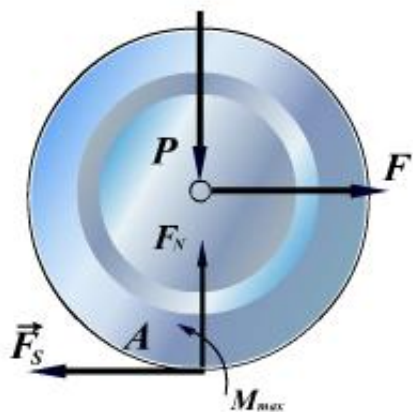
$$M_{\max} = \delta F_N$$

——最大滚动摩阻（擦）力偶



δ 滚动摩阻（擦）系数，长度量纲

δ 的物理意义



使圆轮滚动比滑动省力的原因 处于临界滚动状态

$$M_{\max} = \delta F_N = F_1 R \quad F_1 = \frac{\delta}{R} F_N$$

处于临界滑动状态

$$F_{\max} = f_s F_N = F_2 \quad F_2 = f_s F_N$$

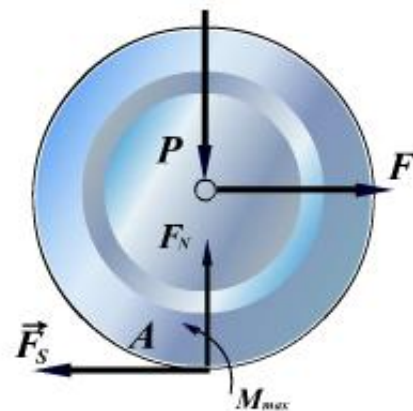
一般情况下, $\frac{\delta}{R} < f_s$ 或 $\frac{\delta}{R} \ll f_s$

→ $F_1 < F_2$ 或 $F_1 \ll F_2$.

例: 某型号车轮半径, $R = 450 \text{ mm}$

混凝土路面 $\delta = 3.15 \text{ mm}$ $f_s = 0.7$

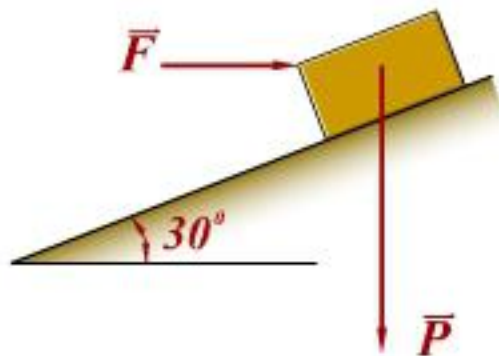
$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{f_s R}{\delta} = \frac{0.7 \times 350}{3.15} = 100$$



例2-21

已知： $P = 1500\text{N}$, $f_s = 0.2$, $f_d = 0.18$, $F = 400\text{N}$ 。

求： 物块是否静止， 摩擦力的大小和方向。



解：取物块，画受力图，设物块平衡

$$\Sigma F_x = 0 \quad F \cos 30^\circ - P \sin 30^\circ - F_s = 0$$

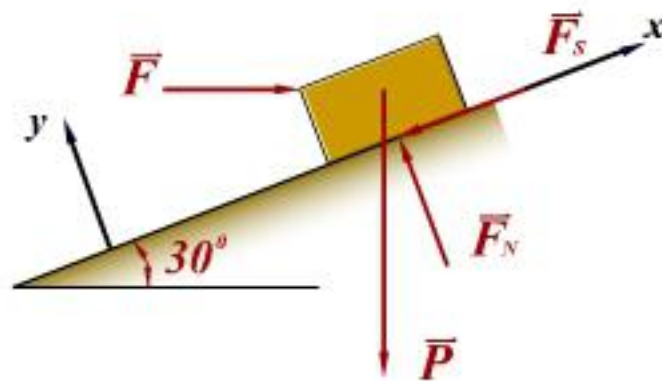
$$\Sigma F_y = 0 \quad -F \sin 30^\circ - P \cos 30^\circ + F_N = 0$$

→ $F_s = -403.6 \text{ N}$ (向上) $F_N = 1499 \text{ N}$

而 $F_{\max} = f_s F_N = 299.8 \text{ N}$

→ 物块处于非静止状态.

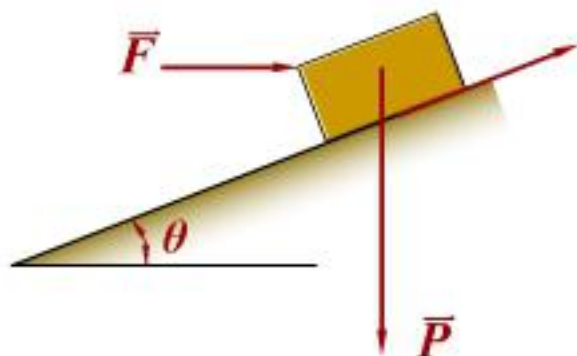
$$F_d = f_d F_N = 269.8 \text{ N}, \text{ 向上.}$$



例2-22

已知: P, θ, f_s .

求: 使物块静止, 水平推力 \vec{F} 的大小.



解： 使物块有上滑趋势时，推力为 \vec{F}_1

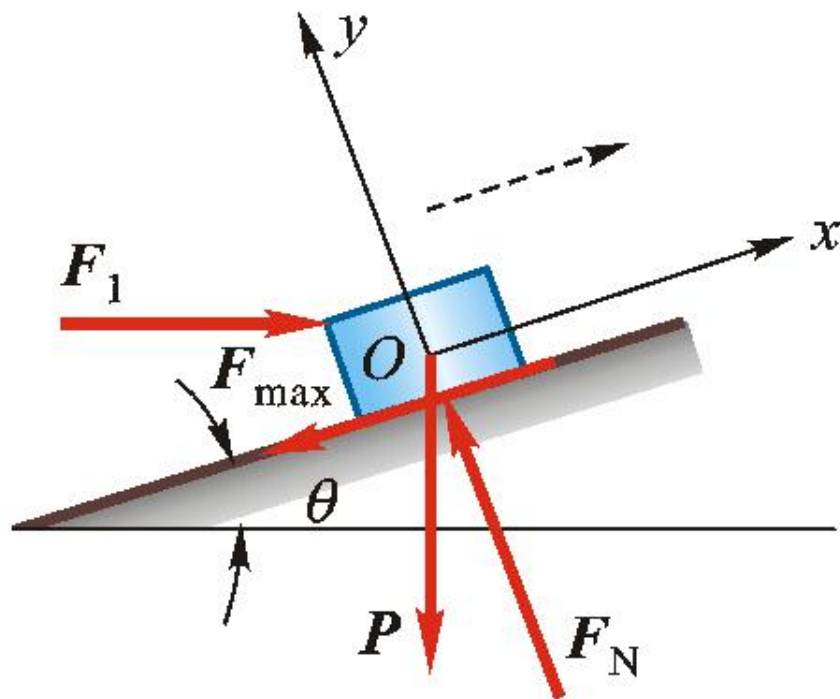
画物块受力图

$$\sum F_x = 0 \quad F_1 \cos \theta - P \sin \theta - F_{\max} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -F_1 \sin \theta - P \cos \theta + F_N = 0$$

$$F_{\max} = f_s F_N$$

→
$$F_1 = \frac{\sin \theta + f_s \cos \theta}{\cos \theta - f_s \sin \theta} P$$



设物块有下滑趋势时，推力为 \vec{F}_2

画物块受力图

$$\Sigma F_x = 0 \quad F_1 \cos \theta - P \sin \theta + F_{\max}' = 0$$

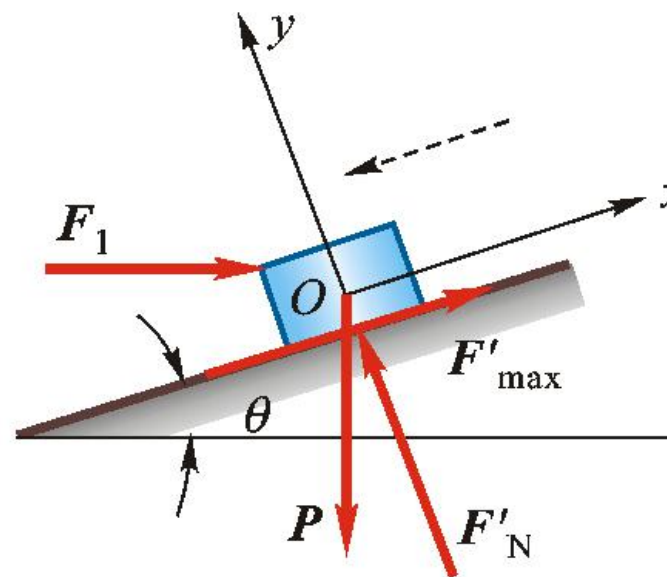
$$\Sigma F_y = 0 \quad -F_1 \sin \theta - P \cos \theta + F_N' = 0$$

$$F_{\max}' = f_s F_N'$$

→
$$F_1 = \frac{\sin \theta - f_s \cos \theta}{\cos \theta + f_s \sin \theta} P$$

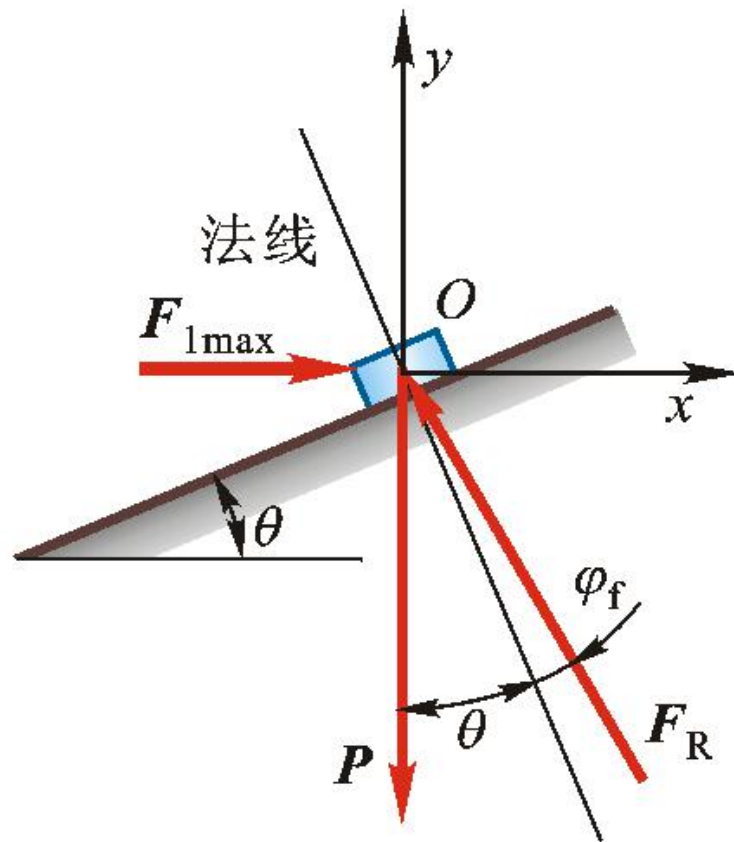


$$\frac{\sin \theta - f_s \cos \theta}{\cos \theta + f_s \sin \theta} P \leq F \leq \frac{\sin \theta + f_s \cos \theta}{\cos \theta - f_s \sin \theta} P$$



用几何法求解

解：物块有向上滑动趋势时



$$F_{1\max} = P \tan(\theta + \varphi)$$



物块有向下滑动趋势时

$$F_{1\min} = P \tan(\theta - \varphi)$$

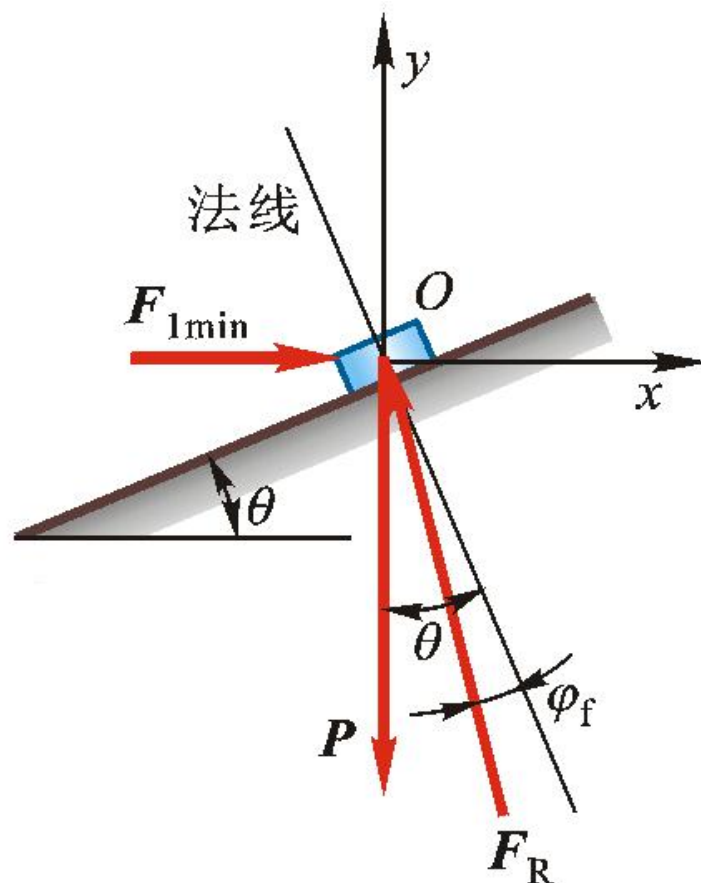


$$P \tan(\theta - \varphi) \leq F \leq P \tan(\theta + \varphi)$$

利用三角公式与 $\tan \varphi = f_s$,



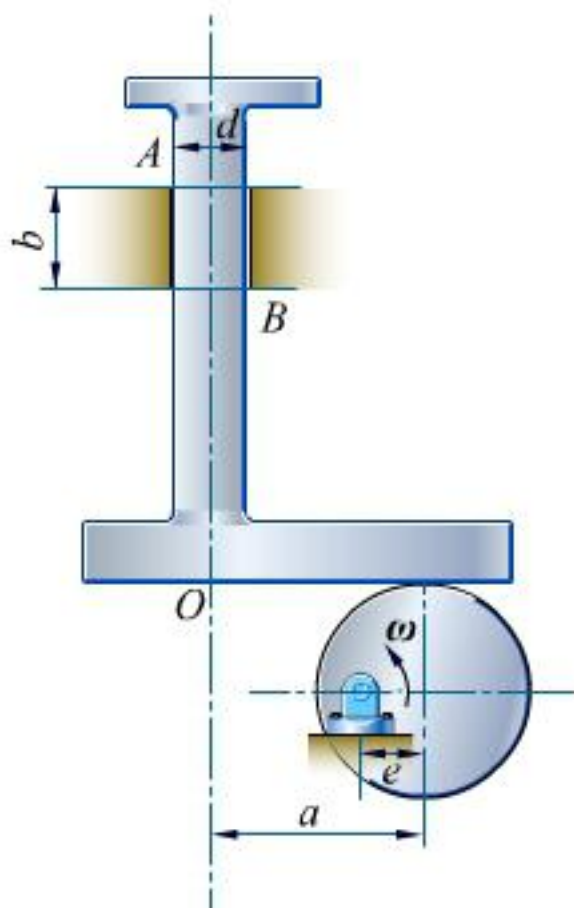
$$P \frac{\sin \theta - f_s \cos \theta}{\cos \theta + f_s \sin \theta} \leq F \leq P \frac{\sin \theta + f_s \cos \theta}{\cos \theta - f_s \sin \theta}$$



例2-23

已知： b , d , f_s , 不计凸轮与挺杆处摩擦， 不计挺杆质量；

求： 挺杆不被卡住之 a 值.



解： 取挺杆，设挺杆处于刚好卡住位置.

$$\Sigma F_x = 0 \quad F_{NA} - F_{NB} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad -F_A - F_B + F = 0$$

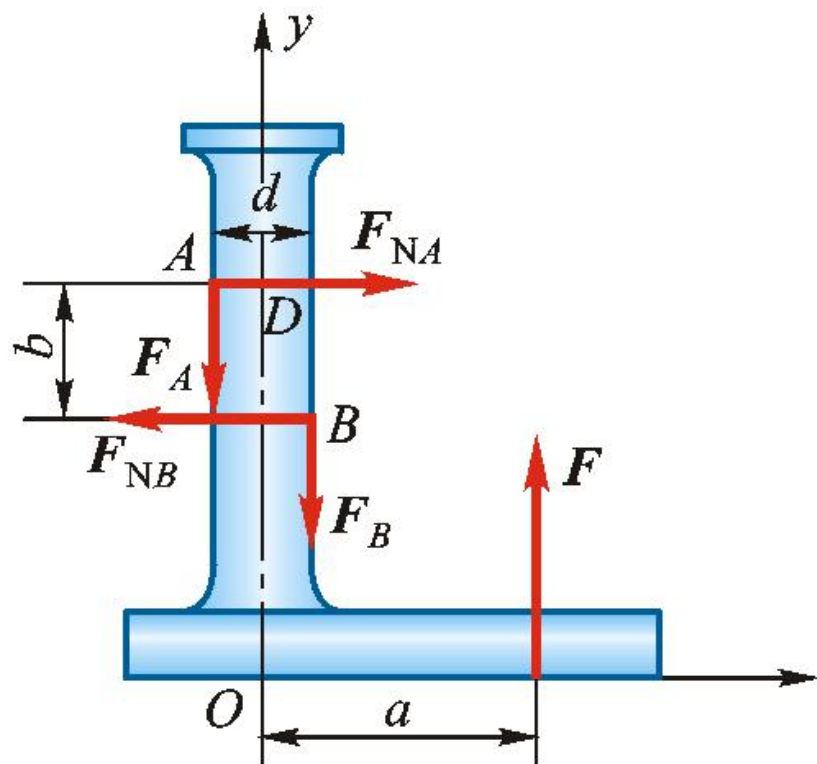
$$\Sigma M_A = 0$$

$$F\left(a + \frac{d}{2}\right) - F_B d - F_{NB} b = 0$$

$$F_A = f_s F_{NA} \quad F_B = f_s F_{NB}$$

→ $a = \frac{b}{2f_s}$

→ 挺杆不被卡住时 $a < \frac{b}{2f_s}$



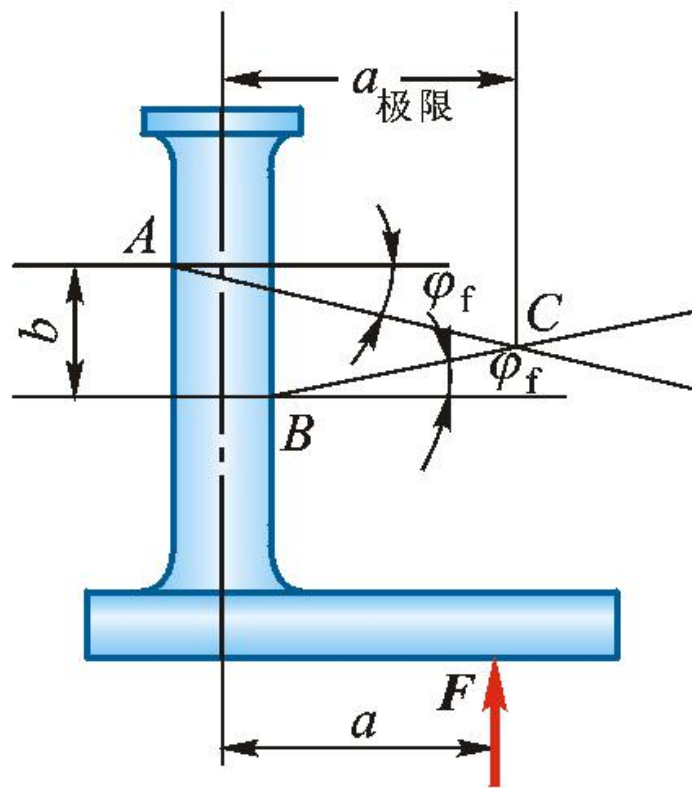
用几何法求解

解：

$$b = (a_{\text{极限}} + \frac{d}{2}) \tan \varphi + (a_{\text{极限}} - \frac{d}{2}) \tan \varphi$$
$$= 2a_{\text{极限}} \tan \varphi = 2a_{\text{极限}} f_s$$

→ $a_{\text{极限}} = \frac{b}{2f_s}$

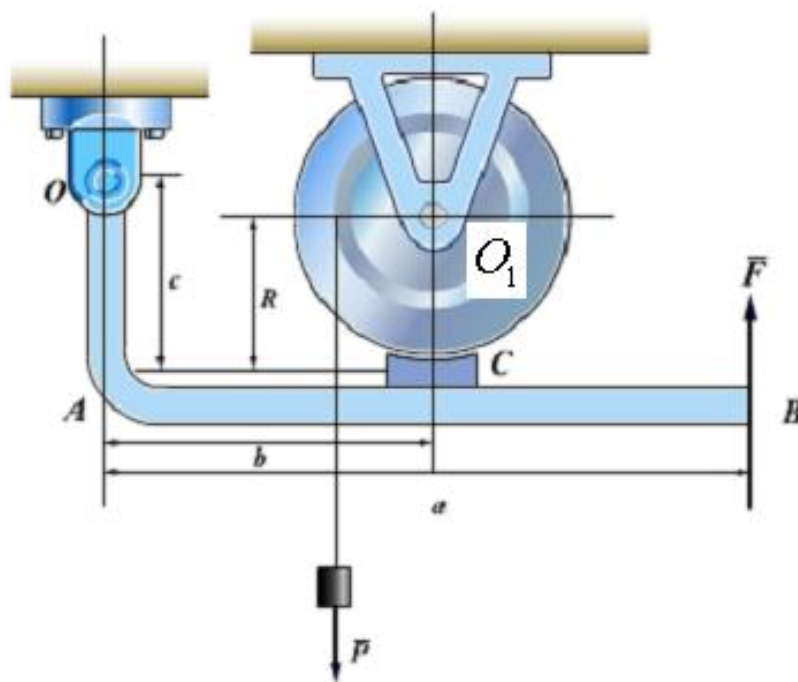
$$a < \frac{b}{2f_s}$$



例2-24

已知：物块重 P ，鼓轮重心位于 O_1 处，闸杆重量不计， f_s ，各尺寸如图所示。

求：制动鼓轮所需铅直力 \vec{F} 。



解：

分别取闸杆与鼓轮

设鼓轮被制动处于平衡状态

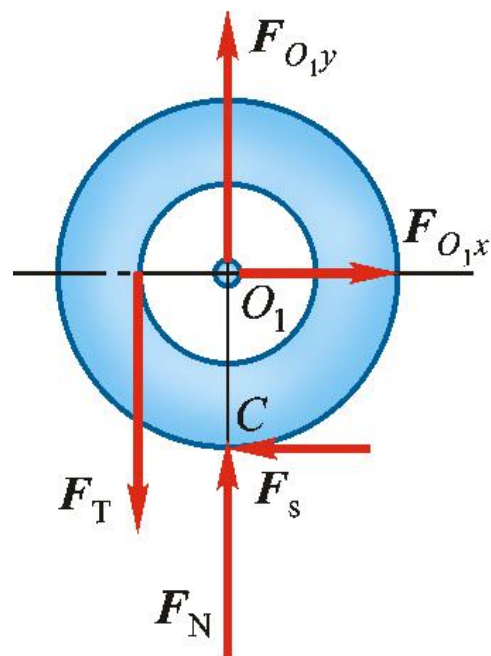
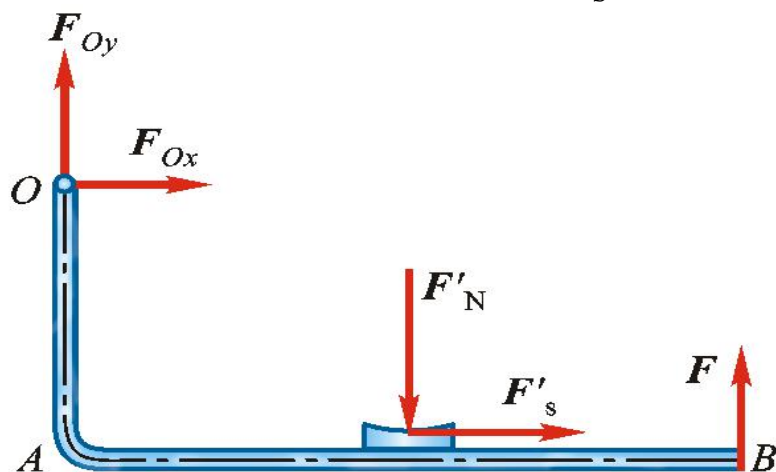
$$\text{对鼓轮, } \Sigma M_{O_1} = 0 \quad rF_T - RF_s = 0$$

$$\text{对闸杆, } \Sigma M_O = 0 \quad Fa - F'_N b - F'_s c = 0$$

$$\text{且 } F'_s \leq f_s F'_N$$

$$\text{而 } F_T = P, \quad F'_s = F_s$$

$$\text{解得 } F \geq \frac{rP(b - f_s c)}{f_s R a}$$

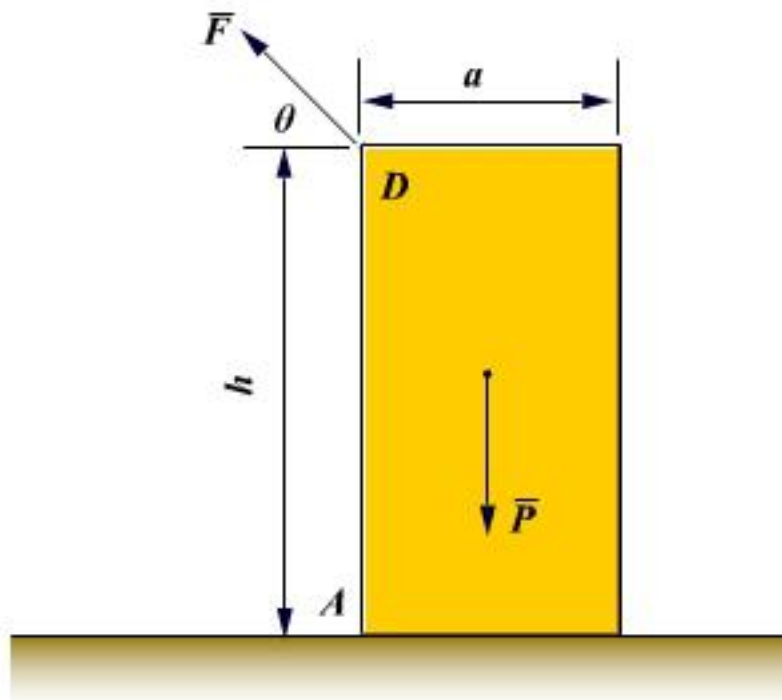


例2-25

已知：均质木箱重 $P = 5\text{kN}$, $f_s = 0.4$, $h = 2a = 2\text{m}$, $\theta = 30^\circ$

求：（1）当 D 处拉力 $F = 1\text{kN}$ 时，木箱是否平衡？

（2）能保持木箱平衡的最大拉力.



解： (1) 取木箱，设其处于平衡状态.

$$\Sigma F_x = 0 \quad F_s - F \cos \theta = 0 \quad F_s = 866\text{N}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad F_N - P + F \sin \theta = 0 \quad \longrightarrow \quad F_N = 4500\text{N}$$

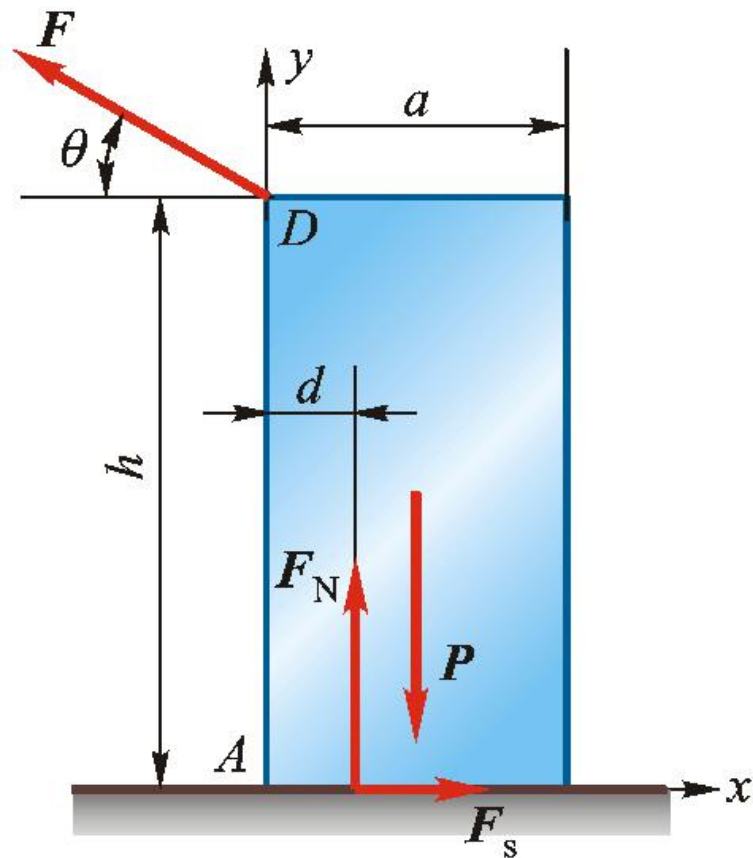
$$\Sigma M_A = 0 \quad hF \cos \theta - P \cdot \frac{a}{2} + F_N d = 0 \quad d = 0.171\text{m}$$

而 $F_{\max} = f_s F_N = 1800\text{N}$

因 $F_s < F_{\max}$ ，木箱不会滑动；

又 $d > 0$ ，木箱无翻倒趋势.

\longrightarrow 木箱平衡



(2) 设木箱将要滑动时拉力为 F_1

$$\Sigma F_x = 0 \quad F_s - F_1 \cos \theta = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad F_N - P - F_1 \sin \theta = 0$$

$$\text{又} \quad F_s = F_{\max} = f_s F_N$$

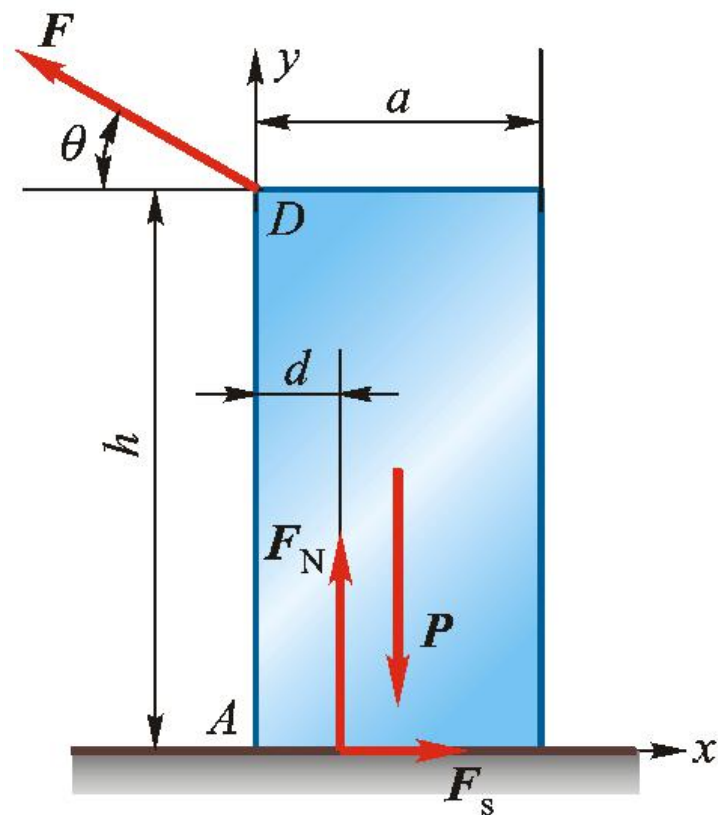
$$\rightarrow F_1 = \frac{f_s P}{\cos \theta + f_s \sin \theta} = 1876 \text{ N}$$

设木箱有翻动趋势时拉力为 F_2

$$\Sigma M_A = 0 \quad F_2 \cos \theta \cdot h - P \cdot \frac{a}{2} = 0$$

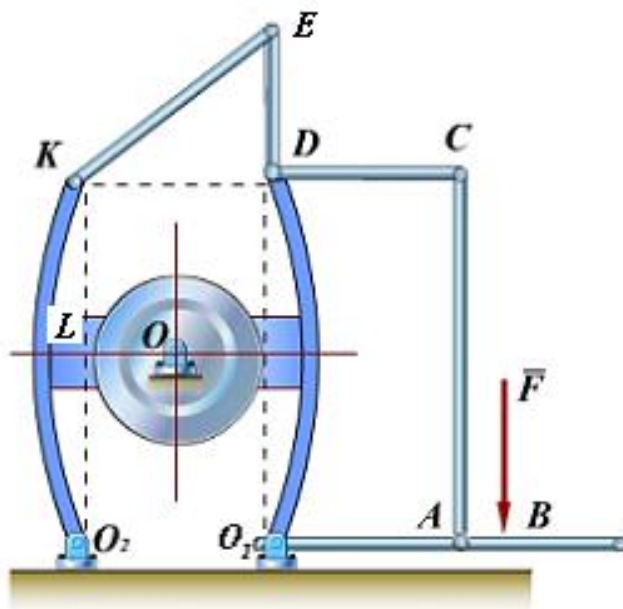
$$\rightarrow F_2 = \frac{Pa}{2h \cos \theta} = 1443 \text{ N}$$

\rightarrow 最大拉力为 1443 N



例2-26

已知： $F = 200\text{N}$ ， $f_s = 0.5$ ， $O_1O_2 = KD = DC = O_1A$
 $= KL = O_2L = 2R = 0.5\text{m}$ ， $O_1B = 0.75\text{m}$ ，
 $AC = O_1D = 1\text{m}$ ， $ED = 0.25\text{m}$ ，各构件自重不计；
求： 作用于鼓轮上的制动力矩。



解：分析 O_1AB , 画受力图

$$\Sigma M_{O_1} = 0$$

$$F_{AC} \cdot O_1A - F \cdot O_1B = 0$$

→ $F_{AC} = 300\text{N}$

分析 DCE , 画受力图

$$\Sigma M_D = 0$$

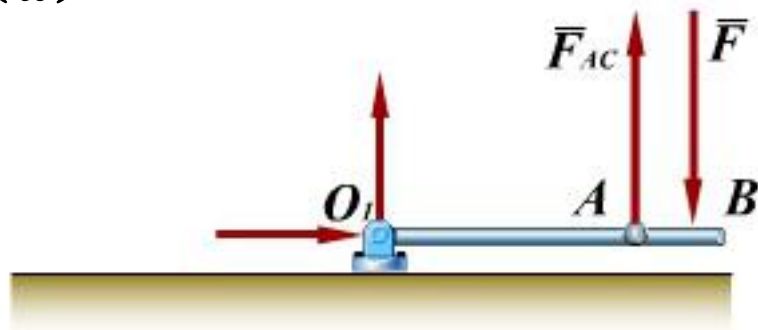
$$F_{EK} \cos \theta \cdot DE - F_{CA} \cdot CD = 0$$

→ $F_{EK} \cos \theta = 600\text{N}$

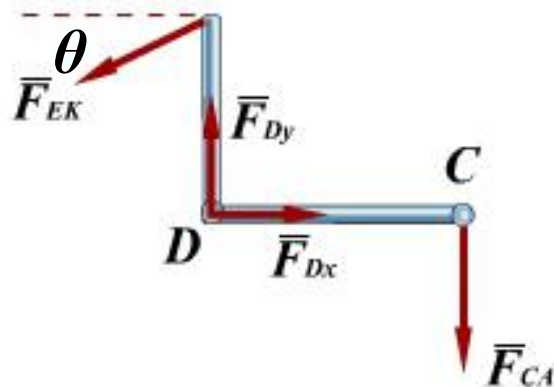
$$\Sigma F_x = 0 \quad F_{Dx} - F_{EK} \cos \theta = 0$$

→ $F_{Dx} = 600\text{N}$

(a)



(b)

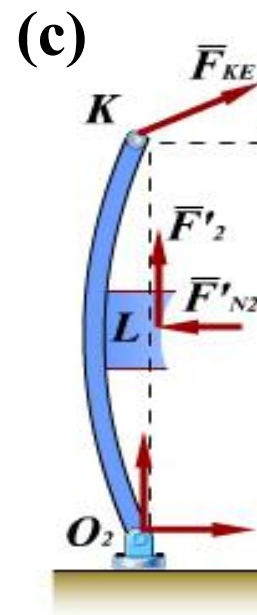


分析 O_2K , 画受力图

$$\Sigma M_{O_2} = 0$$

$$-F_{KE} \cos \theta \cdot KO_2 + F'_{N2} \cdot \frac{1}{2} KO_2 = 0$$

$$\rightarrow F'_{N2} = 1200\text{N}$$

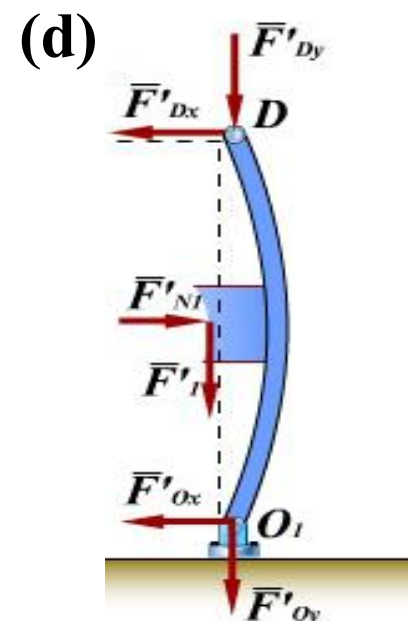


分析 O_1D ,画受力图

$$\Sigma M_{O_1} = 0$$

$$F'_{Dx} \cdot O_1D - F'_{N1} \cdot \frac{1}{2} O_1D = 0$$

$$\rightarrow F'_{N1} = 1200\text{N}$$



分析鼓轮，画受力图

$$\Sigma M_O = F_{s2}R + F_{s1}R$$

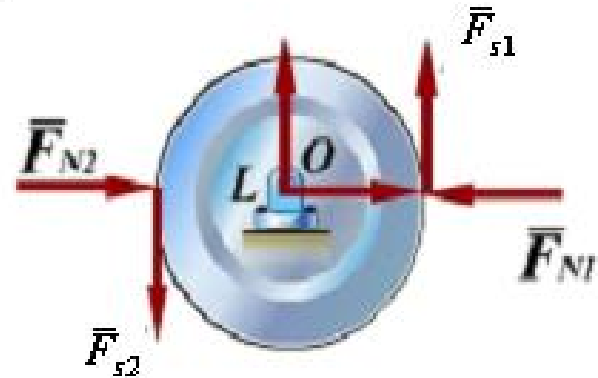
$$F_{s2} = f_s F_{N2}$$

$$F_{s1} = f_s F_{N1}$$



$$M = 300\text{N} \cdot \text{m}$$

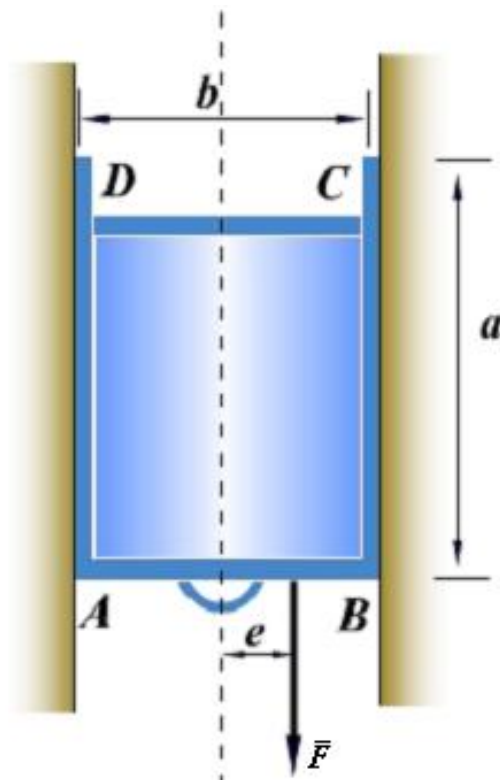
(e)



例2-27

已知：抽屉尺寸 a , b , f_s （抽屉与两壁间），不计抽屉底部摩擦；

求：抽拉抽屉不被卡住之 e 值。



解： 取抽屉，画受力图，设抽屉刚好被卡住

$$\Sigma F_x = 0 \quad F_{NA} - F_{NC} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad F_{sA} + F_{sC} - F = 0$$

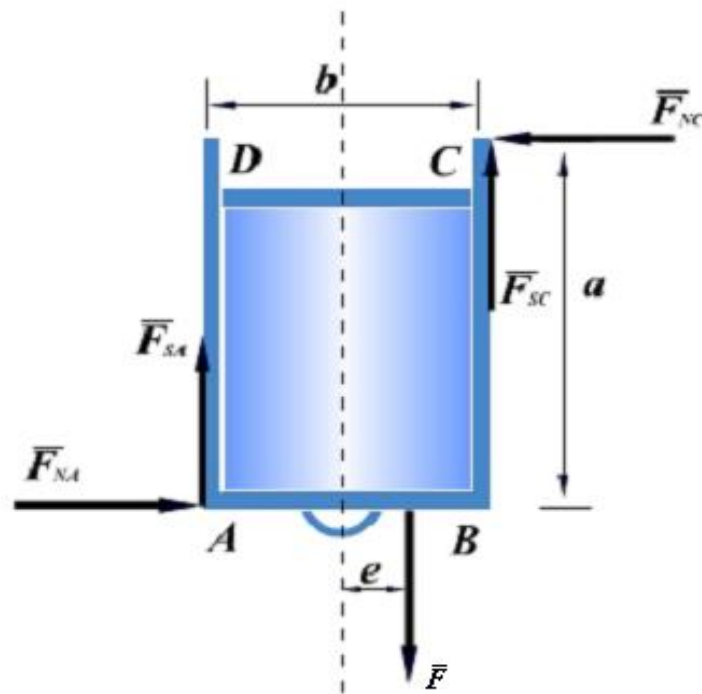
$$\Sigma M_A = 0$$

$$F_{sC} \cdot b + F_{NC} \cdot a - F\left(\frac{b}{2} + e\right) = 0$$

$$F_{sA} = f_s F_{NA} \quad F_{sC} = f_s F_{NC}$$

→
$$e = \frac{a}{2f_s}$$

→ 抽屉不被卡住,
$$e < \frac{a}{2f_s} .$$

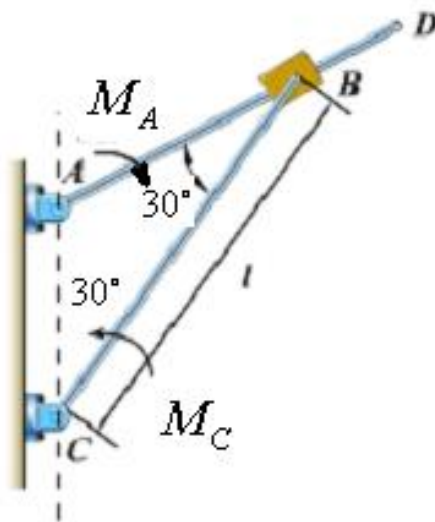


例2-28

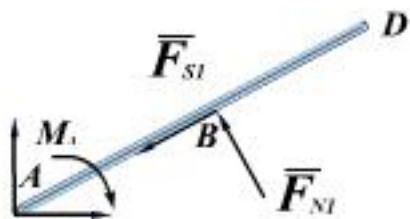
已知： $M_A = 40\text{N}\cdot\text{m}$ ， $f_s = 0.3$ ， 各构件自重不计，

尺寸如图；

求： 保持系统平衡的力偶矩 M_C 。



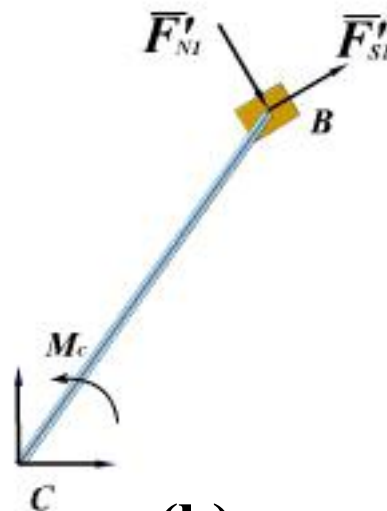
解： 设 $M_C = M_{C1}$ 时，系统即将逆时针方向转动
画两杆受力图.



(a)

$$\Sigma M_A = 0$$

$$F_{N1} \cdot AB - M_A = 0$$



(b)

$$\Sigma M_C = 0$$

$$M_{C1} - F'_{N1} \cdot l \sin 60^\circ - F'_{s1} \cdot l \cos 60^\circ = 0$$



$$\text{又} \quad F'_{s1} = F_{s1} = f_s F_{N1} = f_s F'_{N1}$$

$$\longrightarrow M_{C1} = 70.39 \text{ N} \cdot \text{m}$$

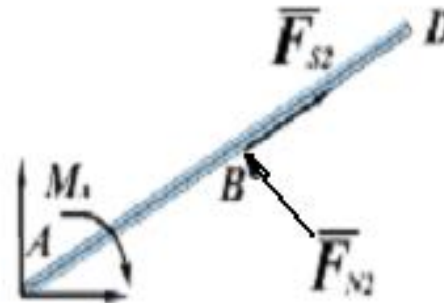
设 $M_C = M_{C2}$ 时，系统有顺时针方向转动趋势

画两杆受力图.

$$\Sigma M_A = 0$$

$$F_{N2} \cdot AB - M_A = 0$$

(c)



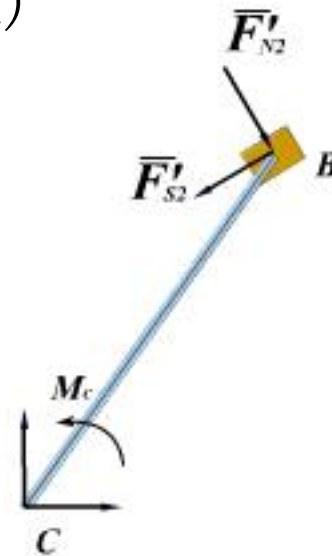
$$\Sigma M_C = 0 \quad M_{C2} - F'_{N2} \cdot l \sin 60^\circ - F'_{s2} \cdot l \cos 60^\circ = 0$$

$$\text{又} \quad F'_{s2} = F_{s2} = f_s F_{N2} = f_s F'_{N2} \quad (d)$$

$$\Rightarrow M_{C2} = 49.61 \text{ N} \cdot \text{m}$$

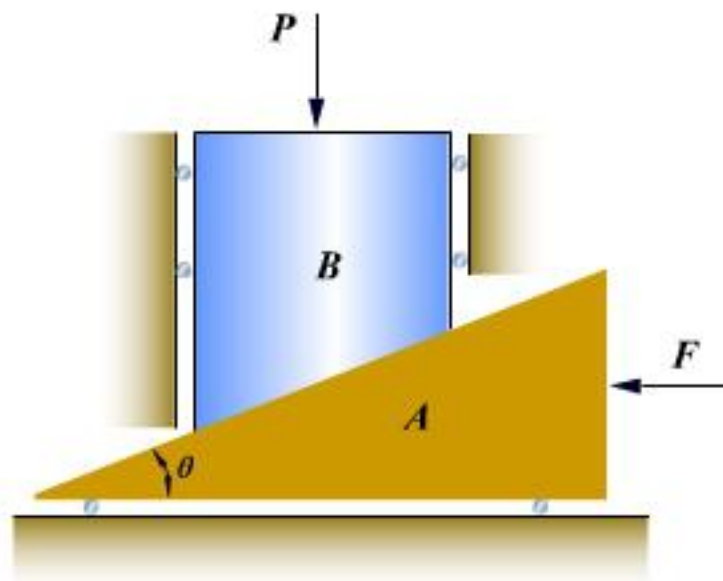
\Rightarrow 系统平衡时

$$49.61 \text{ N} \cdot \text{m} \leq M_C \leq 70.39 \text{ N} \cdot \text{m}$$



例2-29

已知：力 \vec{P} ，角 θ ，不计自重的 A, B 块间的
静摩擦因数为 f_s ，其它接触处光滑；
求：使系统保持平衡的力 \vec{F} 的值。



解： 取整体分析，画受力图

$$\Sigma F_y = 0 \quad F_{NA} - P = 0$$

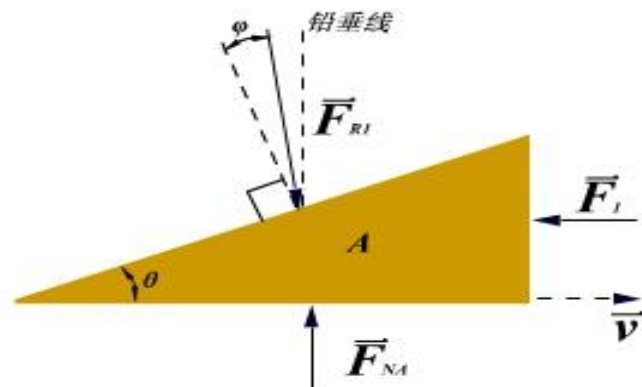
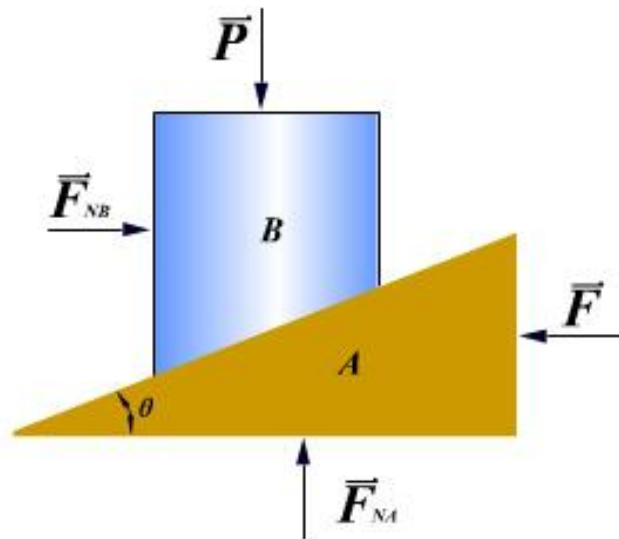
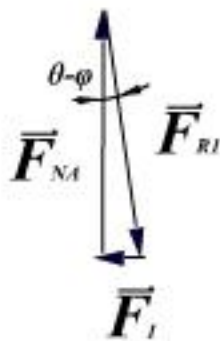
$$\rightarrow F_{NA} = P$$

设力 \vec{F} 小于 \vec{F}_1 时，

楔块 A 向右运动

取楔块 A 分析，画受力图

$$\begin{aligned} F_1 &= F_{NA} \tan(\theta - \varphi) \\ &= P \tan(\theta - \varphi) \end{aligned}$$

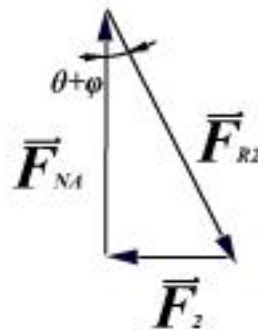
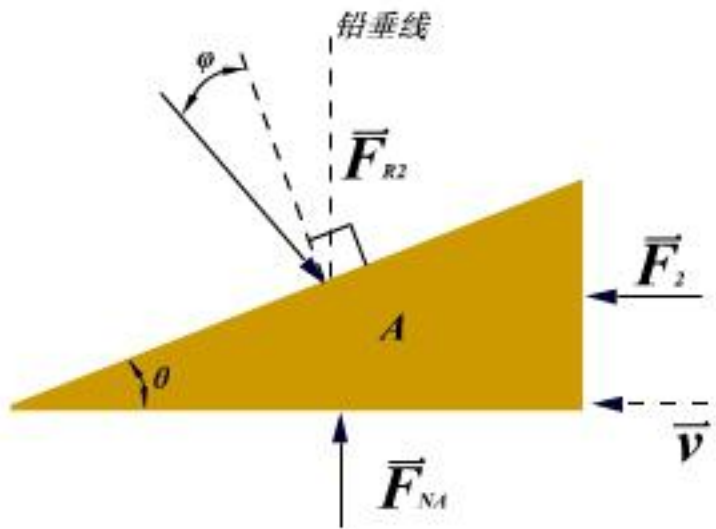


设力 \vec{F} 大于 \vec{F}_2 时，楔块 A 向左运动

取楔块 A 分析，画受力图

$$F_2 = F_{NA} \tan(\theta + \varphi) = P \tan(\theta + \varphi)$$

→ $P \tan(\theta - \varphi) \leq F \leq P \tan(\theta + \varphi)$



例2-30

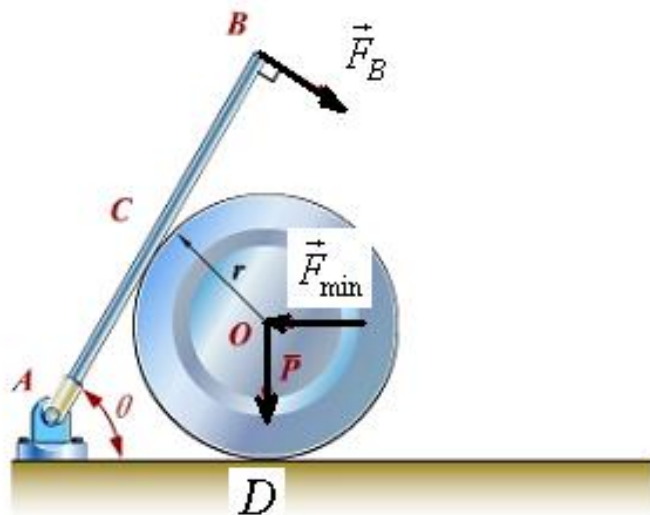
已知：均质轮重 $P = 100\text{N}$ ，杆无重， r, l ， $\theta = 60^\circ$ 时，

$$AC = CB = \frac{l}{2}; \quad F_B = 50\text{N}, \quad f_C = 0.4 \quad (\text{杆, 轮间})$$

求：若要维持系统平衡

(1) $f_D = 0.3$ (轮, 地面间)，轮心 O 处水平推力 F_{\min}

(2) $f_D = 0.15$ (轮, 地面间)，轮心 O 处水平推力 F_{\min} 。



解: F 小于某值, 轮将向右滚动.

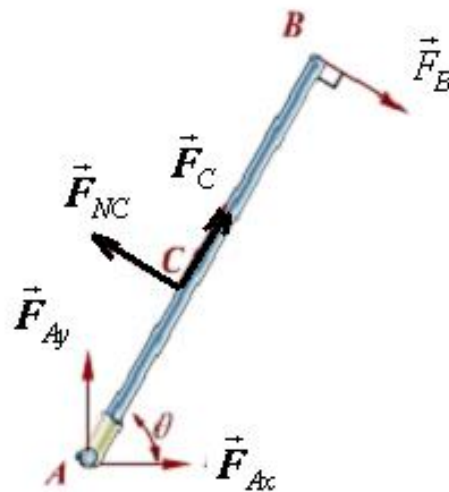
C, D 两处有一处摩擦力达最大值, 系统即将运动.

(1) 先设 C 处摩擦力达最大值, 取杆与轮.

$$\Sigma M_A = 0 \quad F_{NC} \cdot \frac{l}{2} - F_B \cdot l = 0$$

$$\rightarrow F_{NC} = 100\text{N}$$

$$\rightarrow F_C = F_{C\max} = f_C F_{NC} = 40\text{N}$$



$$\Sigma M_O = 0 \quad F'_C \cdot r - F_D \cdot r = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad F'_{NC} \sin 60^\circ - F'_C \cos 60^\circ - F_{\min} - F_D = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad F_{ND} - P - F'_{NC} \cos 60^\circ - F'_C \sin 60^\circ = 0$$

$$F'_{NC} = F_{NC} = 100\text{N}$$

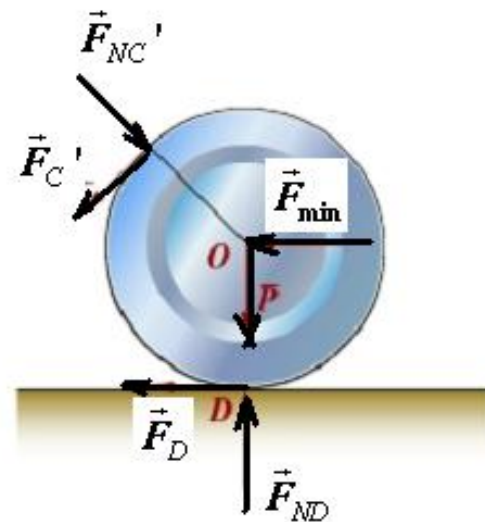
$$\longrightarrow F_D = F'_C = 40\text{N} \quad F_{\min} = 26.6\text{N}$$

$$F_{ND} = 184.6\text{N}$$



当 $f_s = 0.3$ 时, $F_{D\max} = f_s F_{ND} = 55.39\text{N}$

当 $f_s = 0.15$ 时, $F_{D\max} = f_s F_{ND} = 27.59\text{N}$



当 $f_s = 0.3$ 时, $F_D = 40\text{N} < F_{D\max}$, D 处无滑动

→ $F_{\min} = 26.6\text{N}$

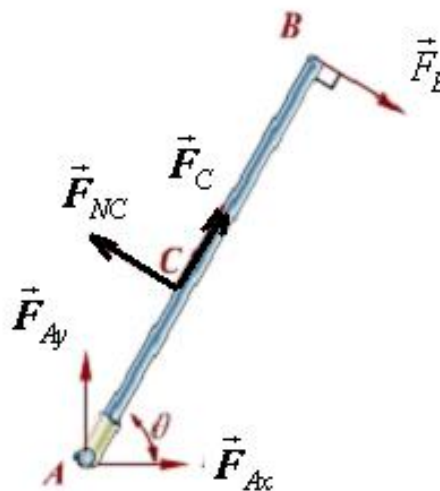
当 $f_s = 0.15$ 时, $F_D = 40\text{N} > F_{D\max}$, D 处有滑动

(2) D 处摩擦力达最大值, 取杆与轮.

$$\Sigma M_A = 0 \quad F_{\text{NC}} \cdot \frac{l}{2} - F_B \cdot l = 0$$

→ $F_{\text{NC}} = 100\text{N}$ 不变

但 $F_C \neq F_{C\max} = f_C F_{\text{NC}}$



对轮 $\Sigma M_O = 0 \quad F'_C \cdot r - F_D \cdot r = 0$

$$\Sigma F_x = 0 \quad F'_{NC} \sin 60^\circ - F'_C \cos 60^\circ - F_{\min} - F_D = 0$$

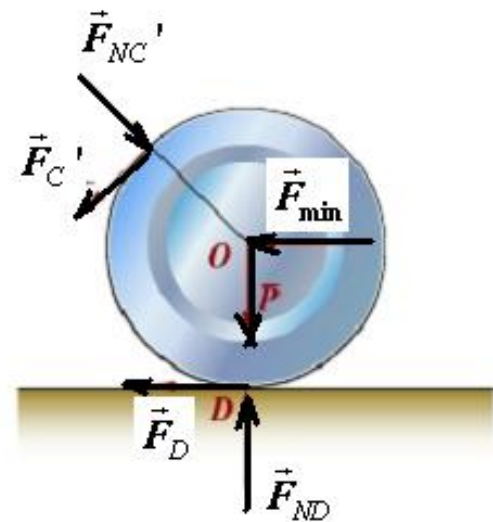
$$\Sigma F_y = 0 \quad F_{ND} - P - F'_{NC} \cos 60^\circ - F'_C \sin 60^\circ = 0$$

$$F_D = f_D F_{ND}$$

当 $f_D = 0.15$ 时, 解得 $F_{ND} = 172.4\text{N}$

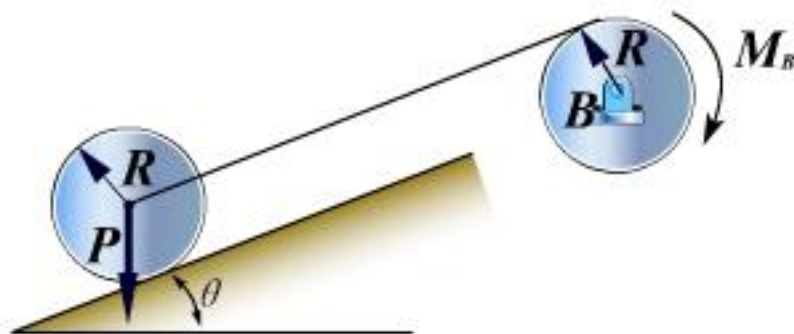
$$F_D = F_C = f_D F_{ND} = 25.86\text{N}$$

C 处无滑动 $F_{\min} = 47.81\text{N}$.



例2-31

已知: P , R , θ , δ ;



求: (1) 使系统平衡时, 力偶矩 M_B ;

(2) 圆柱 O 匀速纯滚动时, 静滑动摩擦系数的最小值.



解：（1）设圆柱 O 有向下滚动趋势，取圆柱 O

$$\Sigma M_A = 0$$

$$P \sin \theta \cdot R - F_{T1} \cdot R - M_{\max} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad F_N - P \cos \theta = 0$$

$$\text{又} \quad M_{\max} = \delta F_N$$

$$\longrightarrow F_{T1} = P \left(\sin \theta - \frac{\delta}{R} \cos \theta \right)$$

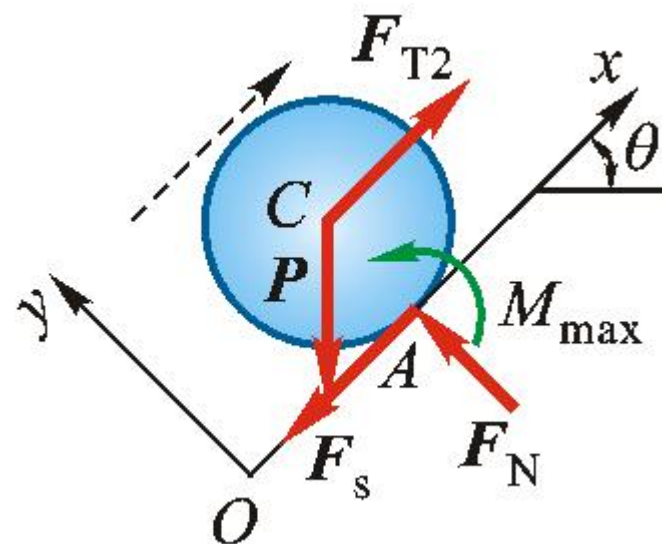
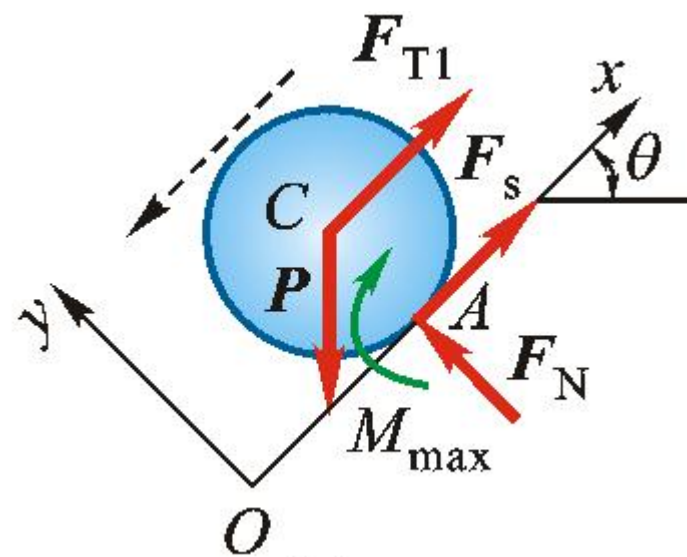
设圆柱 O 有向上滚动趋势，取圆柱 O

$$\Sigma M_A = 0$$

$$P \sin \theta \cdot R - F_{T2} \cdot R + M_{\max} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad F_N - P \cos \theta = 0$$

$$\text{又} \quad M_{\max} = \delta F_N$$



$$\longrightarrow F'_{T\max} = P(\sin \theta + \frac{\delta}{R} \cos \theta) \quad F_s \leq f_s F_{N1} = f_s P \cos \theta$$

系统平衡时 $P(R \sin \theta - \delta \cos \theta) \leq M_B \leq P(R \sin \theta + \delta \cos \theta)$

(2) 设圆柱 O 有向下滚动趋势.

$$\Sigma M_C = 0 \quad F_s \cdot R - M_{\max} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad F_N - P \cos \theta = 0$$

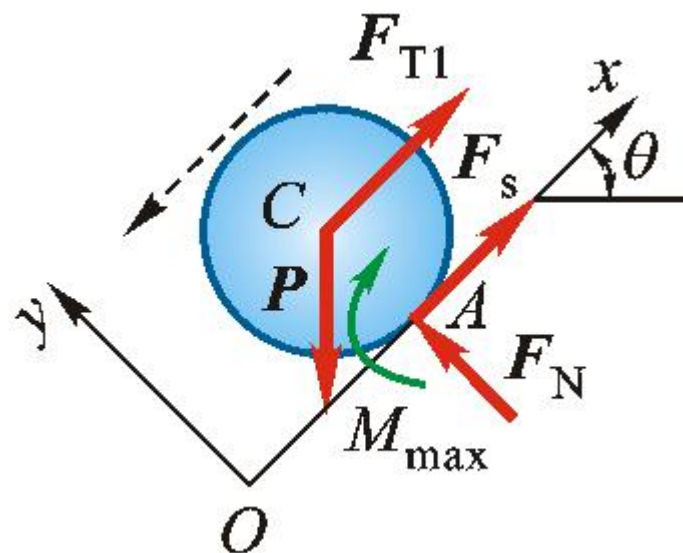
$$\text{又 } M_{\max} = \delta F_N$$

$$\longrightarrow F_s = \frac{\delta}{R} P \cos \theta$$

只滚不滑时, 应有 $F_s \leq f_s F_N = f_s P \cos \theta$ 则 $f_s \geq \frac{\delta}{R}$

同理, 圆柱 O 有向上滚动趋势时得 $f_s \geq \frac{\delta}{R}$

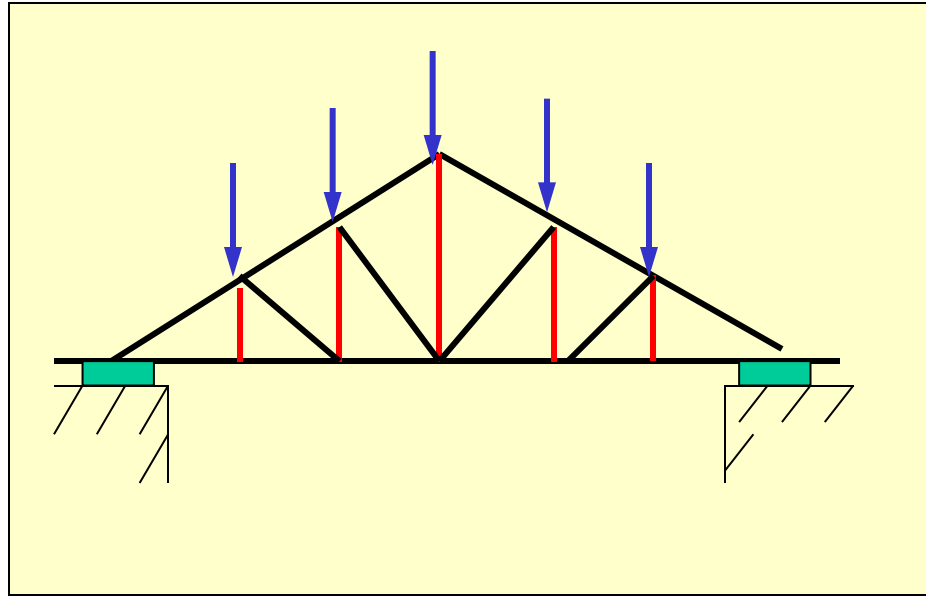
圆柱匀速纯滚时, $f_s \geq \frac{\delta}{R}$.

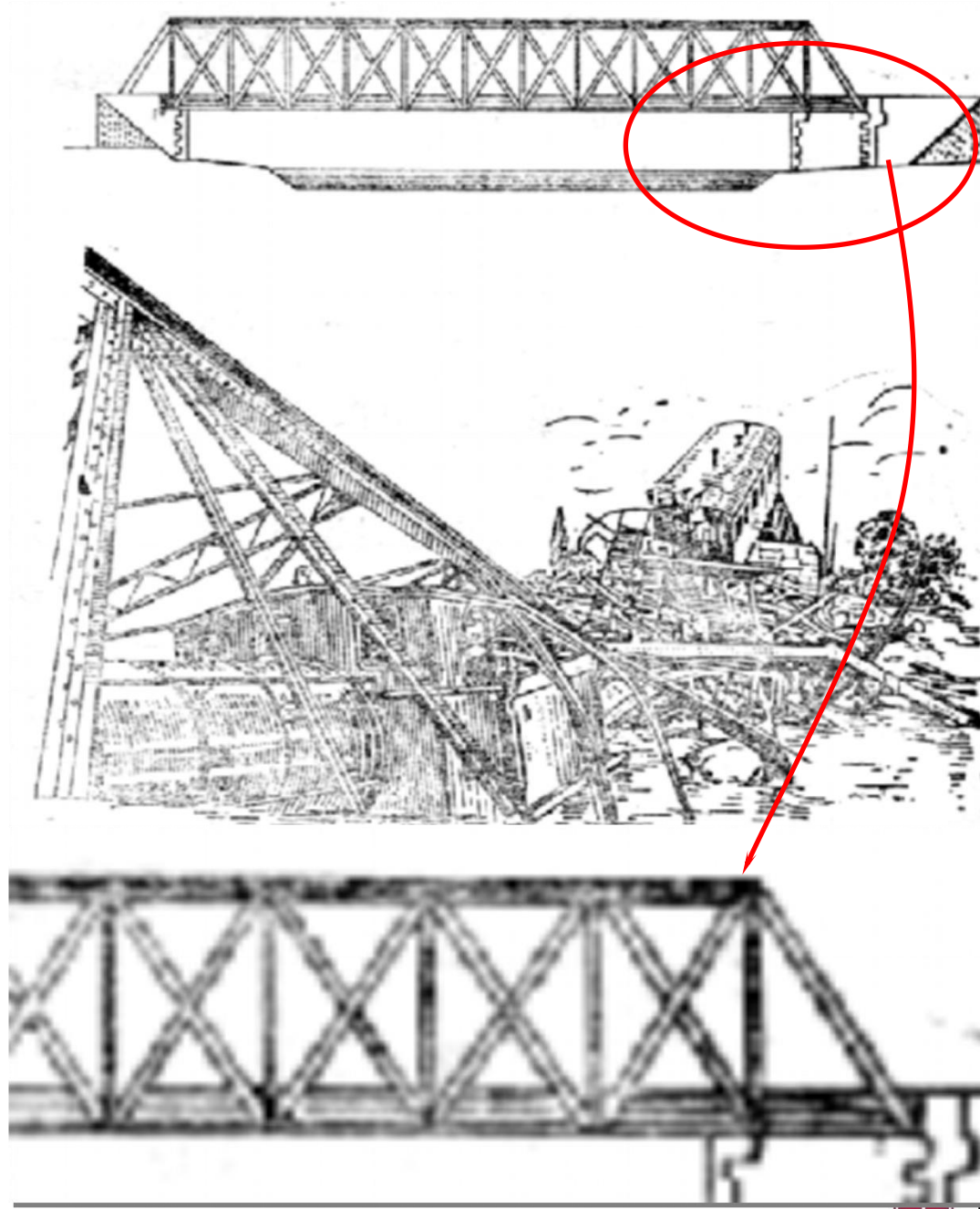


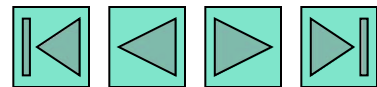
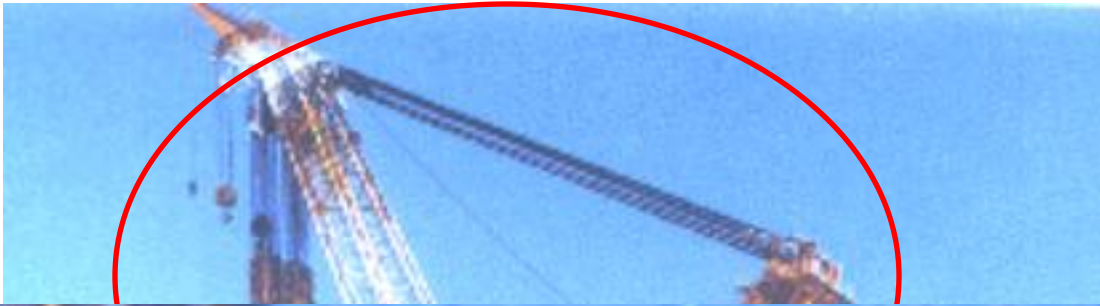
第3章 杆的拉伸（压缩） 与剪切



3.1 杆件拉伸（压缩）的工程实例









斜拉桥承受拉力的钢缆

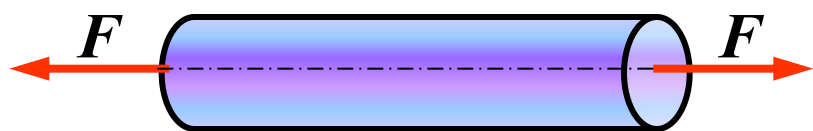




3.2 轴向拉压杆的内力 — 轴力

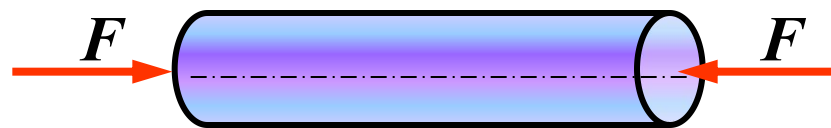
受力特点： 外力的合力作用线与杆的轴线重合

变形特点： 沿轴向伸长或缩短



轴向拉伸

(axial tension)



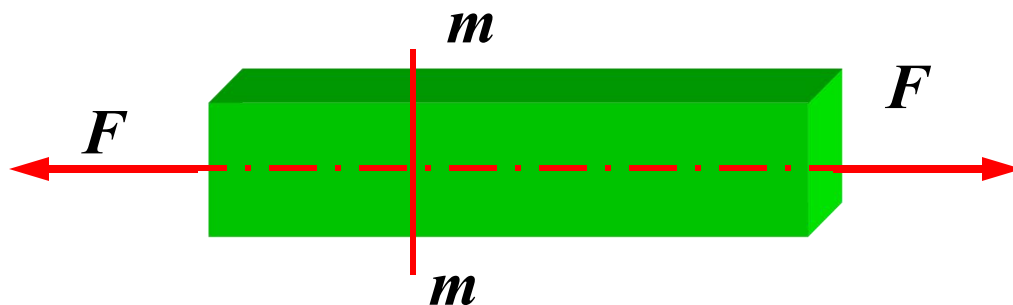
轴向压缩

(axial compression)



求内力

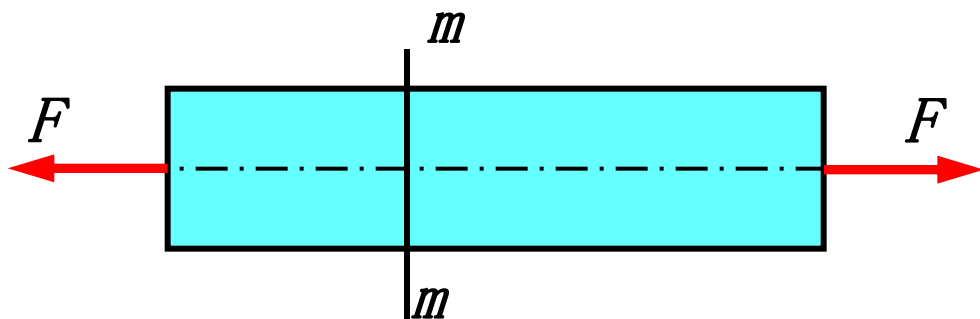
设一等直杆在两端轴向拉力 F 的作用下处于平衡, 欲求杆件横截面 $m-m$ 上的内力.



1. 截面法

(1) 截开

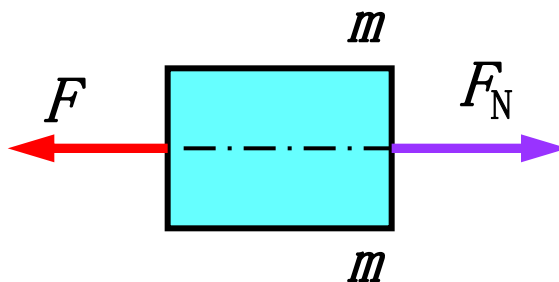
在求内力的截面 $m-m$ 处，
假想地将杆截为两部分。



(2) 代替

取左部分部分作为研究对象. 弃去部分对研究对象的作用以截开面上的内力代替，合力为

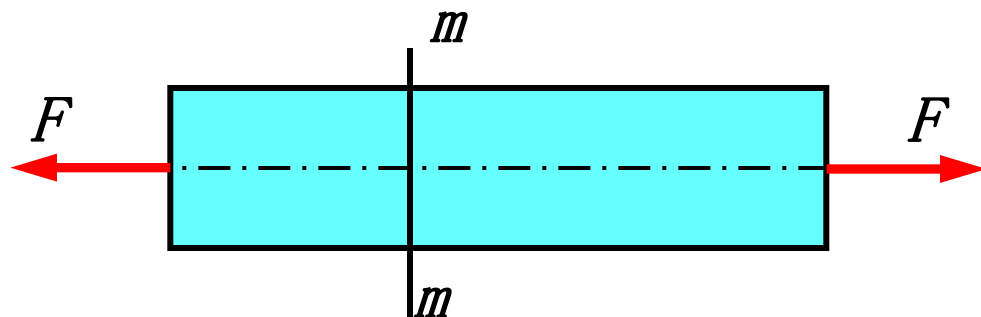
F_N .



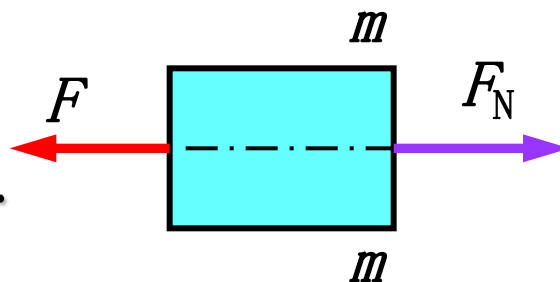
(3) 平衡

对研究对象列平衡方程

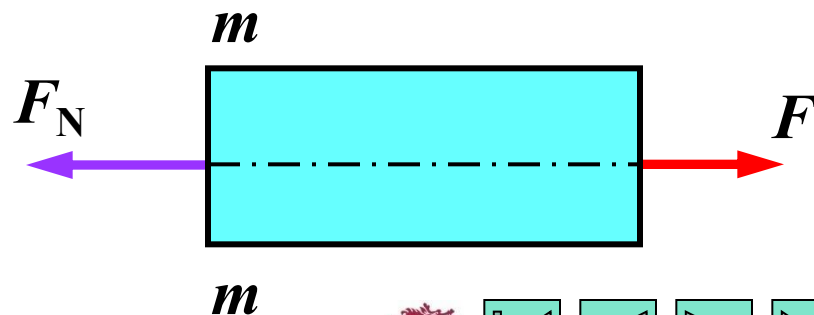
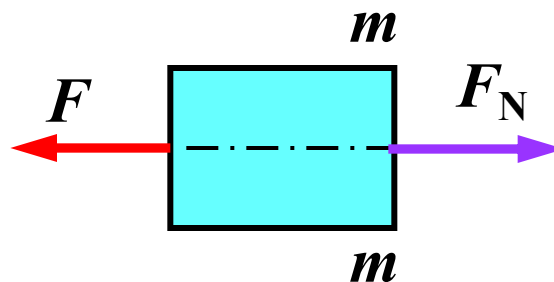
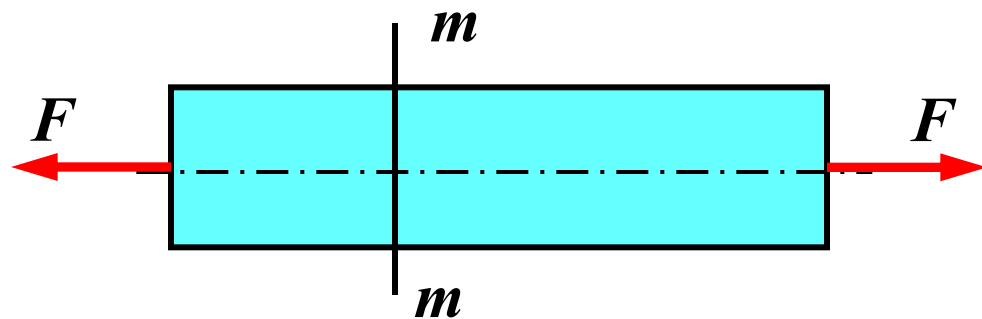
$$F_N = F$$



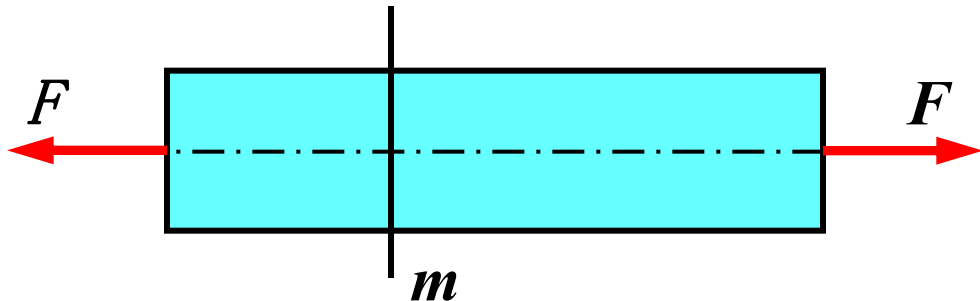
式中： F_N 为杆件任一横截面 m - m 上的内力. 与杆的轴线重合，即垂直于横截面并通过其形心, 称为**轴力**(axial force).



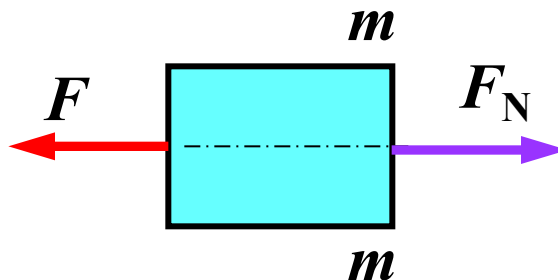
若取 右侧为研
究对象，则在截开面上
的轴力与部分左侧上的
轴力
数值相等而指向相反.



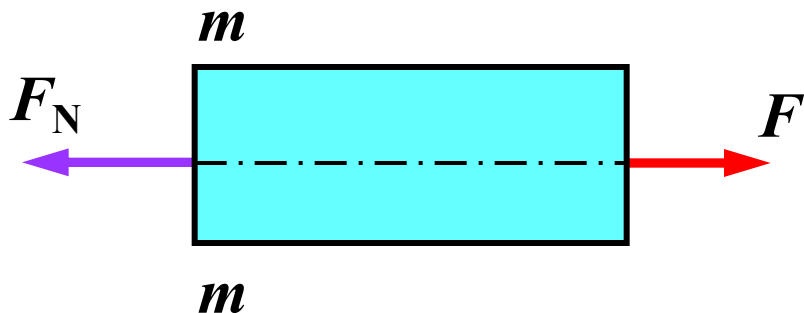
2. 轴力符号的规定



(1) 若轴力的指向背离截面，
则规定为正的，称为*拉力*
(tensile force).

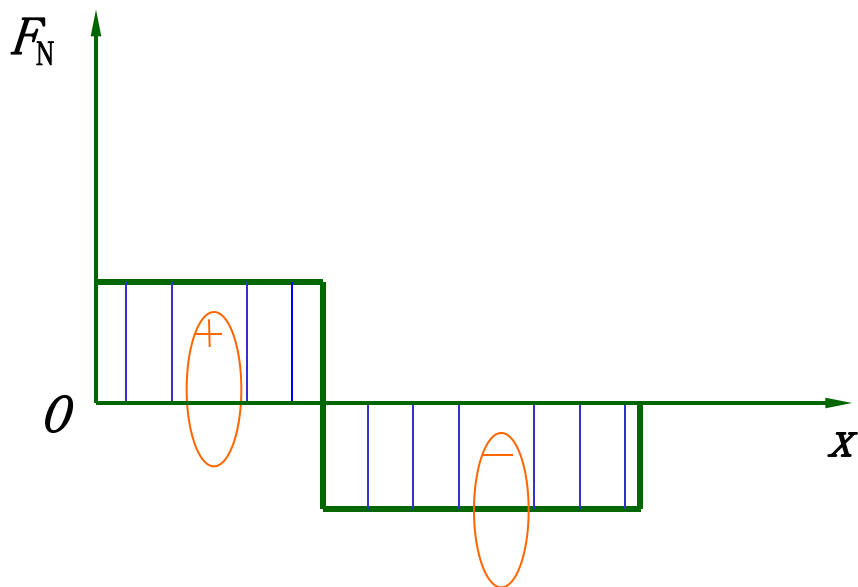


(2) 若轴力的指向指向截面，
则规定为负的，称为*压力*
(compressive force).

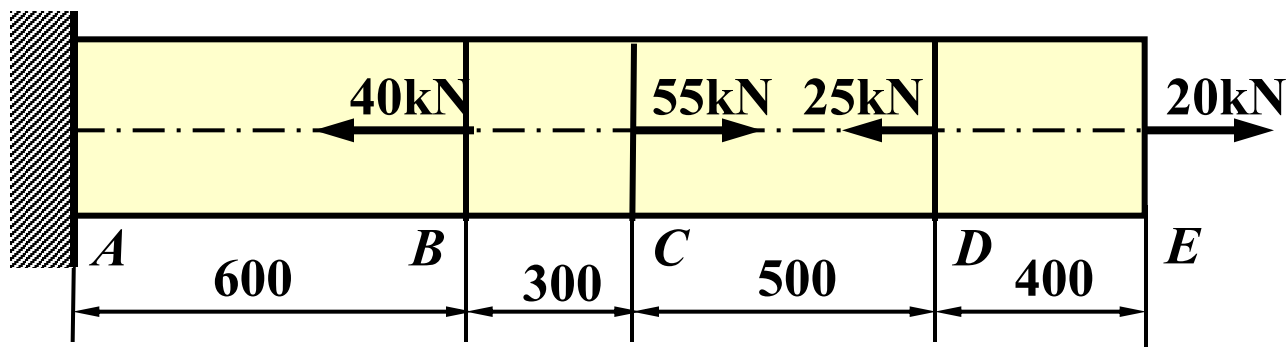


二、轴力图

用平行于杆轴线的坐标表示横截面的位置, 用垂直于杆轴线的坐标表示横截面上的轴力数值, 从而绘出表示轴力与横截面位置关系的图线, 称为轴力图. 将正的轴力画在 x 轴上侧, 负的画在 x 轴下侧.



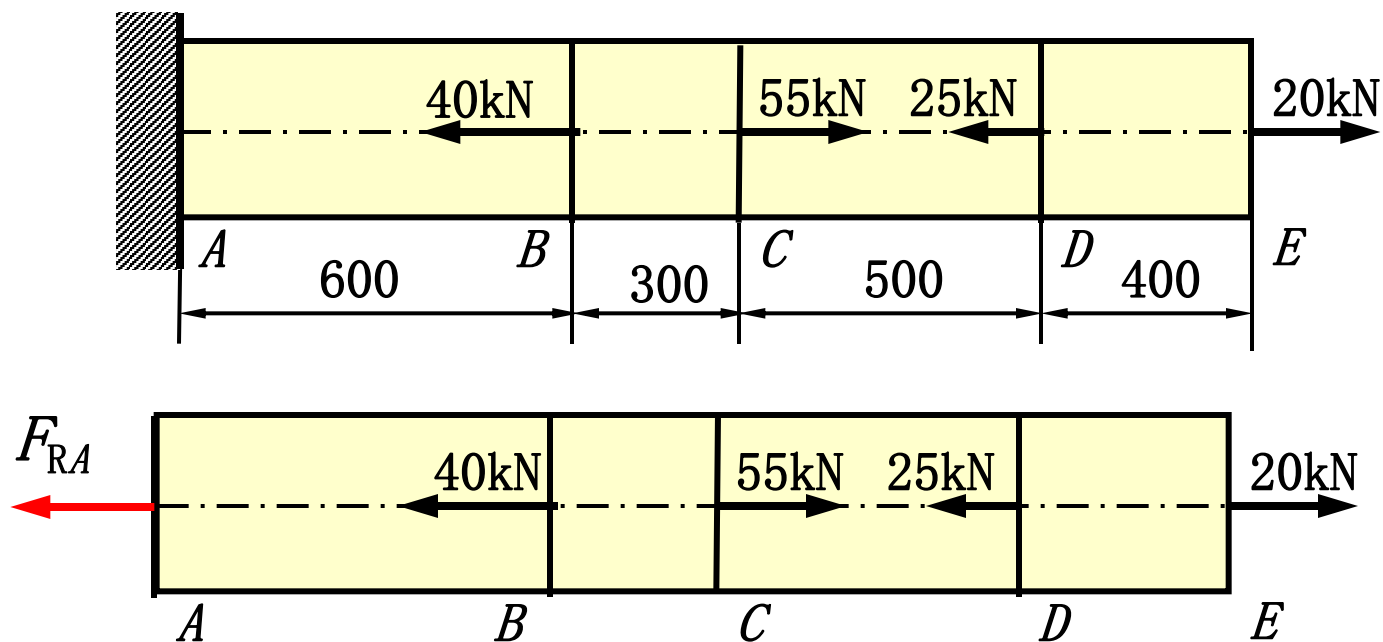
例题3-1 一等直杆其受力情况如图所示，作杆的轴力图.



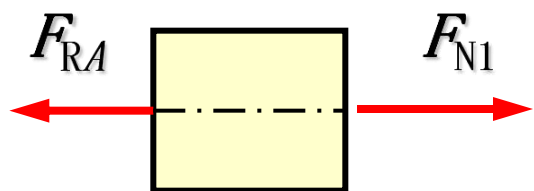
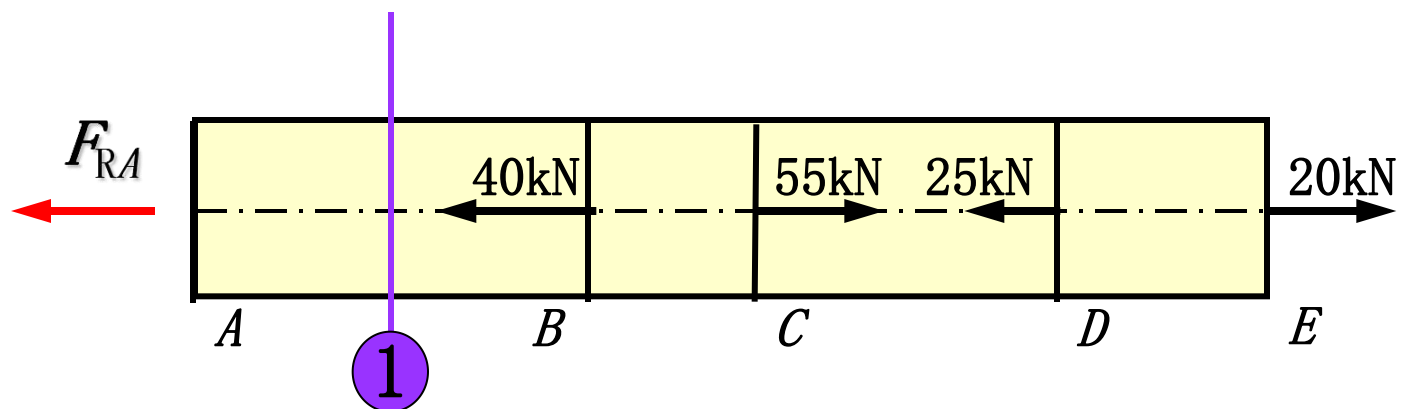
解：求支座反力

$$\sum F_x = 0 \quad -F_{RA} - 40 + 55 - 25 + 20 = 0$$

$$F_{RA} = 10\text{kN}$$



求AB段内的轴力

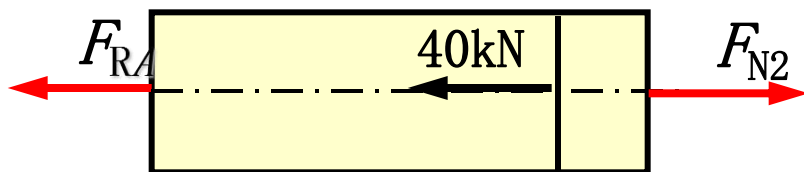
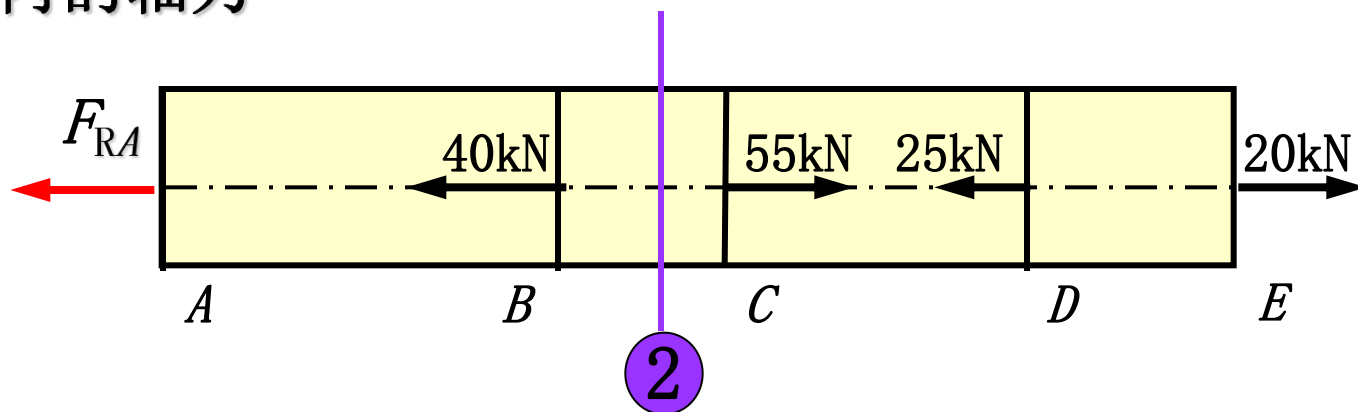


$$F_{N1} - F_{RA} = 0$$

$$F_{N1} = F_{RA} = +10(\text{kN}) \quad (+)$$



求BC段内的轴力

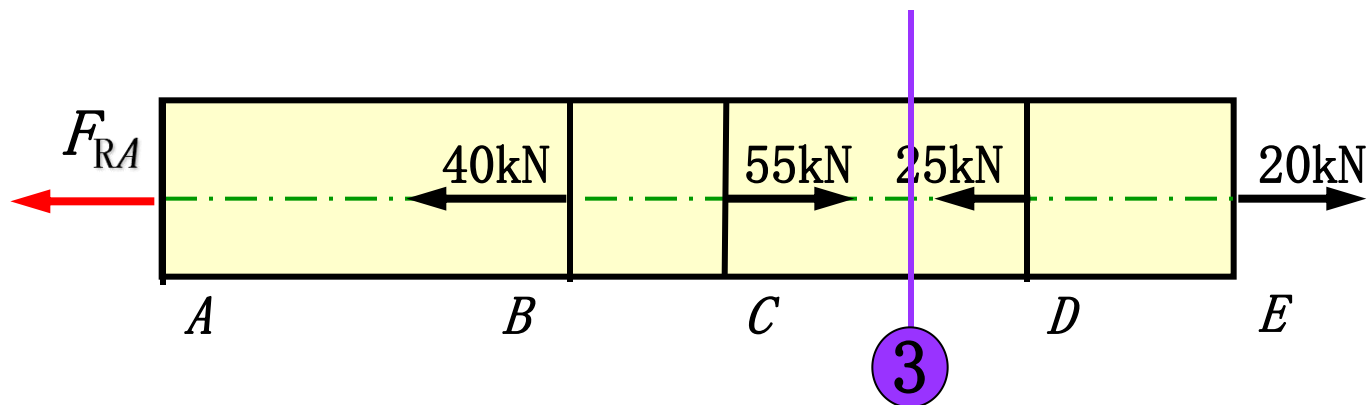


$$F_{N2} - F_{RA} - 40 = 0$$

$$F_{N2} = F_{RA} + 40 = +50(\text{kN}) \quad (+)$$

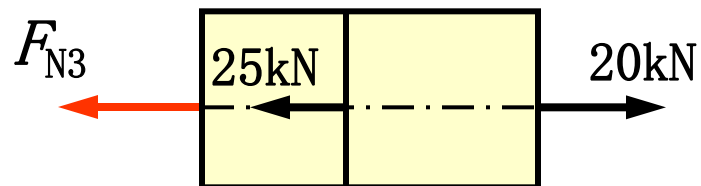


求 CD 段内的轴力

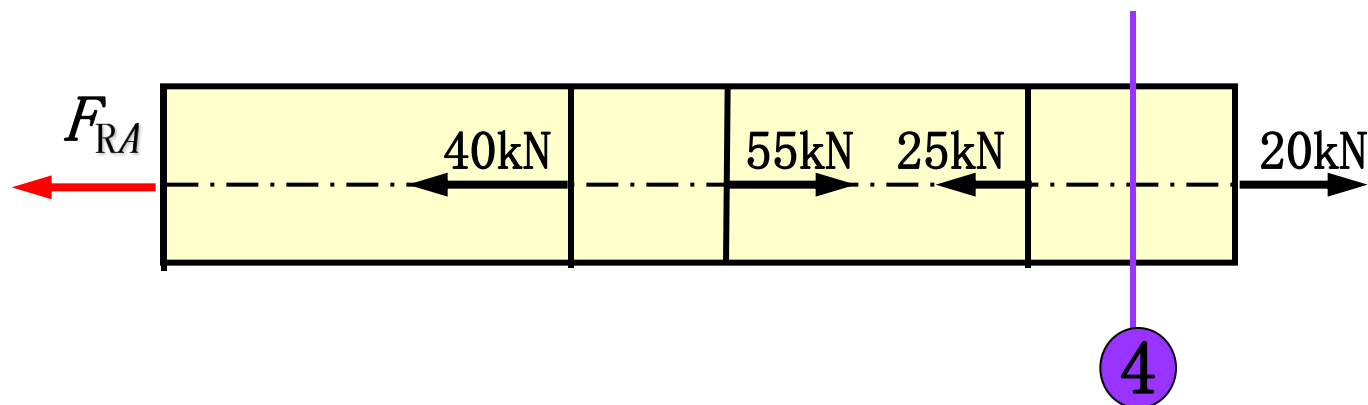


$$-F_{N3} - 25 + 20 = 0$$

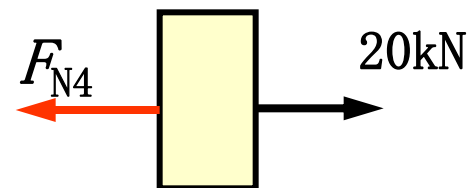
$$F_{N3} = -5(\text{kN}) \quad (-)$$

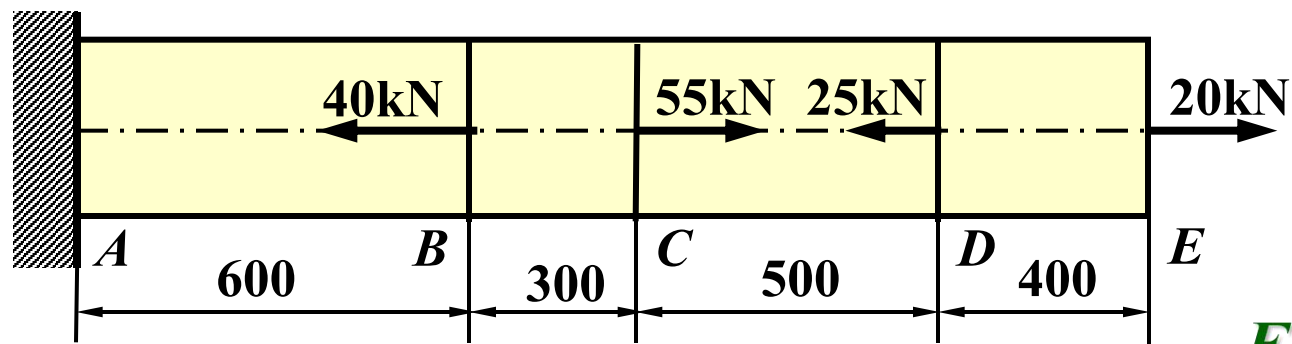


求DE段内的轴力



$$F_{N4} = +20(\text{kN}) \quad (+)$$



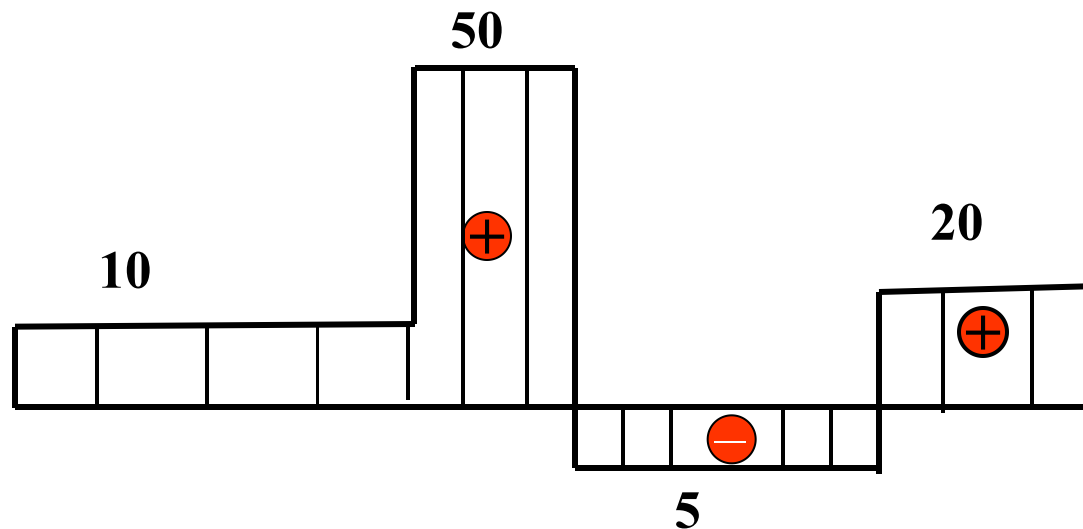


$$F_{N1} = 10\text{kN} \quad (\text{拉力})$$

$$F_{N2} = 50\text{kN} \quad (\text{拉力})$$

$$F_{N3} = -5\text{kN} \quad (\text{压力})$$

$$F_{N4} = 20\text{kN} \quad (\text{拉力})$$

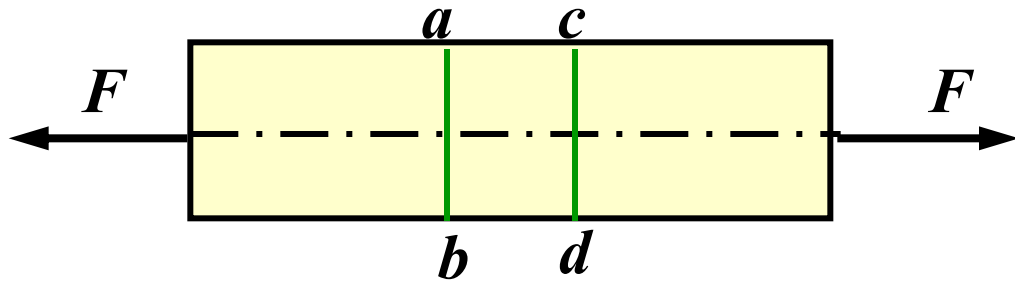


$F_{N_{\max}} = 50(\text{kN})$ 发生在BC段内任一横截面上

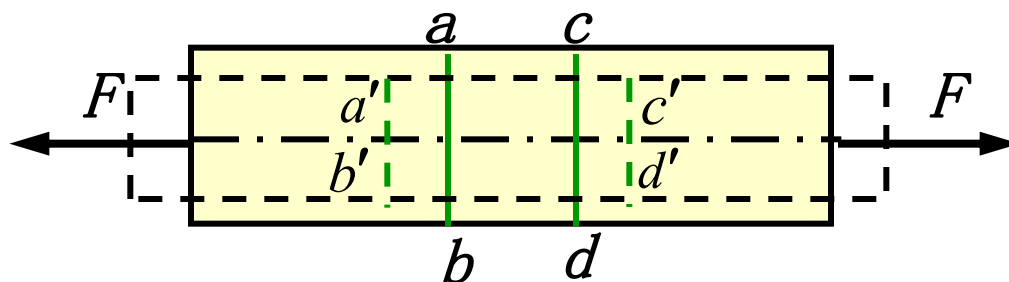


3.3 轴向拉压杆横截面正应力

一、横截面上的正应力



1. 变形现象 (Deformation phenomenon)



- (1) 横向线 ab 和 cd 仍为直线, 且仍然垂直于轴线;
- (2) ab 和 cd 分别平行移至 $a'b'$ 和 $c'd'$, 且伸长量相等.

结论: 各纤维的伸长相同, 所以它们所受的力也相同.



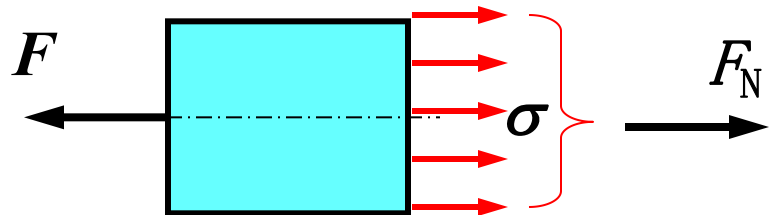
2. 平面假设 (Plane assumption)

变形前原为平面的横截面, 在变形后仍保持为平面, 且仍垂直于轴线.

3. 内力的分布(The distribution of internal force)

均匀分布

(uniform distribution)



4. 正应力公式(Formula for normal stress)

$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

式中, F_N 为轴力, A 为杆的横截面面积, σ 的符号与轴力 F_N 的符号相同.

当轴力为正号时 (拉伸), 正应力也为正号, 称为拉应力;

当轴力为负号时 (压缩), 正应力也为负号, 称为压应力 .



三、强度条件：杆内的最大工作应力不超过材料的许用应力

1. 数学表达式(Mathematical formula)

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{N\max}}{A} \leq [\sigma]$$

2. 强度条件的应用(Application of strength condition)

(1) 强度校核 $\frac{F_{N\max}}{A} \leq [\sigma]$

(2) 设计截面 $A \geq \frac{F_{N\max}}{[\sigma]}$

(3) 确定许可荷载 $F_{N\max} \leq [\sigma]A$

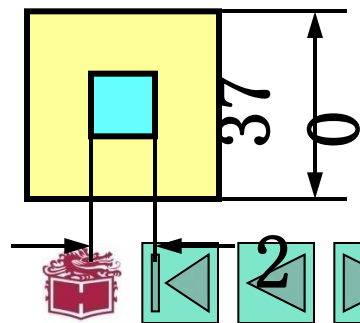
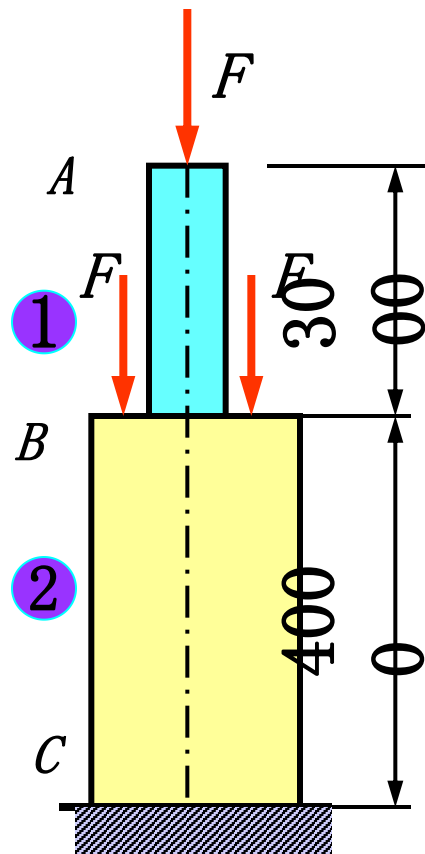


例题3-2 一横截面为正方形的砖柱分上、下两段, 其受力情况, 各段长度及横截面面积如图所示. 已知 $F = 50\text{kN}$, 试求荷载引起的最大工作应力.

解: (1) 作轴力图

$$F_{N1} = -F = -50\text{kN}$$

$$F_{N2} = -3F = -150\text{kN}$$

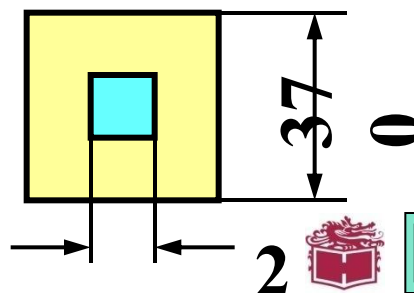
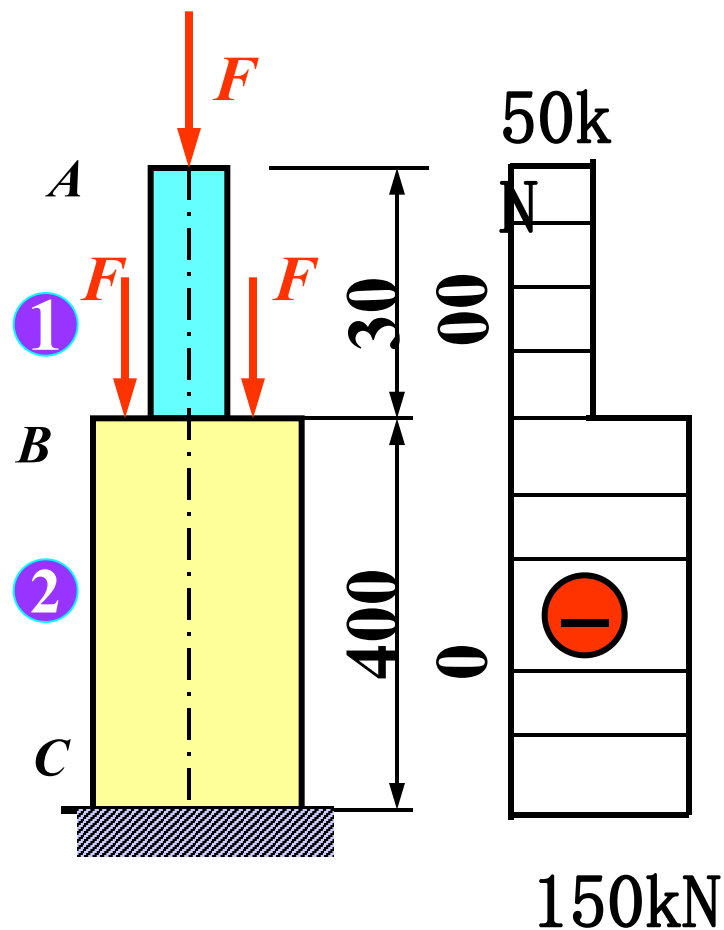


(2) 求应力

$$\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A_1} = \frac{-50000}{0.24 \times 0.24} = -0.87 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = -0.87 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A_2} = \frac{-150000}{0.37 \times 0.37} = -1.1 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = -1.1 \text{ MPa}$$

结论: σ_{\max} 在柱的下段,
其值为1.1MPa, 是压应力.



3.4 材料轴向拉压力学性能

一、实验方法(Test method)

1. 试验条件 (Test conditions)

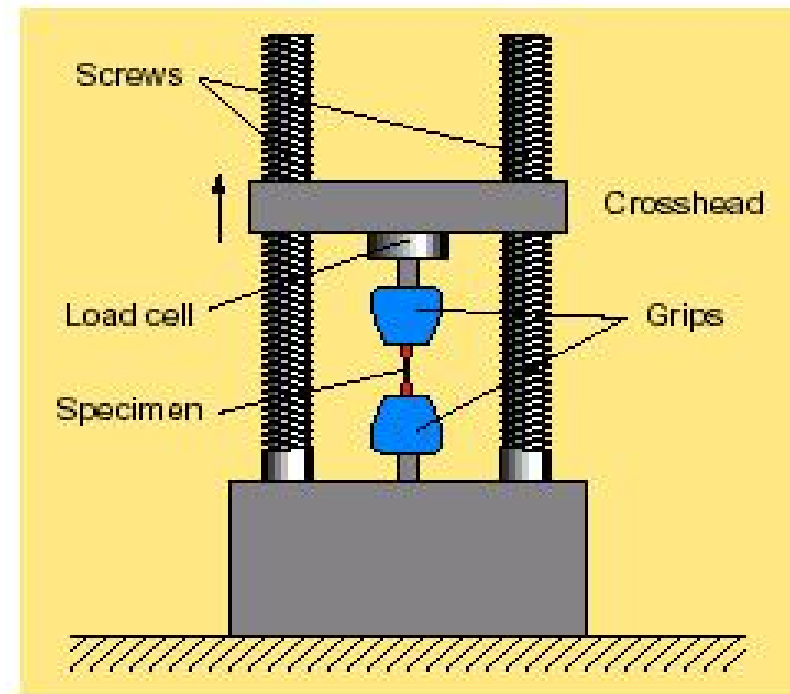
- (1) 常温：室内温度
- (2) 静载：以缓慢平稳的方式加载
- (3) 标准试件：采用国家标准统一规定的试件



2. 试验设备 (Test instruments)

(1) 微机控制电子万能试验机

(2) 游标卡尺



二、拉伸试验(Tensile tests)

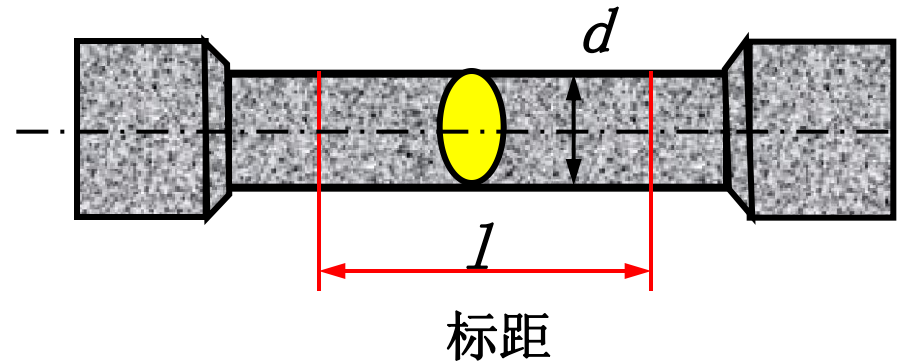
1. 低碳钢拉伸时的力学性质

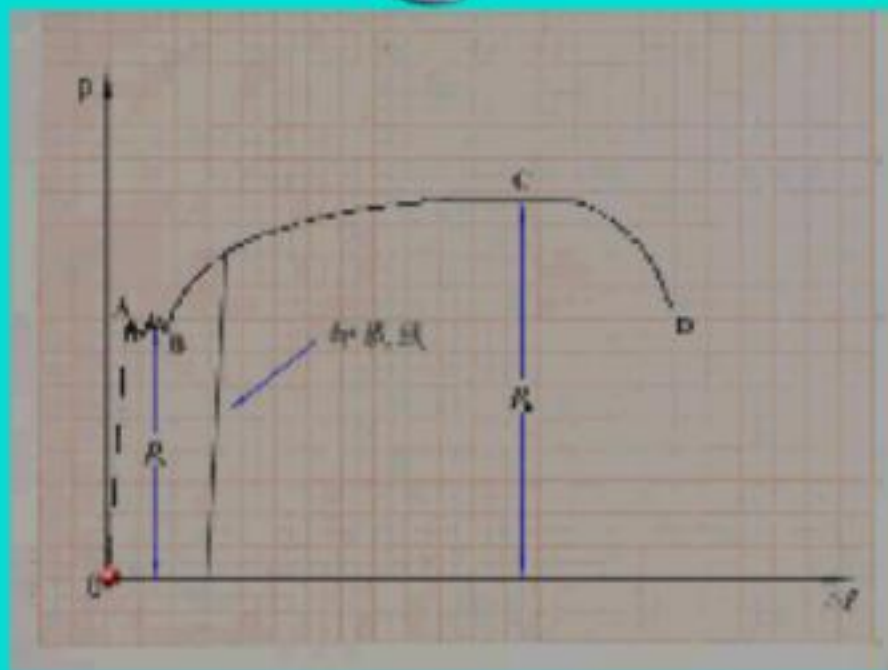
(Mechanical properties for a low-carbon steel in tension)

(1) 拉伸试样

先在试样中间等直部分上划两条横线这一段杆称为
标距 l (original gage
length).

$$l = 10d \quad \text{或} \quad l = 5d$$



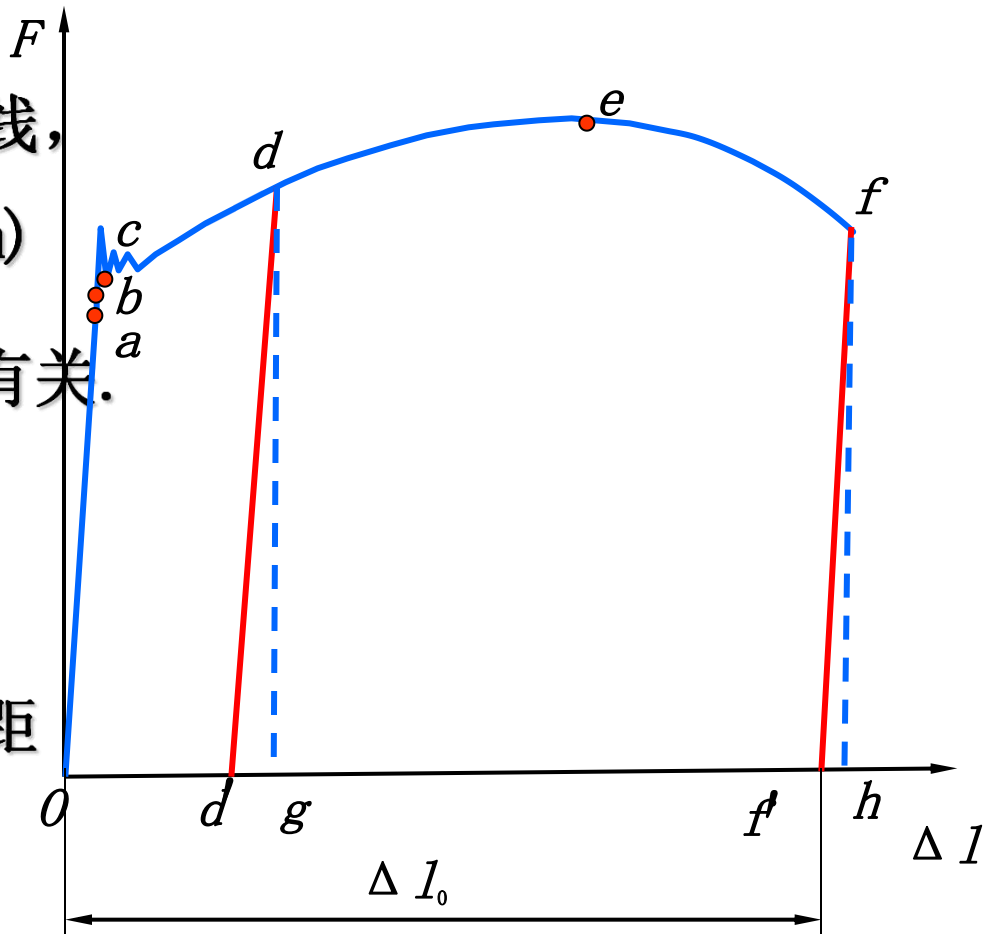


(2) 拉伸图 ($F-\Delta l$ 曲线)

表示 F 和 Δl 关系的曲线,
称为**拉伸图** (tension diagram)

拉伸图与试样的尺寸有关.

为了消除试样尺寸的影响, 把
拉力 F 除以试样的原始面积 A ,
得正应力; 同时把 Δl 除以标距
的原始长度 l , 得到应变.



(3) 应力应变图

表示应力和应变关系的曲线，称为**应力-应变图**(stress-strain diagram)

(a) 弹性阶段

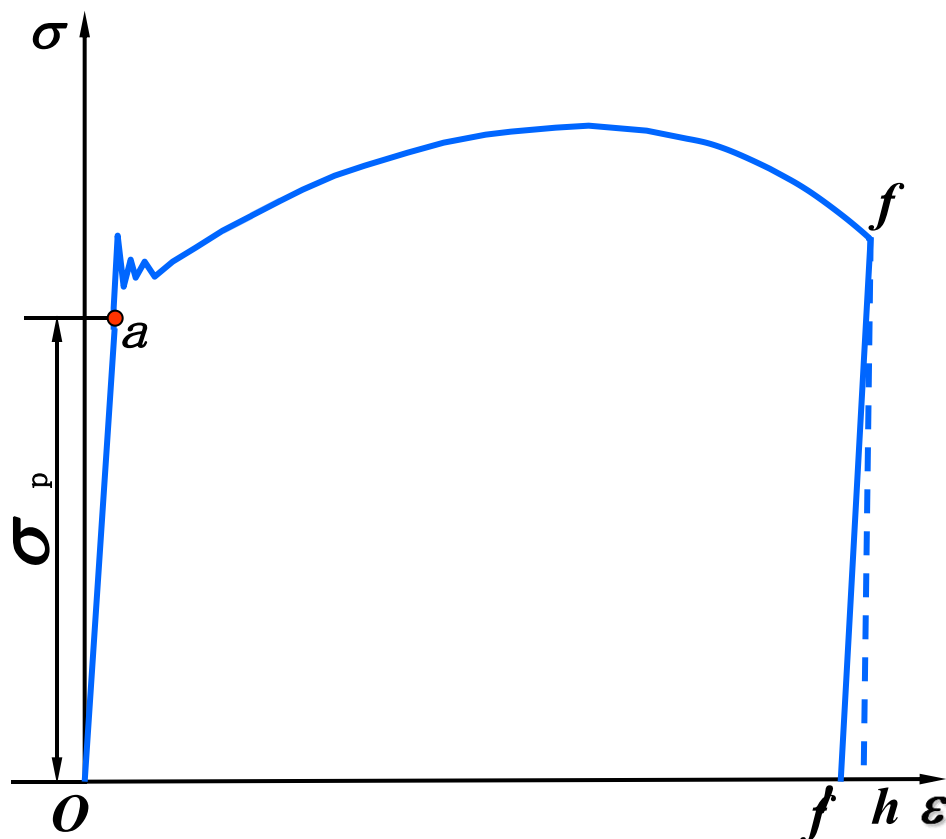
试样的变形完全弹性的。

此阶段内的直线段材料满足

胡克定律 (Hooke's law)

$$\sigma = E\varepsilon$$

σ_p — 比例极限
(proportional limit)



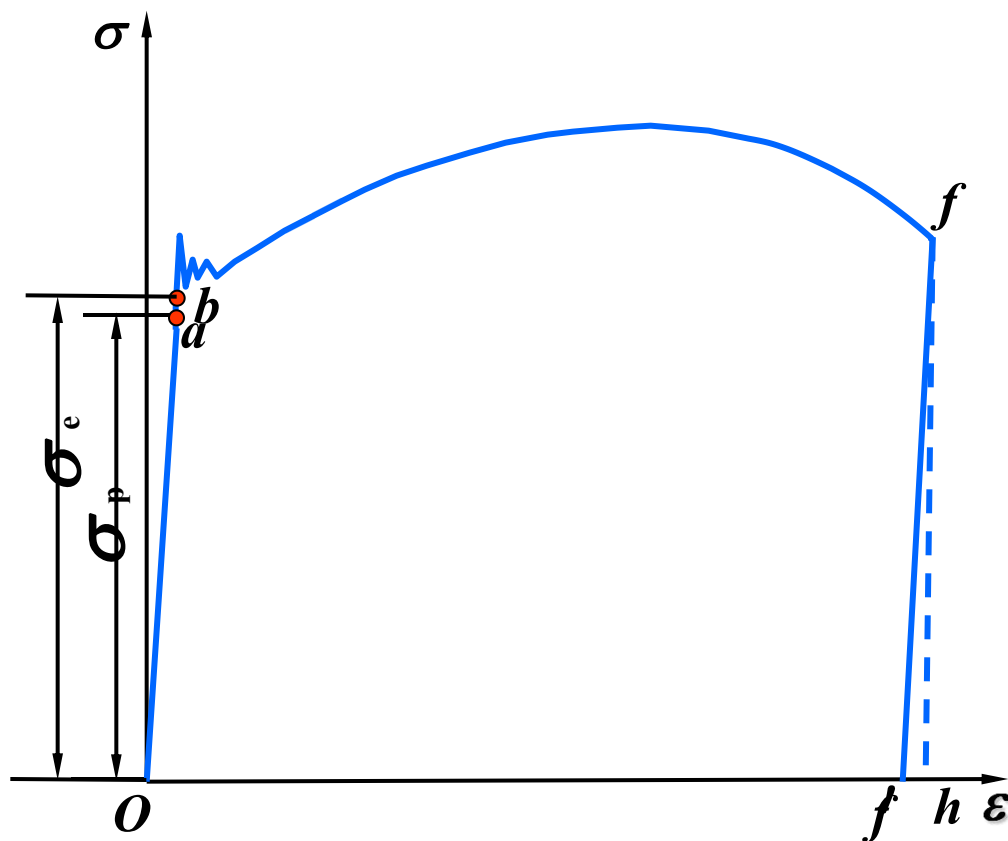
b 点是弹性阶段的最高点.

σ_e ——— 弹性极限
(elastic limit)

(b) 屈服阶段

当应力超过 b 点后,
试样的荷载基本不变而变形
却急剧增加, 这种现象称为
屈服(yielding)点为屈服低限

σ_s ——— 屈服极限
(yielding
strength)

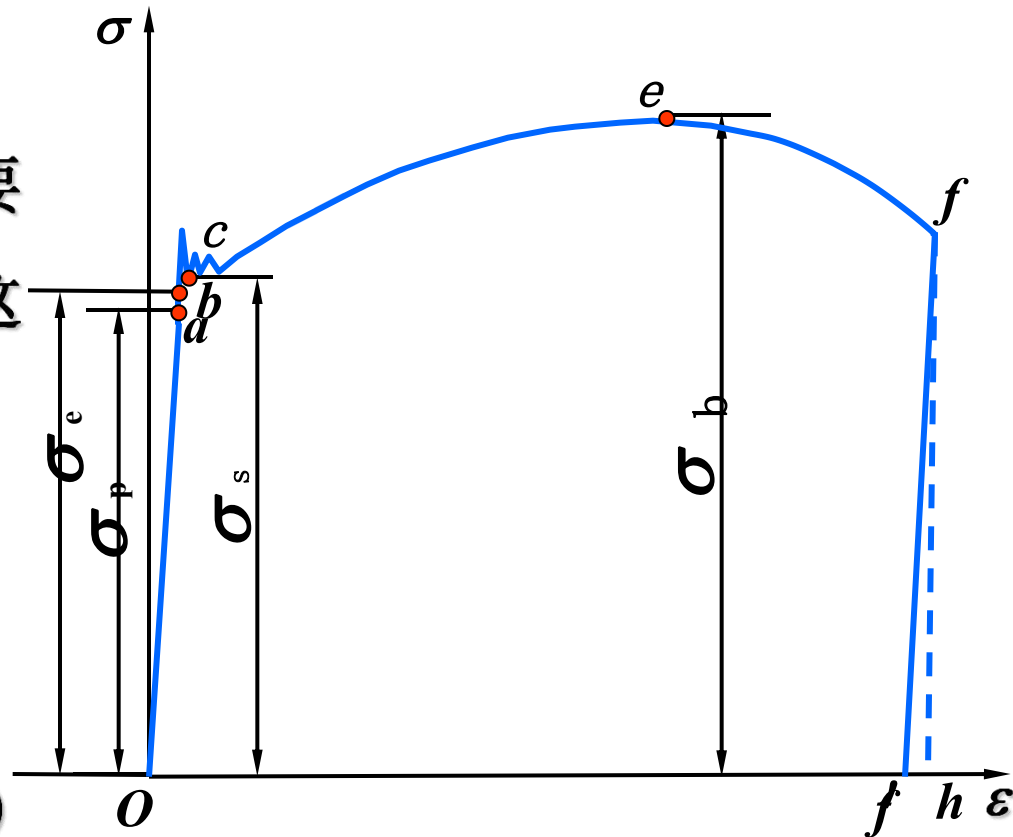


(c) 强化阶段

过屈服阶段后，材料
又恢复了抵抗变形的能力，要
使它继续变形必须增加拉力。这
种现象称为材料的**强化**

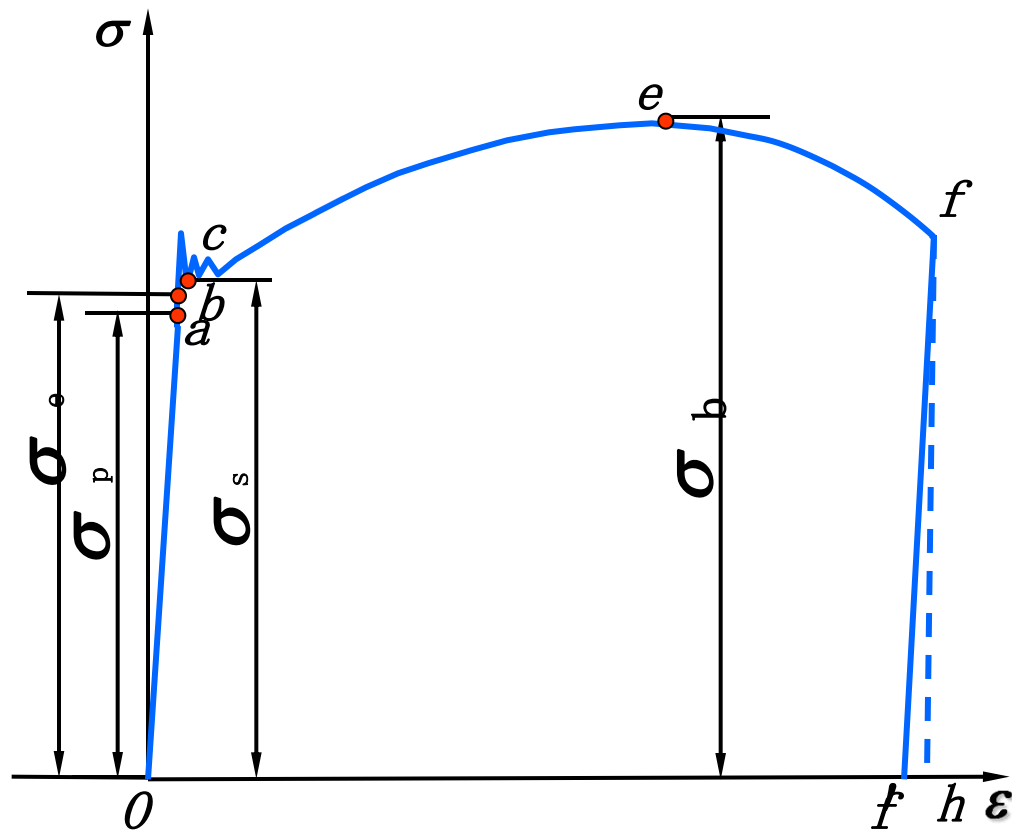
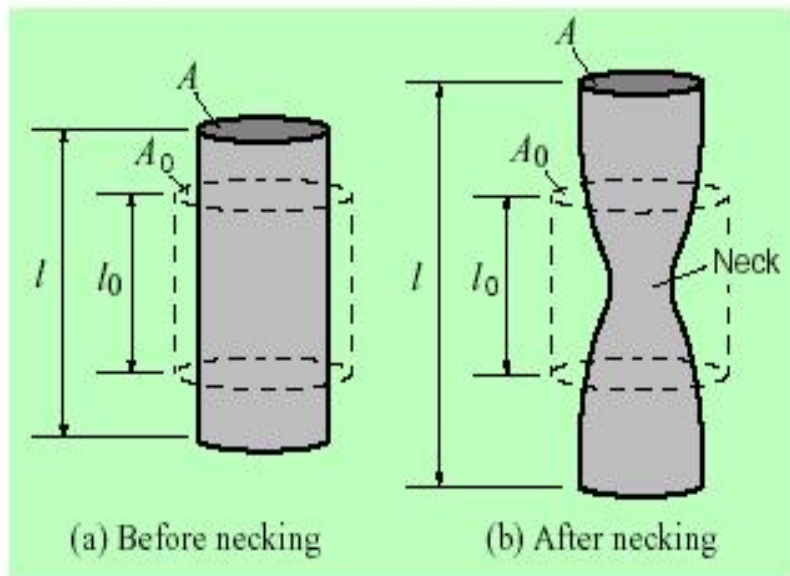
(hardening)
 e 点是强化阶段的最高点

σ_b ——— 强度极限
(ultimate Strength)



(d) 局部变形阶段

过 e 点后，试样在某一段内的横截面面积显著地收缩，出现 **颈缩** (necking) 现象，一直到试样被拉断。



(4) 伸长率和端面收缩率

试样拉断后，弹性变形消失，塑性变形保留，试样的长度由 l 变为 l_1 ，横截面积原为 A ，断口处的最小横截面积为 A_1 。

伸长率
(percent elongation)

$$\delta = \frac{l_1 - l}{l} \times 100\%$$

断面收缩率
(percent reduction in
area)

$$\psi = \frac{A - A_1}{A} \times 100\%$$

$\delta \geq 5\%$ 的材料，称作 *塑性材料* (ductile materials)

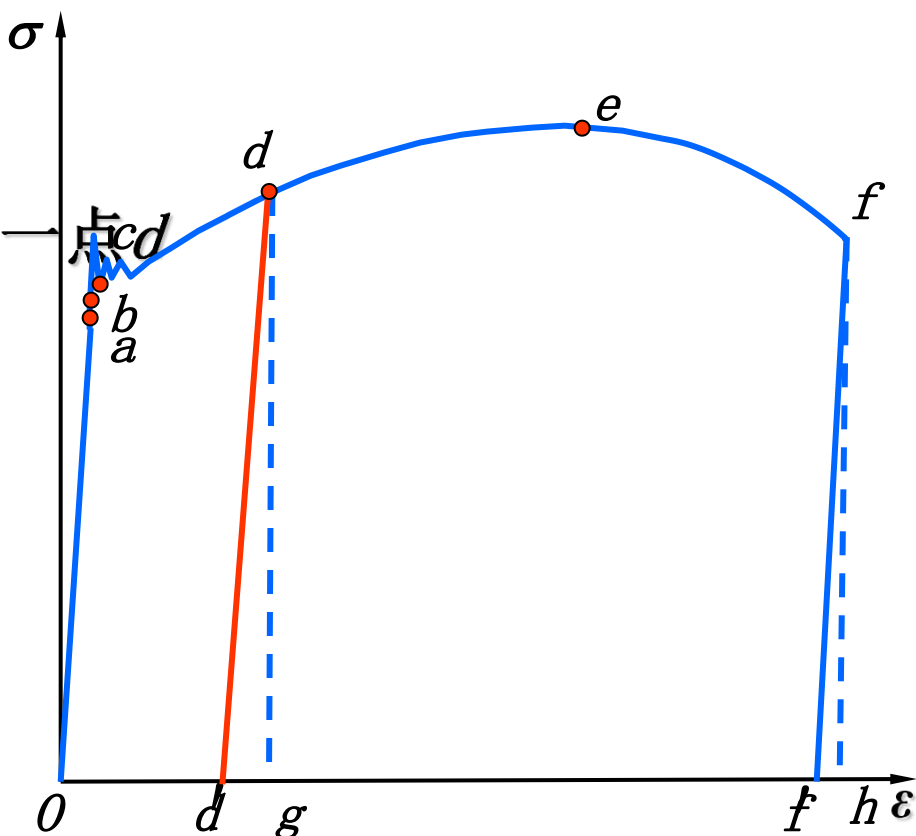
$\delta < 5\%$ 的材料，称作 *脆性材料* (brittle materials)



(5) 卸载定律及冷作硬化

卸载定律 (unloading law)

若加载到强化阶段的某一点
停止加载, 并逐渐卸载, 在卸载
过程中, 荷载与试样伸长量之间
遵循直线关系的规律称为材料的
卸载定律 (unloading law).



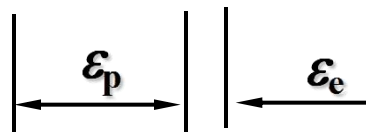
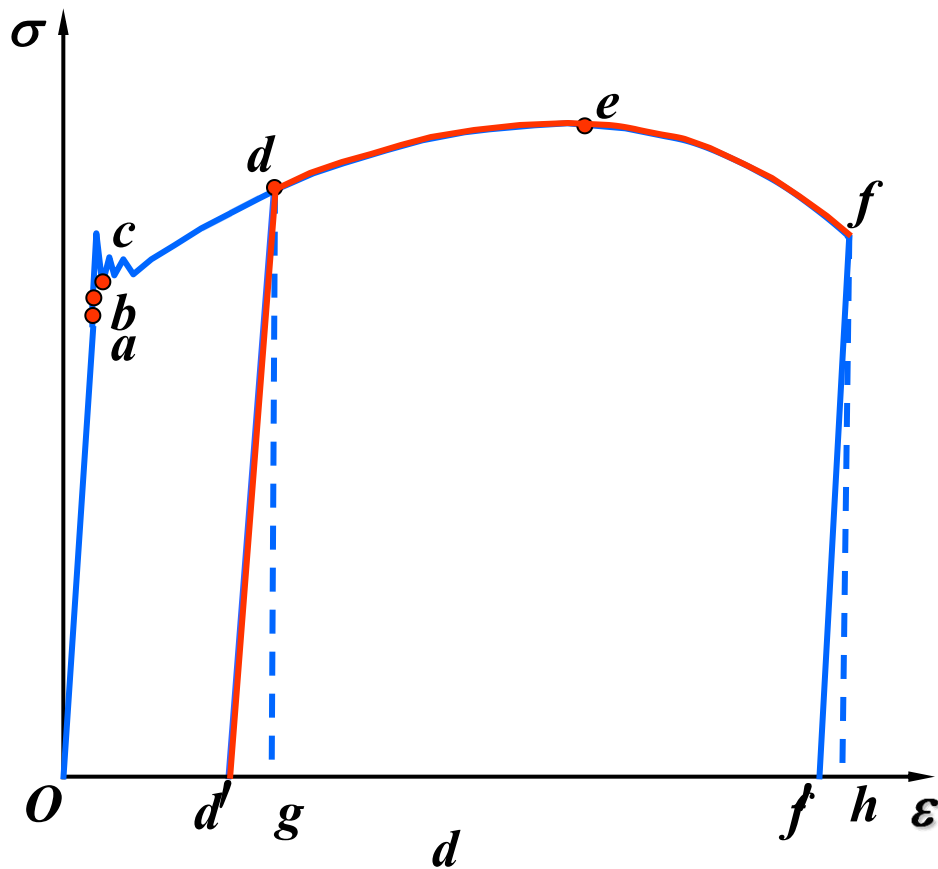
冷作硬化

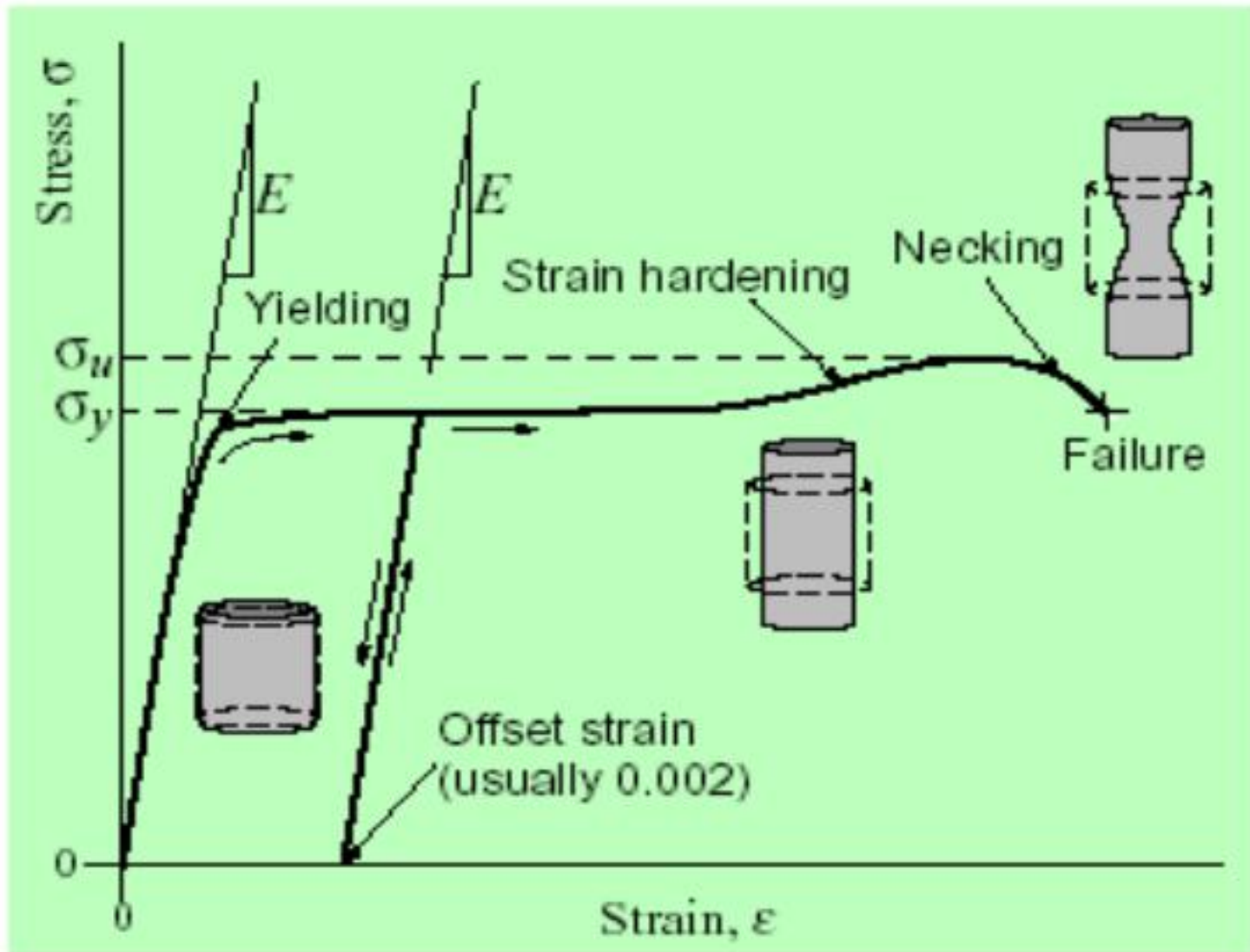
在常温下把材料预拉到强化阶段然后卸载, 当再次加载时, 试样在线弹性范围内所能承受的最大荷载将增大. 这种现象称为冷作硬化

ε_e - 弹性应变(elastic strain)

ε_p - 塑性应变(plastic strain)

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$



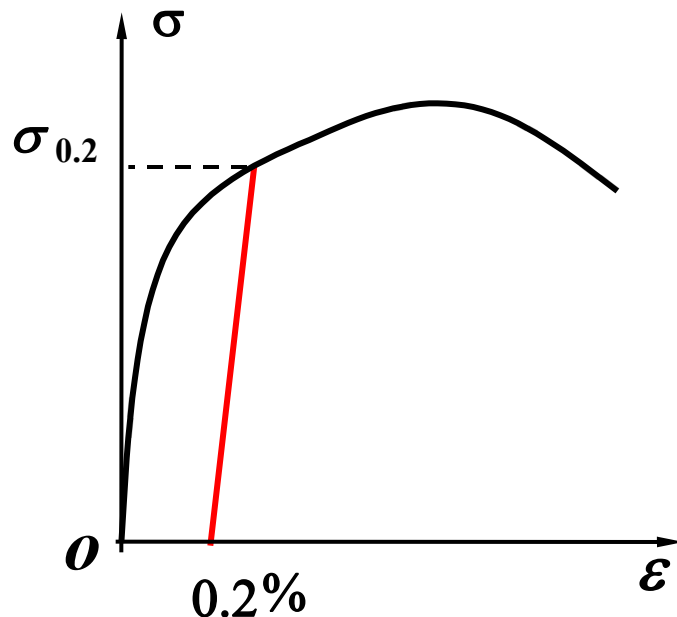


Yield Strength and Ultimate Strength



2. 无明显屈服极限的塑性材料 (Ductile materials without clearing defined yield point)

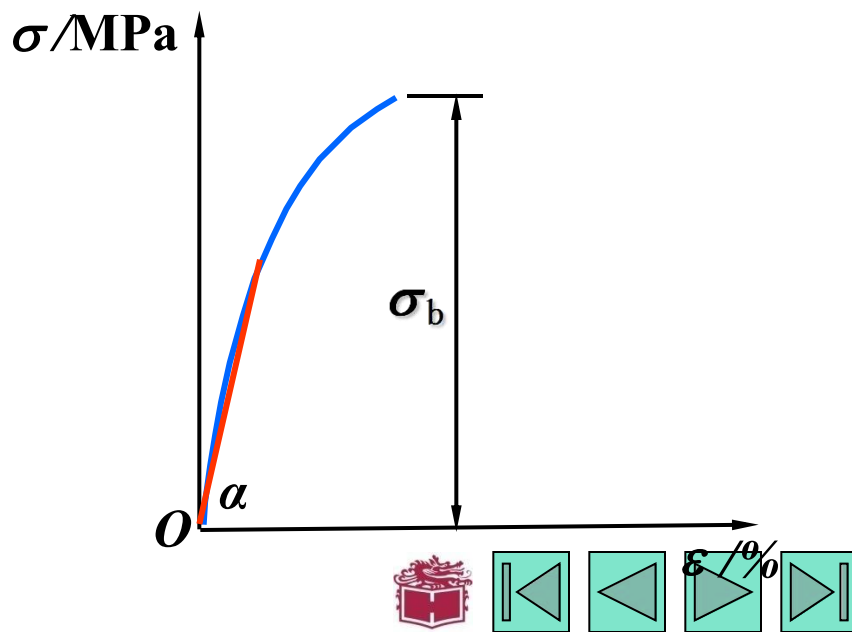
名义屈服应力用 $\sigma_{0.2}$ 表示.

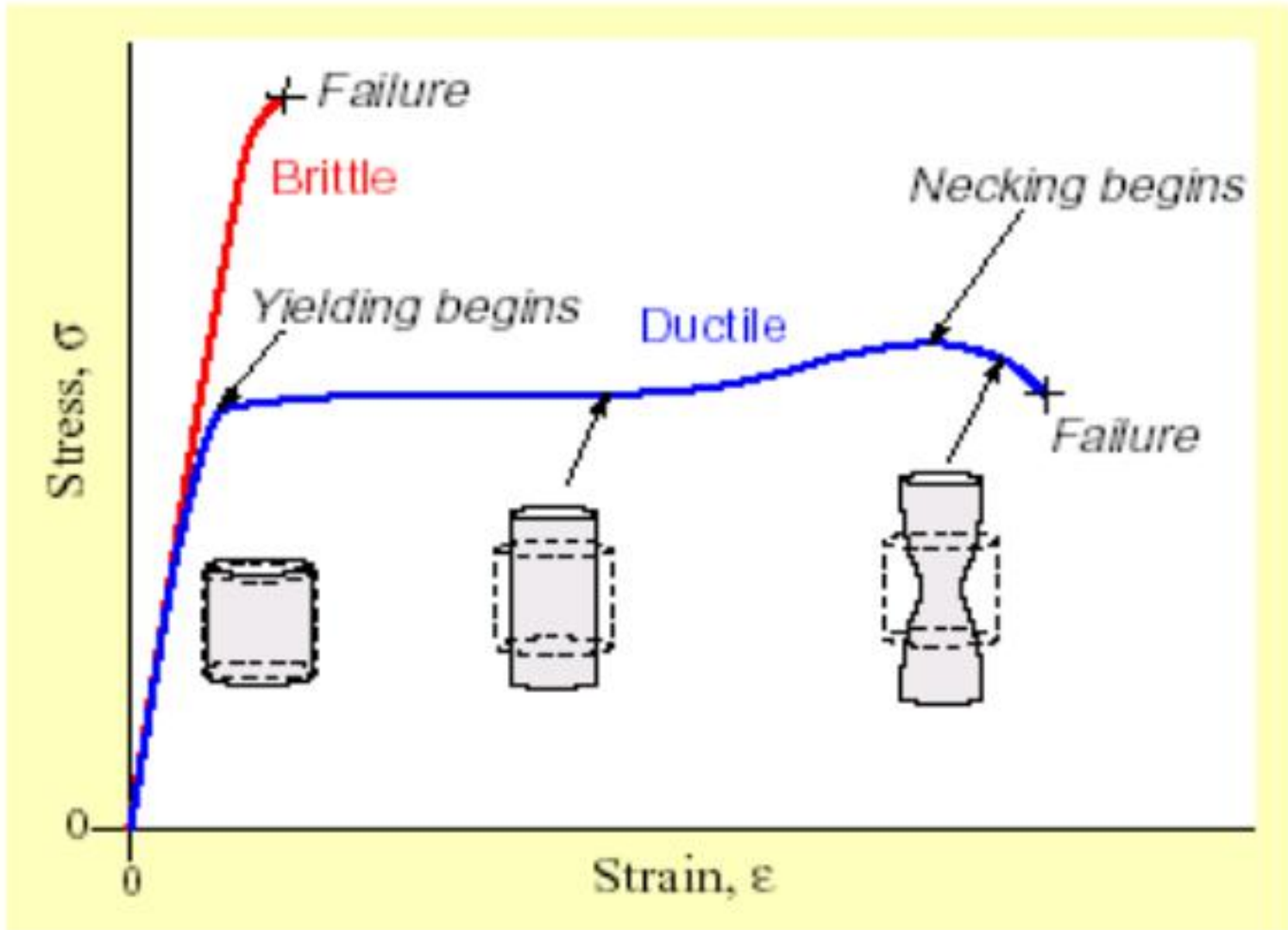


3. 铸铁拉伸时的机械性能 (Mechanical properties for a cast iron in tension)

σ_b - 铸铁拉伸强度极限

$E = \tan \alpha$ 割线斜率





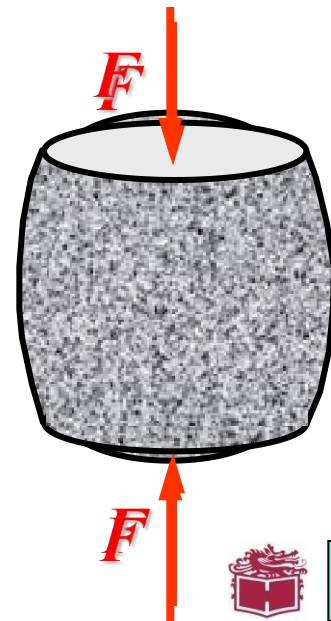
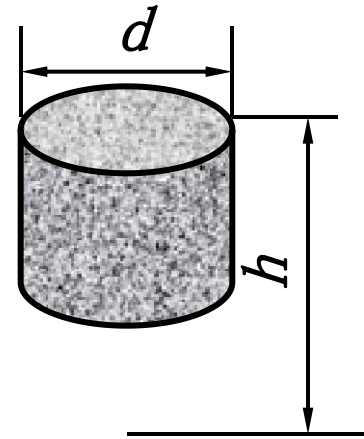
Brittle vs. Ductile Behavior



材料压缩时的力学性能

1. 实验试样 (Test specimen)

$$\frac{h}{d} = 1.5 \sim 3.0$$

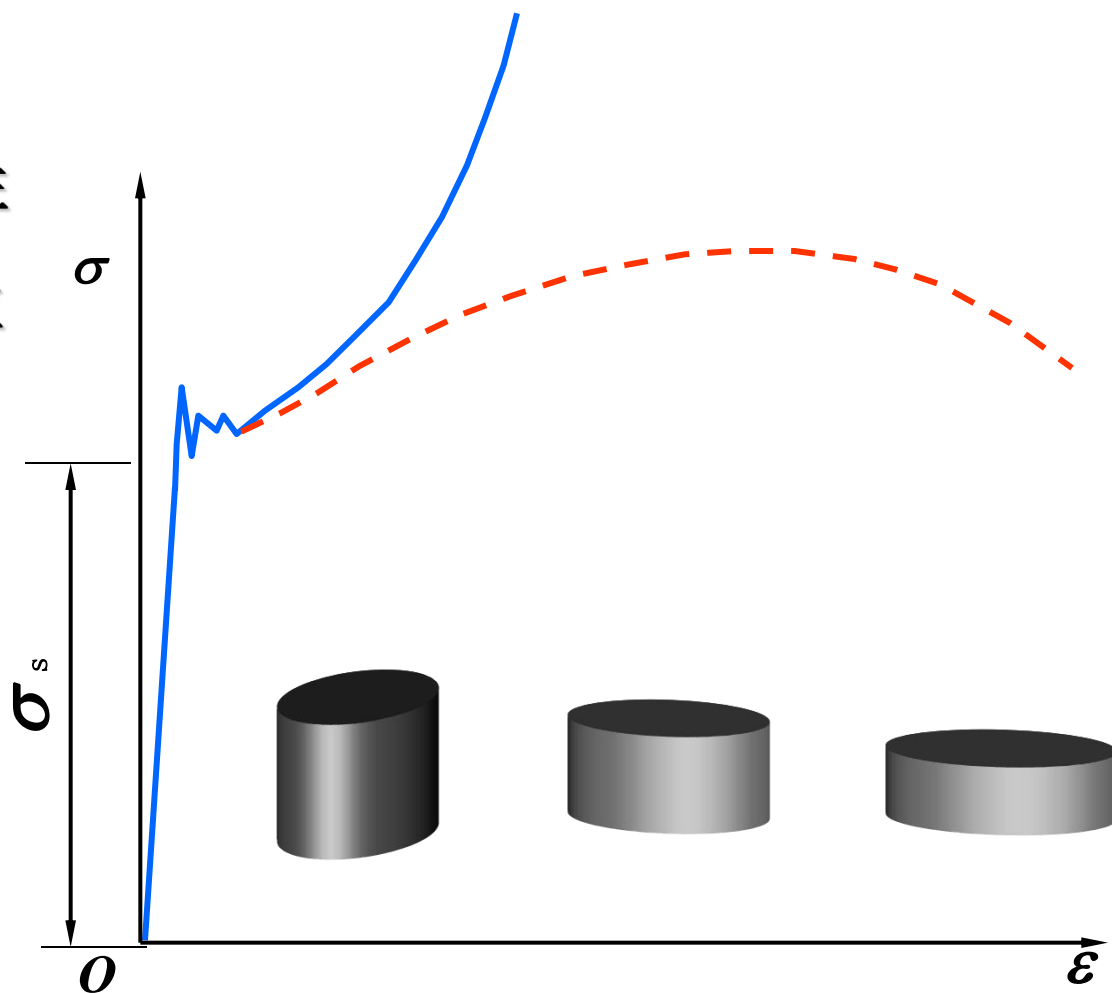


2. 低碳钢压缩时的 s - e 曲线

压缩的实验结果表明

低碳钢压缩时的弹性模量 E 屈服极限 σ_s 都与拉伸时大致相同.

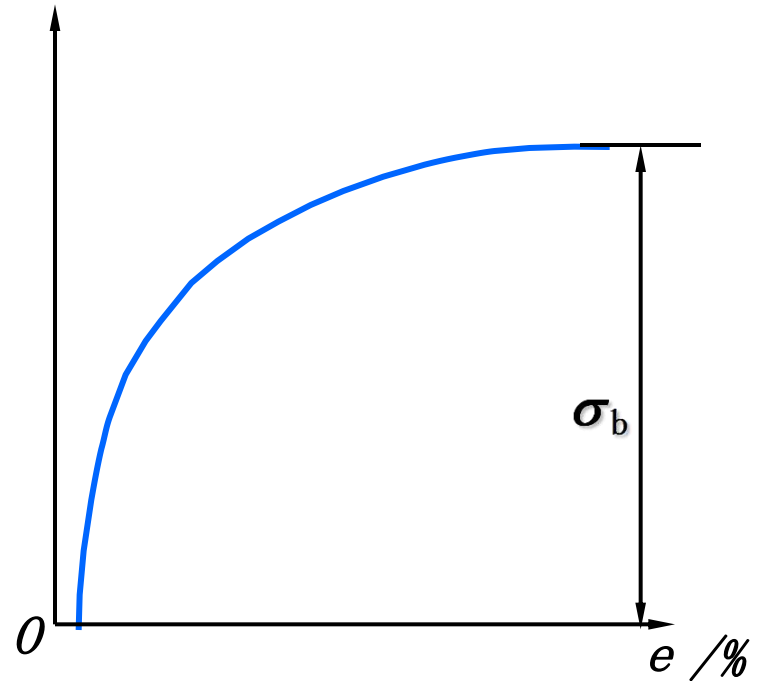
屈服阶段后, 试样越压越扁, 横截面面积不断增大, 试样不可能被压断, 因此得不到压缩时的强度极限.



3. 铸铁压缩时的 σ - ϵ 曲线

(Stress - strain curve for cast iron in compression)

铸铁压缩时破坏端面与横截面大致成 $45^\circ \sim 55^\circ$ 倾角, 表明这类试样主要因剪切而破坏, 铸铁的抗压强度极限是抗拉强度极限的4~5倍.



3.5 安全因数

1. 极限应力(Ultimate stress)

材料的两个强度指标 σ_s 和 σ_b 称作极限应力或危险应力, 并用 σ_u 表示.

2. 许用应力(Allowable stress)

以大于1的因数除极限应力, 并将所得结果称为许用应力, 用 $[\sigma]$ 表示. $[\sigma] = \frac{\sigma_u}{n}$ n — 安全因数(factor of safety)

塑性材料 (ductile materials) $[\sigma] = \frac{\sigma_s}{n_s}$

脆性材料 (brittle materials) $[\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b}$



3.6 轴向拉压杆的强度设计

- 由前节知，杆件要安全工作，其横截面上正应力不得超过杆件材料的许用应力，即

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{F_N}{A} \right)_{\max} \leq [\sigma]$$

此即为拉压杆的强度条件



- 利用强度条件，可以完成以下强度分析工作：

- 1. 强度校核

已知杆件的几何尺寸、所受载荷、材料性质（许用应力），比较工作应力与许用应力，判断强度条件是否成立

- 2. 截面设计

已知杆件的载荷和材料性质，设计杆的截面

$$A \geq \frac{F_N}{[\sigma]}$$

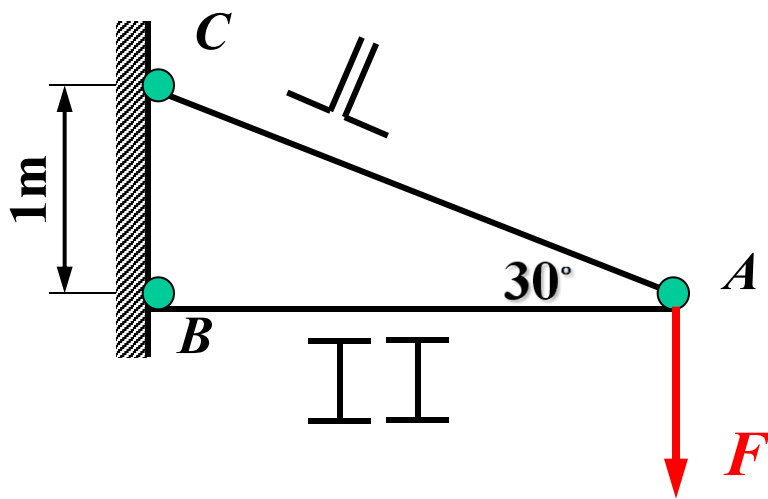
- 3. 确定许可载荷

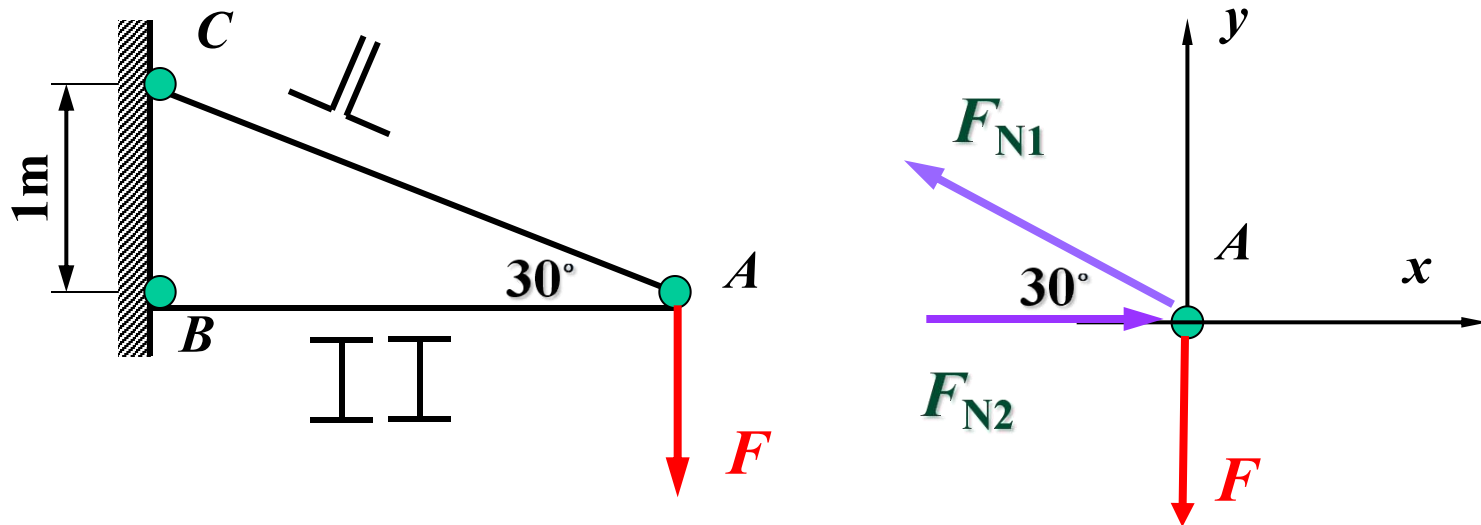
已知杆件的截面和材料，确定许可载荷

$$[F_N] = A[\sigma]$$



例题3-3 简易起重设备中， AC 杆由两根 $80\times 80\times 7$ 等边角钢组成， AB 杆由两根 10号工字钢组成。材料为Q235钢，许用应力 $[\sigma]=170\text{MPa}$ 。求许可荷载 $[F]$ 。





解：（1）取结点A为研究对象，受力分析如图所示.



结点A的平衡方程为

$$\sum F_y = 0 \quad F_{N1} \sin 30^\circ - F = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{N2} - F_{N1} \cos 30^\circ = 0$$

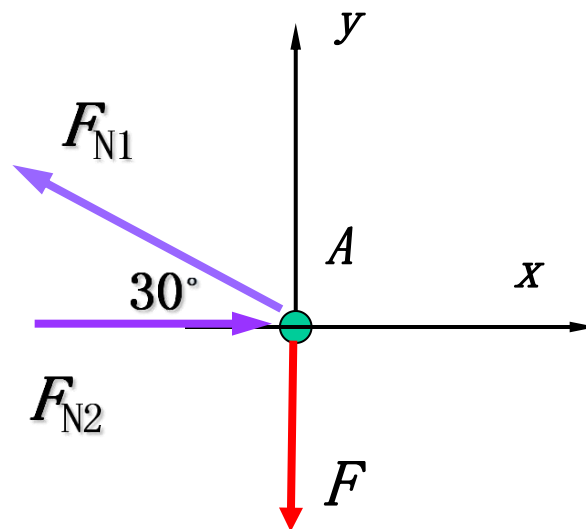
得到 $F_{N1} = 2F$

$$F_{N2} = 1.732F$$

由型钢表查得

$$A_1 = 1086 \times 2 = 2172 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$A_2 = 1430 \times 2 = 2860 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$



(2) 许可轴力为

$$F_{N\max} \leq [\sigma]A$$

$$[F_{N1}] = [\sigma]A_1 = 369.24\text{kN}$$

$$[F_{N2}] = [\sigma]A_2 = 486.20\text{kN}$$

$$F_{N1} = 2F$$

$$F_{N2} = 1.732F$$

(3) 各杆的许可荷载

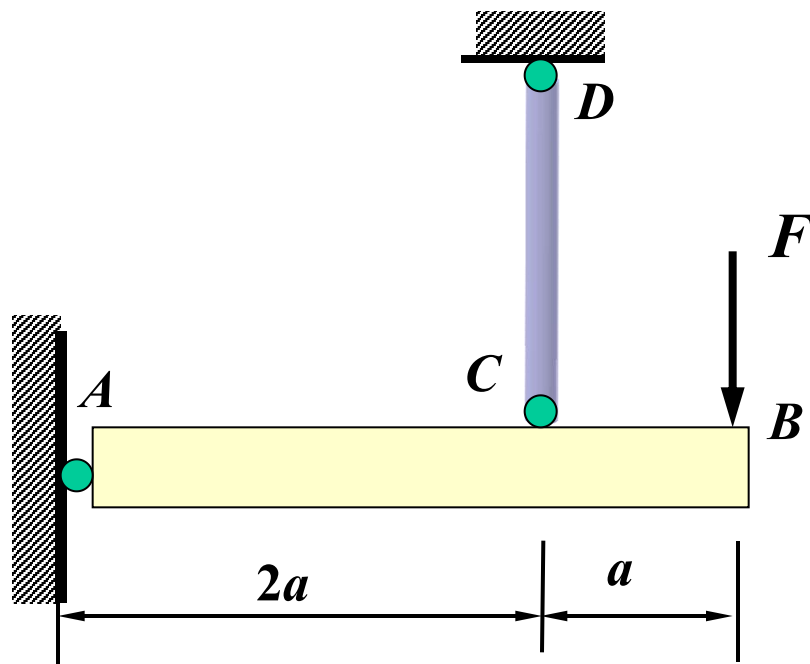
$$F_1 = \frac{[F_{N1}]}{2} = 184.6\text{kN} \quad F_2 = \frac{[F_{N2}]}{1.732} = 280.7\text{kN}$$

(4) 结论：许可荷载 $[F]=184.6\text{kN}$



例题3-4 刚性杆 ACB 有圆杆 CD 悬挂在 C 点, B 端作用集中力 $F=25\text{kN}$, 已知 CD 杆的直径 $d=20\text{mm}$, 许用应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$, 试校核 CD 杆的强度, 并求:

- (1) 结构的许可荷载 $[F]$;
- (2) 若 $F=50\text{kN}$, 设计 CD 杆的直径.



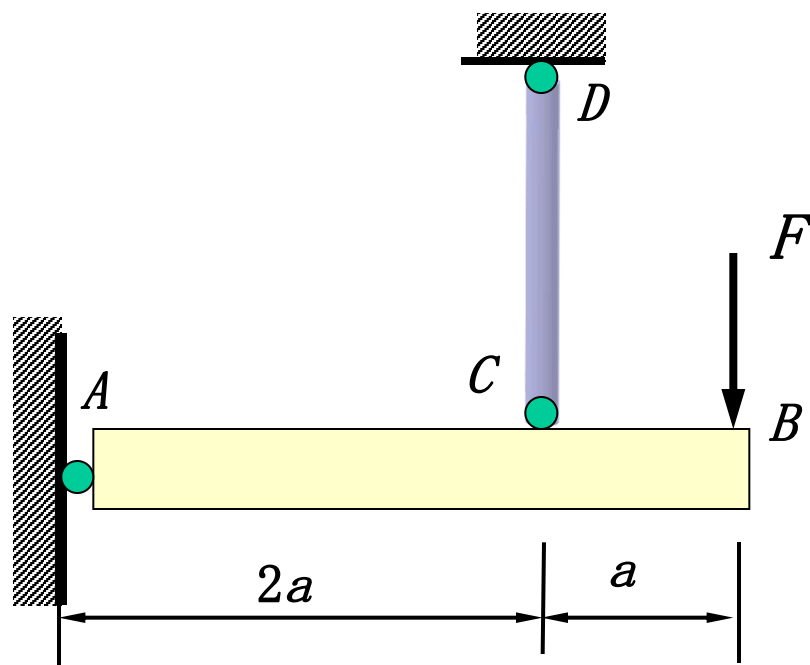
解：

(1) 求 CD 杆的内力

$$\sum M_A = 0 \quad F_{NCD} = \frac{3}{2}F$$

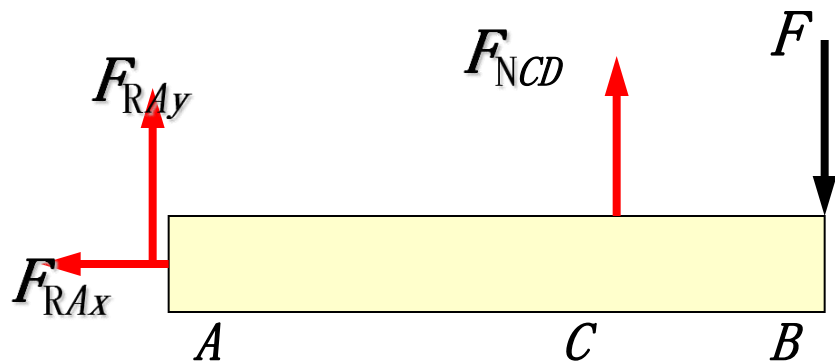
$$\sigma = \frac{F_{NCD}}{A} = \frac{3F/2}{\pi d^2/4} = 119 \text{MPa}$$

$$\sigma < [\sigma]$$



(2) 结构的许可荷载 $[F]$

由 $\sigma_{CD} = \frac{F_{NCD}}{A} \leq [\sigma]$



$$\text{得 } F_{NCD} \leq [\sigma]A = \frac{3F}{2}$$

$$\longrightarrow [F] = 33.5 \text{ kN}$$

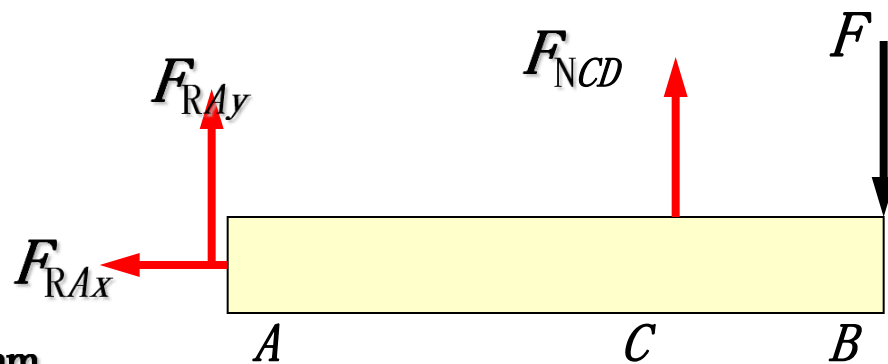
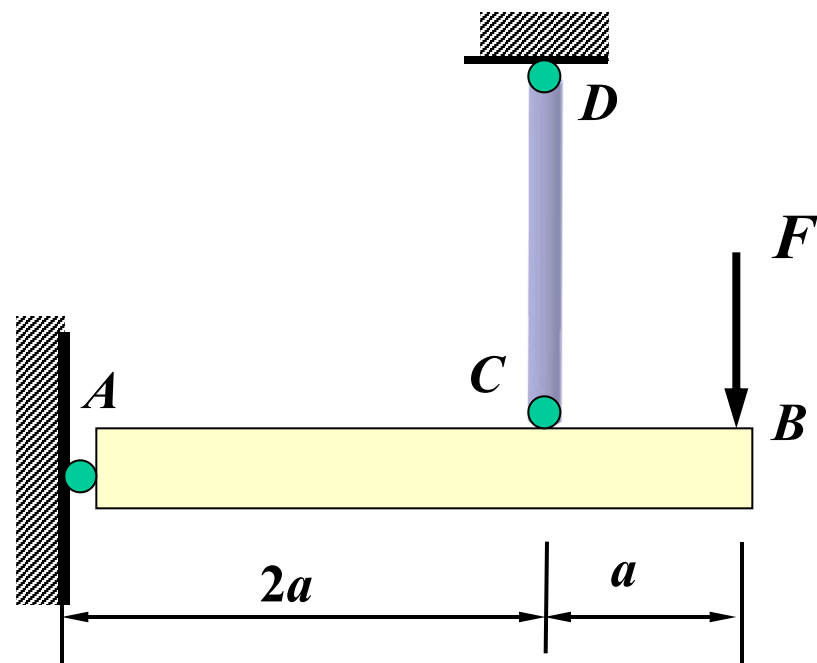
(3) 若 $F=50\text{kN}$, 设计 CD 杆的直径

$$\text{由 } \sigma_{CD} = \frac{F_{NCD}}{A} \leq [\sigma]$$

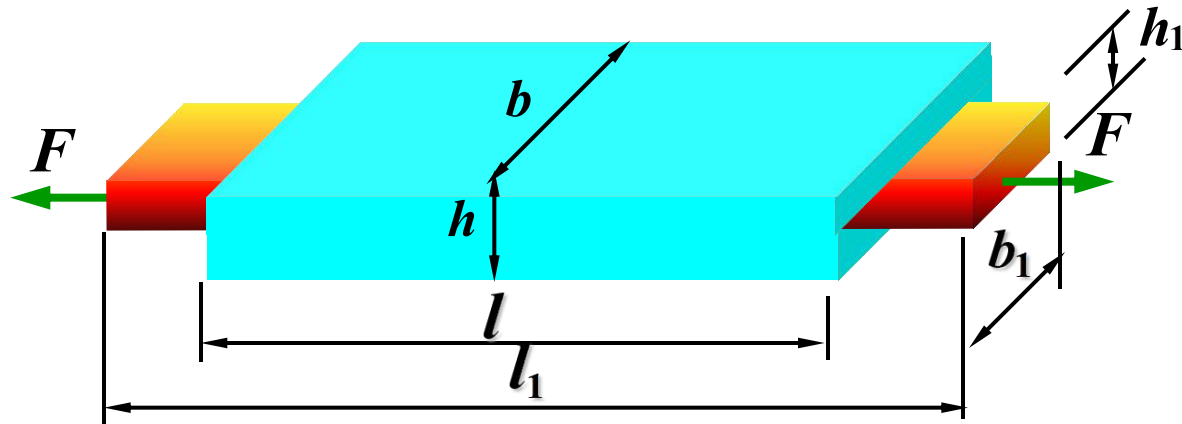
$$\text{得 } A \geq \frac{F_{NCD}}{[\sigma]} = \frac{3F/2}{[\sigma]}$$

$$\longrightarrow \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3F/2}{[\sigma]}$$

$$\longrightarrow d = 24.4 \text{ mm} \quad \text{取 } d = 25 \text{ mm}$$



3.7 轴向拉压杆的变形与刚度设计

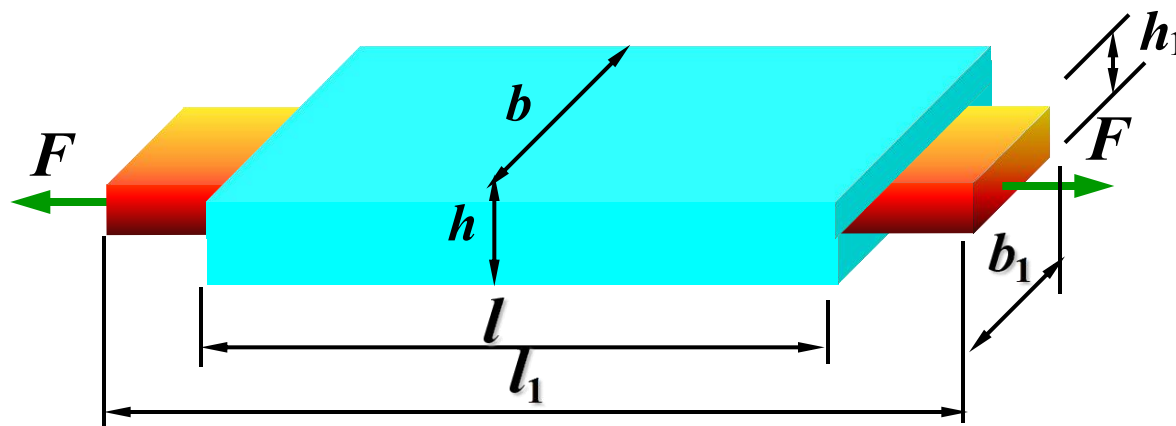


一、纵向变形 (Axial deformation)

1. 纵向变形 (Axial deformation) $\Delta l = l_1 - l$

2. 纵向应变 (Axial strain) $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$





二、横向变形 (Lateral deformation)

1. 横向变形 (Lateral deformation) $\Delta b = b_1 - b$

2. 横向应变 (Lateral strain) $\varepsilon' = \frac{b_1 - b}{b} = \frac{\Delta b}{b}$

三、泊松比 (Poisson's ratio) $\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$

$\varepsilon' = -\mu\varepsilon$ μ 称为泊松比 (Poisson's ratio)



四、胡克定律 (Hooke' s law)

实验表明工程上大多数材料都有一个弹性阶段，
在此弹性范围内，正应力与线应变成正比。

$$\text{由} \quad \sigma = E\varepsilon \quad \frac{F_N}{A} = \sigma \quad \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$$

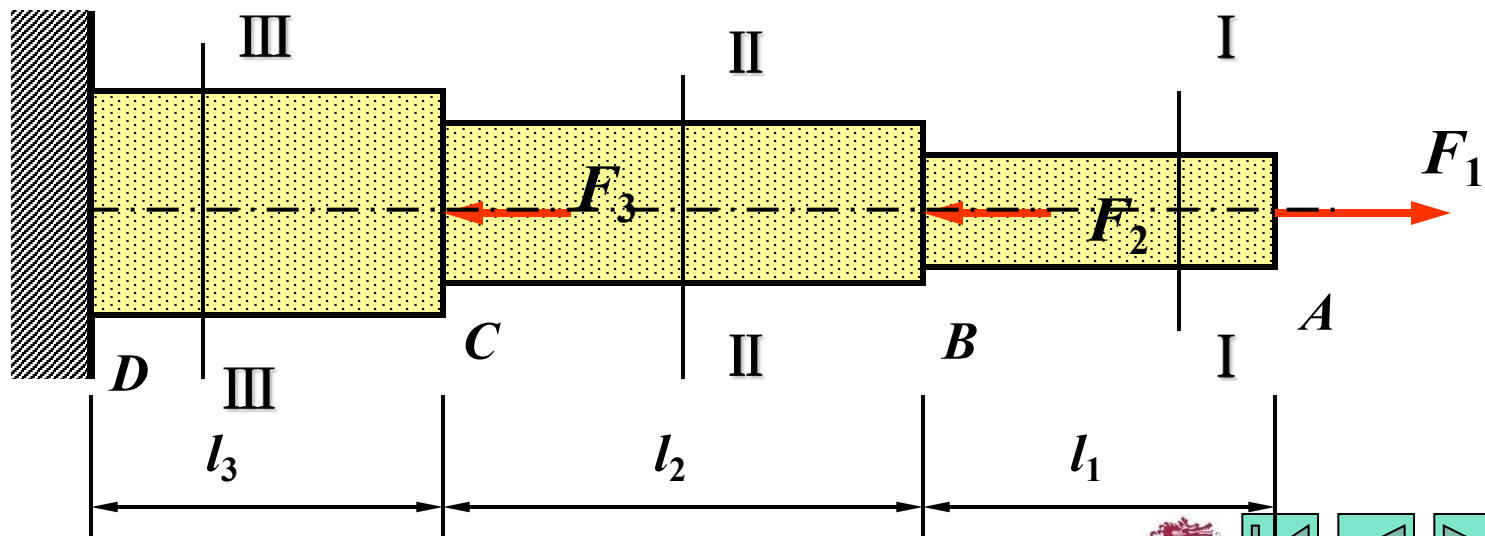
$$\text{上式改写为} \quad \Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

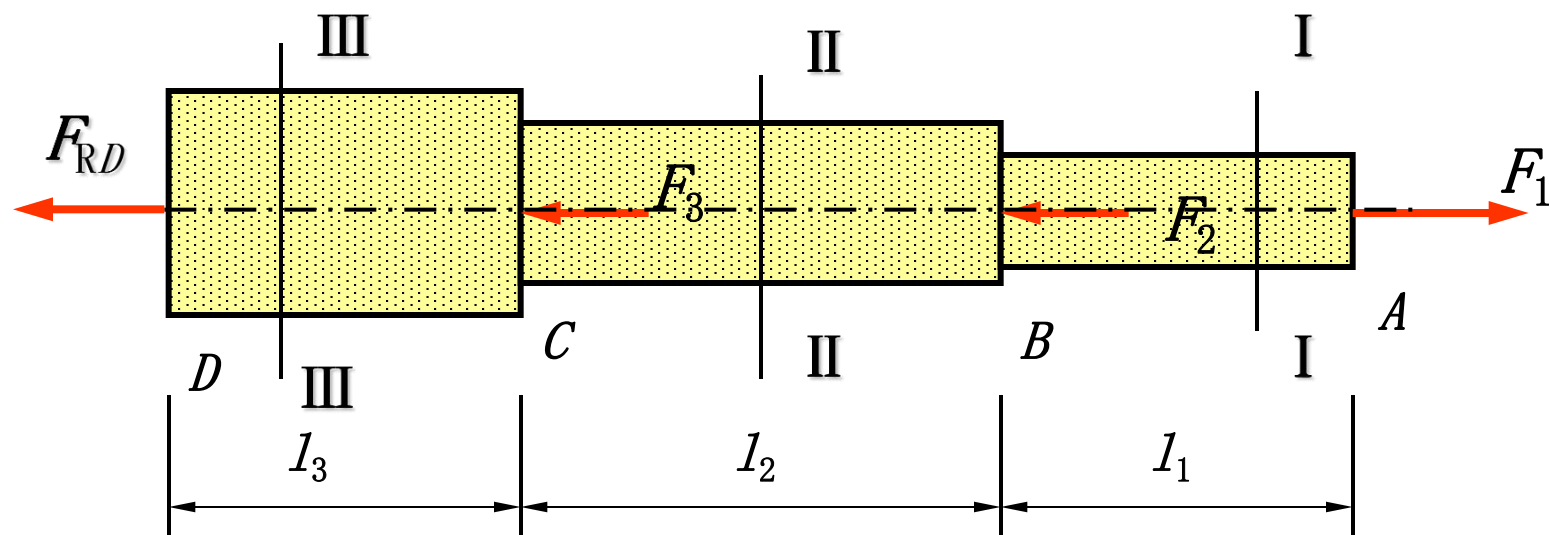
式中 E 称为弹性模量 (modulus of elasticity) , EA 称为抗拉 (压) 刚度(rigidity).



例题3-5 图示为一变截面圆杆 $ABCD$. 已知 $F_1=20\text{kN}$, $F_2=35\text{kN}$
 $F_3=35\text{kN}$. $l_1=l_3=300\text{mm}$, $l_2=400\text{mm}$. $d_1=12\text{mm}$, $d_2=16\text{mm}$, $d_3=24\text{mm}$.
试求:

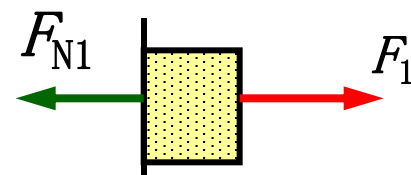
- (1) I-I、II-II、III-III截面的轴力并作轴力图
- (2) 杆的最大正应力 σ_{\max}
- (3) B截面的位移及AD杆的变形





解：求支座反力 $F_{RD} = -50\text{kN}$

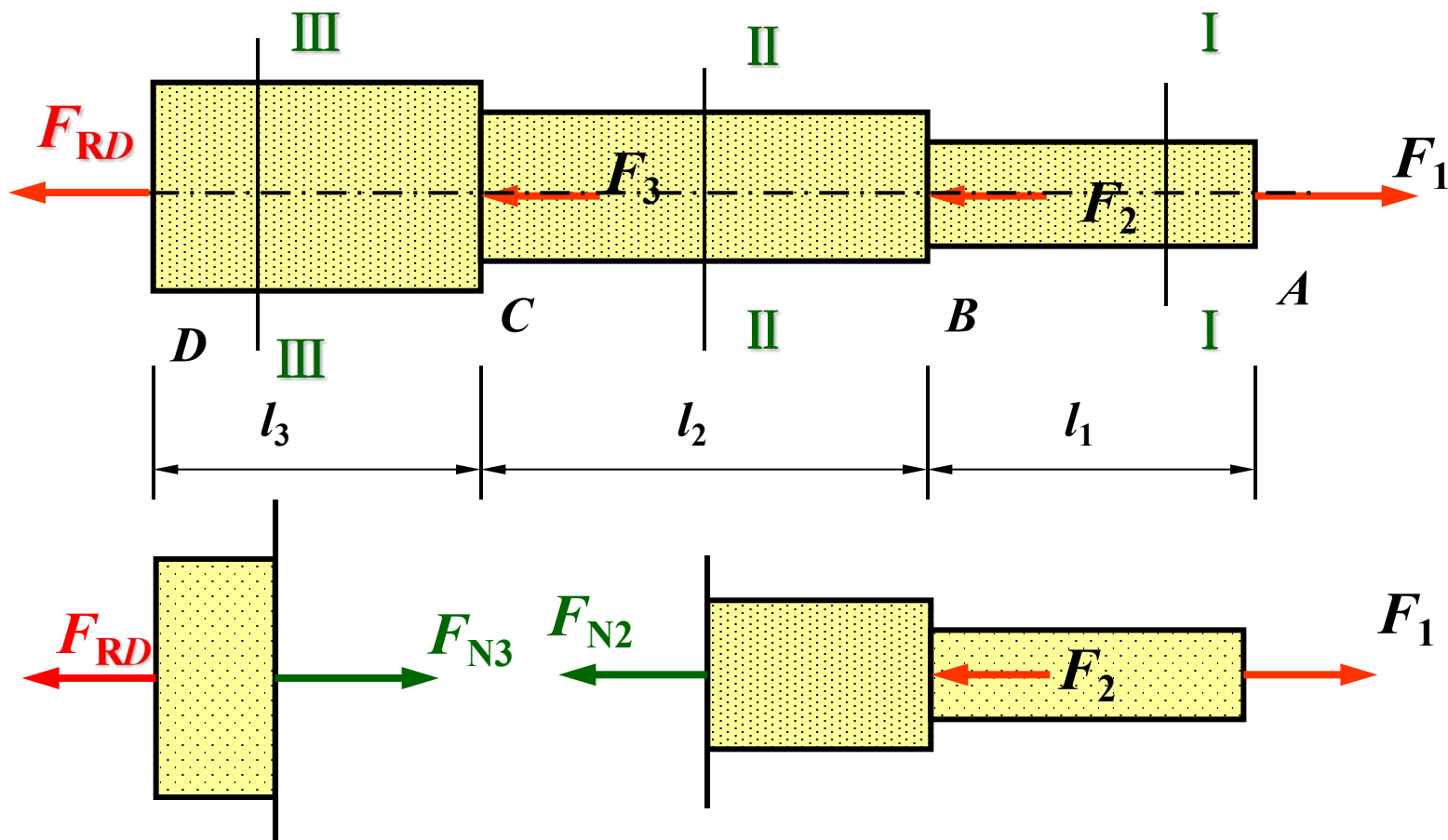
(1) I-I、II-II、III-III
截面的轴力并作轴力图



$$F_1 - F_{N1} = 0$$

$$F_{N1} = 20\text{kN} \quad (+)$$





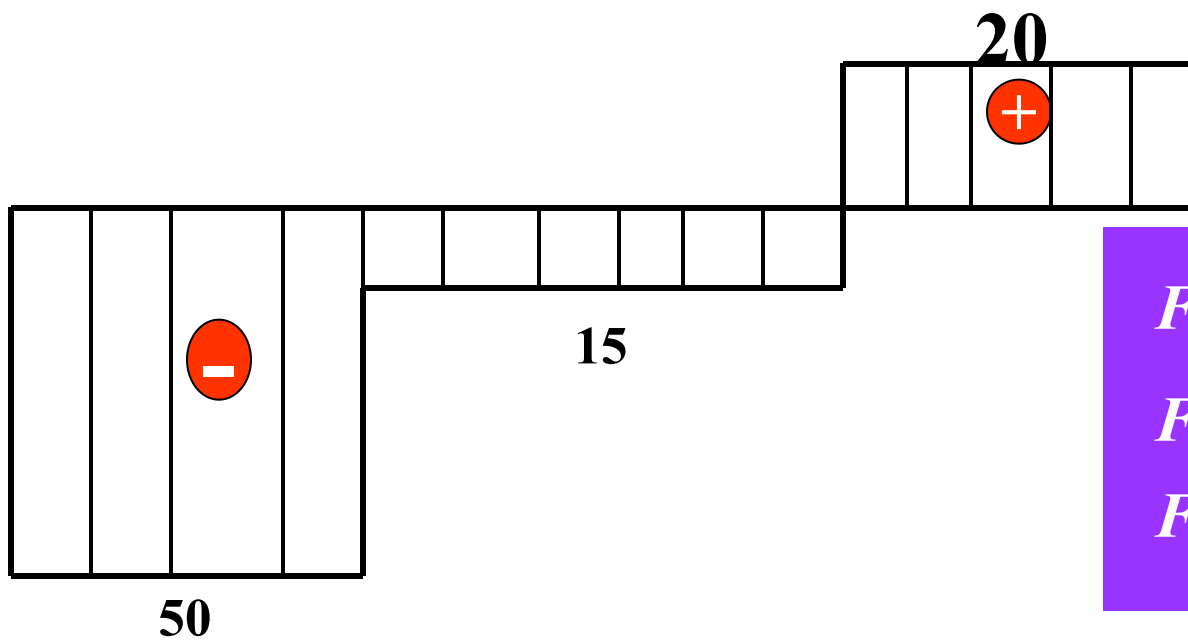
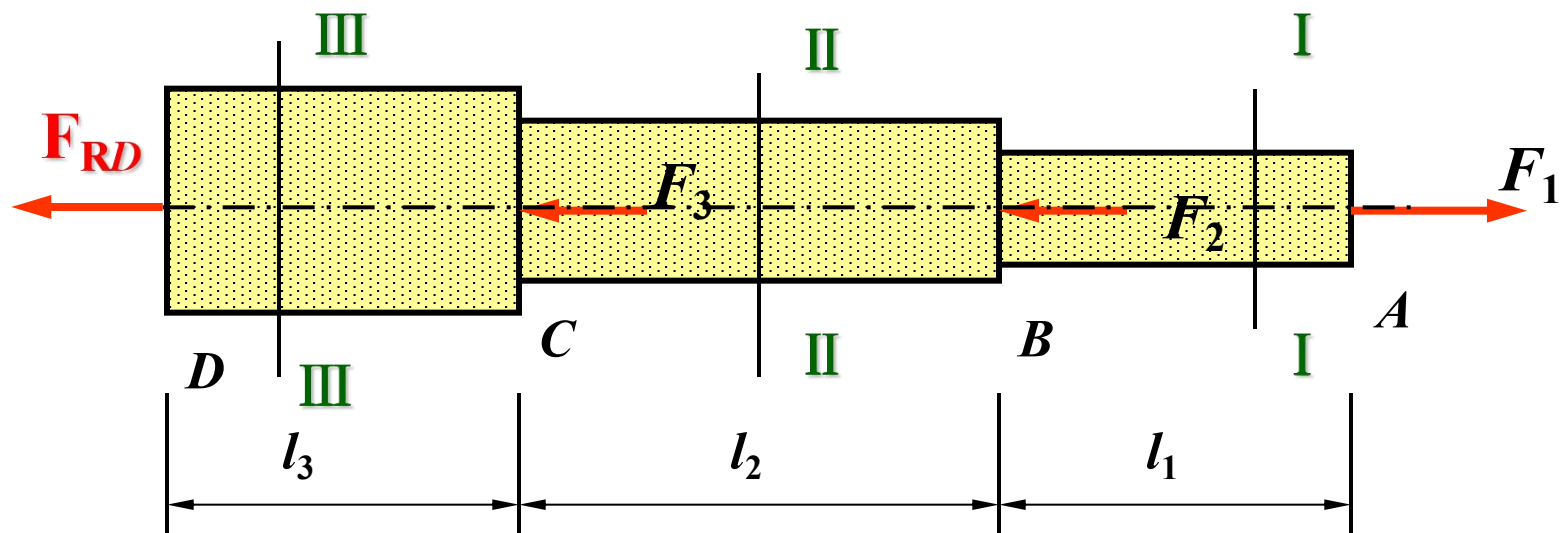
$$F_{N3} - F_{RD} = 0$$

$$F_1 - F_2 - F_{N2} = 0$$

$$F_{N3} = -50\text{kN} \quad (-)$$

$$F_{N2} = -15\text{kN} \quad (-)$$

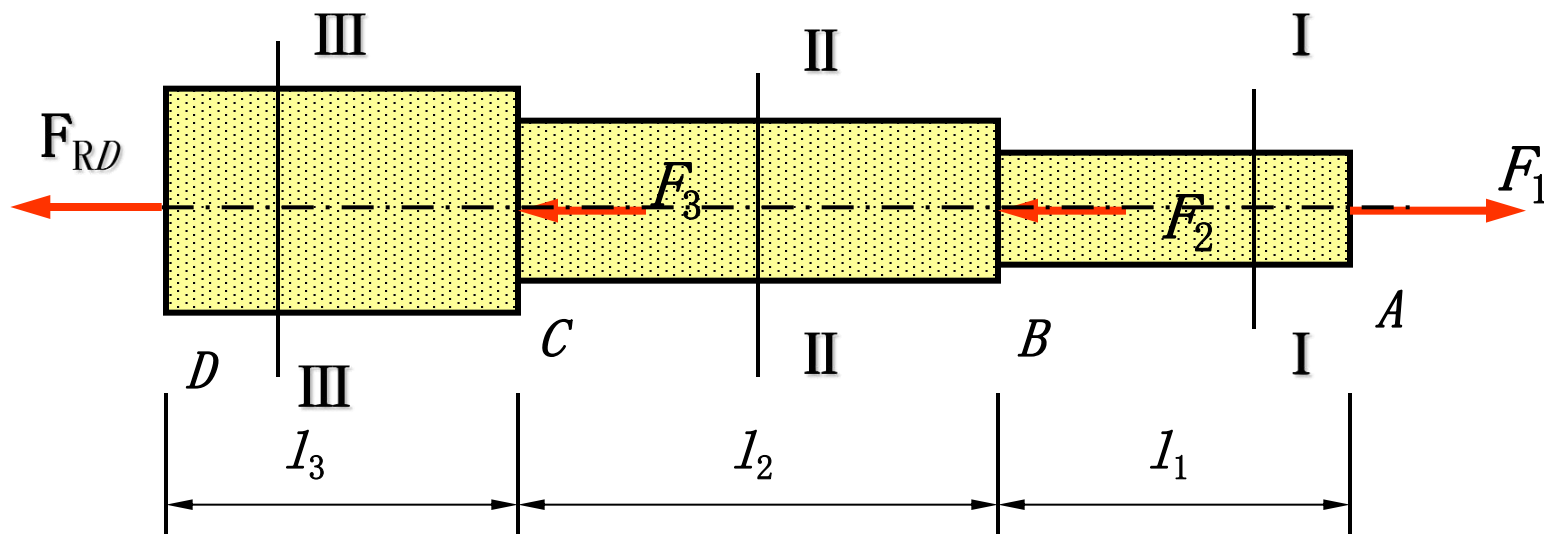




$$F_{N1} = 20 \text{ kN} \quad (+)$$

$$F_{N2} = -15 \text{ kN} \quad (-)$$

$$F_{N3} = -50 \text{ kN} \quad (-)$$



(2) 杆的最大正应力 σ_{\max}

$$AB\text{段} \quad \sigma_{AB} = \frac{F_{N1}}{A_1} = 176.8\text{MPa} \quad (+)$$

$$BC\text{段} \quad \sigma_{BC} = \frac{F_{N2}}{A_2} = 74.6\text{MPa} \quad (-)$$

$$DC\text{段} \quad \sigma_{DC} = \frac{F_{N3}}{A_3} = 110.5\text{MPa} \quad (-)$$

$$F_{N1} = 20\text{kN} \quad (+)$$

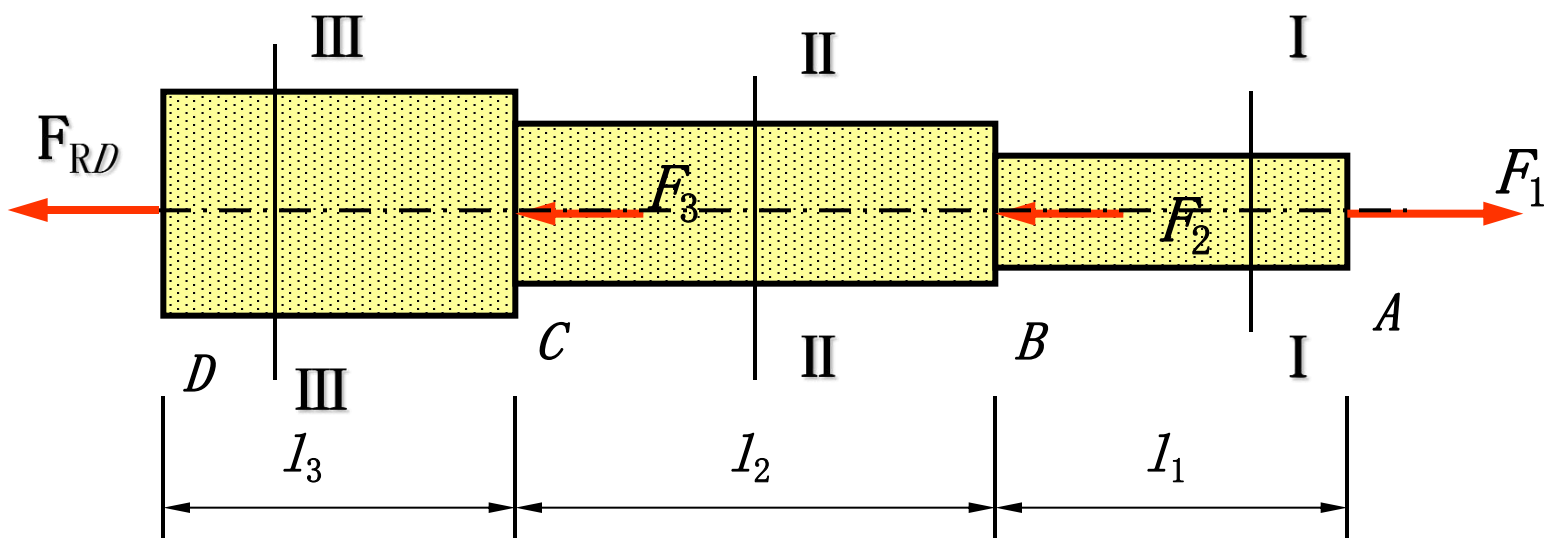
$$F_{N2} = -15\text{kN} \quad (-)$$

$$F_{N3} = -50\text{kN} \quad (-)$$

$$\sigma_{\max} = 176.8\text{MPa}$$

发生在AB段.





(3) B 截面的位移及 AD 杆的变形

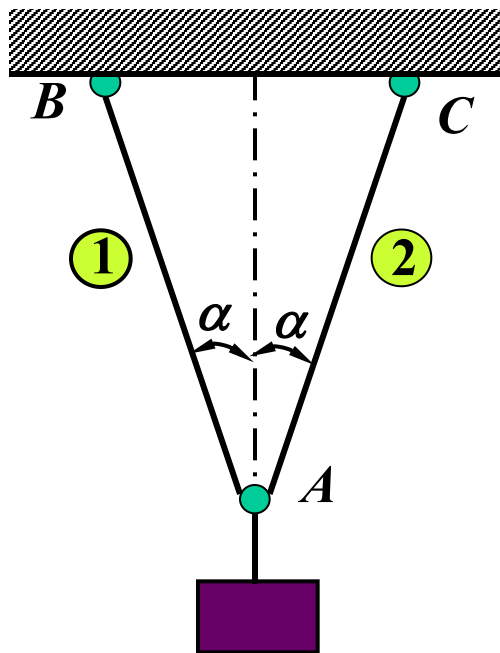
$$\Delta l_{AB} = \frac{F_{N1} l_1}{EA_1} = 2.53 \times 10^{-4} \text{ m} \quad \Delta l_{BC} = \frac{F_{N2} l_2}{EA_2} = -1.42 \times 10^{-4} \text{ m}$$

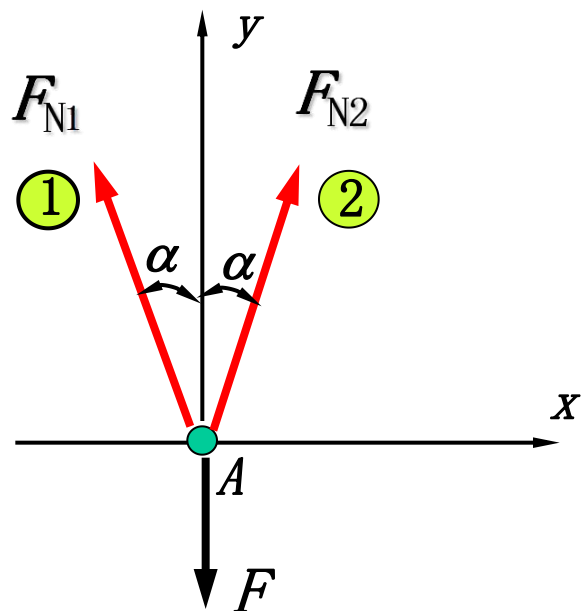
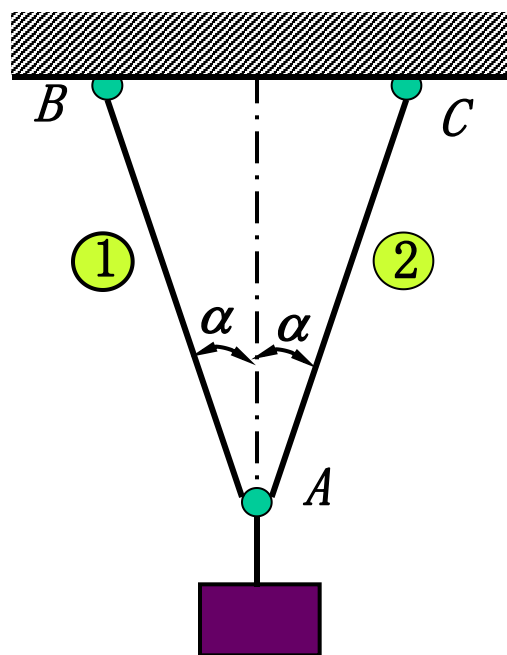
$$\Delta l_{CD} = \frac{F_{N3} l_3}{EA_3} = -1.58 \times 10^{-4} \text{ m} \quad u_B = \Delta l_{CD} + \Delta l_{BC} = -0.3 \text{ mm}$$

$$\Delta l_{AD} = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} = -0.47 \times 10^{-4} \text{ mm}$$



例题3-6 图所示杆系由两根钢杆 1 和 2 组成. 已知杆端铰接, 两杆与铅垂线均成 $\alpha=30^\circ$ 的角度, 长度均为 $l = 2\text{m}$, 直径均为 $d=25\text{mm}$, 钢的弹性模量为 $E=210\text{GPa}$. 设在点处悬挂一重物 $F=100\text{kN}$, 试求 A 点的位移 Δ_A .





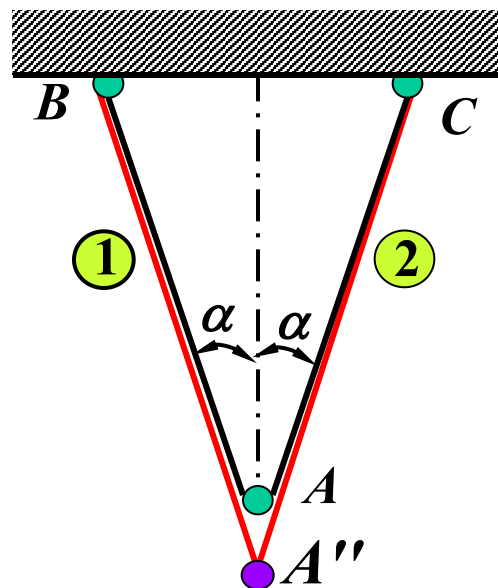
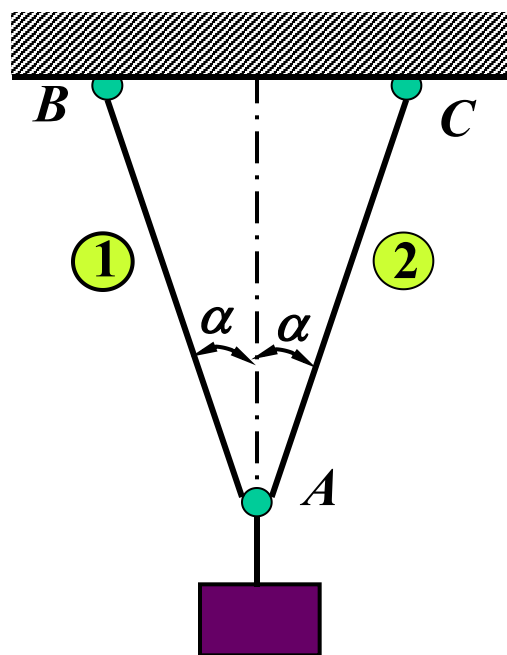
解：（1）列平衡方程，求杆的轴力

$$\sum F_x = 0 \quad F_{N2} \sin \alpha - F_{N1} \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{N1} \cos \alpha + F_{N2} \cos \alpha - F = 0$$

$$F_{N1} = F_{N2} = \frac{F}{2 \cos \alpha}$$



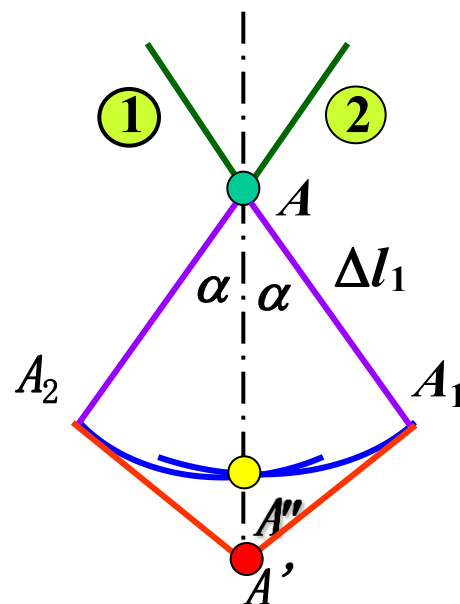
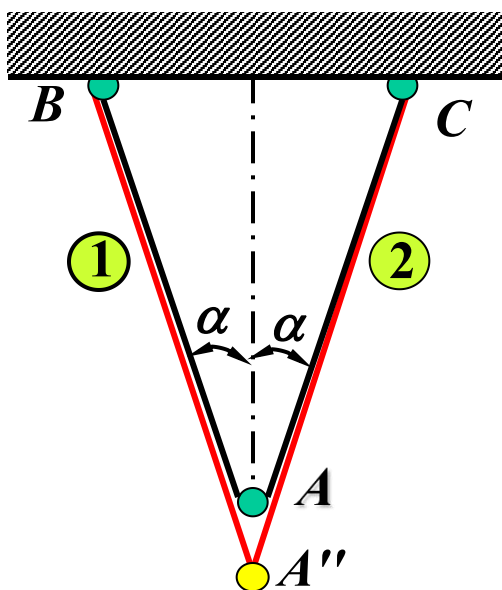


(2) 两杆的变形为

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{F_{N1} l_1}{EA} = \frac{Fl}{2EA \cos \alpha} \quad (\text{伸长})$$

变形的几何条件相容是变形后，两杆仍应铰结在一起.





以两杆伸长后的长度 BA_1 和 CA_2 为半径作圆弧相交于 A'' , 即为 A 点的新位置. AA'' 就是 A 点的位移.

因变形很小, 故可过 A_1 , A_2 分别做两杆的垂线, 相交于 A'

可认为 $AA' = AA''$

$$\Delta_A = AA' = \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha} = \frac{Fl}{2EA \cos^2 \alpha} = 1.293 \text{ mm} (\downarrow)$$



例题3-7 图示三角形架 AB 和 AC 杆的弹性模量 $E=200\text{GPa}$
 $A_1=2172\text{mm}^2$, $A_2=2548\text{mm}^2$. 求 当 $F=130\text{kN}$ 时节点的位移.

解: (1) 由平衡方程得两杆的轴力

$$F_{N1} = 2F$$

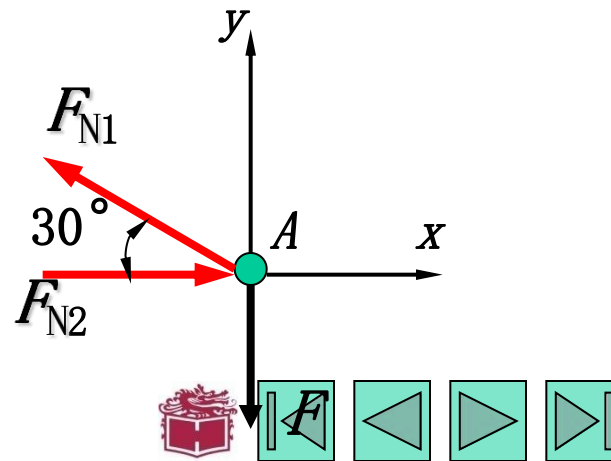
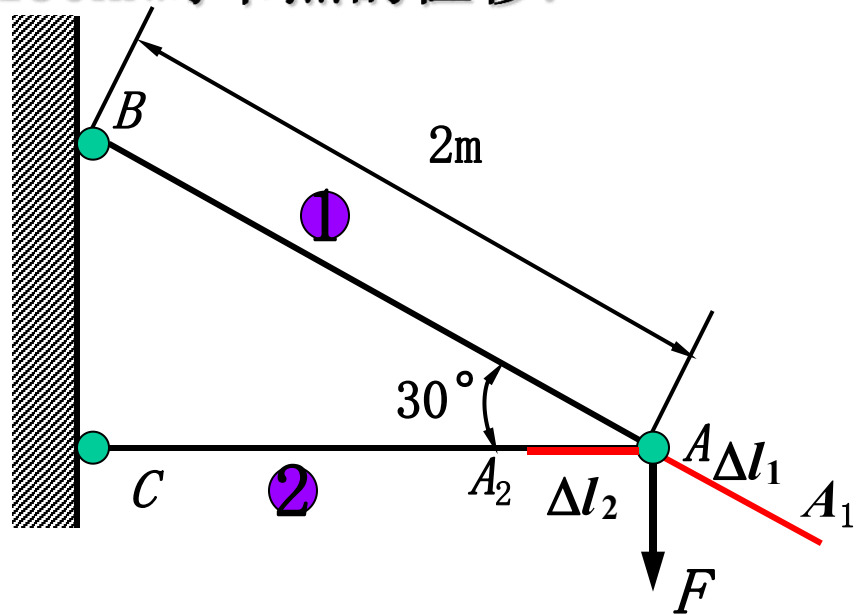
$$F_{N2} = 1.732F$$

1 杆受拉, 2 杆受压

(2) 两杆的变形

$$AA_1 = \Delta l_1 = \frac{F_{N1} l_1}{EA_1} = 1.198\text{mm}$$

$$AA_2 = \Delta l_2 = \frac{F_{N2} l_2}{EA_2} = 0.765\text{mm}$$



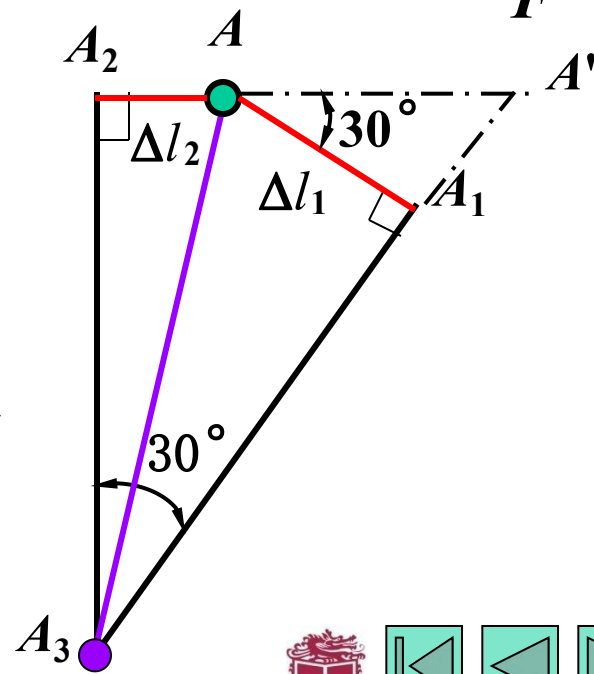
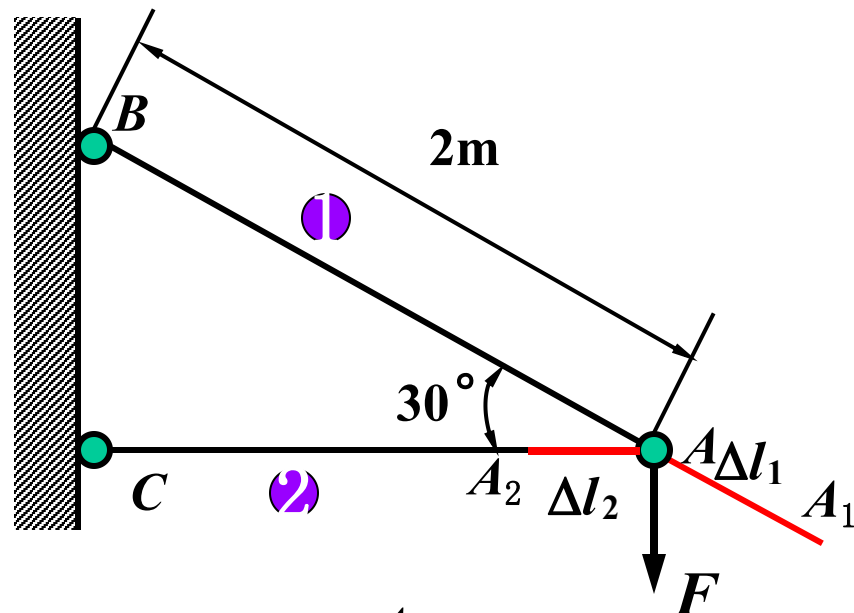
AA_3 为所求A点的位移

$$A_2A' = A_2A + AA' =$$

$$\Delta l_2 + \frac{\Delta l_1}{\cos 30^\circ}$$

$$A_2A_3 = \frac{A_2A'}{\tan 30^\circ} = \frac{\Delta l_2}{\tan 30^\circ} + \frac{\Delta l_1}{\sin 30^\circ}$$

$$AA_3 = \sqrt{(AA_2)^2 + (A_2A_3)^2} = 3.78\text{mm}$$

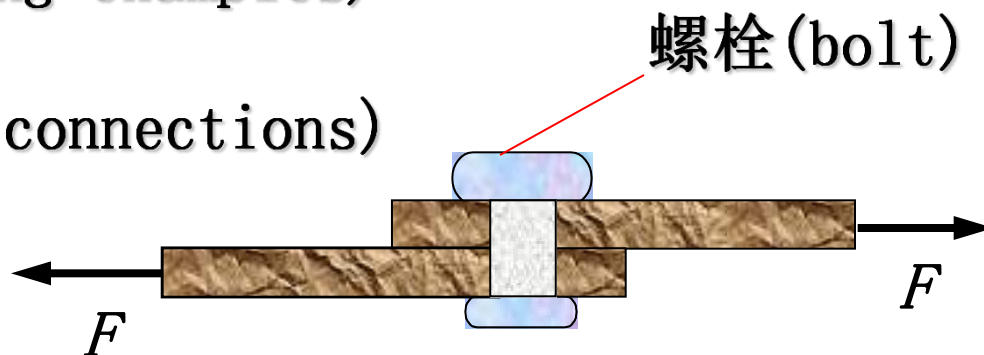


3.8 剪切与挤压的实用计算

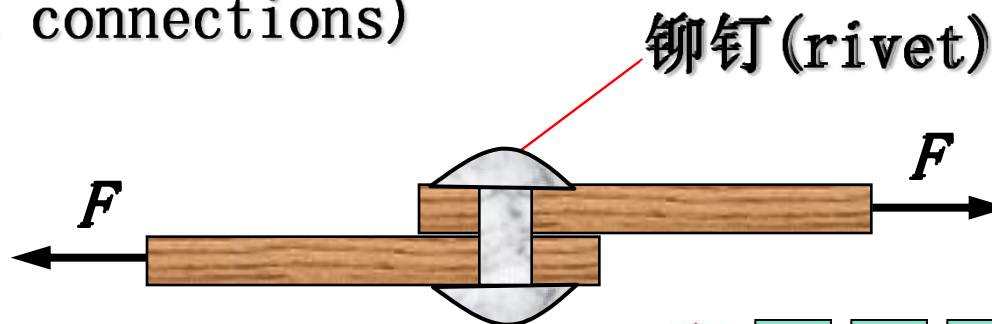
一、基本概念和实例

1. 工程实例 (Engineering examples)

(1) 螺栓连接 (Bolted connections)

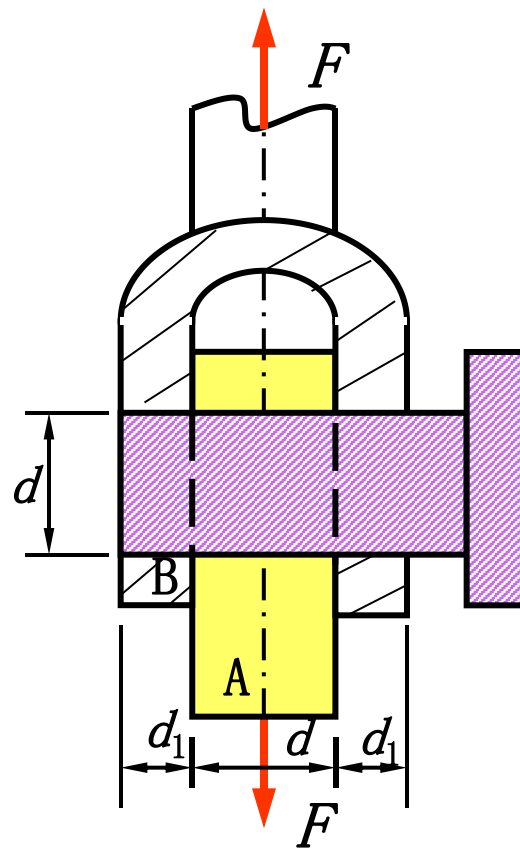
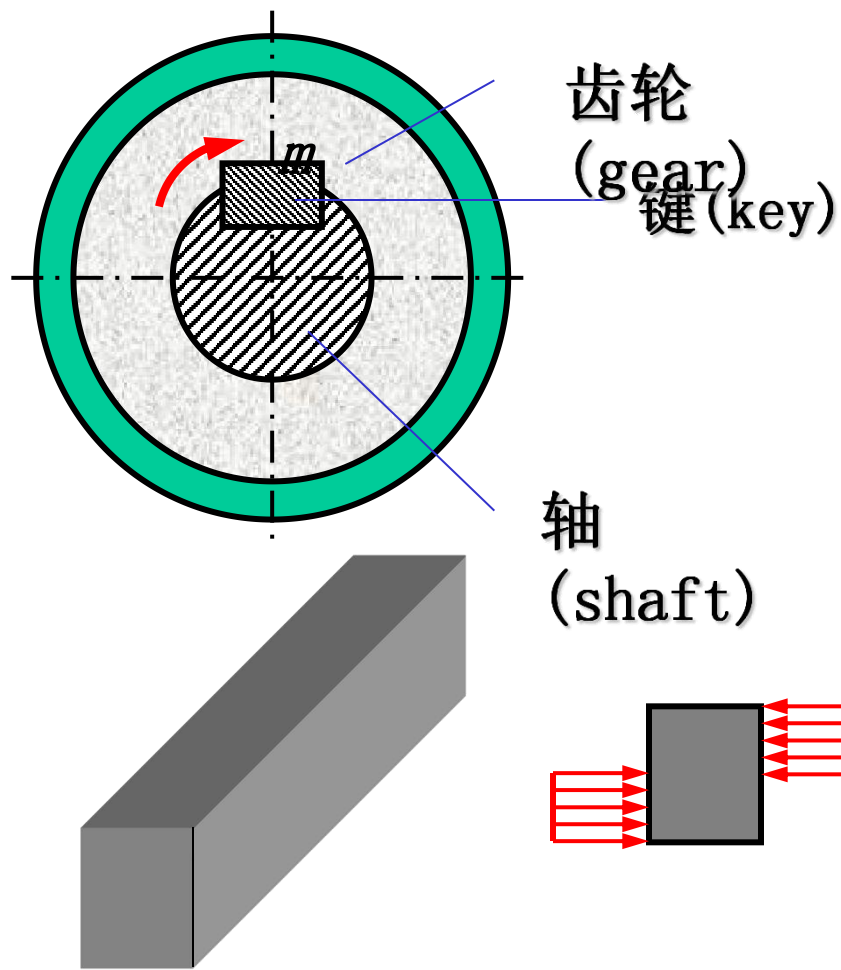


(2) 铆钉连接 (Riveted connections)



(3) 键块联接 (Keyed connection)

(4) 销轴联接(Pinned connection)



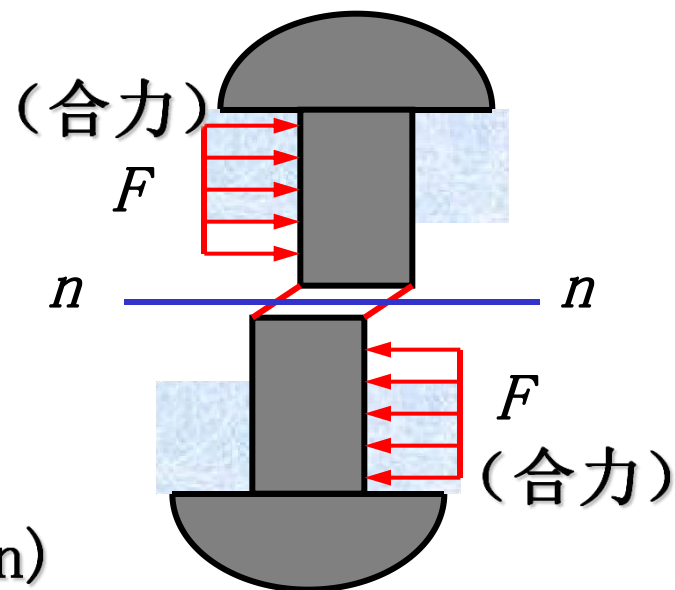
2. 受力特点(Character of external force)

以铆钉为例

构件受两组大小相等、方向相反、作用线相互很近的平行力系作用。

3. 变形特点(Character of deformation)

构件沿两组平行力系的交界面发生相对错动。



4. 连接处破坏三种形式:

(Three types of failure in connections) (1)

剪切破坏

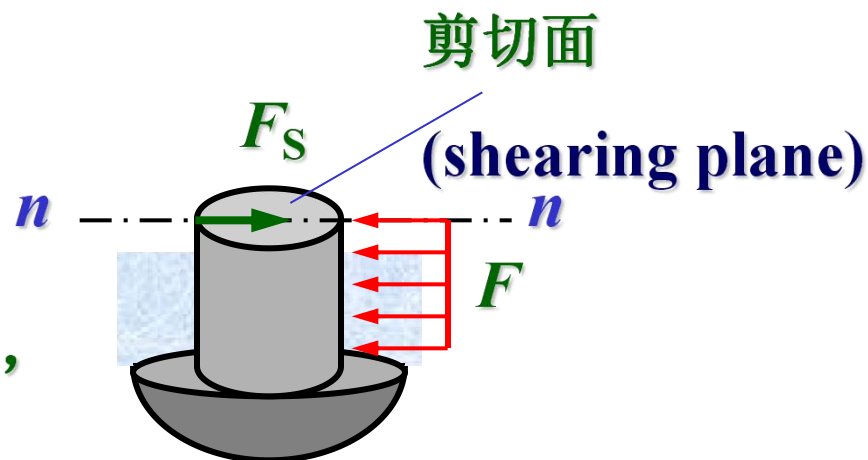
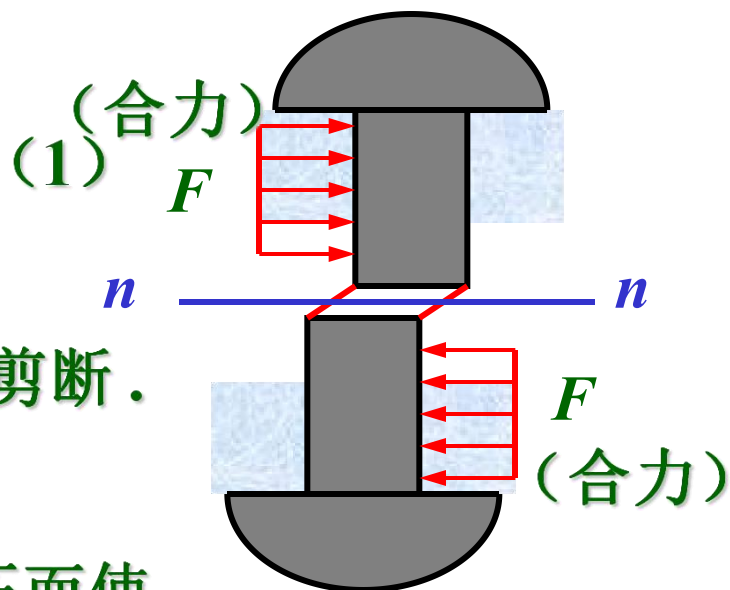
沿铆钉的剪切面剪断，如沿 $n-n$ 面剪断。

(2) 挤压破坏

铆钉与钢板在相互接触面上因挤压而使溃压连接松动，发生破坏。

(3) 拉伸破坏

钢板在受铆钉孔削弱的截面处，应力增大，易在连接处拉断。



二、剪切的应力分析

1. 内力计算 (Calculation of internal force)

$$\sum F_x = 0 \quad F_S - F = 0$$

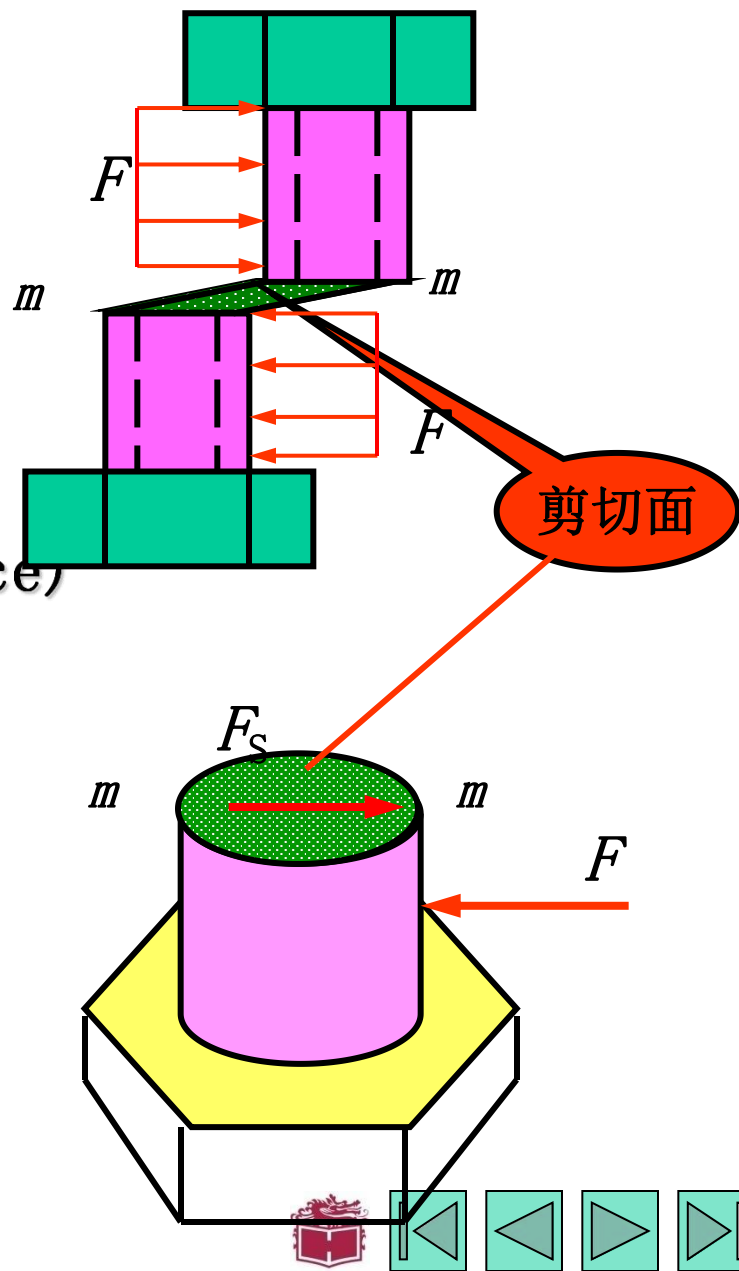
$$F_S = F \quad F_S - \text{剪力 (shearing force)}$$

2. 切应力 (Shearing stress)

$$\tau = \frac{F_S}{A}$$

式中, F_S - 剪力 (shearing force)

A - 剪切面的面积 (area in shear)



3. 强度条件 (Strength condition)

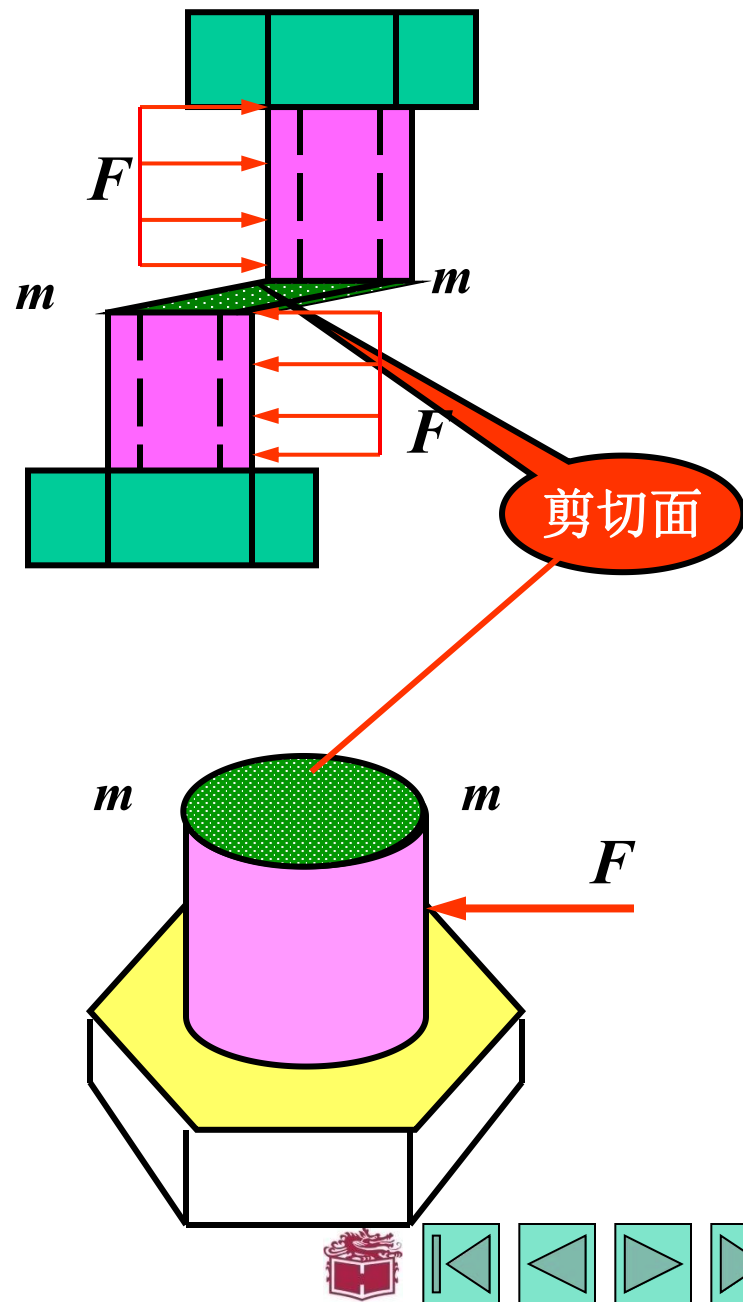
$$\tau = \frac{F_s}{A} \leq [\tau]$$

$[\tau]$ 为材料的许用切应力
(Allowable shearing stress of a material)

$$[\tau] = \frac{\tau_u}{n}$$

τ_u - 剪切极限应力
(ultimate shearing stress)

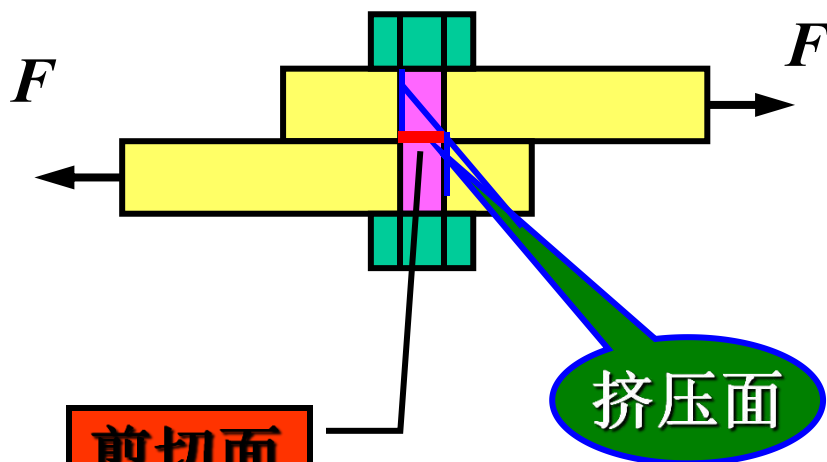
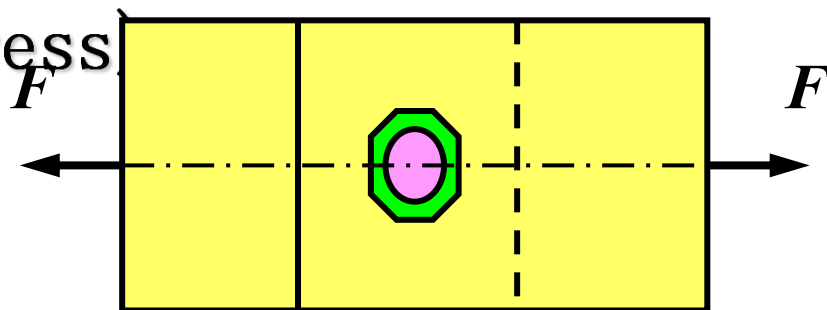
n - 安全因数 (factor of safety)



三、挤压的应力分析

(Analysis of bearing stress)

螺栓与钢板相互接触的侧面上,发生的彼此间的局部承压现象,称为**挤压** (bearing).



在接触面上的压力,称为**挤压力** (bearing force), 并记为 F

1. 挤压力 (Bearing force)

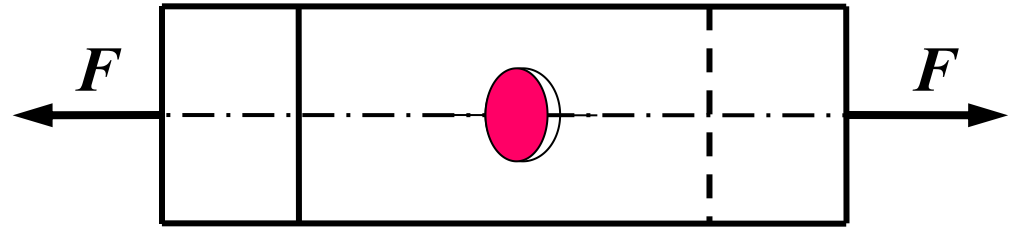
$$F = F_S$$



2. 挤压破坏的两种形式 (Two types of bearing failure)

(1) 螺栓压扁

(2) 钢板在孔缘压成椭圆



3. 挤压应力 (Bearing stress)

$$\sigma_{bs} = \frac{F}{A_{bs}}$$

F - 挤压力 (bearing force)

A_{bs} - 挤压面的面积 (area in bearing)

4. 强度条件 (Strength condition) $\sigma_{bs} = \frac{F}{A_{bs}} \leq [\sigma_{bs}]$

$[\sigma_{bs}]$ - 许用挤压应力 (allowable bearing stress)



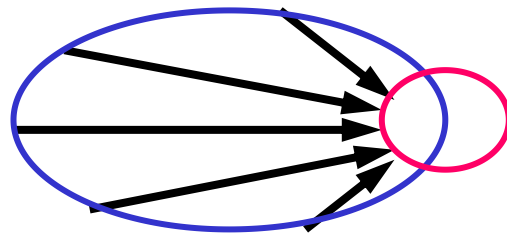
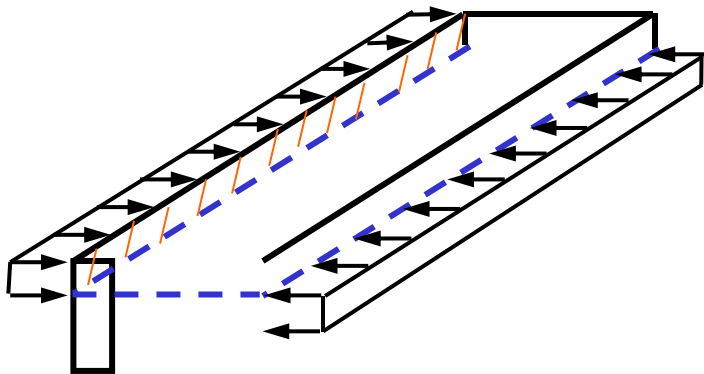
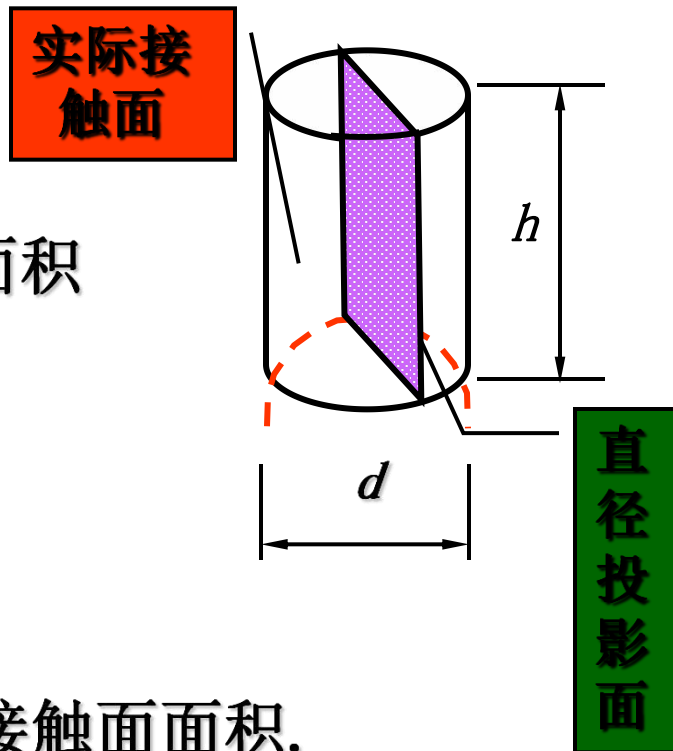
挤压面的面积计算

(1) 当接触面为圆柱面时，挤压面积
 A_{bs} 为实际接触面在直径平面上的投影面积

$$A_{bs} = d \times h$$

挤压现象的实际受力如图 所示.

(2) 当接触面为平面时， A_{bs} 为实际接触面面积.



四、强度条件的应用

1. 校核强度 (Check the intensity)

$$\tau \leq [\tau] \quad \sigma_{bs} \leq [\sigma_{bs}]$$

2. 设计截面 (**Determine the allowable dimension**)

$$A \geq \frac{F_s}{[\tau]} \quad A_{bs} \geq \frac{F}{[\sigma_{bs}]}$$

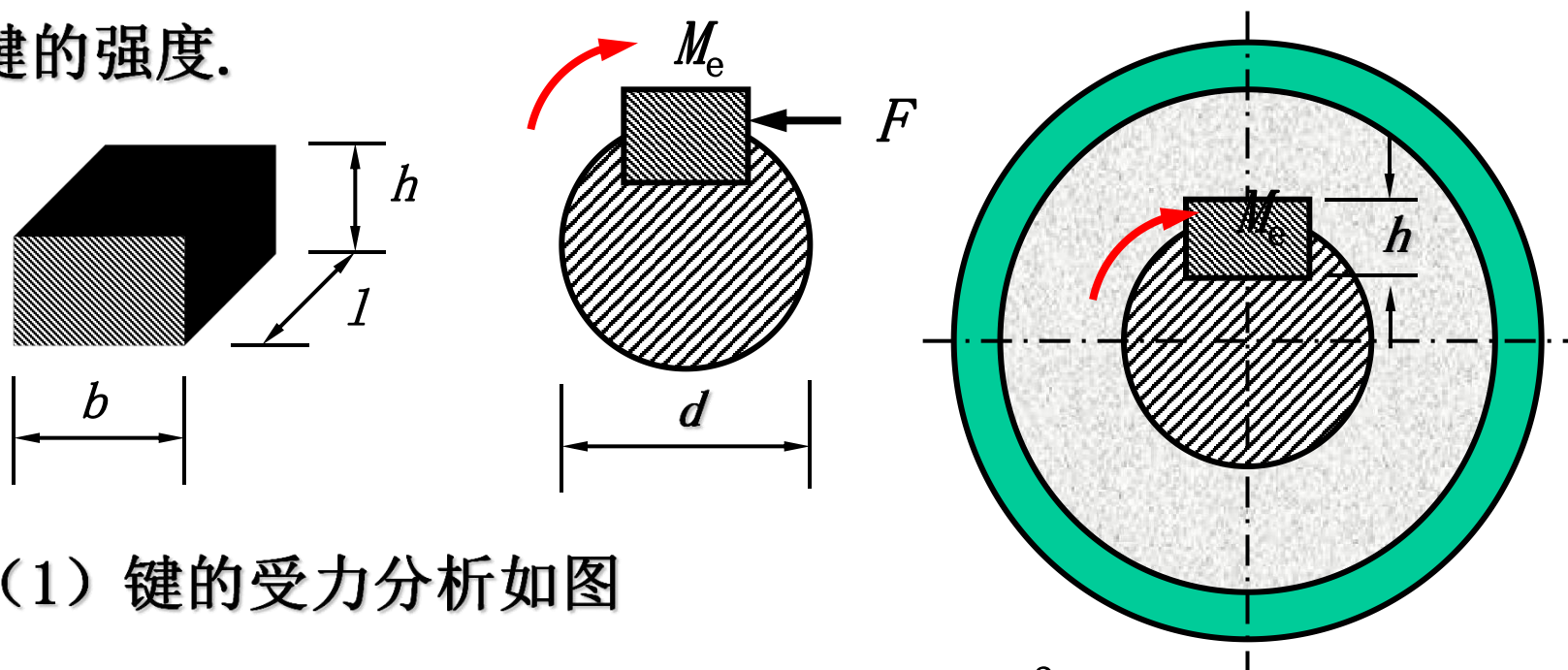
3. 求许可载荷 (Determine the allowable load)

$$F_s \leq [\tau]A \quad F \leq [\sigma_{bs}]A_{bs}$$

4. 破坏条件 (failure condition) $\tau \geq \tau_u$



例题3-12 齿轮与轴由平键连接, 已知轴的直径 $d=70\text{mm}$, 键的尺寸为 $b\times h\times L=20\times 12\times 100\text{mm}$, 传递的扭转力偶矩 $M_e=2\text{kN}\cdot\text{m}$, 键的许用切应力为 $[\tau]=60\text{MPa}$, 许用挤压应力为 $[\sigma_{bs}]=100\text{MPa}$. 试校核键的强度.



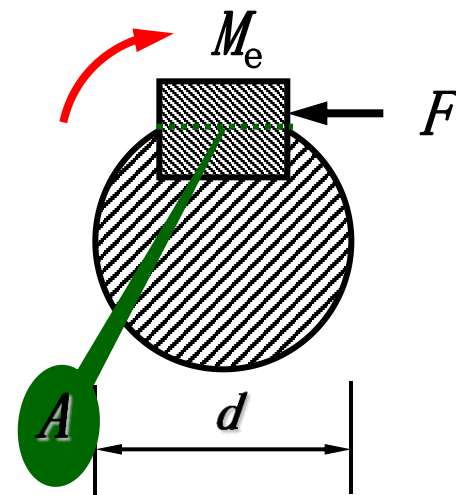
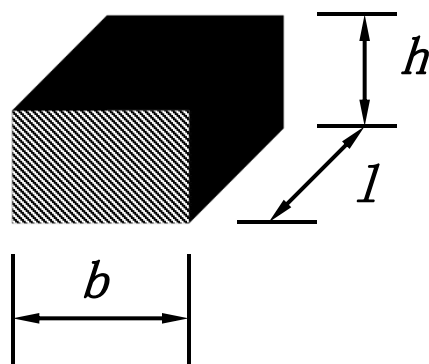
解: (1) 键的受力分析如图

$$F \cdot \frac{d}{2} = M_e \quad F = \frac{2M_e}{d} = \frac{2 \times 2 \times 10^3}{70 \times 10^{-3}} = 57\text{kN}$$



(2) 校核剪切强度

$$F_S = F$$



$$\tau = \frac{F_S}{A} = \frac{F}{bl} = \frac{57 \times 10^3}{20 \times 100 \times 10^{-6}} = 28.6 \text{MPa} \leq [\tau]$$

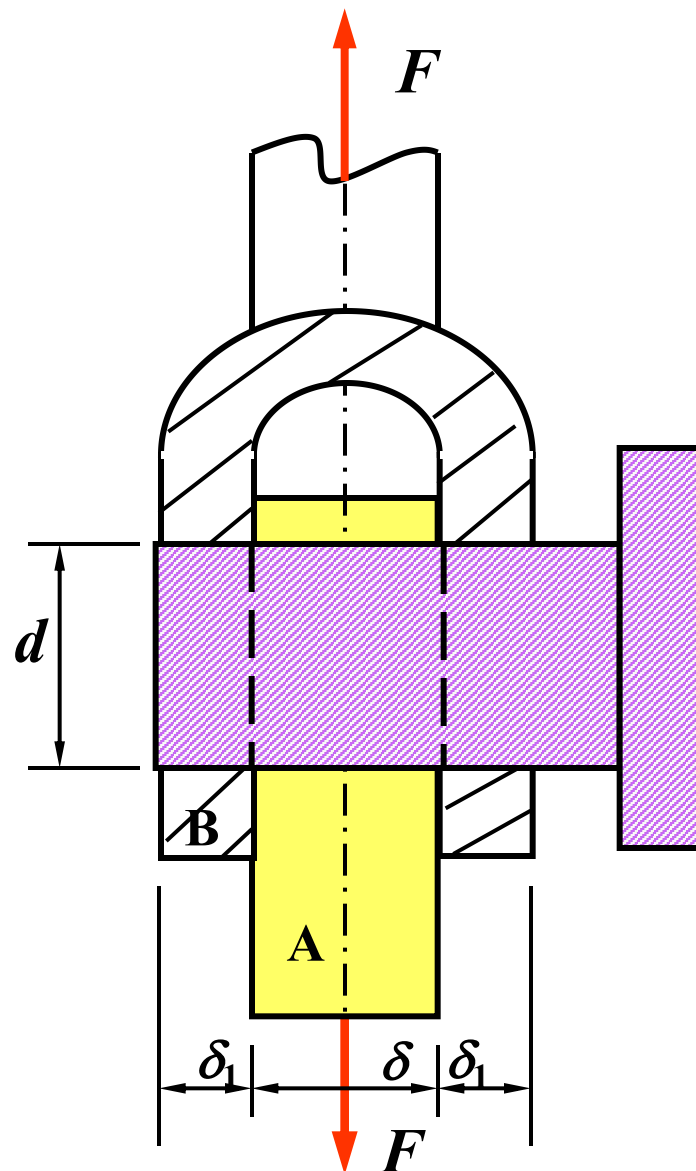
(3) 校核挤压强度

$$\sigma_{bs} = \frac{F}{A_{bs}} = \frac{F}{lh/2} = \frac{57 \times 10^3}{100 \times 6 \times 10^{-6}} = 95.3 \text{MPa} \leq [\sigma_{bs}]$$

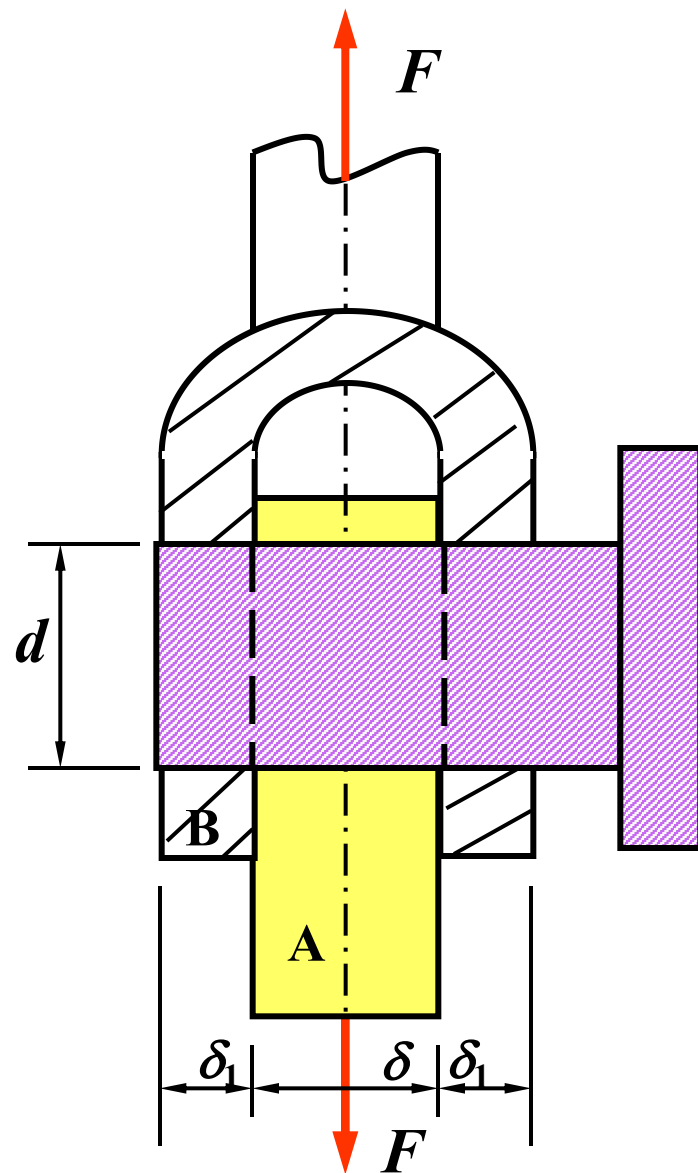
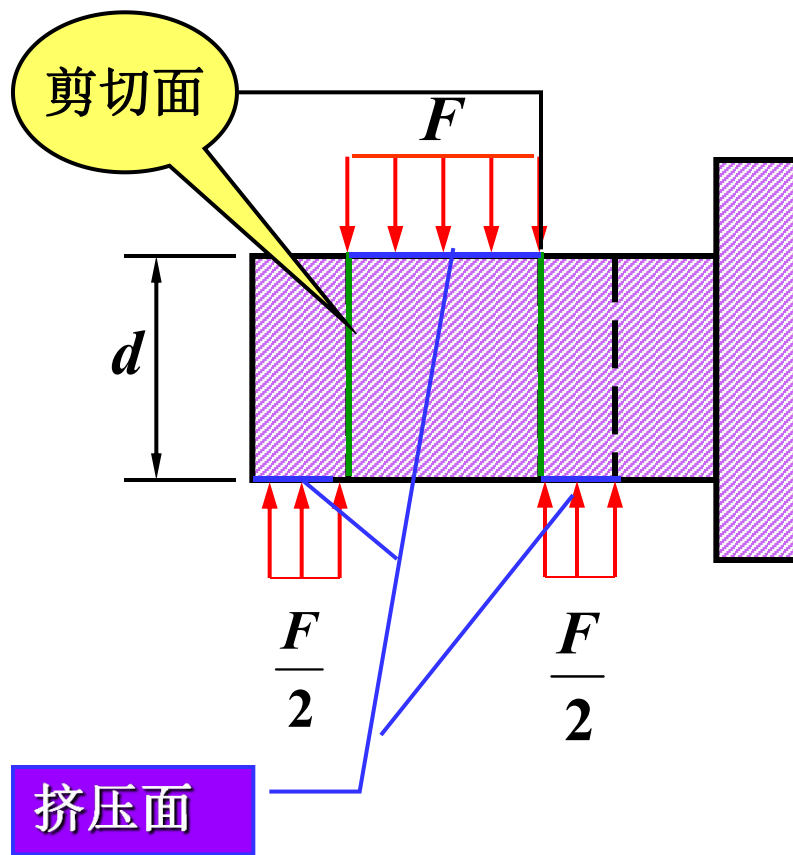
综上，键满足强度要求。



例题3-13 一销钉连接如图所示，
已知外力 $F=18\text{kN}$ ，被连接的构件
A 和 B 的厚度分别为 $\delta=8\text{mm}$ 和
 $\delta_1=5\text{mm}$ ，销钉直径 $d=15\text{mm}$ ，
销钉材料的许用切应力为
 $[\tau] = 60\text{MPa}$ ，许用挤压应力为
 $[\sigma_{bs}] = 200\text{MPa}$ 。试校核销钉的强度。



解：（1）销钉受力如图***b***所示



(2) 校核剪切强度

由截面法得两个面上的剪力

$$F_S = \frac{F}{2}$$

剪切面积为 $A = \frac{\pi d^2}{4}$

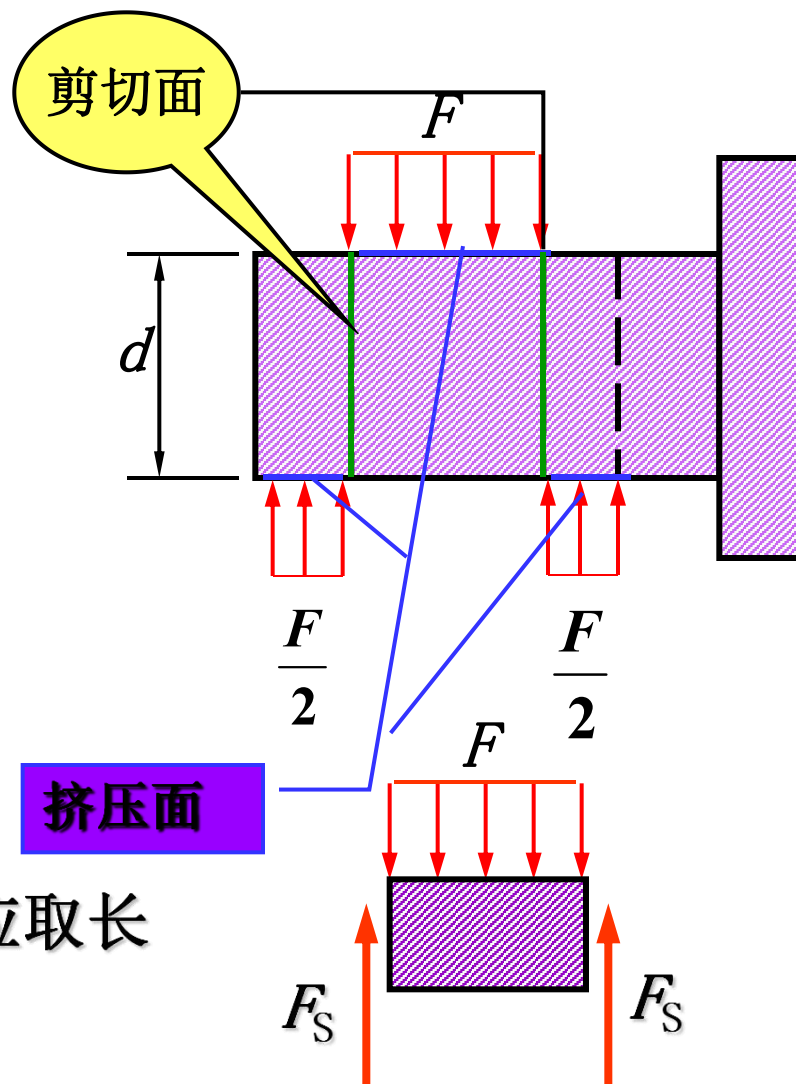
$$\tau = \frac{F_S}{A} = 51\text{MPa} \leq [\tau]$$

(3) 挤压强度校核 $\delta < 2\delta_1$

度 这两部分的挤压力相等，故应取长

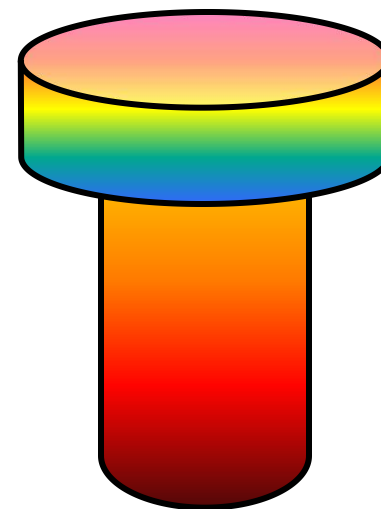
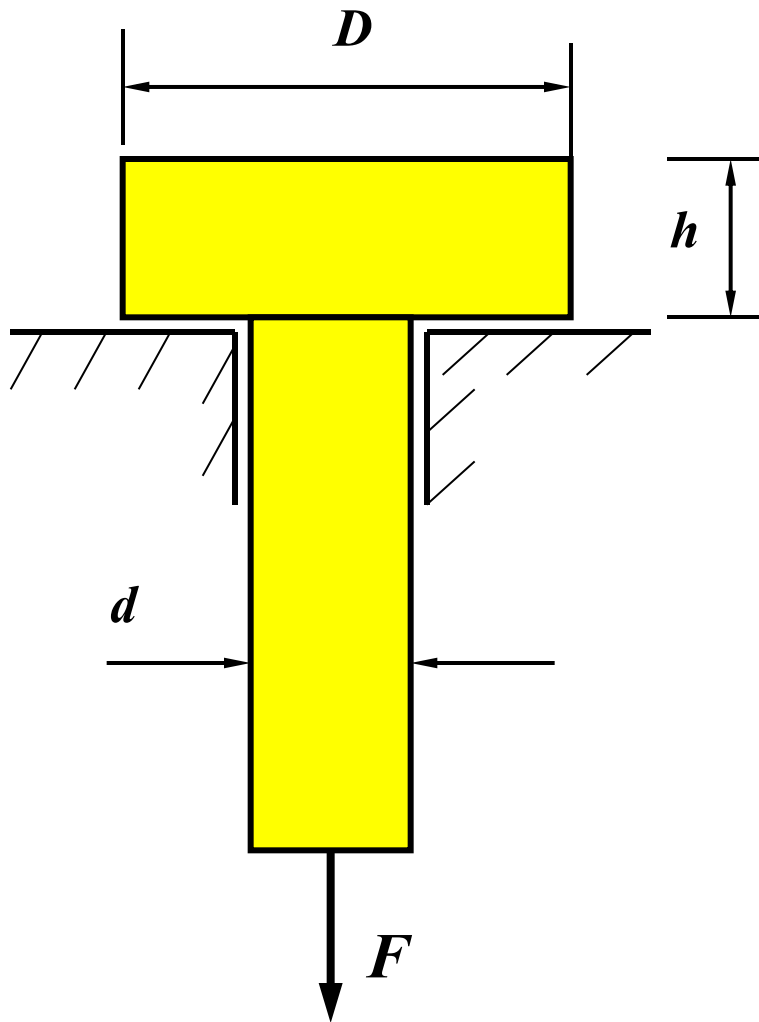
为 d 的中间段进行挤压强度校核.

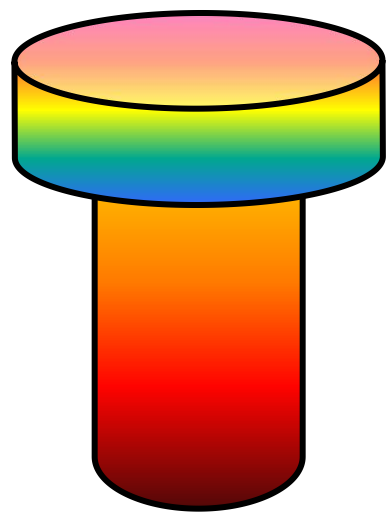
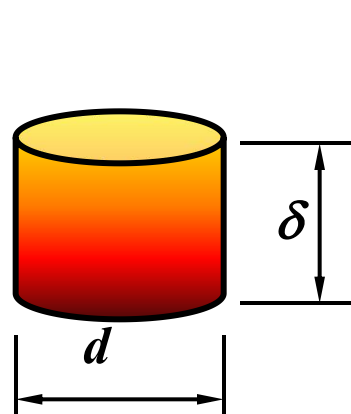
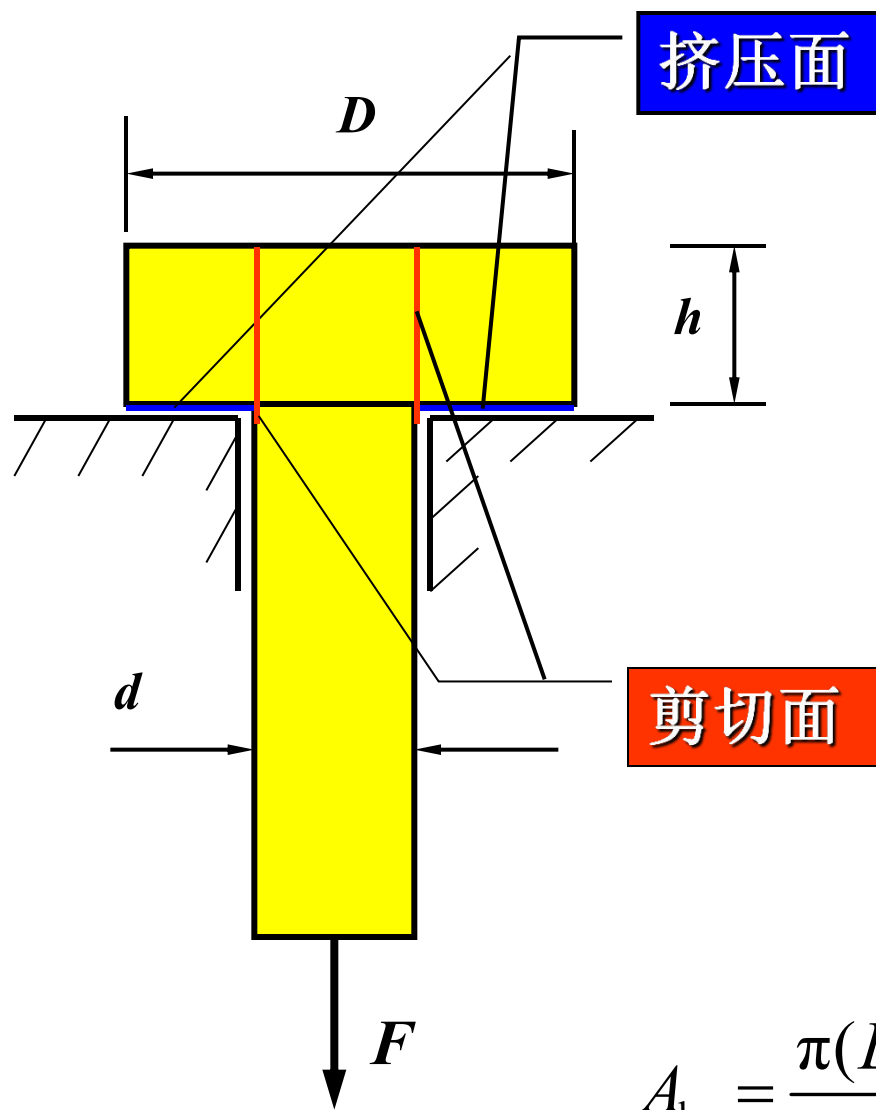
$$\sigma_{bs} = \frac{F}{A_{bs}} = \frac{F}{td} = 150\text{MPa} \leq [\sigma_{bs}] \quad \text{故销钉是安全的.}$$



思考题

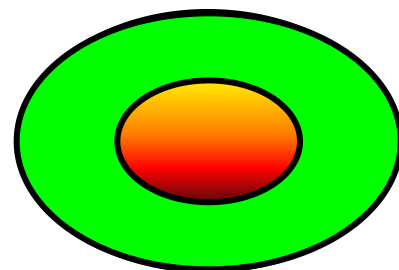
- (1) 销钉的剪切面面积 A
- (2) 销钉的挤压面面积 A_{bs}





$$A = \pi d h$$

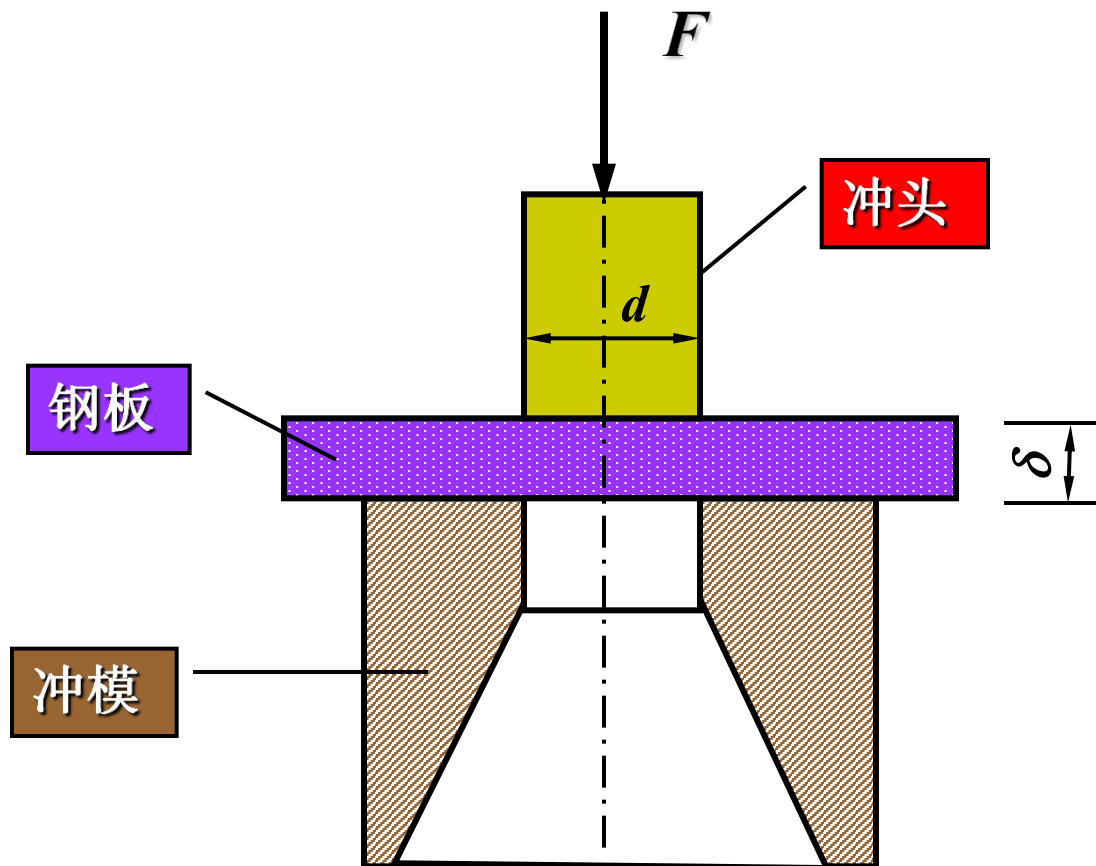
$$A_{bs} = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$$

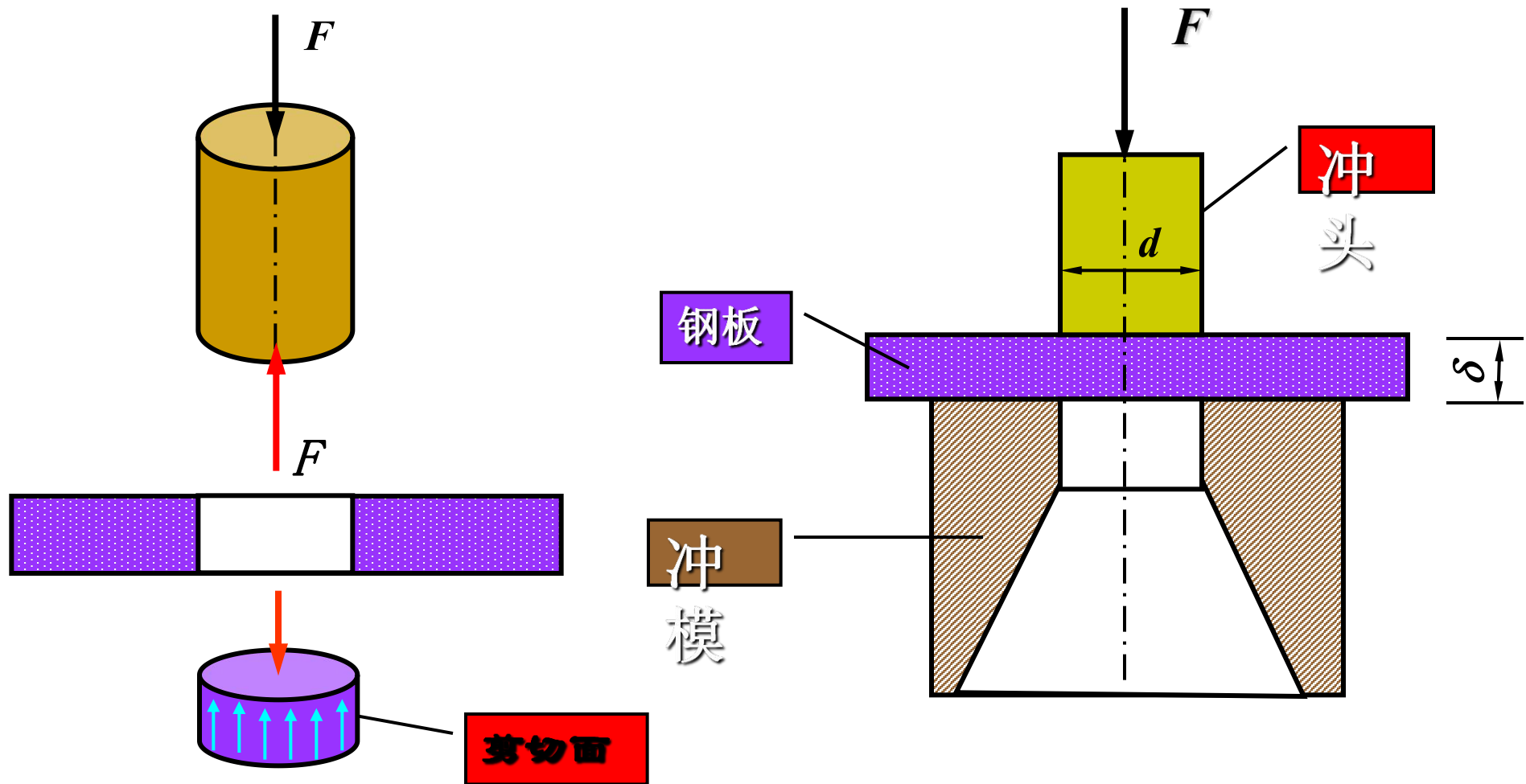


挤压面



例3-14 冲床的最大冲压力 $F=400\text{kN}$, 冲头材料的许用压应力 $[\sigma]=440\text{MPa}$, 钢板的剪切强度极限 $\tau_u=360\text{MPa}$, 试求冲头能冲剪的最小孔径 d 和最大的钢板厚度 δ .

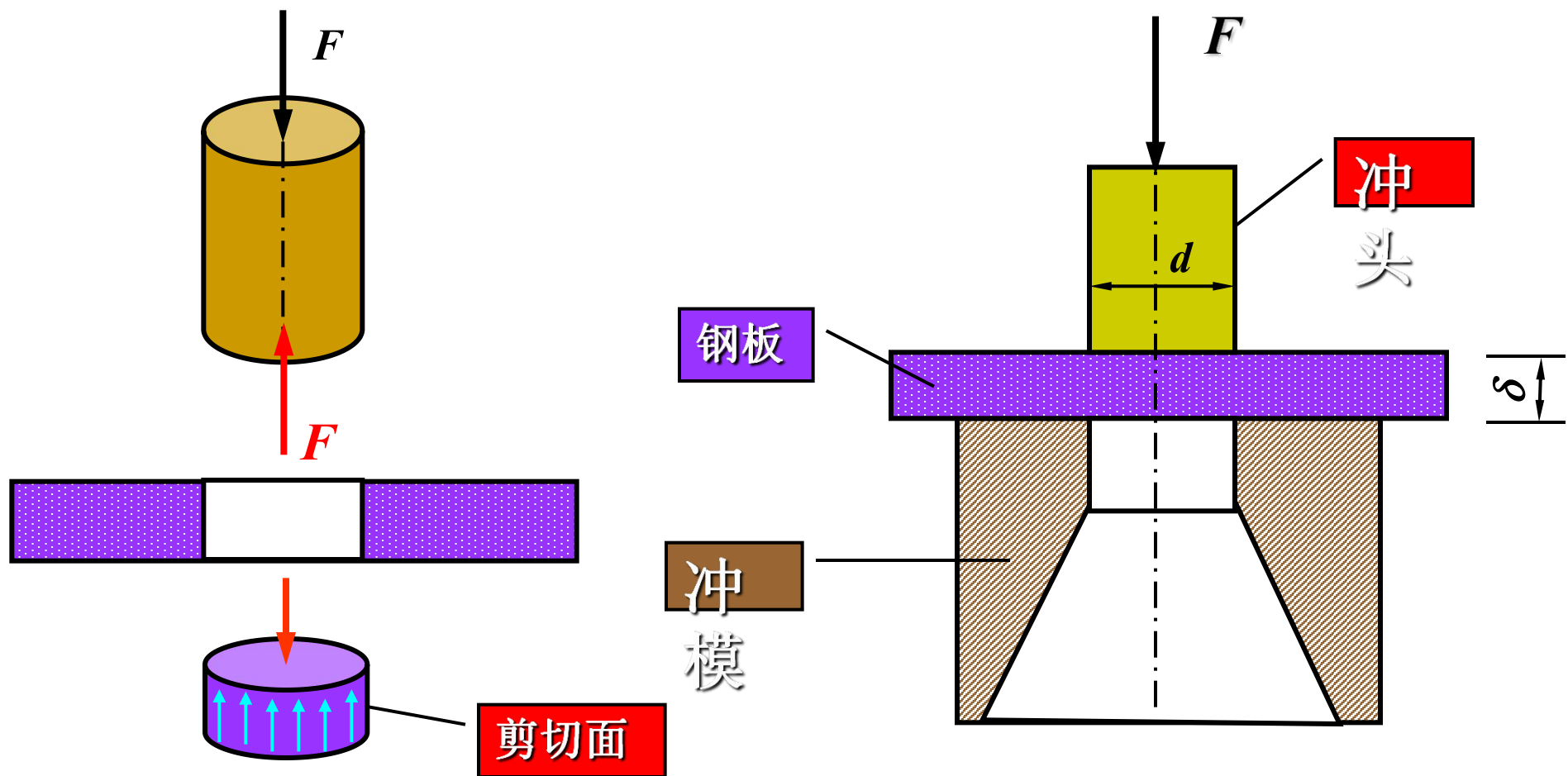




解： (1) 冲头为轴向压缩变形

$$\frac{F}{A} = \frac{F}{\pi d^2/4} \leq [\sigma] \quad d=34\text{mm}$$



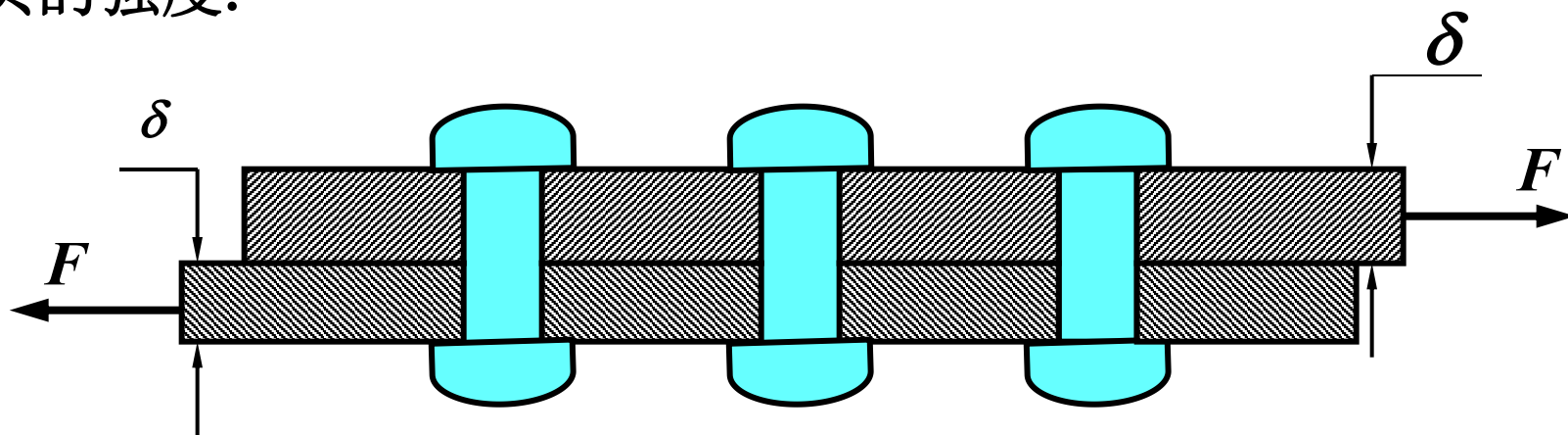


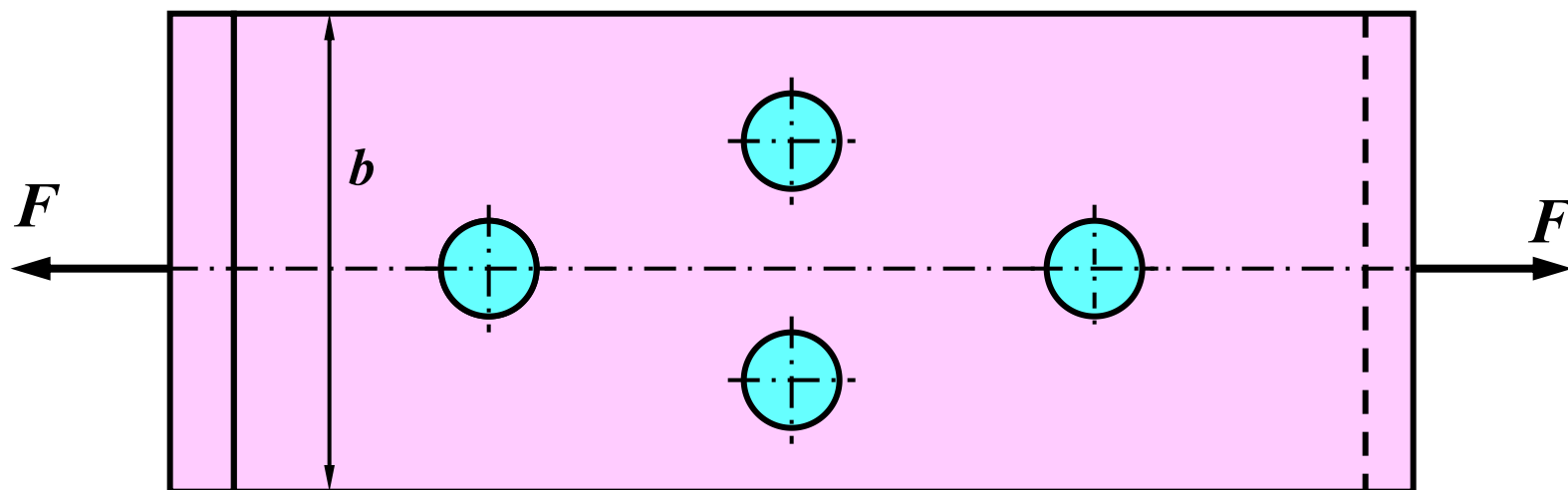
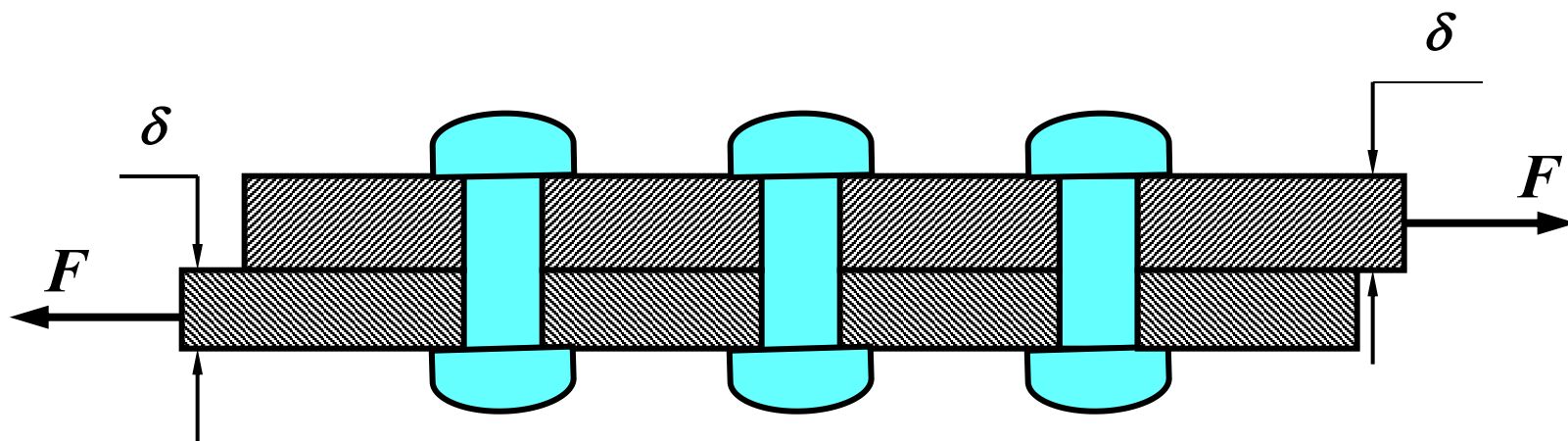
解： (2) 由钢板的剪切破坏条件

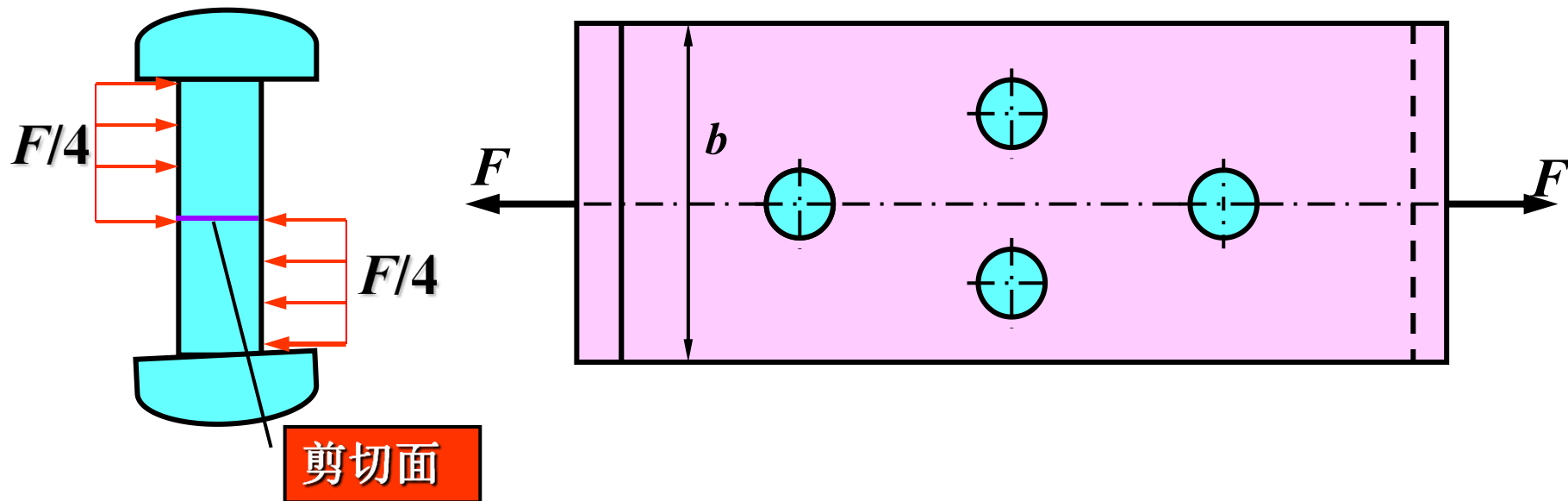
$$\delta = 10.4 \text{ mm}$$



例题3-15 一铆钉接头用四个铆钉连接两块钢板. 钢板与铆钉材料相同. 铆钉直径 $d = 16\text{mm}$, 钢板的尺寸为 $b = 100\text{mm}$, $d = 10\text{mm}$, $F = 90\text{kN}$, 铆钉的许用应力是 $[\tau] = 120\text{MPa}$, $[\sigma_{bs}] = 120\text{MPa}$, 钢板的许用拉应力 $[\sigma] = 160\text{MPa}$. 试校核铆钉接头的强度.







解：（1） 校核铆钉的剪切强度
 每个铆钉受剪面上的剪力为

$$F_s = \frac{F}{4} = 22.5\text{kN}$$

$$\tau = \frac{F_s}{A} = \frac{F_s}{\pi d^2/4} = 112\text{MPa} \leq [\tau]$$

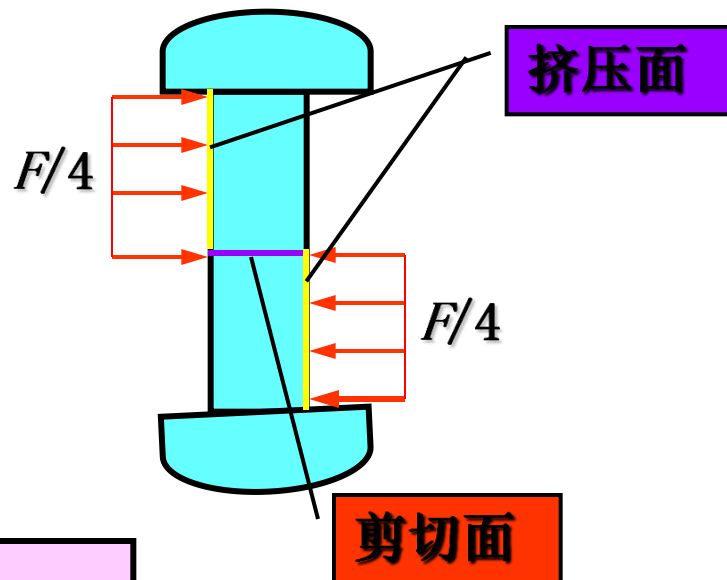
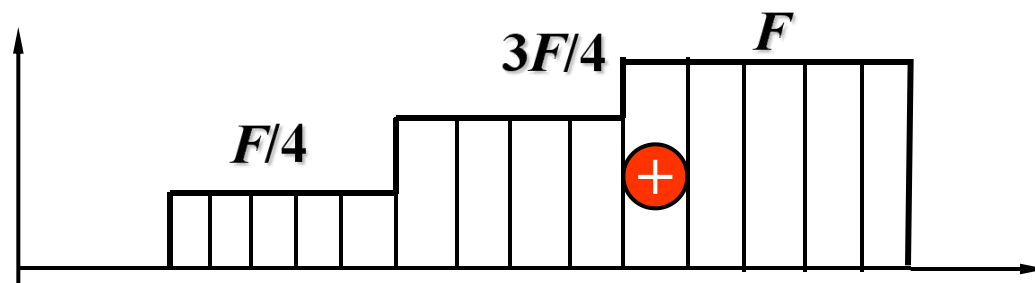
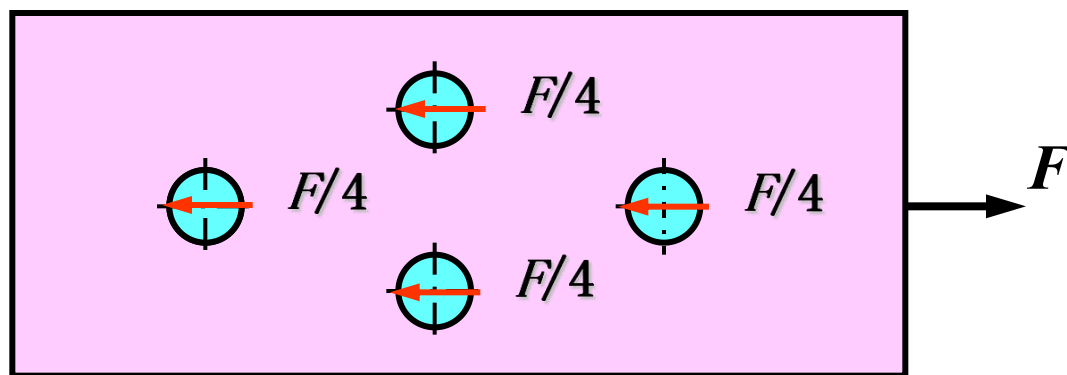


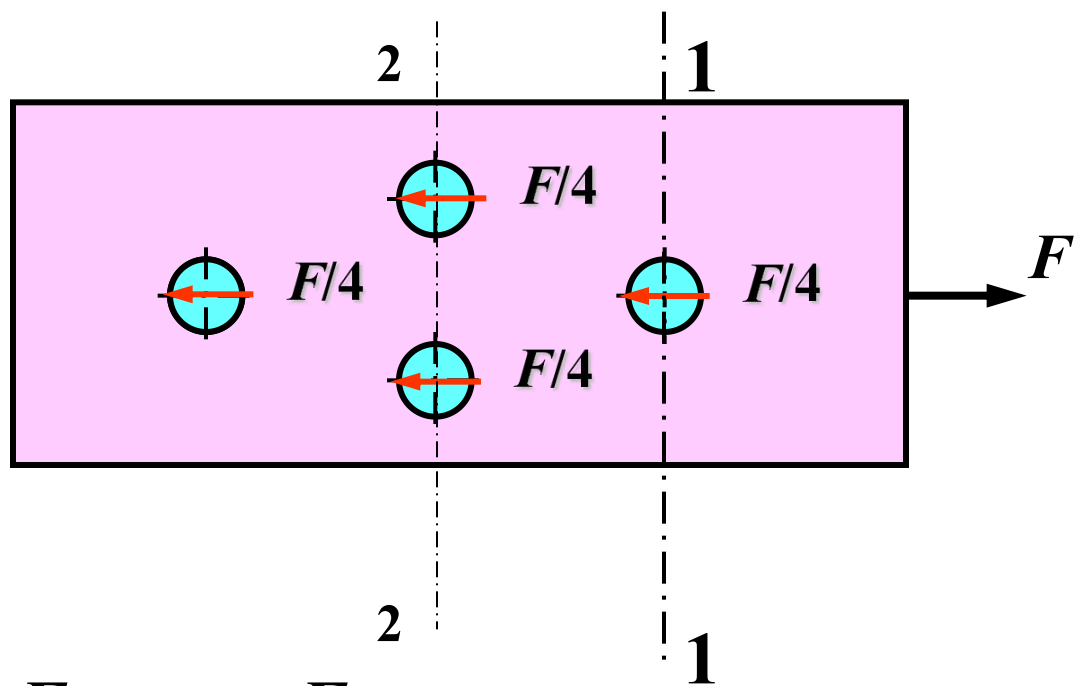
(2) 校核铆钉的挤压强度

每个铆钉受挤压力为 $F/4$

$$\sigma_{bs} = \frac{F}{A_{bs}} = \frac{F/4}{\delta d} = 141 \text{MPa} \leq [\sigma_{bs}]$$

(3) 校核钢板的拉伸强度

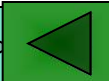




$$\sigma_{1-1} = \frac{F_{N1}}{A_1} = \frac{F}{(b-d)t} = 107\text{MPa} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{2-2} = \frac{F_{N2}}{A_2} = \frac{3F/4}{(b-2d)t} = 99.3\text{MPa} \leq [\sigma]$$

整个接头是安全的

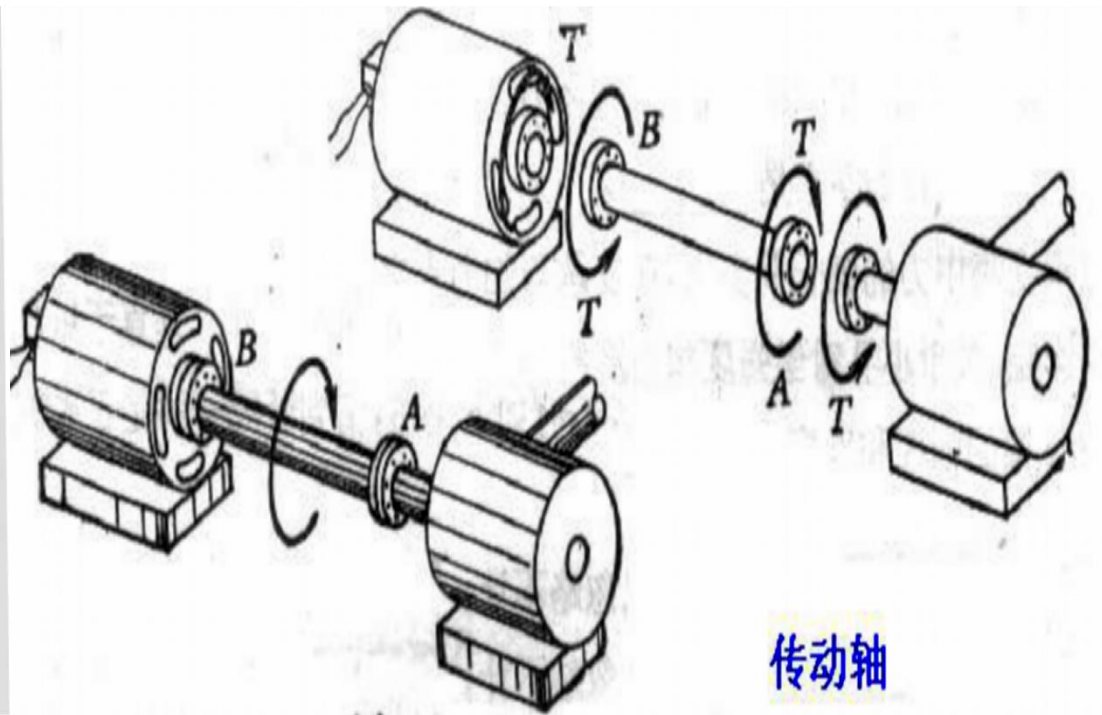


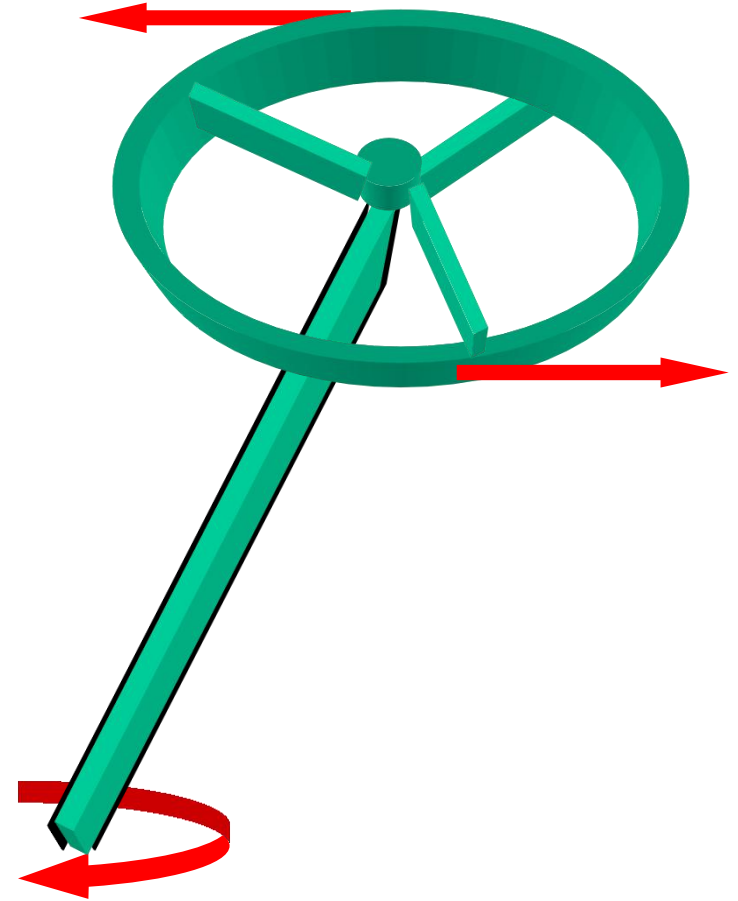
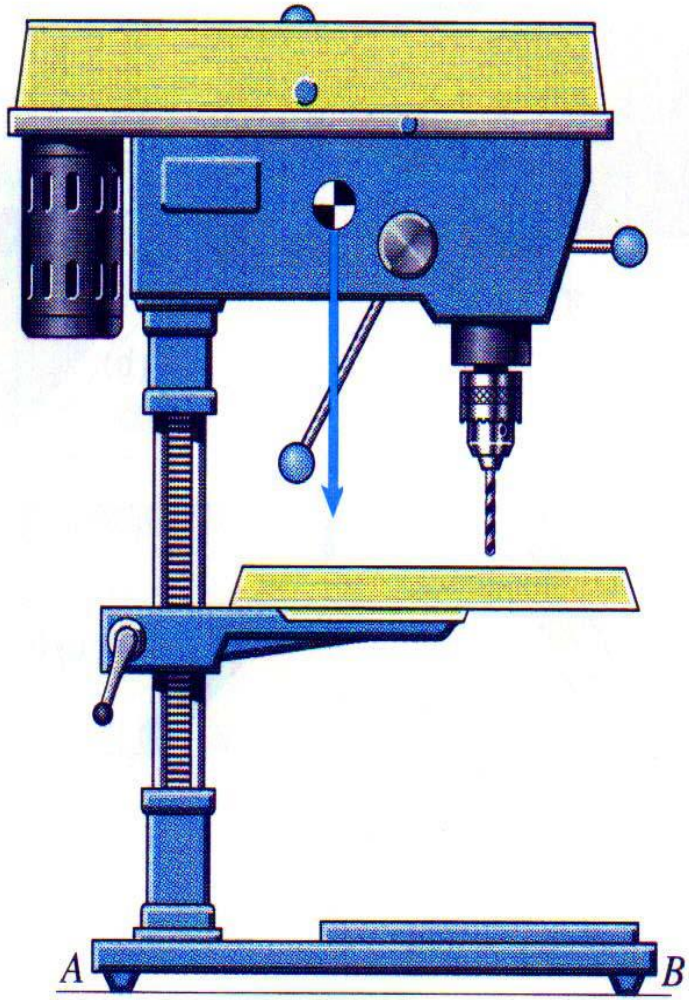
第4章 轴的扭转



4.1 轴扭转的工程实例

一、工程实例(Example problems)



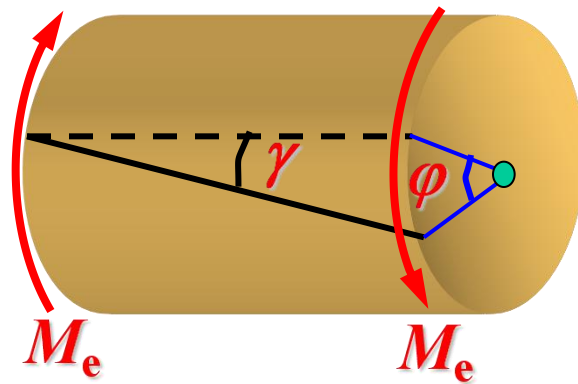


二、受力特点(Character of external force)

杆件的两端作用两个大小相等、方向相反、且作用平面垂直于杆件轴线的力偶。

三、变形特点(Character of deformation)

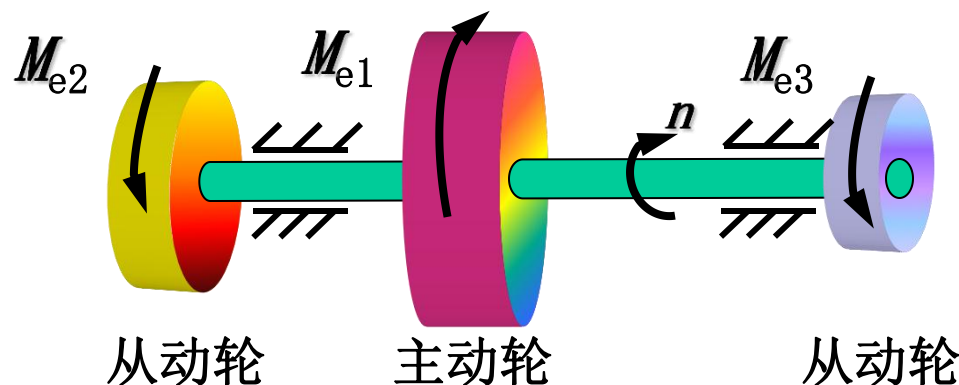
杆件的任意两个横截面都发生绕轴线的相对转动。



4.2 外力偶矩的计算

一、外力偶矩的计算

$$\{M_e\}_{\text{N}\cdot\text{m}} = 9\,549 \frac{\{P\}_{\text{kW}}}{\{n\}_{\text{r/min}}}$$



M_e —作用在轴上的力偶矩(N · m) n —轴的转速(r/min)

P —轴传递的功率(kW)



4.3 扭矩与扭矩图

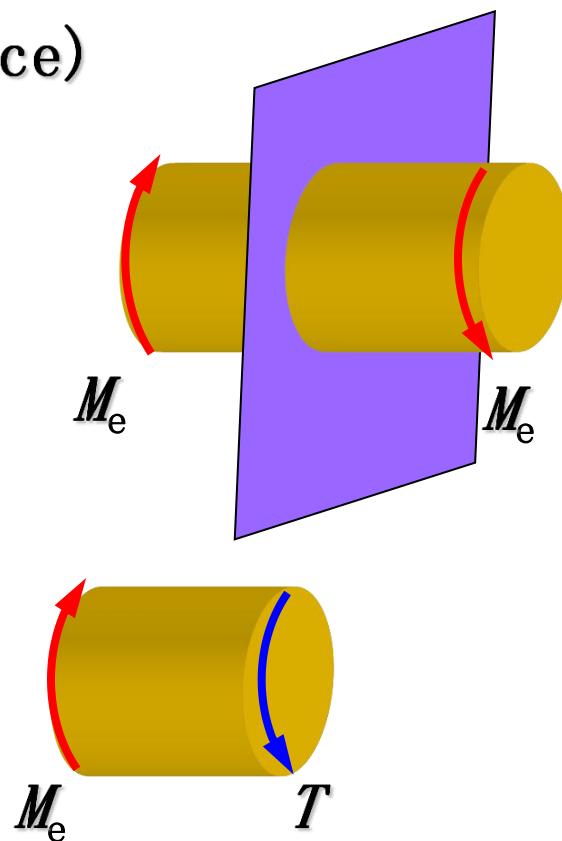
内力的计算 (Calculation of internal force)
for 求内力 (Calculating internal force)

截面法 (Method of sections)

在 $n-n$ 截面处假想将轴截开取
左侧为研究对象

$$\sum M_x = 0$$

$$T = M_e$$



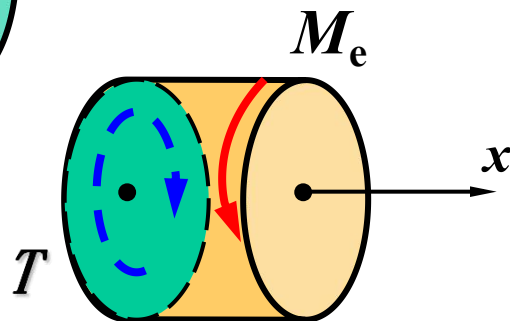
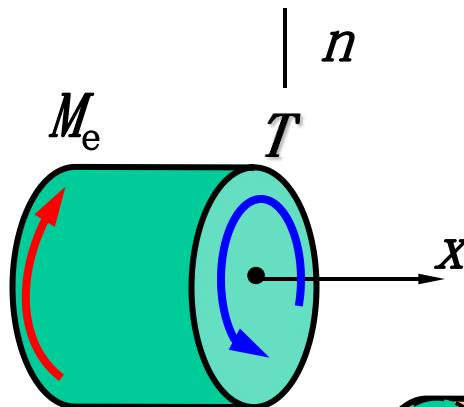
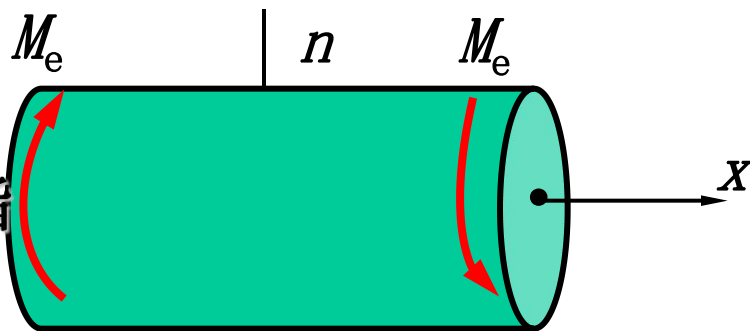
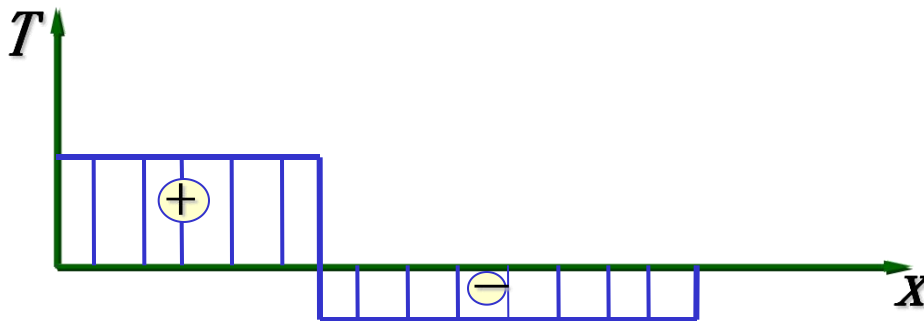
2. 扭矩符号的规定

(Sign convention for torque)

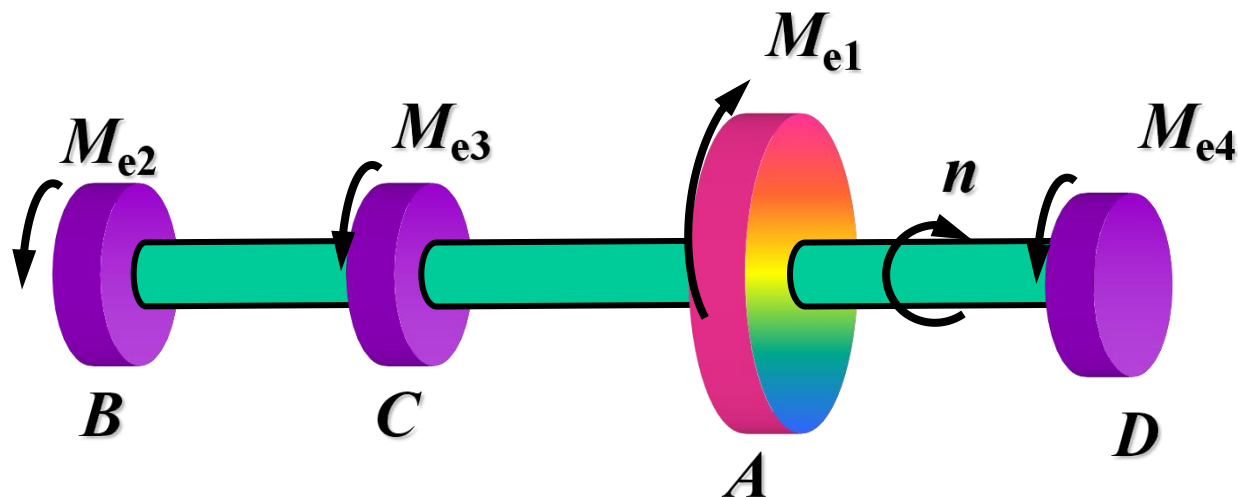
采用右手螺旋法则, 当力偶矩矢的指向背离截面时扭矩为正, 反之为负.

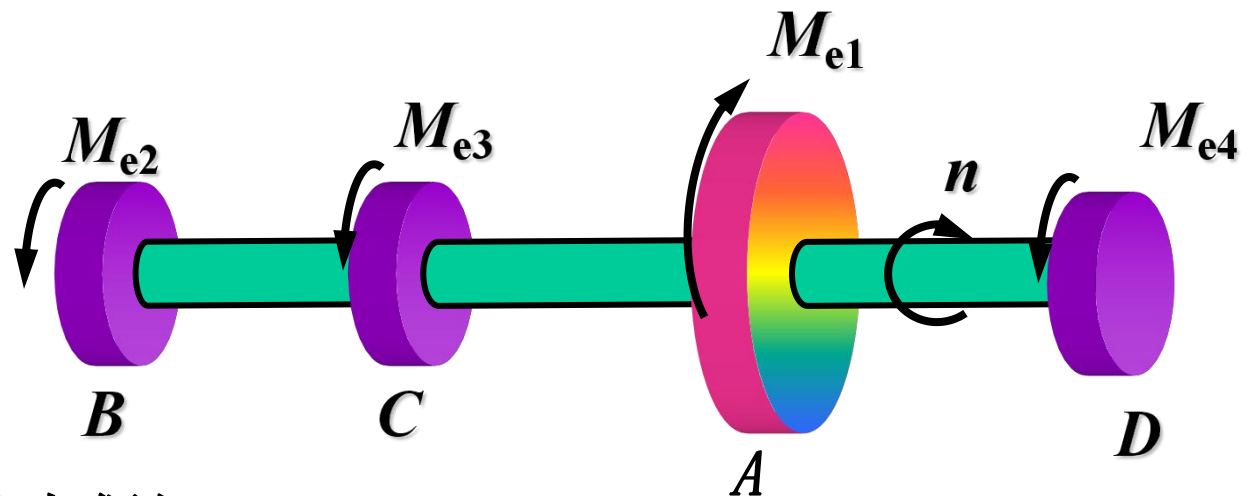
3. 扭矩图(Torque diagram)

用平行于杆轴线的坐标 x 表示横截面的位置; 用垂直于杆轴线的坐标 T 表示横截面上的扭矩, 正的扭矩画在 x 轴上方, 负的扭矩画在 x 轴下方.



例题4-1 一传动轴如图所示, 其转速 $n = 300 \text{ r/min}$, 主动轮 A 输入的功率为 $P_1 = 500 \text{ kW}$. 若不计轴承摩擦所耗的功率, 三个从动轮输出的功率分别为 $P_2 = 150 \text{ kW}$, $P_3 = 150 \text{ kW}$, $P_4 = 200 \text{ kW}$. 试做扭矩图.





解：计算外力偶矩

$$\{M_e\} = 9\,549 \frac{\{P\}_{\text{kw}}}{\{n\}_{\text{r/min}}}$$

$$M_{e1} = 15915 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{e2} = M_{e3} = 4774.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{e4} = 6366 \text{ N} \cdot \text{m}$$



计算 CA 段内任横一截面

2-2 截面上的扭矩. 假设 T_2 为正

值.

由平衡方程

$$\sum M_x = 0$$

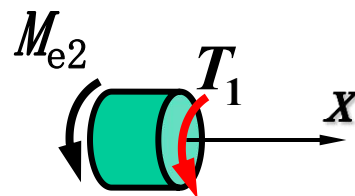
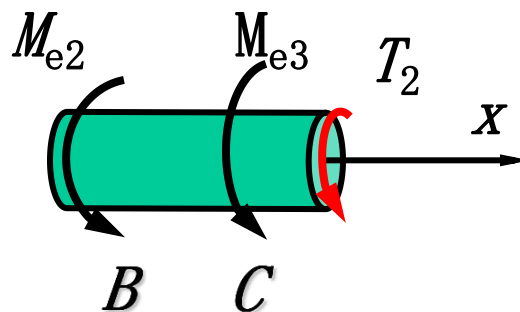
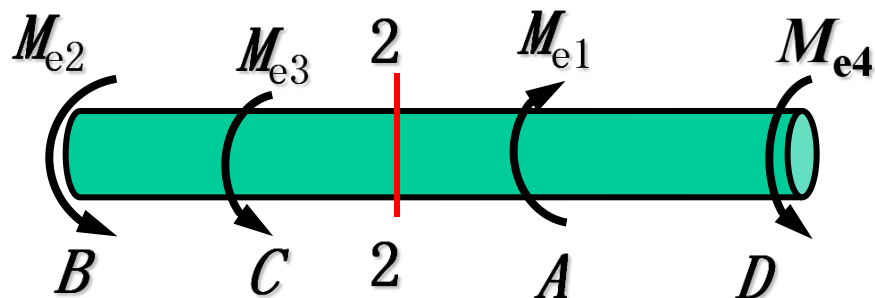
$$M_{e2} + M_{e3} + T_2 = 0$$

$$T_2 = -(M_{e2} + M_{e3}) = -9549 \text{ N} \cdot \text{m}$$

结果为负号, 说明 T_2 应是负值扭矩

同理, 在 BC 段内

$$T_1 = -M_{e2} = -4774.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$



同理, 在 BC 段内

$$T_1 = -M_{e2} = -4774.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

在 AD 段内

$$T_3 = M_{e4} = 6366 \text{ N} \cdot \text{m}$$

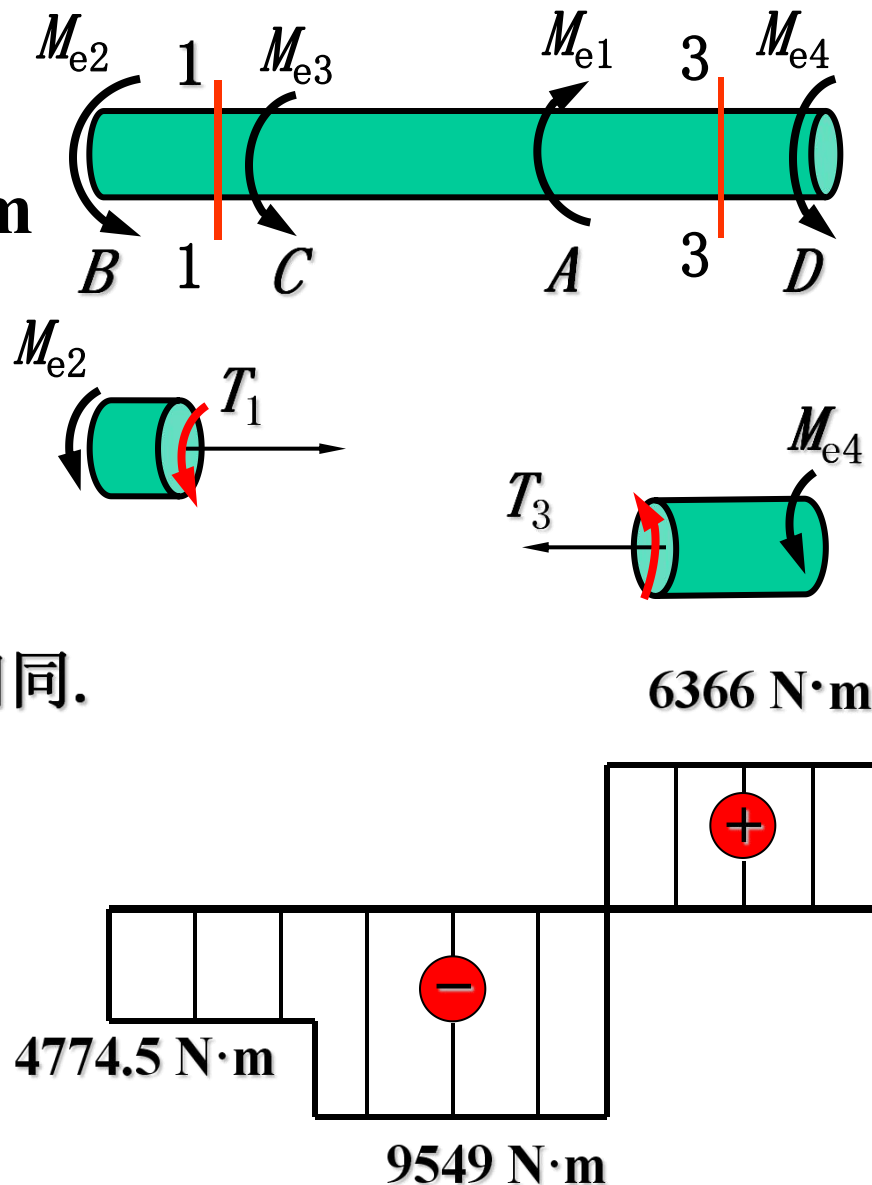
注意: 若假设扭矩为正值,

则扭矩的实际符号与计算符号相同.

作出扭矩图

从图可见, 最大扭矩在 CA 段内.

$$T_{\max} = 9549 \text{ N} \cdot \text{m}$$



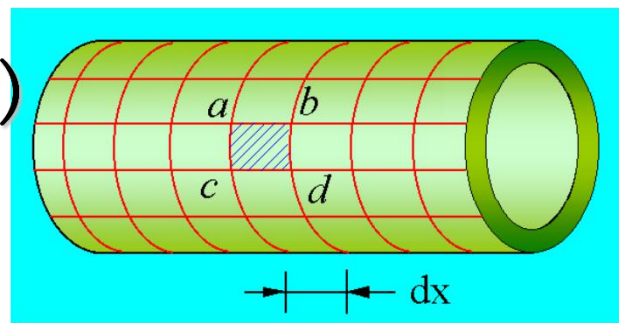
4.4 剪切胡克定律

薄壁圆筒：壁厚 $\delta \leq \frac{1}{10} r_0$ (r_0 —圆筒的平均半径)

一、应力分析 (Analysis of stress)

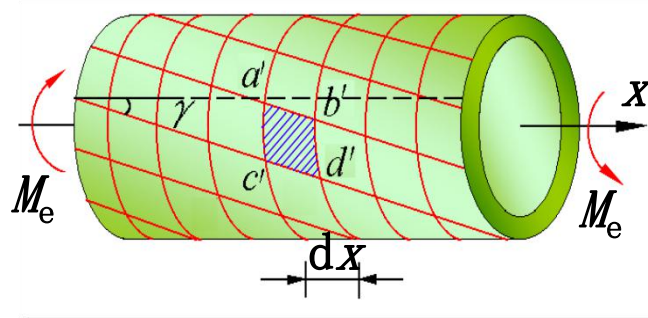
1. 实验前

- (1) 画纵向线, 圆周线;
- (2) 施加一对外力偶.



2. 实验后

- (1) 圆筒表面的各圆周线的形状、大小和间距均未改变，只是绕轴线作了相对转动；
- (2) 各纵向线均倾斜了同一微小角度 γ ；
- (3) 所有矩形网格均歪斜成同样大小的平行四边形。

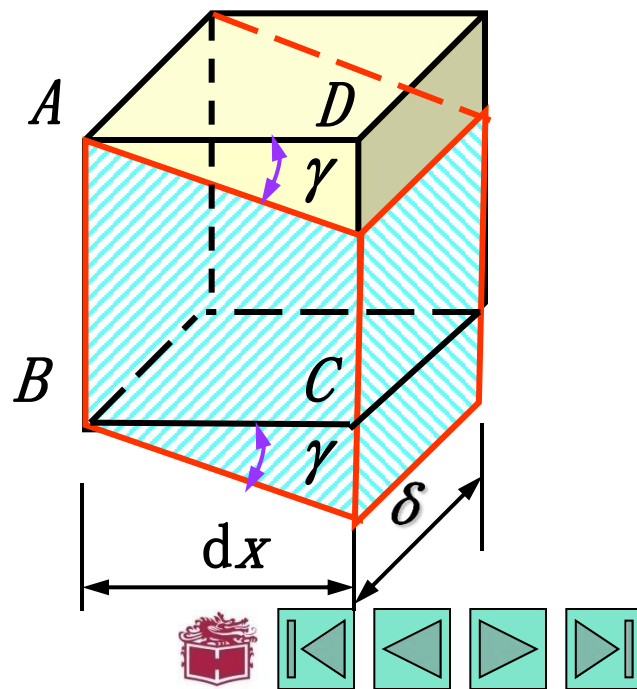
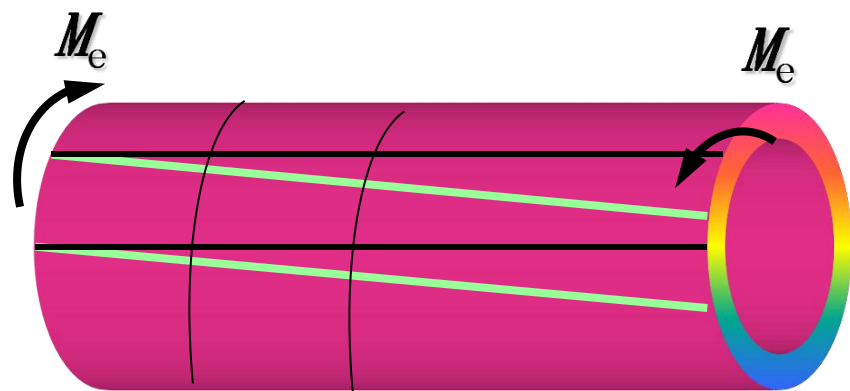


3. 推论(Inference)

(1) 横截面上无正应力，只有切应力；

(2) 切应力方向垂直半径或与圆周相切.

圆周各点处切应力的方向于圆周相切，且数值相等，近似的认为沿壁厚方向各点处切应力的数值无变化.

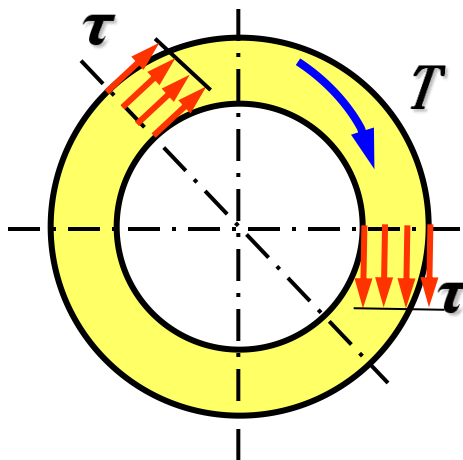


4. 推导公式 (Derivation of formula)

$$\int_A \tau \, dA \cdot r = \tau \cdot r \int_A dA = \tau \cdot r (2\pi \cdot r \cdot \delta) = T$$
$$\tau = \frac{T}{2\pi r^2 \cdot \delta}$$

此式为薄壁圆筒扭转时横截面上切应力的计算公式.

薄壁筒扭转时横截面上的切应力均匀分布, 与半径垂直, 指向与扭矩的转向一致.



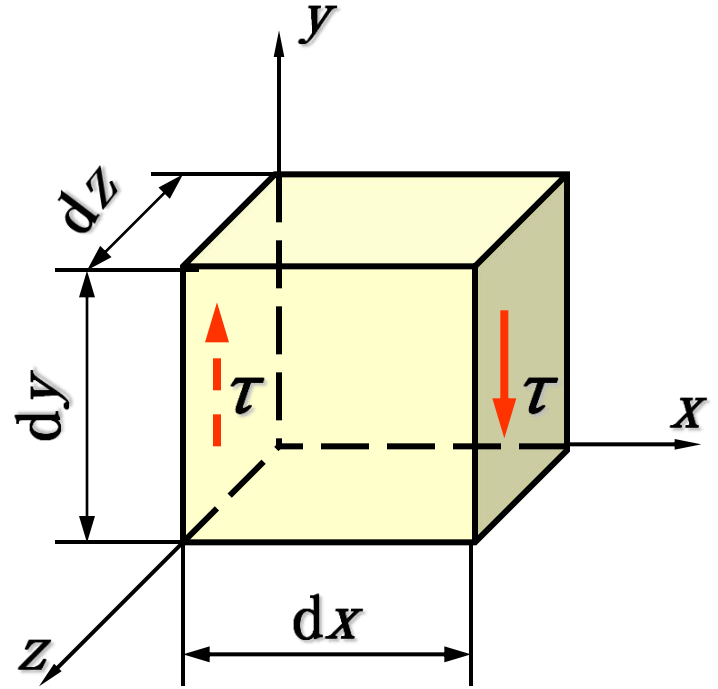
二、切应力互等定理

1. 在单元体左、右面（杆的横截面）只有切应力，
其方向于 y 轴平行.

由平衡方程

$$\sum F_y = 0$$

两侧面的内力元素 $\tau \, dy \, dz$
大小相等, 方向相反, 将组成 一个力偶.
其矩为 $(\tau \, dy \, dz)$
 dx



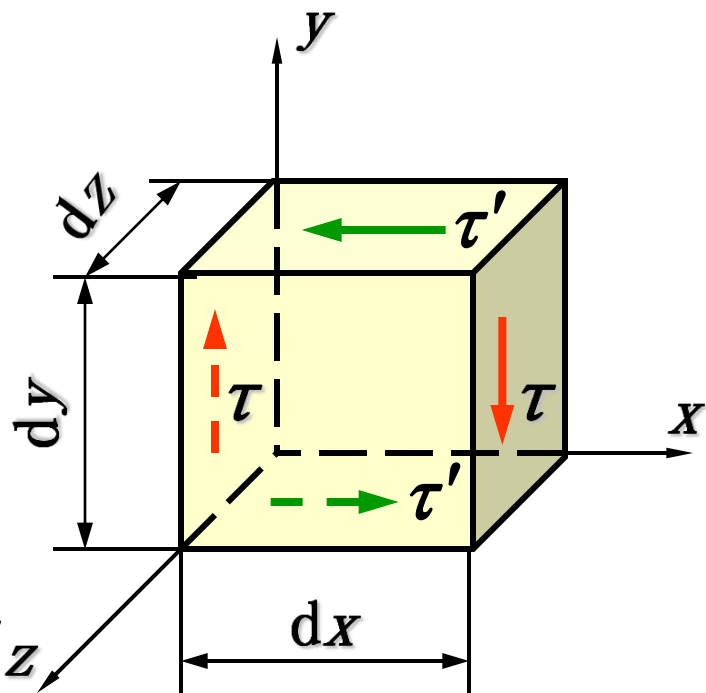
2. 要满足平衡方程

$$\sum M_z = 0 \quad \sum F_x = 0$$

在单元体的上、下两平面上必有大小相等，指向相反的一对内力元素
它们组成力偶，其矩为 $(\tau' dx dy) dz$

此力偶矩与前一力偶矩 $(\tau dy dz) dx$

数量相等而转向相反，从而可得 $\tau' = \tau$



3. 切应力互等定理 (Shearing stress theorem)

单元体两个相互垂直平面上的切应力同时存在, 且大小相等, 都指相 (或背离) 该两平面的交线.

4. 纯剪切单元体 (Element in pure shear)

单元体平面上只有切应力而无正应力, 则称为纯剪切单元体.



三、剪切胡克定律

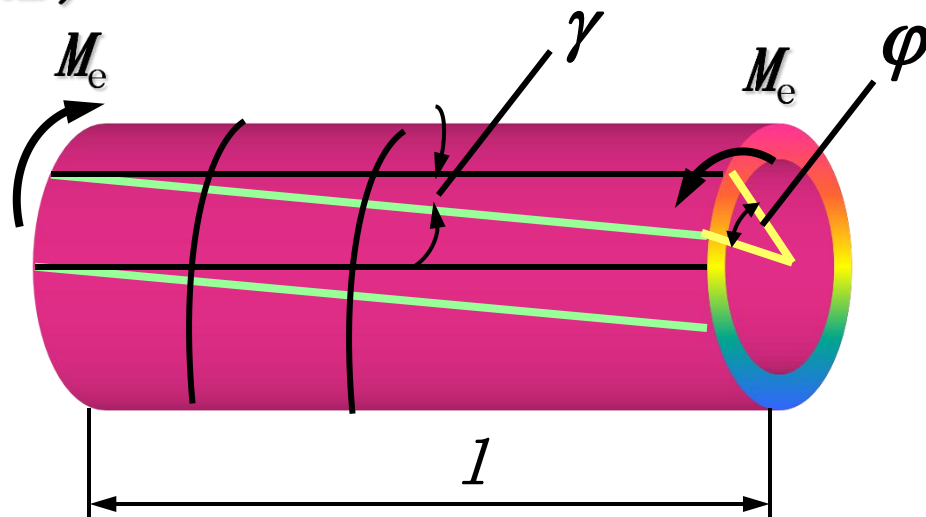
(Hooke's law for shear)

由图所示的几何关系得到

$$\gamma = \frac{r\varphi}{l}$$

式中, r 为薄壁圆筒的外半径.

薄壁圆筒的扭转试验发现, 当外力偶 M_e 在某一范围内时, 与 M_e (在数值上等于 T) 成正比.



$$\tau = \frac{T}{2\pi r^2 \delta} \quad \gamma = \frac{r\varphi}{l}$$

从 T 与 φ 之间的线性关系, 可推出 τ 与 γ 间的线性关系.

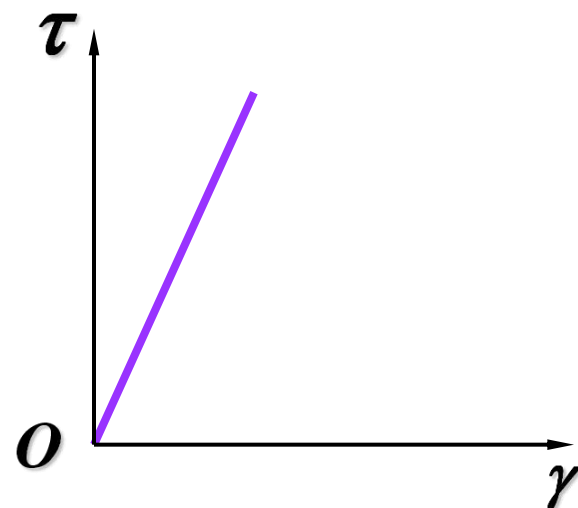
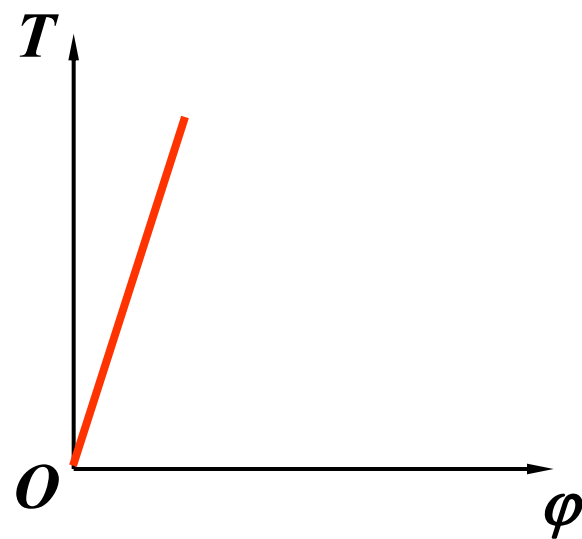
$$\tau = G\gamma$$

该式称为材料的*剪切胡克定律*

(Hooke' s law for shear)

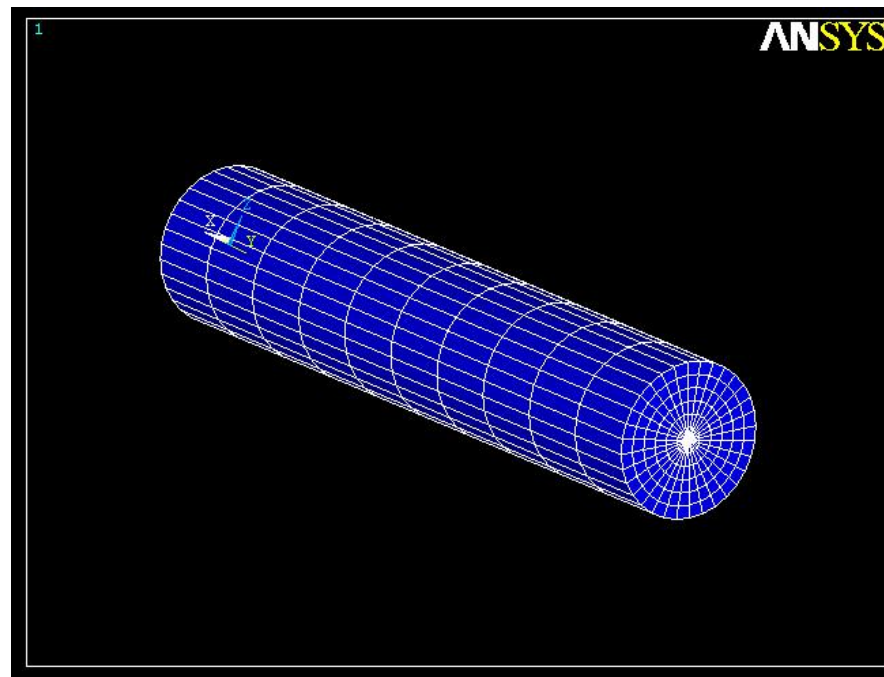
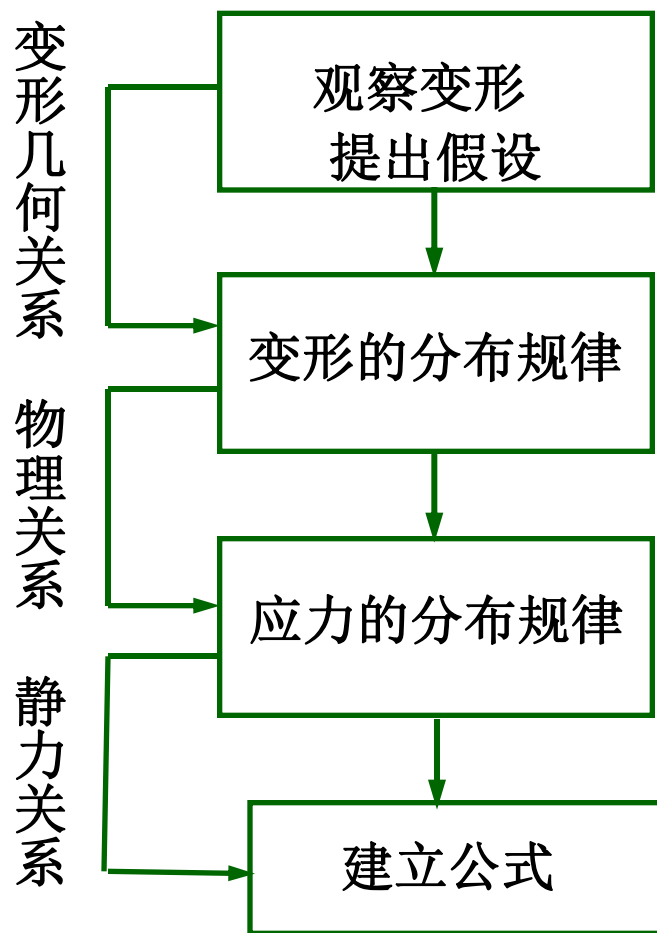
G - 剪切弹性模量

三个弹性常数的关系 $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$



4.5 圆杆扭转切应力与强度设计

应力分析的步骤

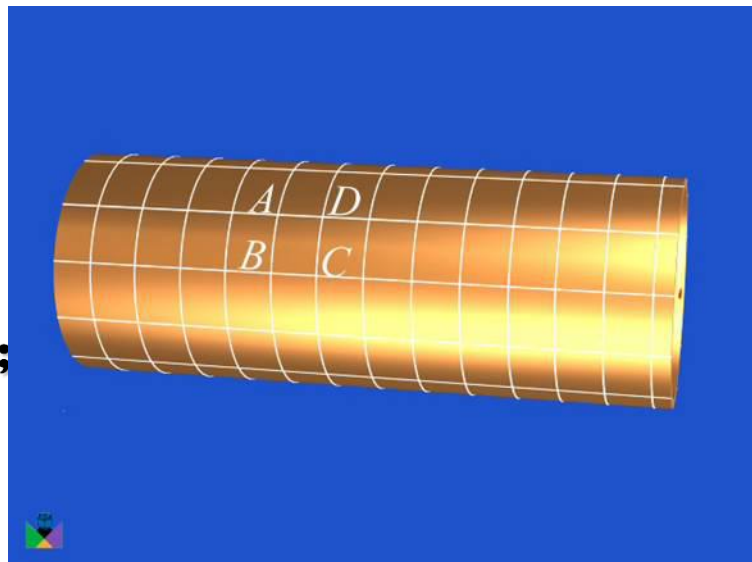


一、变形几何关系 (Geometrical Relationship of Deformation)

1. 变形现象

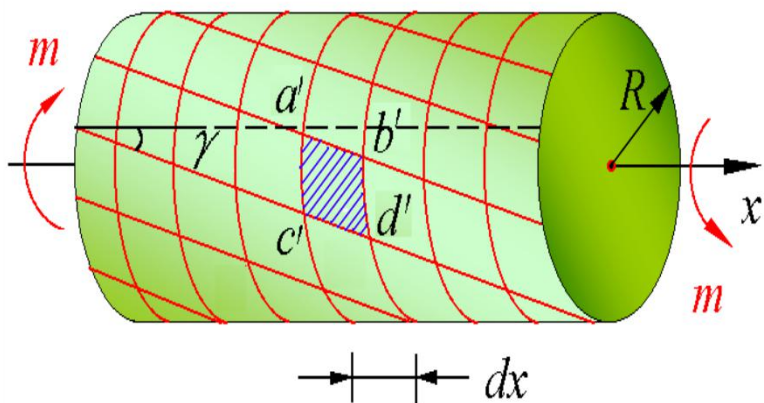
(Deformation phenomenon)

- (1) 轴向线仍为直线, 且长度不变;
- (2) 横截面仍为平面且与轴线垂直;
- (3) 径向线保持为直线, 只是绕轴线旋转.



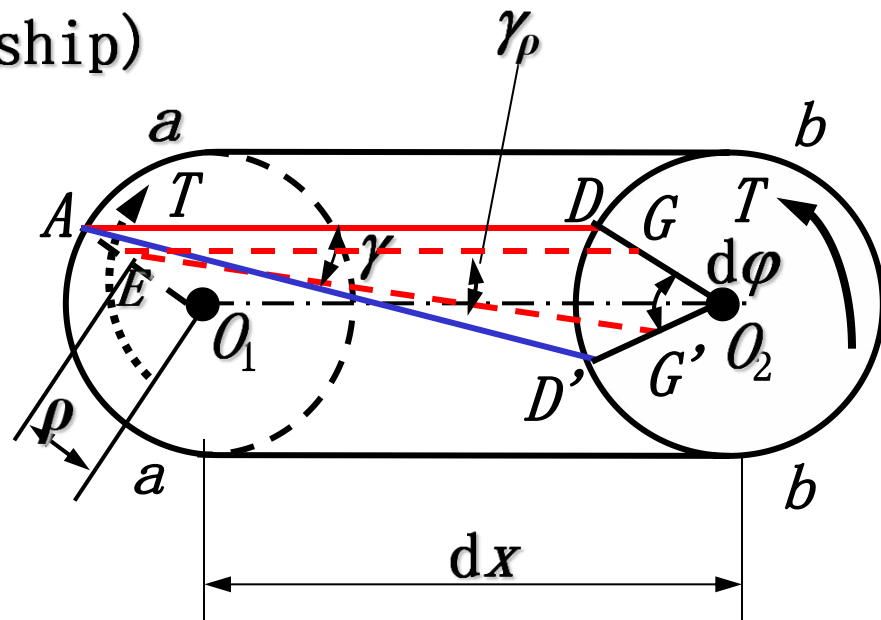
2. 平面假设 (Plane assumption)

变形前为平面的横截面, 变形后仍保持为平面.



3. 几何关系 (Geometrical relationship)

倾角 γ 是横截面圆周上任一点 A 处的切应变, $d\varphi$ 是 $b-b$ 截面相对于 $a-a$ 截面象刚性平面一样绕杆的轴线转动的一个角度.



经过半径 O_2D 上任一点 G 的纵向线 EG 也倾斜了一个角度 γ_ρ , 也就是横截面半径上任一点 E 处的切应变

$$\gamma_\rho \approx \tan \gamma_\rho = \frac{\overline{GG'}}{\overline{EG}} = \frac{\rho d\varphi}{dx}$$

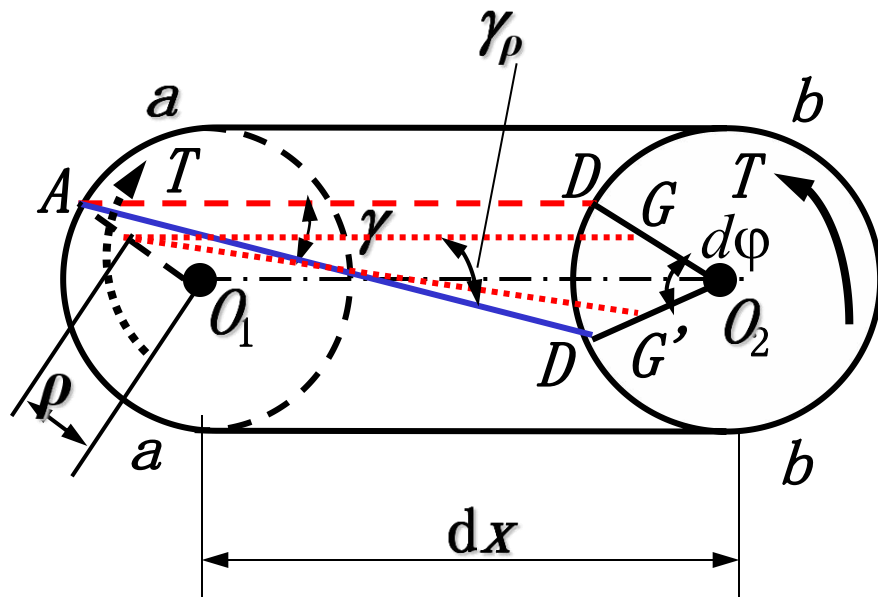


二、 物理关系 (Physical Relationship)

由剪切胡克定律

$$\tau = G\gamma$$

$$\tau_{\rho} = G\gamma_{\rho} = G\rho \frac{d\varphi}{dx}$$



同一圆周上各点切应力 τ_{ρ}
均相同, 且其值与 ρ 成正比, τ_{ρ}
与半径垂直.



三、静力关系 (Static Relationship)

1. 公式的建立 (Establish the formula)

$$\int_A \rho \tau_\rho dA = T$$

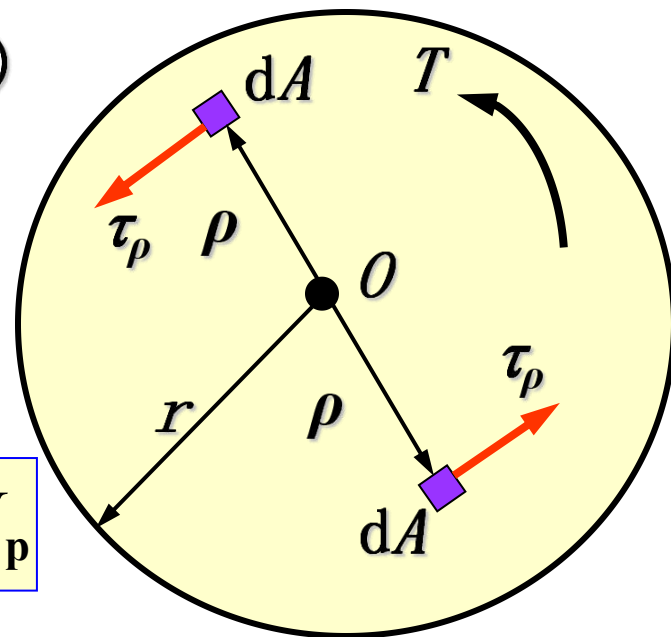
$$\int_A \rho \cdot G \cdot \rho \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot dA = T$$

$$G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA = T$$

$$\int_A \rho^2 dA = I_p$$

结论 $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p}$

代入物理关系中得到 $\tau_\rho = \frac{T\rho}{I_p}$



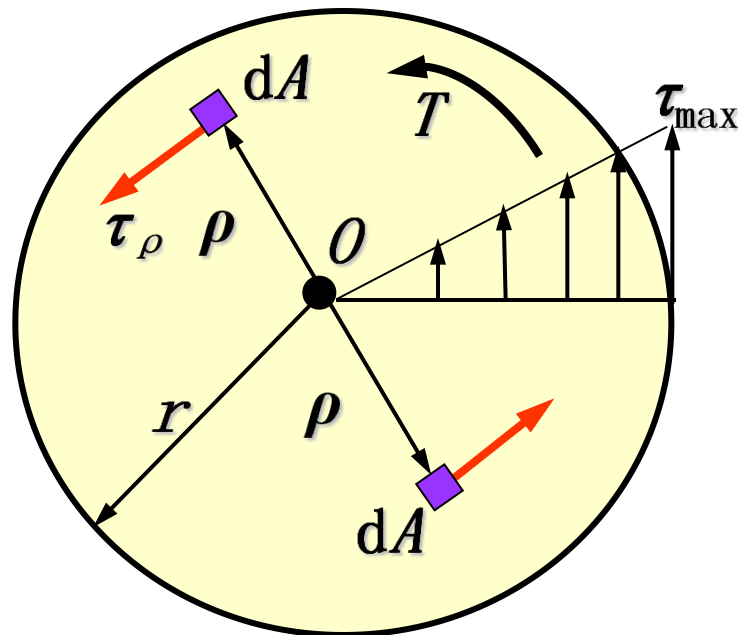
式中： T — 横截面上的扭矩
 ρ — 求应力的点到圆心的距离
 I_p — 横截面对圆心的极惯性矩



2. τ_{\max} 的计算 (Calculation of τ_{\max})

$$\tau_{\max} = \frac{T\rho_{\max}}{I_p} = \frac{T}{\frac{I_p}{\rho_{\max}}} = \frac{T}{W_t}$$

$$W_t = \frac{I_p}{\rho_{\max}}$$



W_t 称作抗扭截面系数，单位为 mm^3 或 m^3 。



3. 极惯性矩和抗扭截面系数的计算 (calculating the polar moment of inertia & section modulus under torsion)

(1) 实心圆截面

$$dA = 2\pi\rho(d\rho)$$

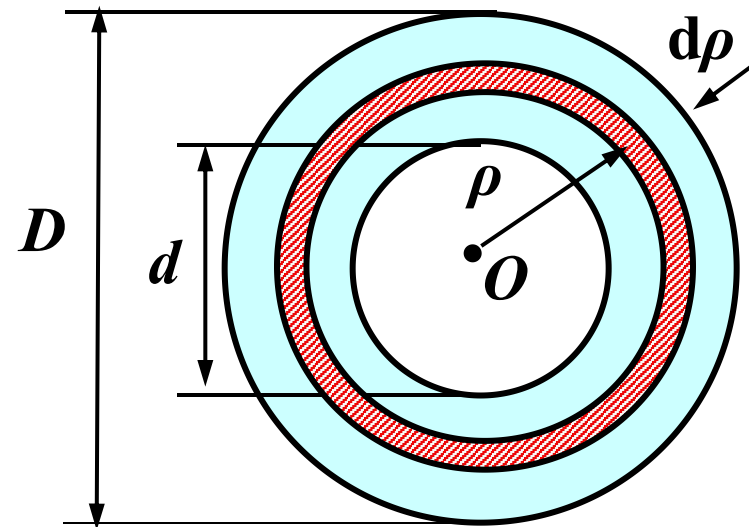
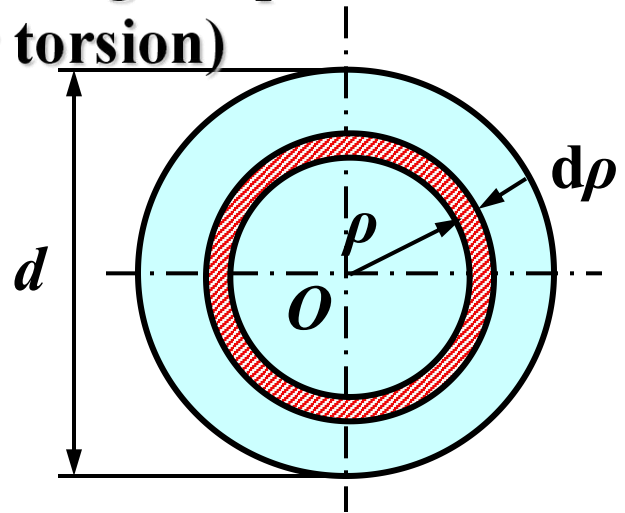
$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$W_t = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{\pi d^4 / 32}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16}$$

(2) 空心圆截面

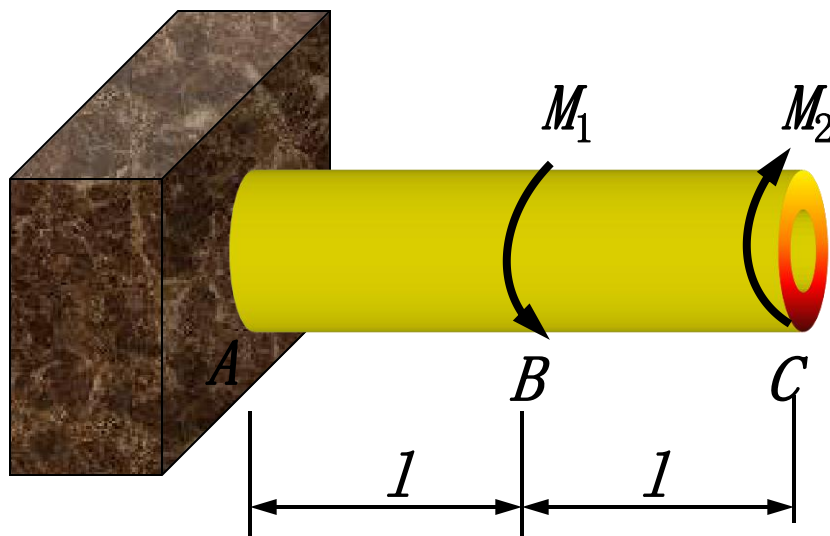
$$I_p = \frac{\pi D^4 (1 - \alpha^4)}{32} \quad \text{其中} \quad \alpha = \frac{d}{D}$$

$$W_t = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$$



例题4-2 图示空心圆轴外径 $D=100\text{mm}$, 内径 $d=80\text{mm}$,
 $M_1=6\text{kN} \cdot \text{m}$, $M_2=4\text{kN} \cdot \text{m}$, 材料的切变模量 $G=80\text{GPa}$.

- (1) 画轴的扭矩图;
- (2) 求轴的最大切应力, 并指出其位置.



解：（1）画轴的扭矩图

*BC*段 $T_1 + M_{e2} = 0$

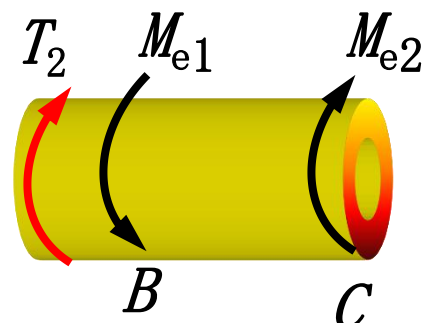
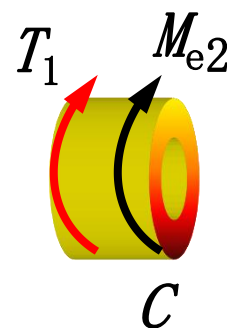
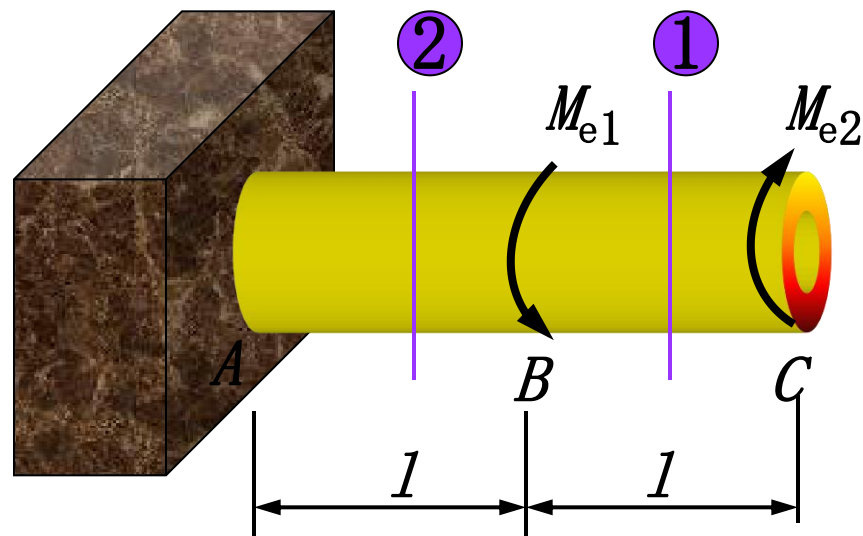
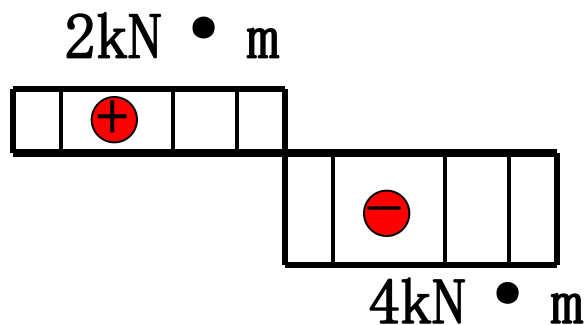
$$T_1 = -4\text{kN} \cdot \text{m} \quad (-)$$

*AB*段 $T_2 + M_{e2} - M_{e1} = 0$

$$T_2 = 2\text{kN} \cdot \text{m} \quad (+)$$

最大扭矩发生在*BC*段

$$T_{\max} = 4\text{kN} \cdot \text{m}$$

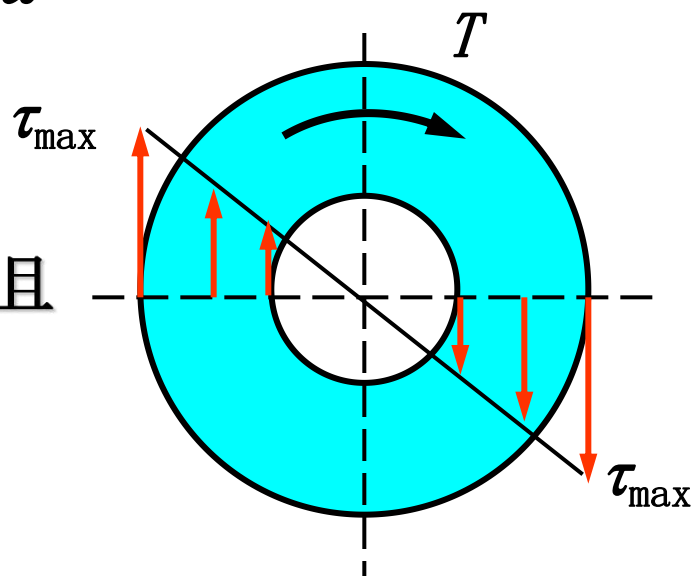
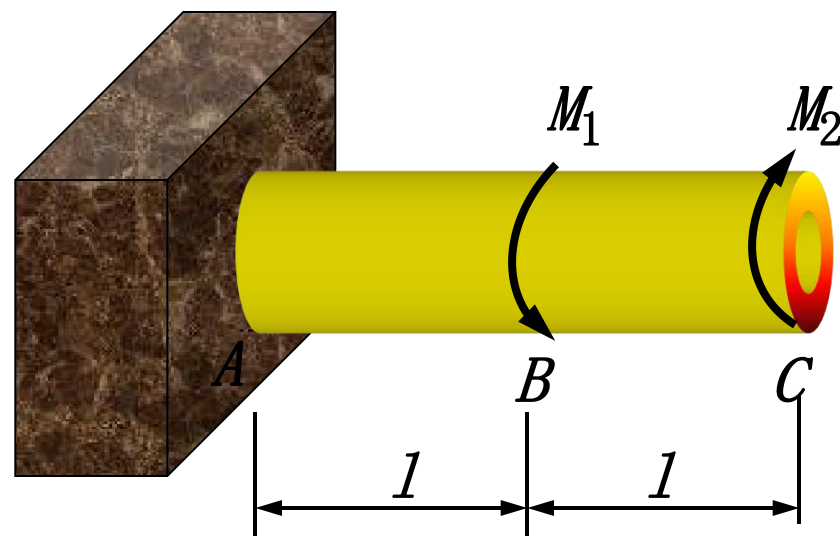


(2) 求轴的最大切应力,
并指出其位置

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t}$$

$$= \frac{T_{\max}}{\frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)} = 34.5\text{MPa}$$

最大切应力发生在截面的周边上, 且
垂直于半径.



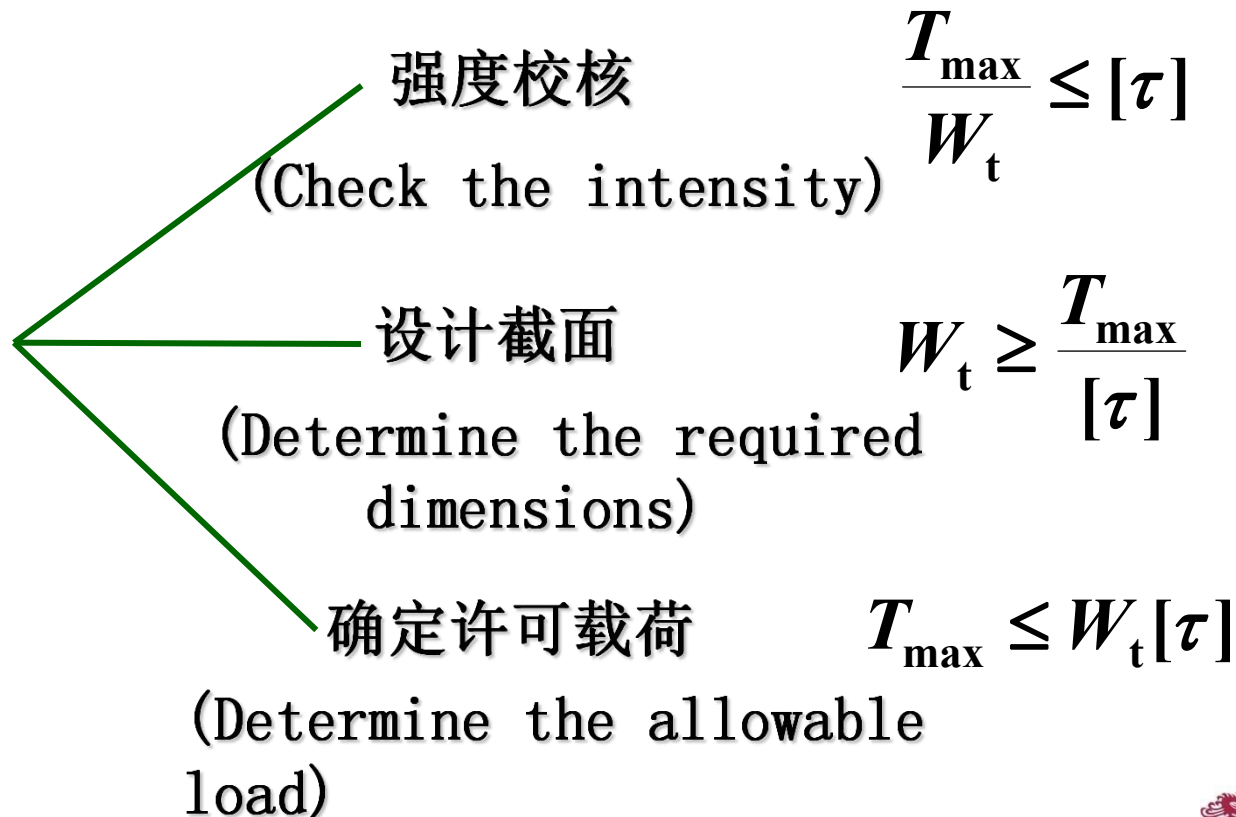
四、强度条件 (Strength Condition)

1. 数学表达式

(Mathematical formula)

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} \leq [\tau]$$

2. 强度条件的应用 (Application of strength condition)



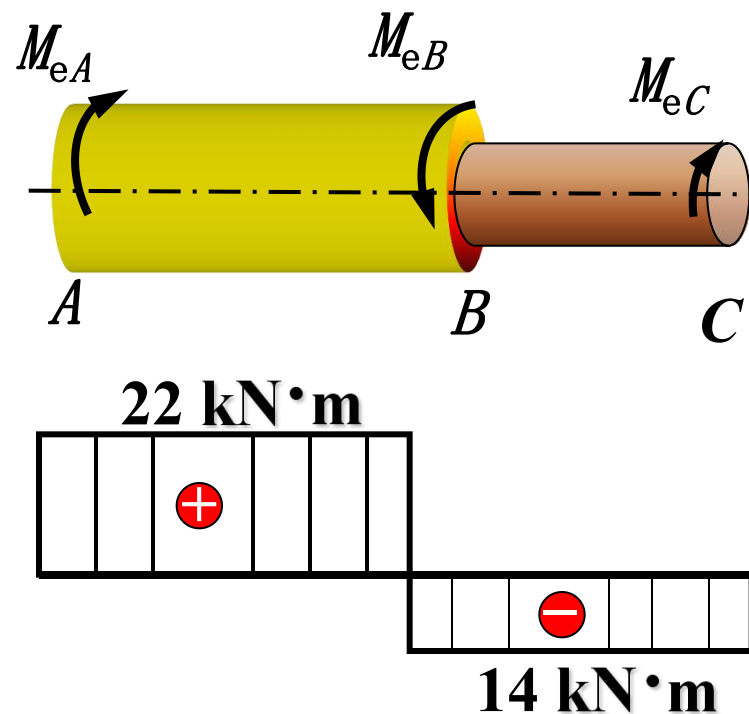
例题4-3 图示阶梯圆轴, AB 段的直径 $d_1=120\text{mm}$, BC 段的直径 $d_2=100\text{mm}$. 扭转力偶矩为 $M_A = 22 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_B = 36 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_C = 14 \text{ kN} \cdot \text{m}$. 已知材料的许用切应力 $[\tau] = 80\text{MPa}$, 试校核该轴的强度.

解: 作轴的扭矩图

分别校核两段轴的强度

$$\begin{aligned}\tau_{1\max} &= \frac{T_1}{W_{t1}} = \frac{T_1}{\pi d_1^3 / 16} = \frac{22 \times 10^3}{\pi (0.12^3) / 16} \\ &= 64.84 \text{MPa} < [\tau]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{2\max} &= \frac{T_2}{W_{t2}} = \frac{T_2}{\pi d_2^3 / 16} = \frac{14 \times 10^3}{\pi (0.1^3) / 16} \\ &= 71.3 \text{MPa} < [\tau]\end{aligned}$$



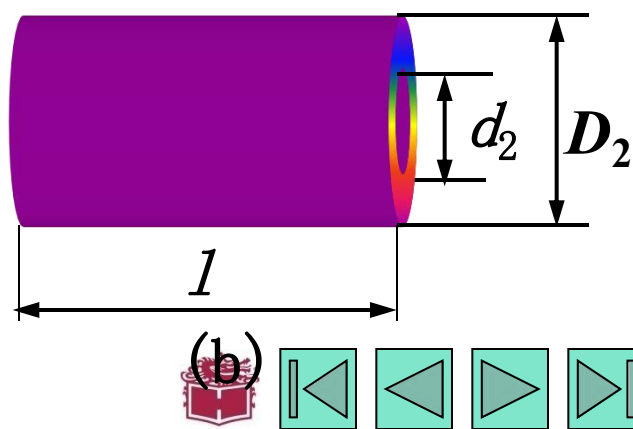
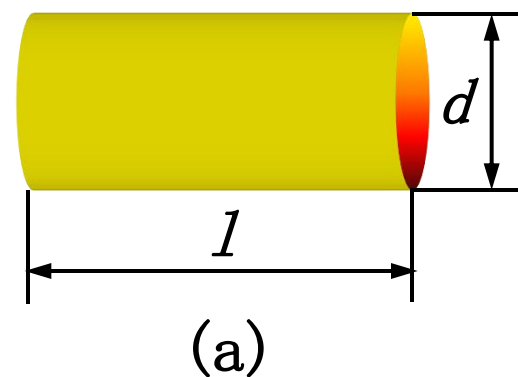
因此, 该轴满足强度要求.

例題4-4 實心圓軸1和空心圓軸2（圖a、b）材料, 扭轉力偶矩 M 和長度 l 均相等, 最大切應力也相等. 若空心圓軸的內外徑之比 $\alpha = 0.8$, 試求空心圓截面的外徑和實心圓截面直徑之比及兩軸的重量比.

分析: 設實心圓截面直徑為 d_1 , 空心圓截面的內、外徑分別為 d_2 、 D_2 ; 又扭轉力偶矩相等, 則兩軸的扭矩也相等, 設為 T .

已知: $\tau_{\max 1} = \tau_{\max 2}$

$$\tau_{\max 1} = \frac{T}{W_{t1}} \quad \tau_{\max 2} = \frac{T}{W_{t2}}$$



$$\frac{T}{W_{t1}} = \frac{T}{W_{t2}} \quad W_{t1} = W_{t2} = \frac{\pi d_1^3}{16} = \frac{\pi D_2^3(1-\alpha^4)}{16}$$

因此

$$\frac{\pi d_1^3}{16} = \frac{\pi D_2^3(1-\alpha^4)}{16}$$

解得

$$\frac{D_2}{d_1} = \sqrt[3]{\frac{1}{1-0.8^4}} = 1.194$$

两轴材料、长度均相同, 故两轴的重量比等于两轴的横截面面积之比

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{\pi}{4}(D_2^2 - d_2^2)}{\frac{\pi}{4}d_1^2} = \frac{D_2^2(1-\alpha^2)}{d_1^2} = 1.194^2(1-0.8^2) = 0.512$$

在最大切应力相等的情况下空心圆轴比实心圆轴轻, 即节省材料.



4.6 圆轴扭转变形与刚度条件

一、扭转变形 (Torsional deformation)

1. 圆轴扭转时的变形是用相对扭转角 φ 来度量的

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p}$$

其中 $d\varphi$ 代表相距为 dx 的两横截面间的相对扭转角.

长为 l 的一段杆两端面间的相对扭转角 φ 可按下式计算

$$\varphi = \int_l d\varphi = \int_l \frac{T}{GI_p} dx$$



$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p} \quad \begin{array}{l} \varphi \text{—扭转角} \\ GI_p \text{ 称作抗扭刚度} \end{array}$$

2. 单位长度扭转角 (Angle of twist per unit length)

$$\varphi' = \frac{\varphi}{l} = \frac{T}{GI_p} \quad (\text{rad/m})$$

3. 刚度条件 (Stiffness condition)

$$\varphi'_{\max} \leq [\varphi']$$

$$\varphi'_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_p} \leq [\varphi'] \quad (\text{rad/m})$$

$$\varphi'_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_p} \frac{180}{\pi} \leq [\varphi'] \quad (^\circ/\text{m})$$

$[\varphi']$ 称作许可单位长度扭转角

(Allowable angle of twist per unit length)



例题4-5 图示等直杆, 已知直径 $d=40\text{mm}$, $a=400\text{mm}$, 材料的剪切弹性模量 $G=80\text{GPa}$, $\varphi_{DB}=1^\circ$. 试求:

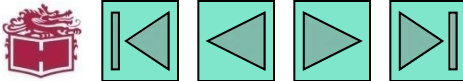
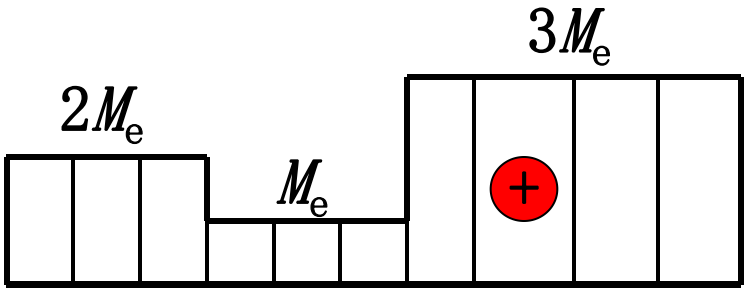
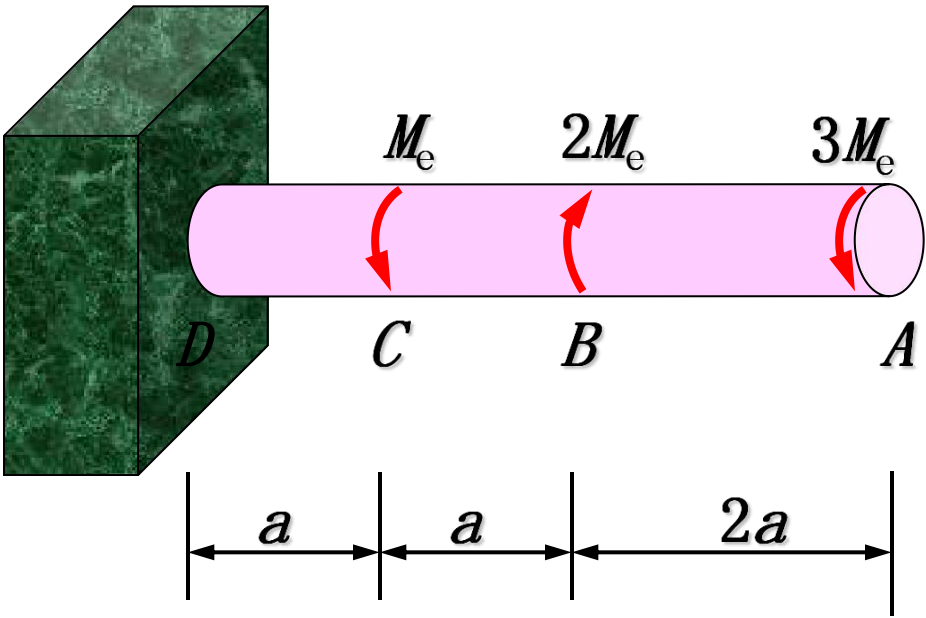
- (1) AD 杆的最大切应力;
- (2) 扭转角 φ_{CA}

解: 画扭矩图

$$T_{\max} = 3M_e$$

计算外力偶矩 M

$$\begin{aligned}
 &\varphi_{DB} = \varphi_{CB} + \varphi_{DC} = 1^\circ \\
 &\left(\frac{M_e a}{GI_p} + \frac{2M_e a}{GI_p} \right) \times \frac{180^\circ}{\pi} = 1
 \end{aligned}$$



$$M_e = 292 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

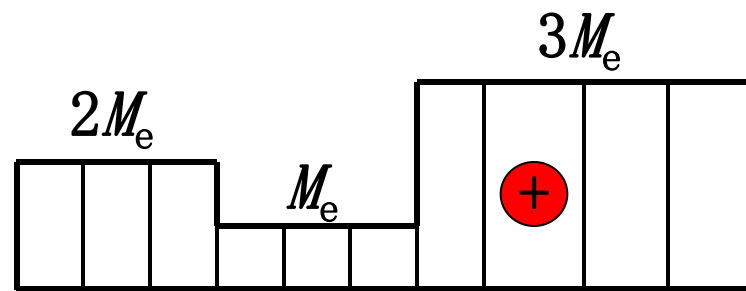
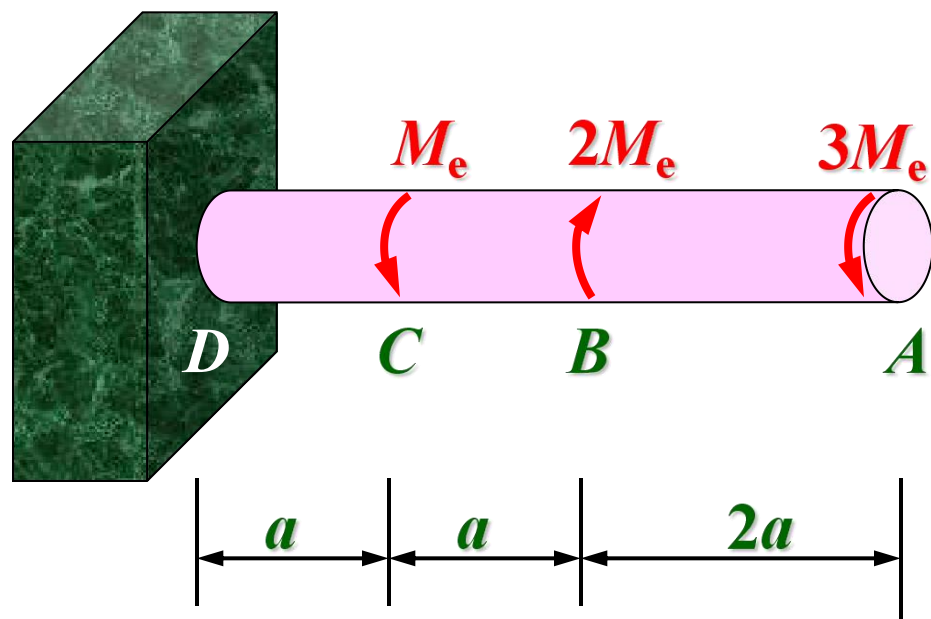
(1) AD 杆的最大切应力

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} = 69.7 \text{ MPa}$$

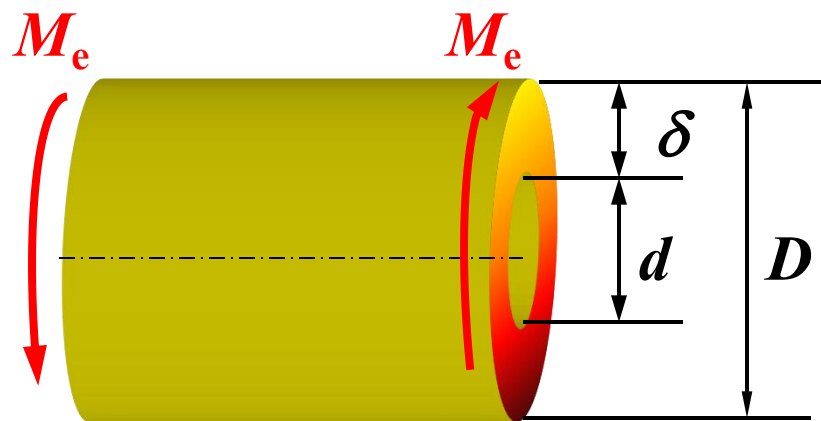
(2) 扭转角 φ_{CA}

$$\varphi_{CA} = \varphi_{BA} + \varphi_{CB} =$$

$$\left(\frac{3M_e \cdot 2a}{GI_p} + \frac{M_e \cdot a}{GI_p} \right) \times \frac{180^\circ}{\pi} = 2.33^\circ$$



例题4-6 某汽车的主传动轴 是用 40 号钢的电焊钢管制成, 钢管
外径 $D=76\text{mm}$, 壁厚 $\delta=2.5\text{mm}$, 轴传递的转矩 $M_e=1.98\text{kN}\cdot\text{m}$,
材料的许用切应力 $[\tau] = 100\text{MPa}$, 切变模量为 $G = 80\text{GPa}$,
轴的许可扭角 $[\varphi'] = 2^\circ/\text{m}$. 试校核轴的强度和刚度.



解：轴的扭矩等于轴传递的转矩

$$T = M_e = 1.98 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

轴的内、外径之比

$$\alpha = \frac{d}{D} = \frac{D - 2\delta}{D} = 0.934$$

$$I_p = \frac{\pi D^4 (1 - \alpha^4)}{32} = 7.83 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

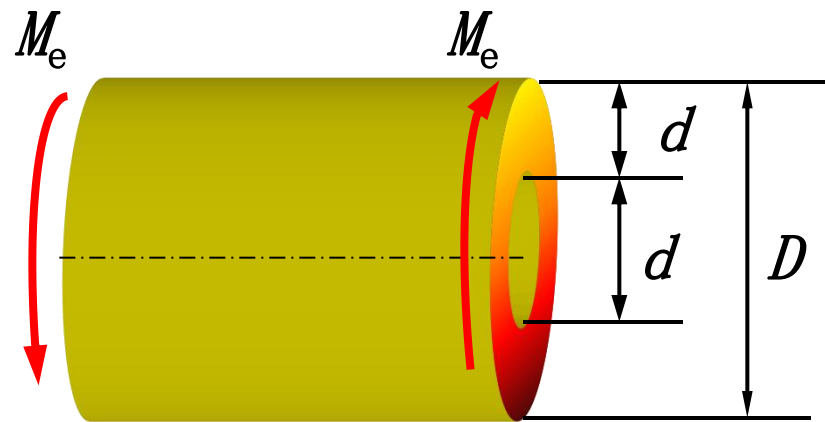
$$W_t = \frac{I_p}{D/2} = 2.06 \times 10^4 \text{ mm}^3$$

由强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} = 96.1 \text{ MPa} < [\tau]$$

由刚度条件

$$\varphi_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_p} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 1.81^\circ / \text{m} < [\varphi']$$



将空心轴改为同一材料的实心轴, 仍使 $\tau_{\max}=96.1\text{MPa}$

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{\pi d^3 / 16} = 96.1\text{MPa}$$

实心轴的直径为 $d=47.2\text{mm}$

其截面面积为

$$A_{\text{实}} = \frac{\pi d^2}{4} = 1749 \text{ mm}^2$$

空心轴的截面面积为

$$A_{\text{空}} = \frac{\pi(76^2 - 71^2)}{4} = 577\text{mm}^2$$

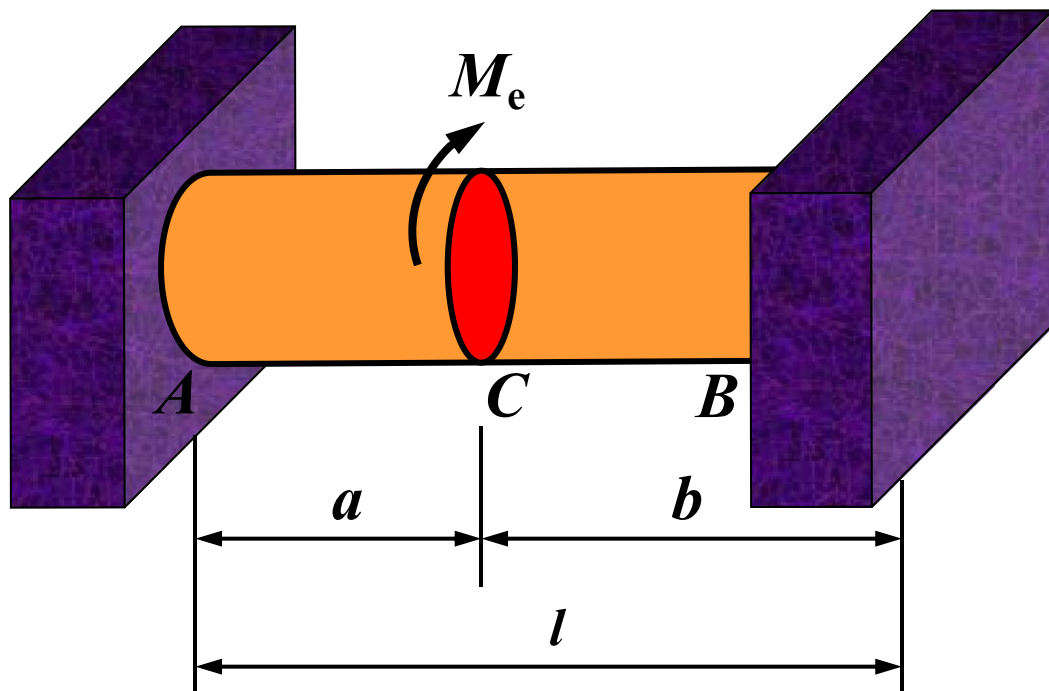
两轴材料、长度均相同, 故两轴重量比等于两轴的横截面积比,

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{577}{1749} = 0.329$$

在最大切应力相等的情况下空心圆轴比实心圆轴轻, 即节省材料.



例题4-7 两端固定的圆截面杆 AB , 在截面 C 处受一个扭转力偶矩 M_e 的作用, 如图所示. 已知杆的抗扭刚度 GI_p , 试求杆两端的支反力偶矩.



解：去掉约束，代之以约束反力偶矩

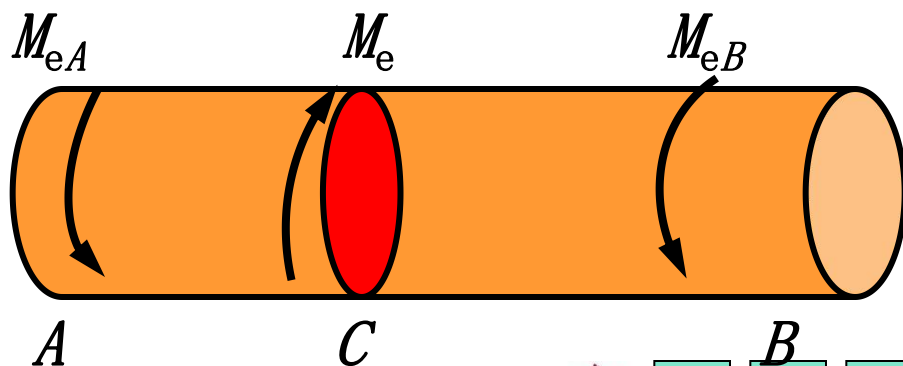
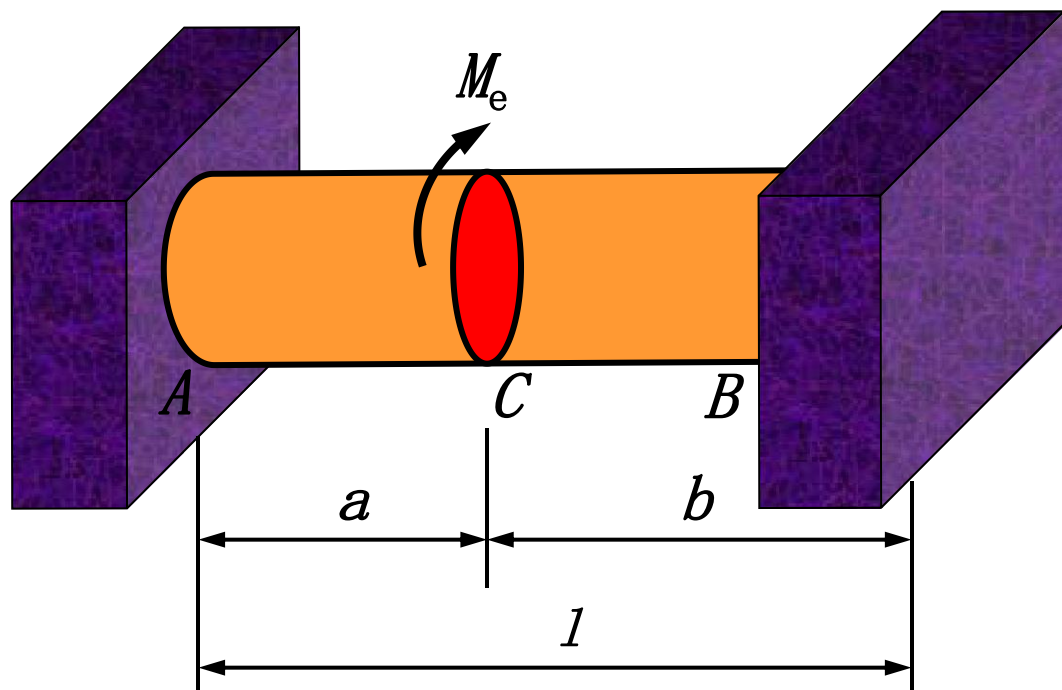
$$\sum M_x = 0$$

$$M_{eA} + M_{eB} - M_e = 0$$

这是一次超静定问题，须
建立一个补充方程

杆的变形相容条件是

C 截面相对于两固定端 A 和
 B 的相对扭转角相等。



(1) 变形几何方程

$$\varphi_{AC} = \varphi_{BC}$$

(2) 由物理关系建立补充方程

$$\varphi_{AC} = \frac{T_1 a}{GI_p} = \frac{M_{eA} a}{GI_p}$$

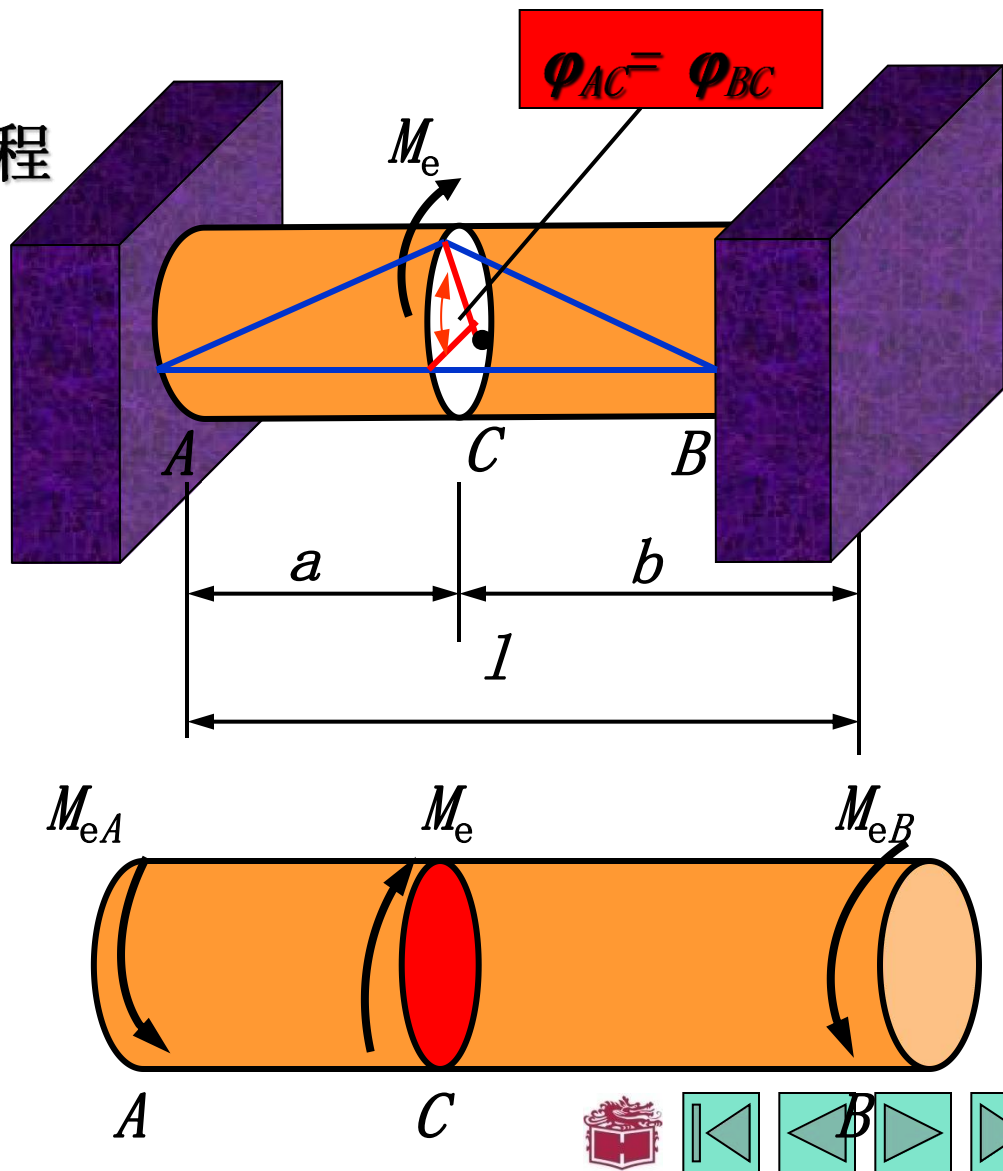
$$\varphi_{BC} = \frac{T_2 b}{GI_p} = \frac{M_{eB} b}{GI_p}$$

$$M_{eB} = \frac{M_{eA} a}{b}$$

$$M_{eA} + M_{eB} - M_e = 0$$

解得 $M_{eA} = Mb / l$

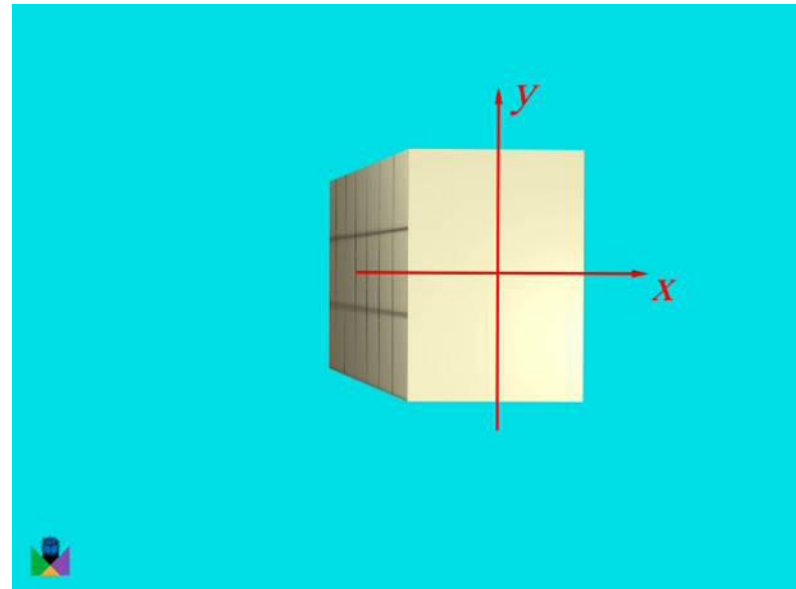
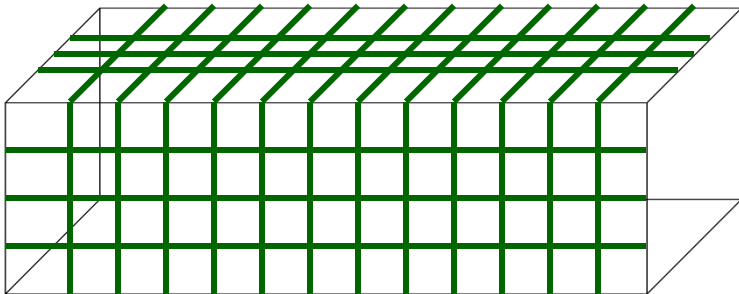
$$M_{eB} = Ma / l$$



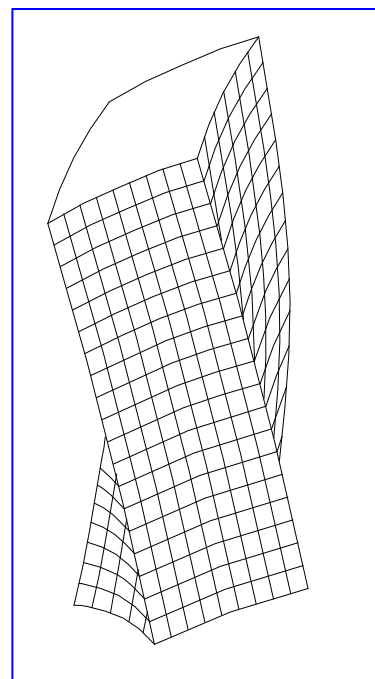
4.7 矩形截面轴扭转

一、基本概念(Basic concepts)

非圆杆, 如矩形截面杆扭转后横截面将发生翘曲(warping) 而不再是平面.



(1) 等直非圆杆在扭转时横截面虽发生翘曲(warping), 但当等直杆在两端受外力偶作用, 且端面可以自由翘曲时, 其相邻两横截面的翘曲程度完全相同. 横截面上仍然只有切应力而没有正应力. 这一情况称为*纯扭转*(pure torsion), 或*自由扭转*(free torsion).



(2) 若杆的两端受到约束而不能自由翘曲, 则相邻两横截面的翘曲程度不同, 这将在横截面上引起附加的正应力. 这一情况称为 *约束扭转*(constraint torsion).



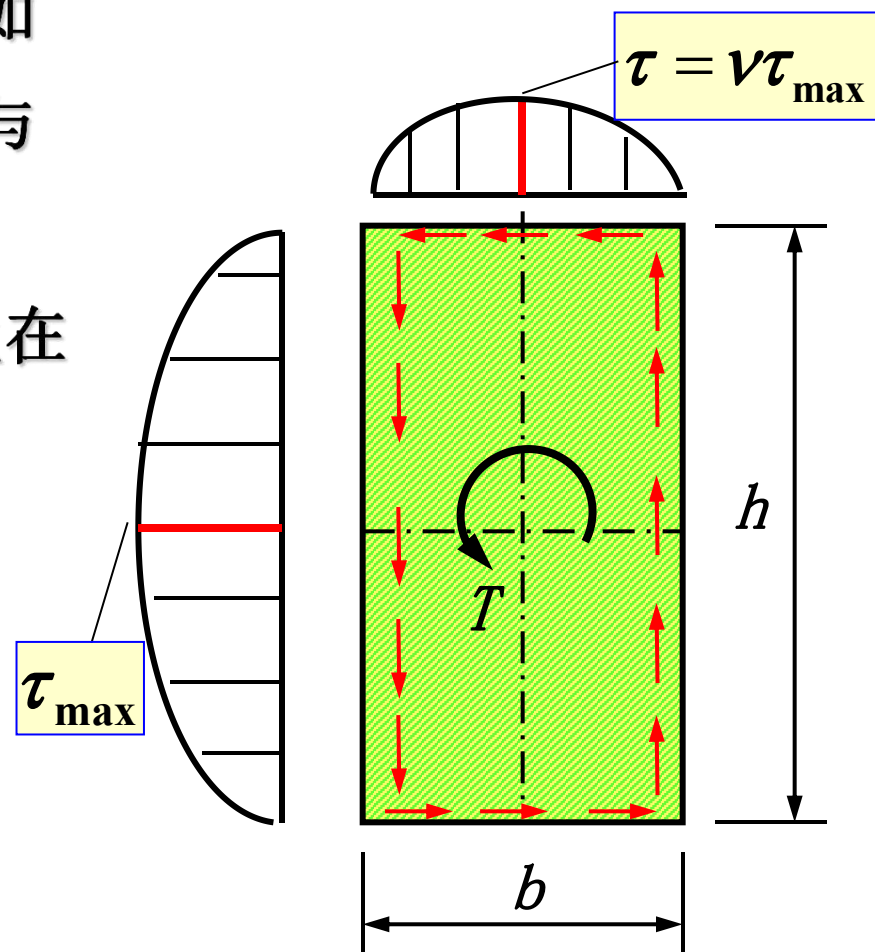
二、矩形截面(Rectangular cross section)

矩形截面扭转时, 横截面切应力如图所示, 边缘上各点的切应力形成与边界相切的顺流.

整个横截面上的最大切应力发生在长边的中点.

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} \quad W_t = \alpha h b^2$$
$$\varphi = \frac{Tl}{GI_t} \quad I_t = \beta h b^3$$

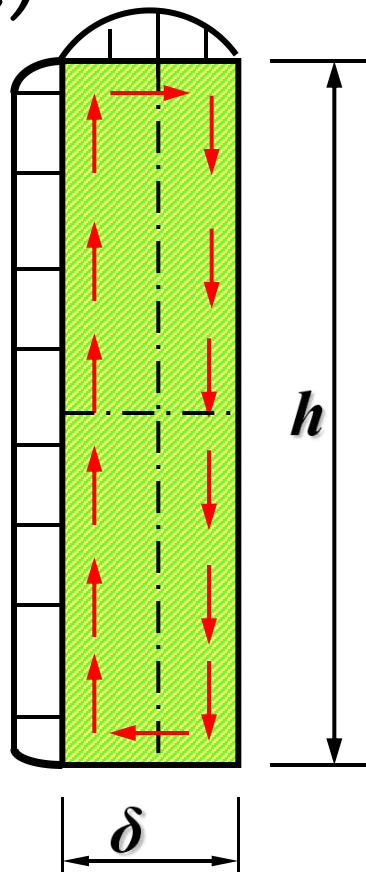
短边中点的切应力 τ 是短边上的最大切应力, 且 $\tau = \nu \tau_{\max}$



三、狭长矩形 (Long narrow rectangle)

狭长矩形截面上切应力的分布情况见图

切应力在沿长边各点处的方向均与长边相切其数值除在靠近顶点处以外均相等.



狭长矩形截面的 I_t 和 W_t

$$I_t = \frac{1}{3} h \delta^3 \quad W_t = \frac{1}{3} h \delta^2$$

表4-1 矩形截面杆在纯扭转时的系数 α β ν

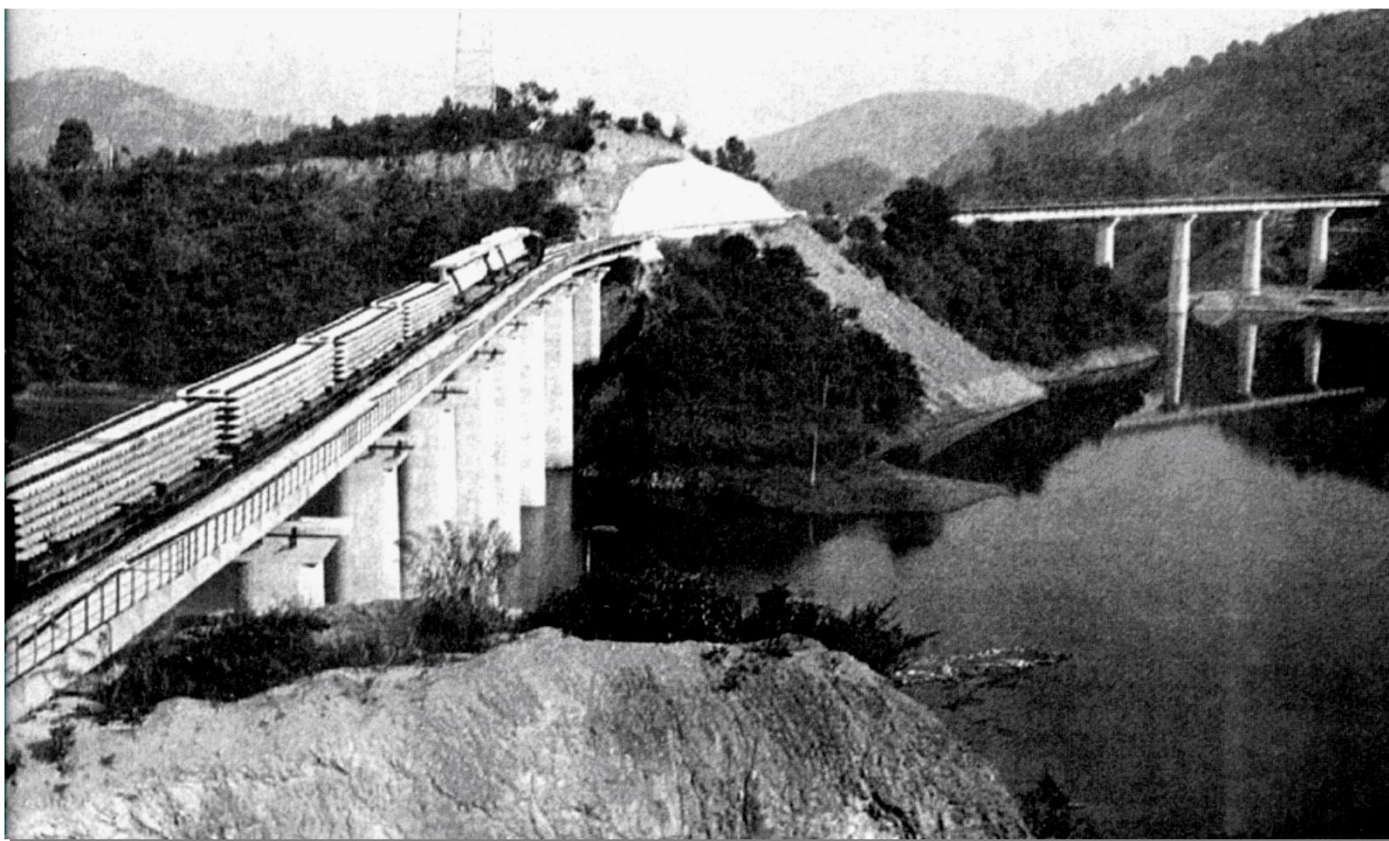
h/b	1.0	1.2	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	6.0	8.0	10.0	∞
α	0.208	0.219	0.231	0.246	0.256	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
β	0.141	0.166	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333
ν	1.000	0.930	0.858	0.796	0.767	0.753	0.745	0.743	0.743	0.743	0.743

第5章 梁的弯曲



5.1 梁弯曲的工程实例

一、工程实例 (Example problem)





二、基本概念(Basic concepts)

1. 弯曲变形(Deflection)

(1) 受力特征

外力（包括力偶）的作用线垂直于杆轴线.

(2) 变形特征

变形前为直线的轴线, 变形后成为曲线.

2. 梁 (Beam)

以弯曲变形为主的杆件

3. 平面弯曲(Plane bending)

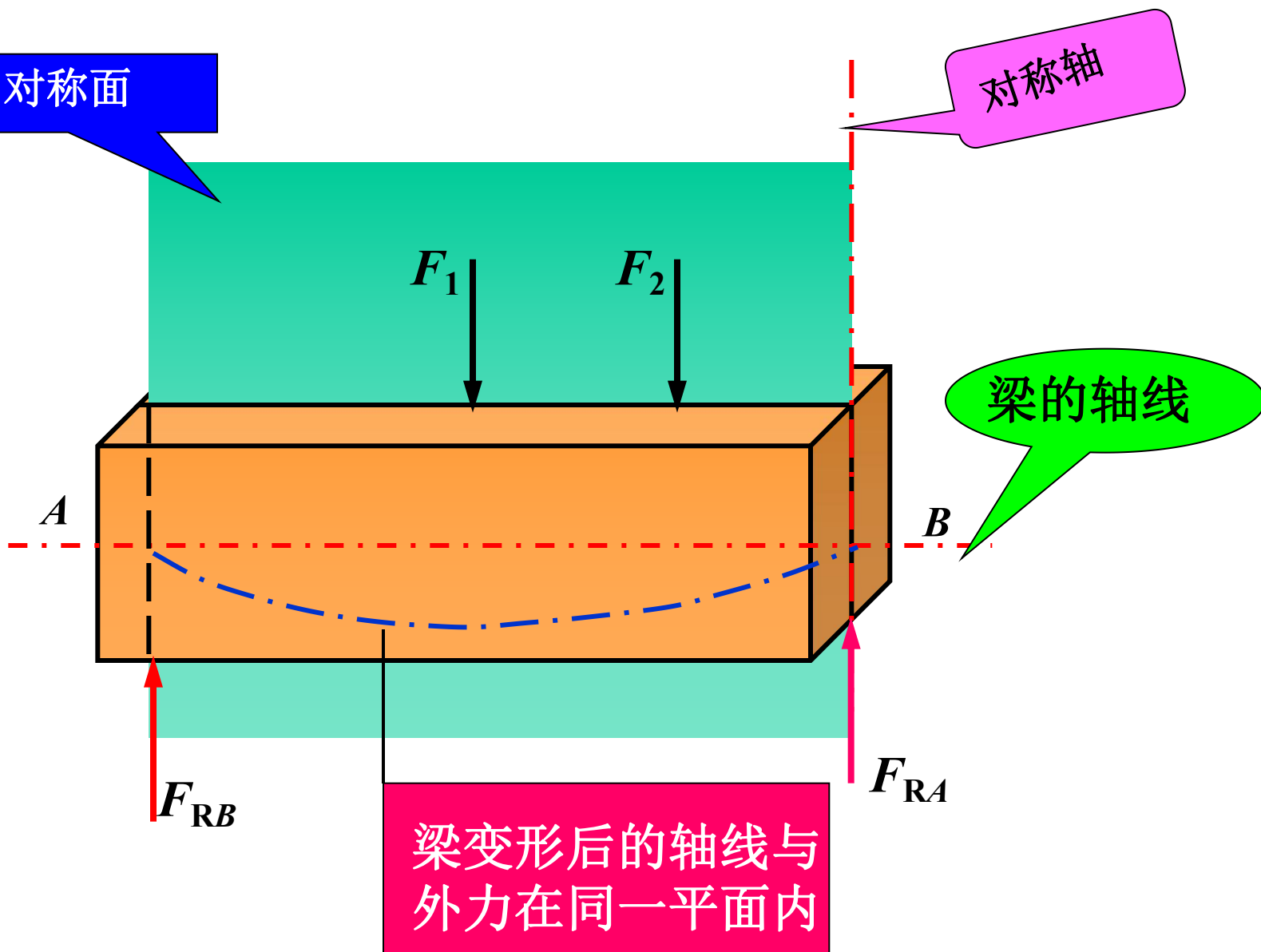
作用于梁上的所有外力都在纵向对称面内, 弯曲变形后的轴线是一条在该纵向对称面内的平面曲线, 这种弯曲称为平面弯曲.



纵向对称面

对称轴

梁的轴线



4. 梁的力学模型的简化 (Representing a real structure by an idealized model)

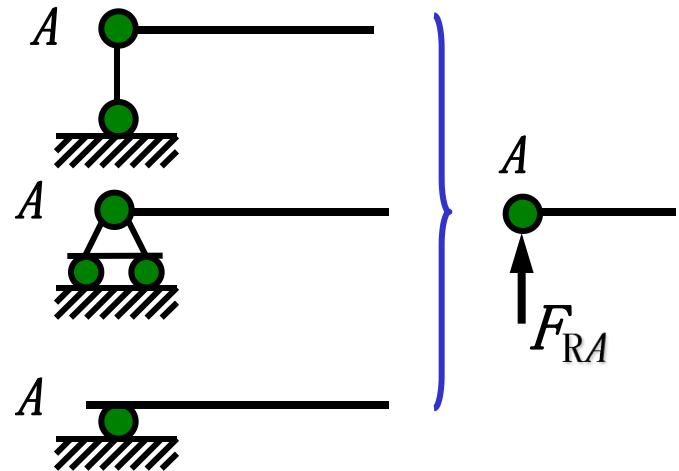
(1) 梁的简化 通常取梁的轴线来代替梁。

(2) 载荷类型

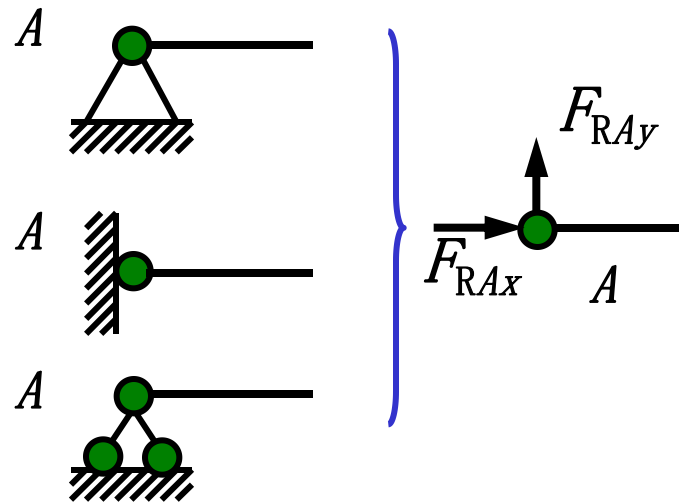
- 集中力 (concentrated force)
- 集中力偶 (concentrated moment)
- 分布载荷 (distributed load)

(3) 支座的类型

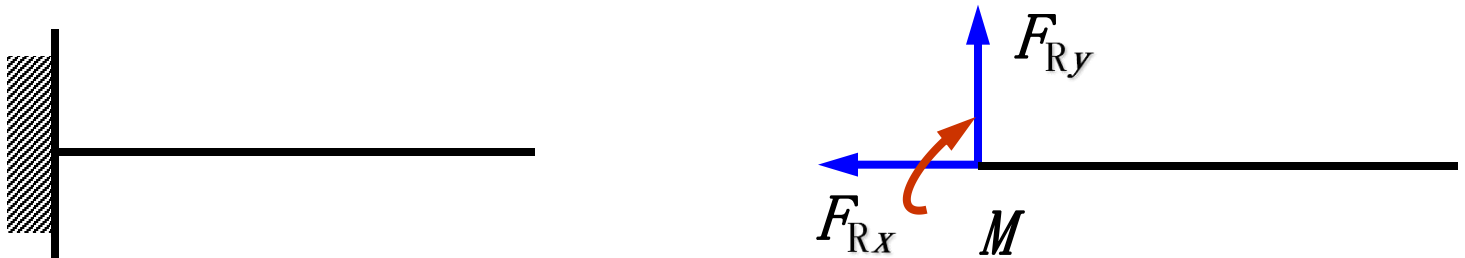
可动铰支座
(roller support)



固定铰支座 (pin support)



固定端 (clamped support or fixed end)



5. 静定梁的基本形式 (Basic types of statically determinate beams)

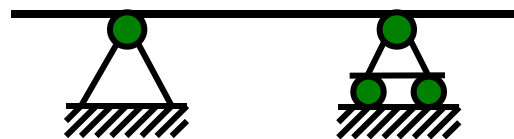
简支梁

(simply supported beam)



外伸梁

(overhanging beam)



悬臂梁

(cantilever beam)



5.2 弯曲内力

一、内力计算(Calculating internal force)

[举例] 已知 如图, F , a , l .

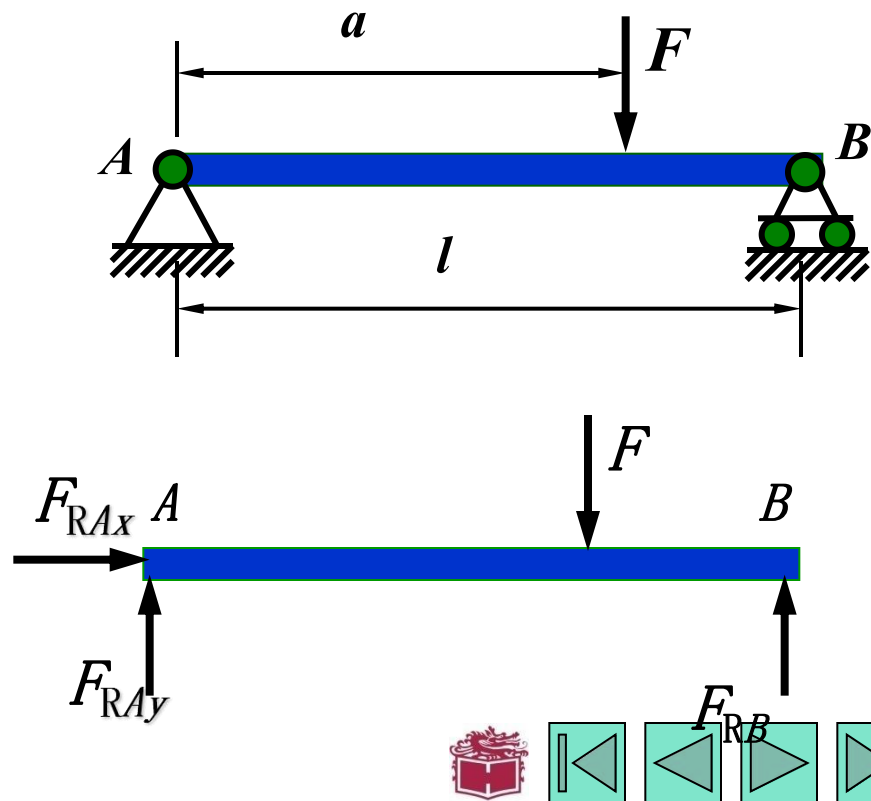
求距A端 x 处截面上内力.

解: 求支座反力

$$\sum F_x = 0, \quad F_{RAx} = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad F_{RB} = \frac{Fa}{l}$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{RAy} = \frac{F(l-a)}{l}$$



求内力——截面法

$$\sum F_y = 0, \quad F_S = F_{RAy} = \frac{F(l-a)}{l}$$

$$\sum M_C = 0, \quad M = F_{RAy} \cdot x$$

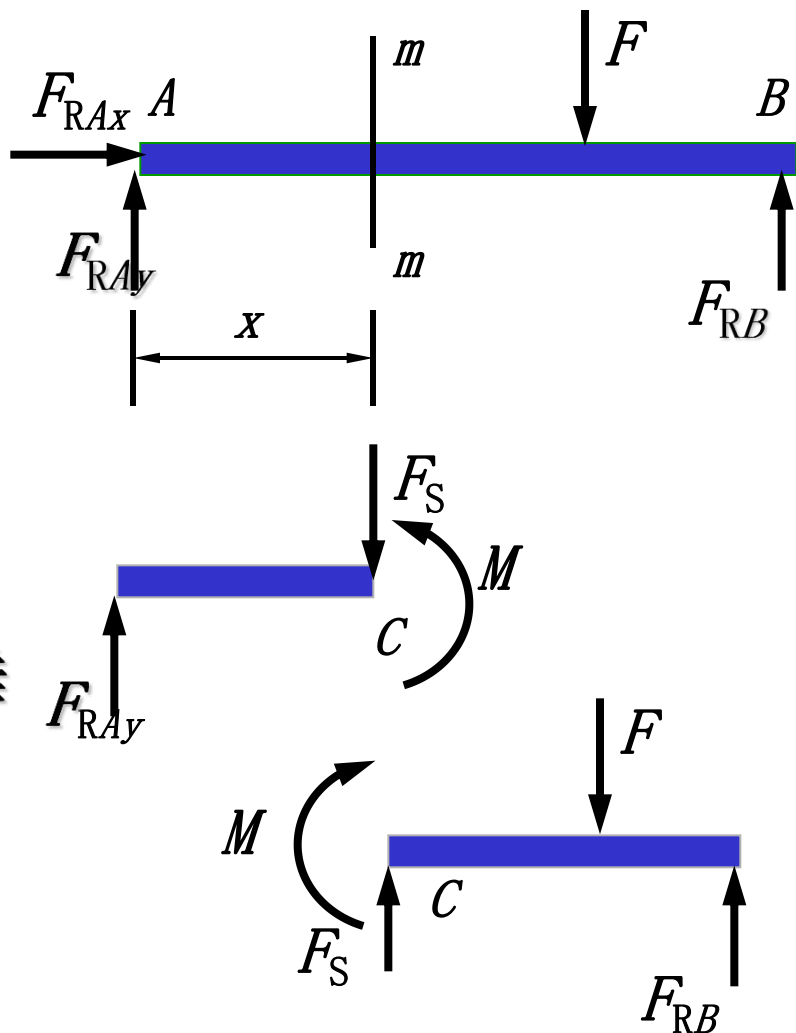
弯曲构件内力 $\left\{ \begin{array}{l} \text{剪力} \\ \text{弯矩} \end{array} \right.$

1. 弯矩 (Bending moment) M

构件受弯时，横截面上其作用面垂直于截面的内力偶矩。

2. 剪力 (Shear force) F_S

构件受弯时，横截面上其作用线平行于截面的内力。



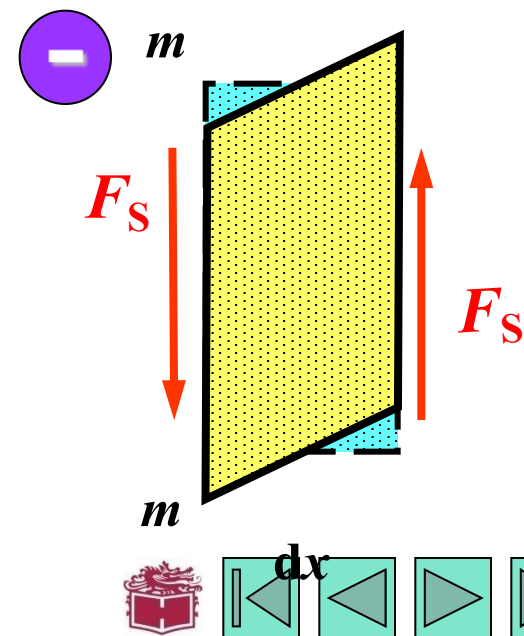
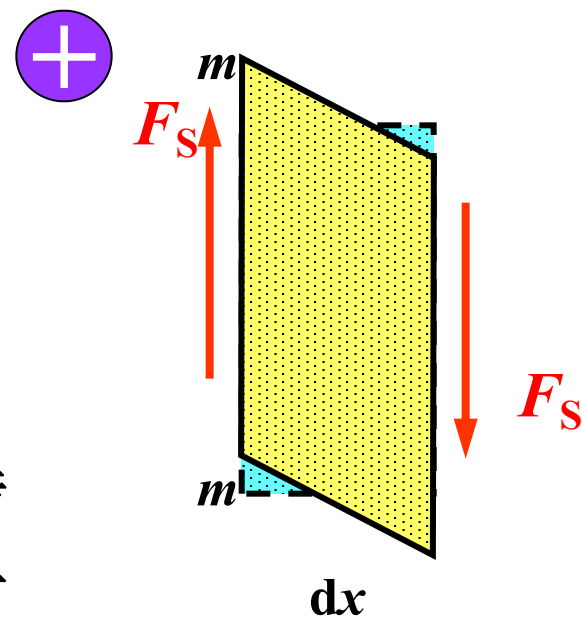
二、内力的符号规定 (Sign convention for internal force)

1. 剪力符号

(Sign convention for shear force)

使 dx 微段有左端向上而右端向下的相对错动时, 横截面 $m-m$ 上的剪力为正. 或使 dx 微段有顺时针转动趋势的剪力为正.

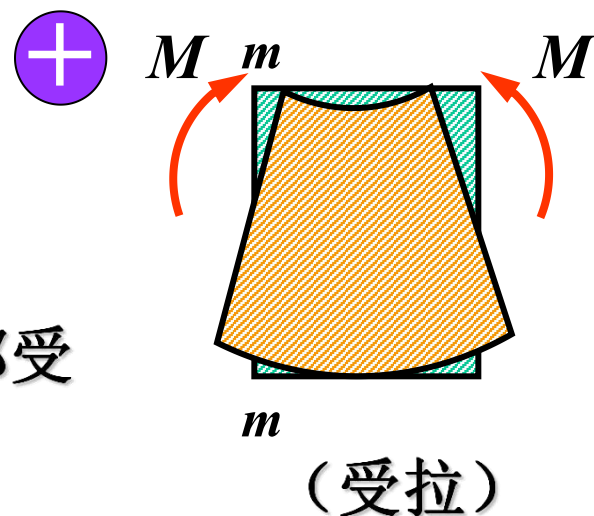
使 dx 微段有左端向下而右端向上的相对错动时, 横截面 $m-m$ 上的剪力为负. 或使 dx 微段有逆时针转动趋势的剪力为负.



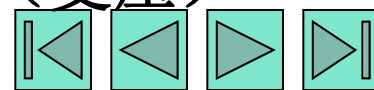
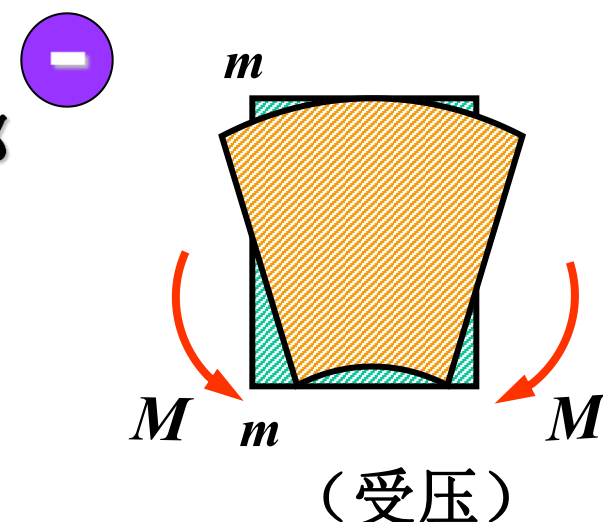
2. 弯矩符号

(Sign convention for bending moment)

当 dx 微段的弯曲下凸（即该段的下半部受拉）时, 横截面 $m-m$ 上的弯矩为正;



当 dx 微段的弯曲上凸（即该段的下半部受压）时, 横截面 $m-m$ 上的弯矩为负.



例题5-1 图示梁的计算简图. 已知 F_1 、 F_2 , 且 $F_2 > F_1$, 尺寸 a 、 b 、 c 和 l 亦均为已知. 试求梁在 E 、 F 点处横截面处的剪力和弯矩.

解: (1) 求梁的支反力 F_{RA} 和 F_{RB}

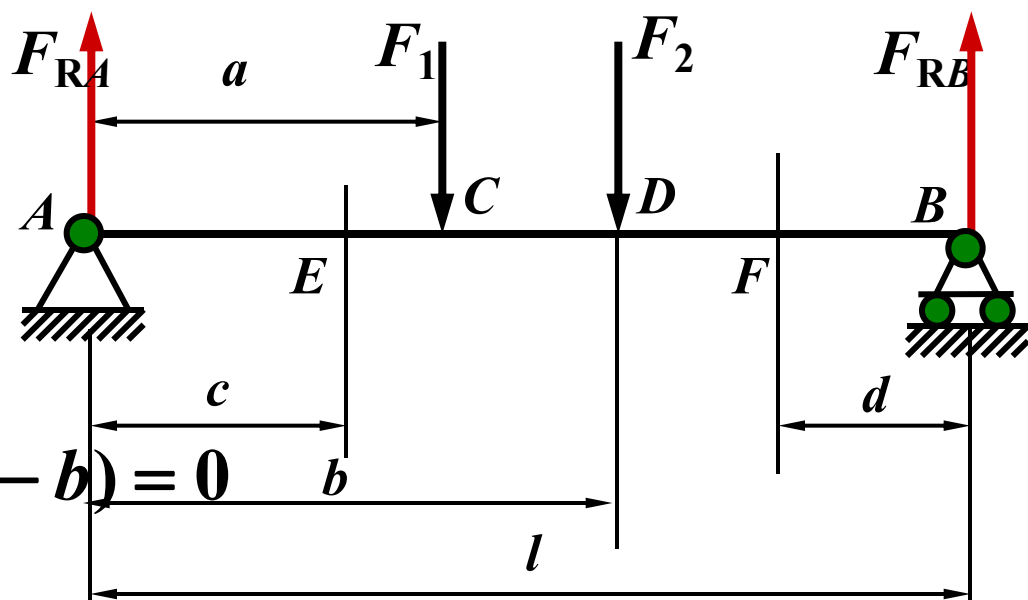
$$\sum M_A = 0$$

$$F_{RB}l - F_1a - F_2b = 0$$

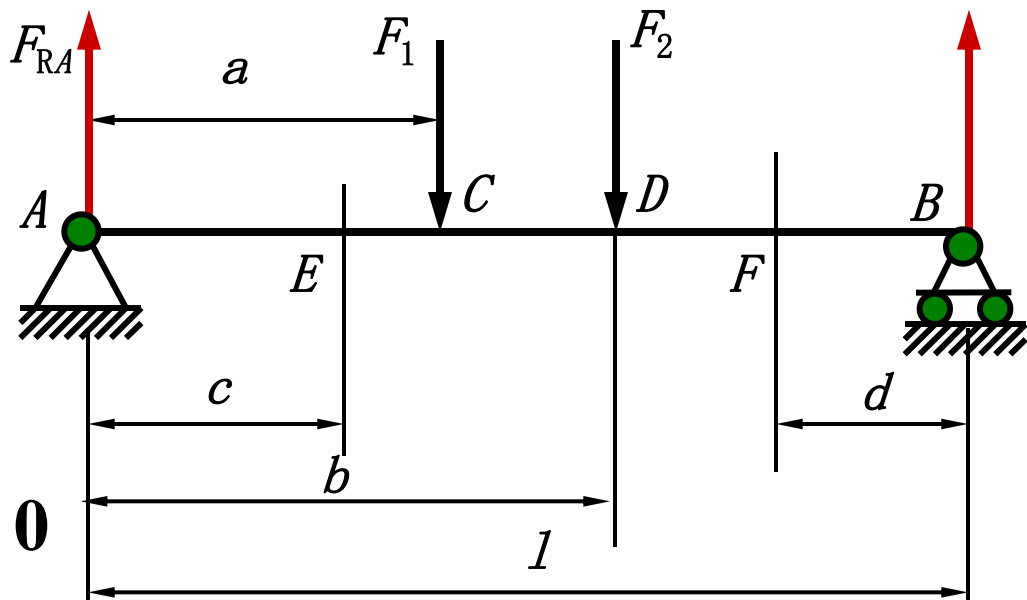
$$\sum M_B = 0$$

$$-F_{RA}l + F_1(l-a) + F_2(l-b) = 0$$

$$F_{RA} = \frac{F_1(l-a) + F_2(l-b)}{l} \quad F_{RB} = \frac{F_1a + F_2b}{l}$$



记 E 截面处的剪力为 F_{SE} 和弯矩 M_E ，且假设 F_{SE} 和弯矩 M_E 的指向和转向均为正值.

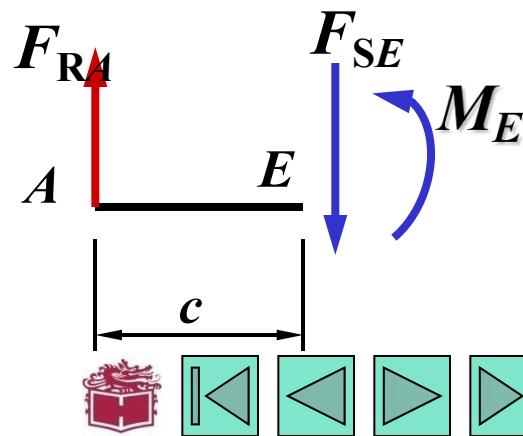


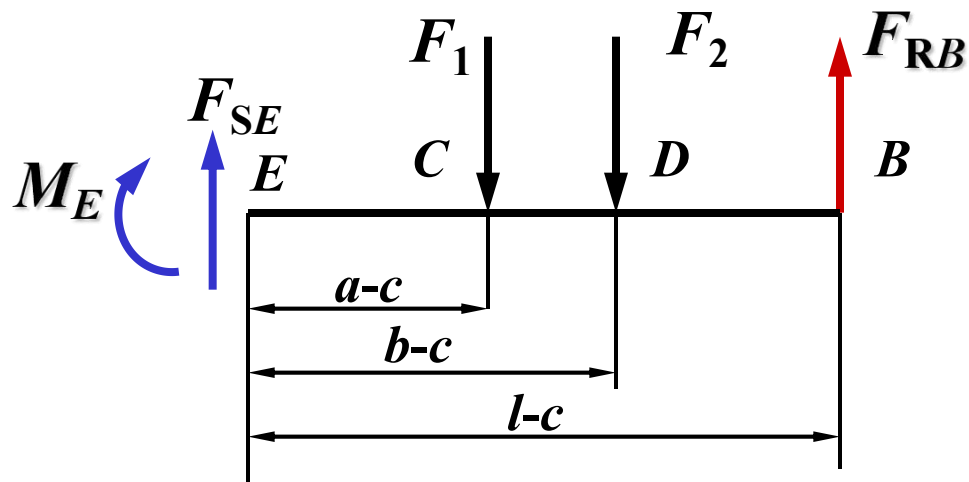
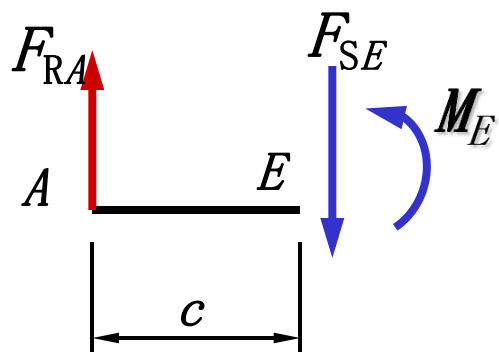
$$\sum F_y = 0, \quad F_{RA} - F_{SE} = 0$$

$$\sum M_E = 0, \quad M_E - F_{RA} \cdot c = 0$$

解得 $F_{SE} = F_{RA}$

$$M_E = F_{RA} \cdot c$$





取右段为研究对象

$$\sum F_y = 0 \quad F_{SE} + F_{RB} - F_1 - F_2 = 0$$

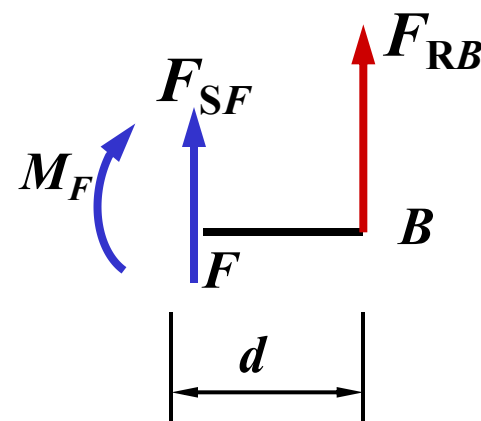
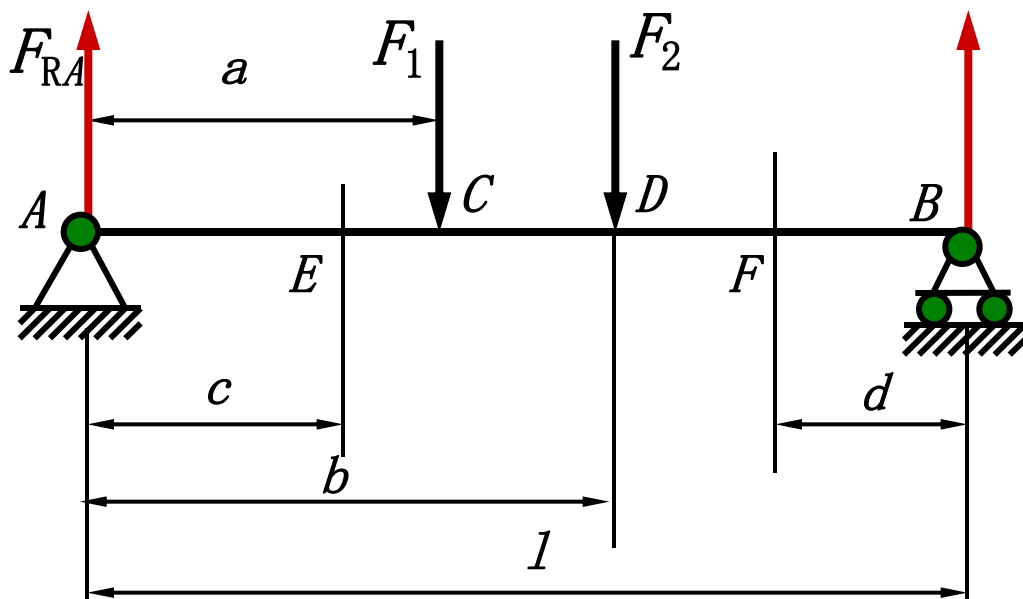
$$\sum M_E = 0 \quad F_{RB}(l-c) - F_1(a-c) - F_2(b-c) - M_E = 0$$

解得

$$F_{SE} = F_{RA} \quad (+)$$

$$M_E = F_{RA} \cdot c \quad (+)$$





计算 F 点横截面处的剪力 F_S 和弯矩 M_F .

$$\sum F_y = 0, \quad F_{SF} + F_{RB} = 0$$

$$\sum M_F = 0, \quad -M_F + F_{RB}d = 0$$

解得: $F_{SF} = -F_{RB}$ ⊖

$M_F = F_{RB}d$ ⊕



三、计算规律 (Simple method for calculating shear-force and bending-moment)

1. 剪力 (Shear force)

$$F_S = \sum_{i=1 \text{ 左 (右)}}^n F_i$$

左侧 梁段：向上的外力引起正值的剪力
向下的外力引起负值的剪力

右侧 梁段：向下的外力引起正值的剪力
向上的外力引起负值的剪力



2. 弯矩 (Bending moment)

$$M = \sum_{i=1 \text{ 左 (右)}}^n F_i a_i + \sum_{k=1 \text{ 左 (右)}}^m M_k$$

不论在截面的左侧或右侧向上的外力均将引起正值的弯矩，而向下的外力则引起负值的弯矩。

左侧梁段 顺时针转向的外力偶引起正值的弯矩

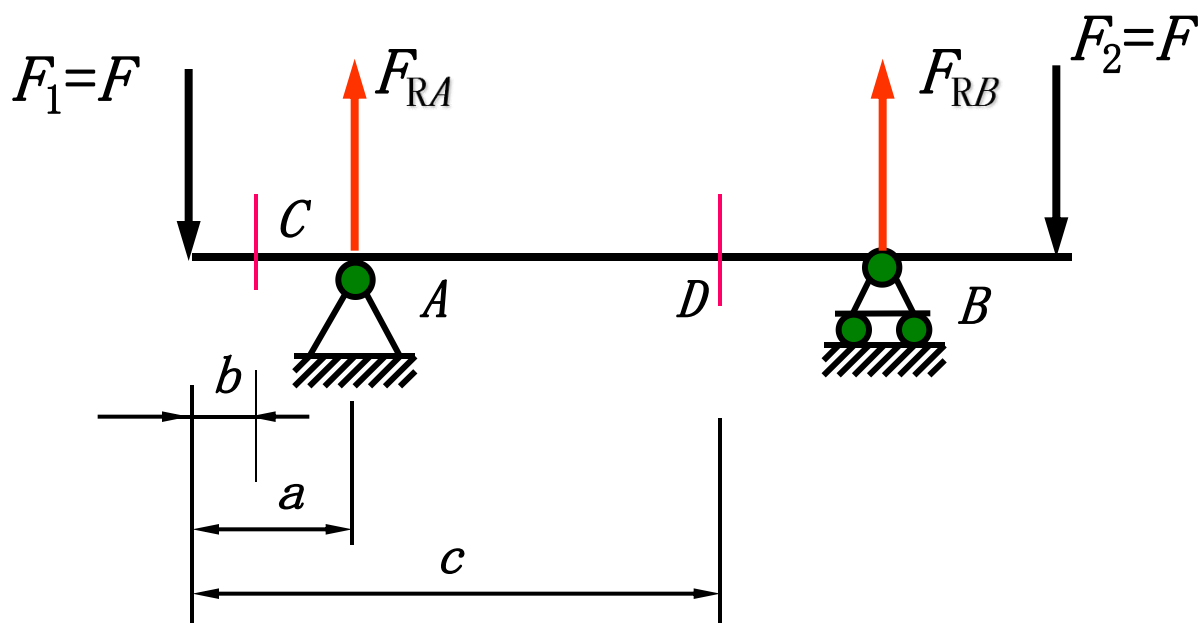
逆时针转向的外力偶引起负值的弯矩

右侧梁段 逆时针转向的外力偶引起正值的弯矩

顺时针转向的外力偶引起负值的弯矩



例题5-2 轴的计例算简图如图所示, 已知 $F_1 = F_2 = F = 60\text{kN}$, $a = 230\text{mm}$, $b = 100\text{ mm}$ 和 $c = 1000\text{ mm}$. 求 C 、 D 点处横截面上的剪力和弯矩.



解: (1) 求支座反力

$$F_{RA} = F_{RB} = F = 60\text{kN}$$



(2) 计算 C 横截面上的剪力 F_{SC} 和弯矩 M_C

看左侧

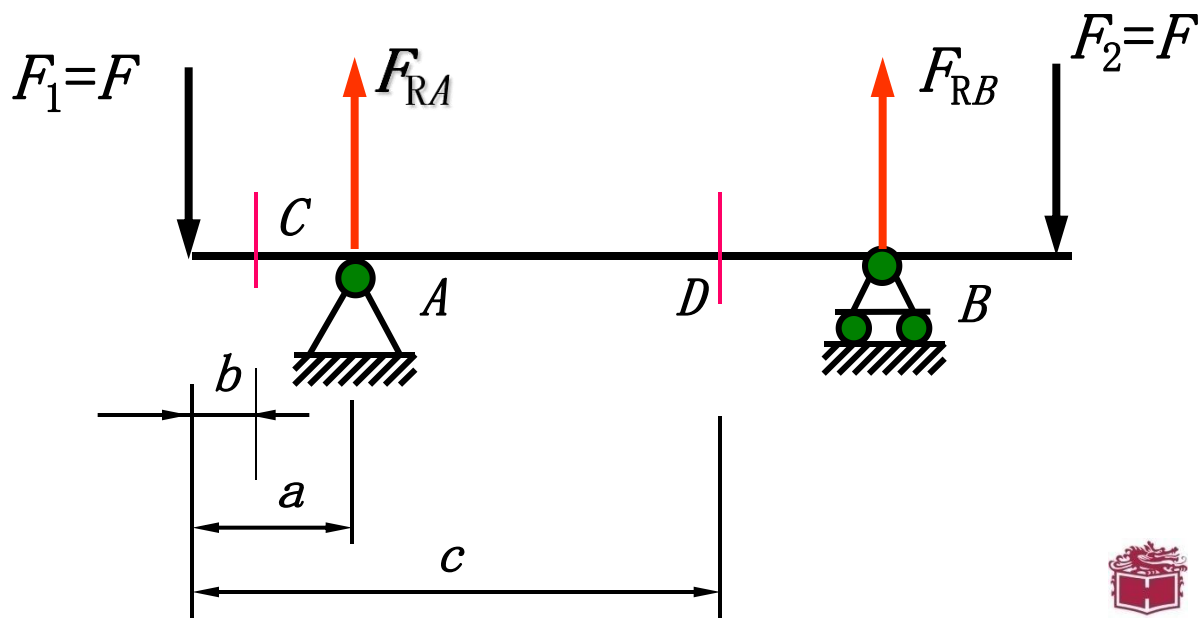
$$F_{SC} = -F_1 = -60\text{kN} \quad M_C = -F_1 b = -6.0\text{kN} \cdot \text{m}$$

(3) 计算 D 横截面上的剪力 F_{SD} 和弯矩 M_D

看左侧

$$F_{SD} = F_{RA} - F_1 = 60 - 60 = 0$$

$$M_D = F_{RA}(c - a) - F_1 c = -Fa = -13.8\text{kN} \cdot \text{m}$$



例5-3 求图示梁中指定截面上的剪力和弯矩。

解：

(1) 求支座反力

$$F_{RA} = 4\text{kN} \quad F_{RB} = -4\text{kN}$$

(2) 求1-1截面的内力

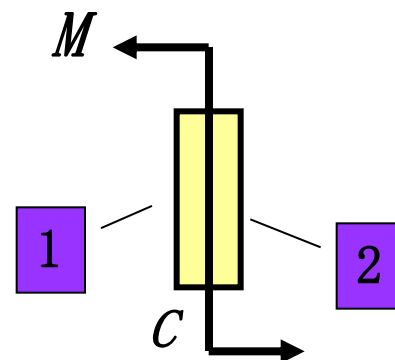
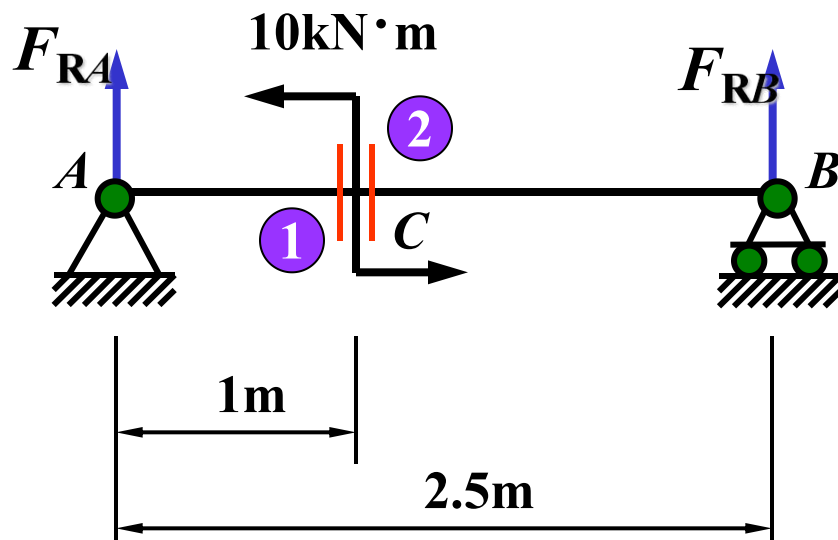
$$F_{S1} = F_{SC\text{左}} = F_{RA} = 4\text{kN}$$

$$M_1 = M_{C\text{左}} = F_{RA} \times 1 = 4\text{kN} \cdot \text{m}$$

(3) 求2-2截面的内力

$$F_{S2} = F_{SC\text{右}} = -F_{RB} = -(-4) = 4\text{kN}$$

$$M_2 = M_{C\text{右}} = F_{RB} \times (2.5 - 1) = (-4) \times 1.5 = -6\text{kN} \cdot \text{m}$$



5.3 剪力图和弯矩图

一、剪力方程和弯矩方程 (Shear- force & bending-moment equations)

用函数关系表示沿梁轴线各横截面上剪力和弯矩的变化规律, 分别称作剪力方程和弯矩方程.

1. 剪力方程 (Shear- force equation) $V = F_S(x)$

2. 弯矩方程 (Bending-moment equation) $M = M(x)$



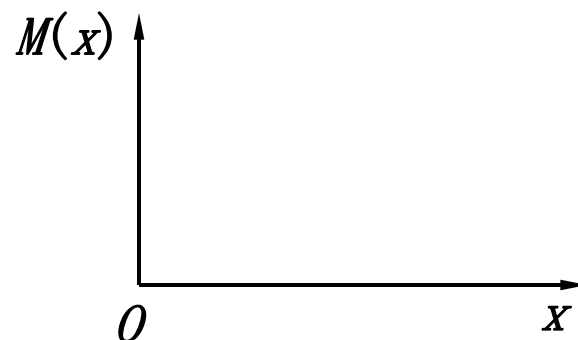
二、剪力图和弯矩图

(Shear-force&bending-moment diagrams)

以平行于梁轴的横坐标 x 表示横截面的位置, 以纵坐标表示相应截面上的剪力和弯矩. 这种图线分别称为剪力图和弯矩图



F_S 图的坐标系



M 图的坐标系

剪力图为正值画在 x 轴上侧, 负值画在 x 轴下侧

弯矩图为正值画在 x 轴上侧, 负值画在 x 轴下侧



例5-4 如图所示的悬臂梁在自由端受集中荷载 F 作用，试作此梁的剪力图和弯矩图。

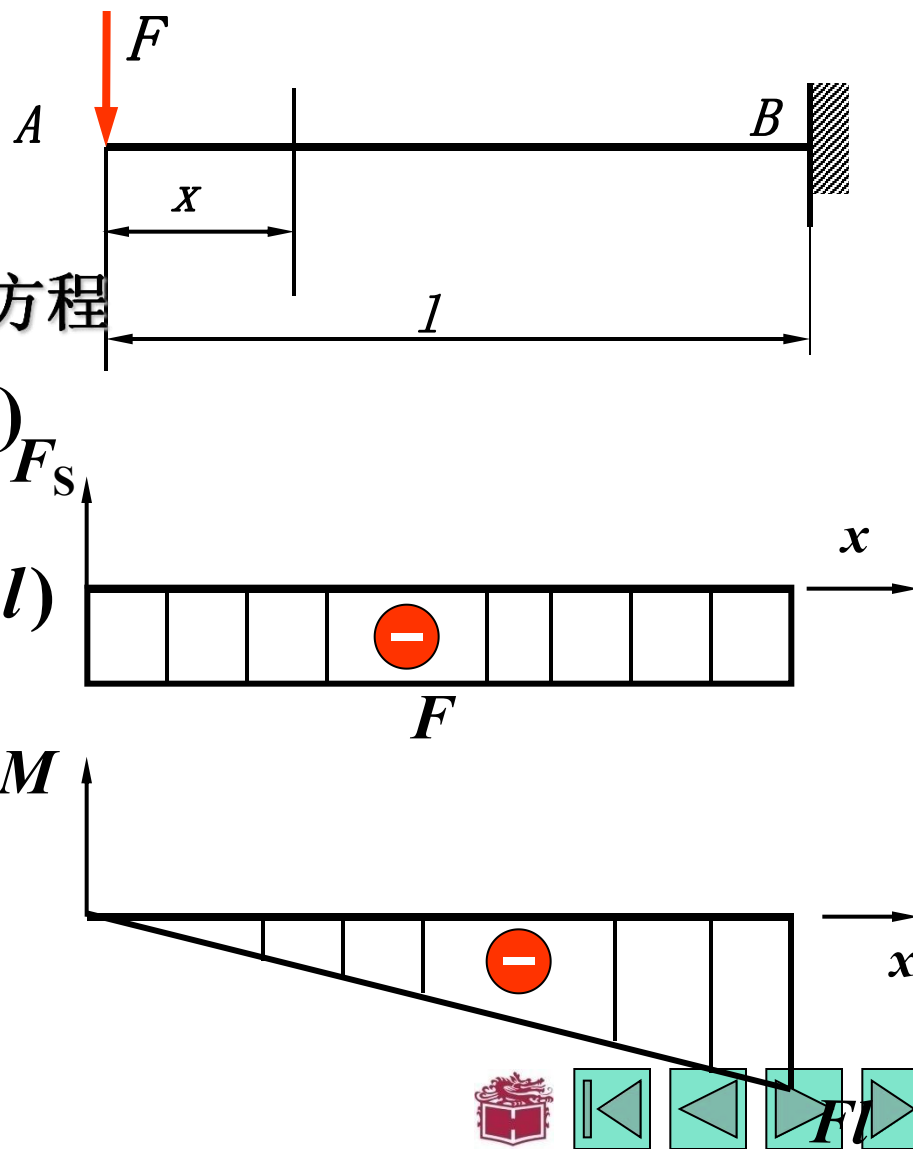
解：列出梁的剪力方程 和弯矩方程

$$F_S(x) = -F \quad (0 < x < l)$$

$$M(x) = -Fx \quad (0 \leq x < l)$$

$$F_{SA左} = 0$$

$$F_{SA右} = -F$$

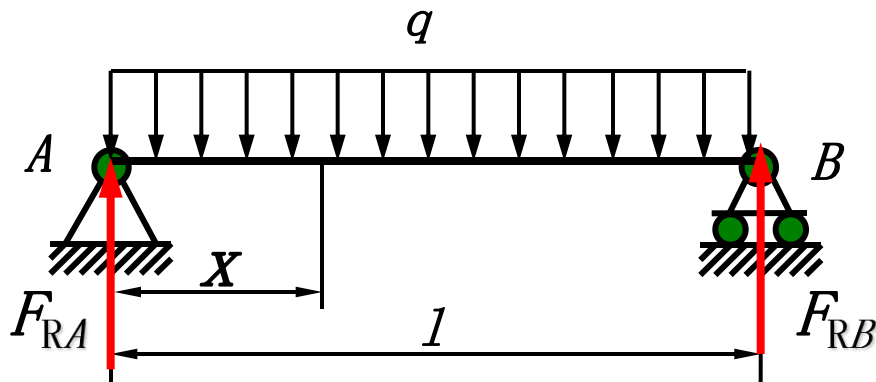


例5-5 图示的简支梁, 在全梁上受集度为 q 的均布荷载用. 试作此梁的剪力图和弯矩图.

解:

(1) 求支反力

$$F_{RA} = F_{RB} = \frac{ql}{2}$$



(2) 列剪力方程和弯矩方程.

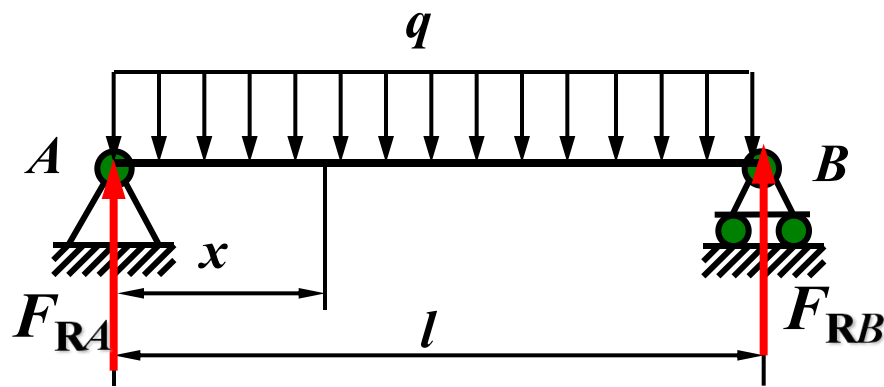
$$F_S(x) = F_{RA} - qx = \frac{ql}{2} - qx \quad (0 < x < l)$$

$$M(x) = F_{RA}x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \quad (0 \leq x \leq l)$$



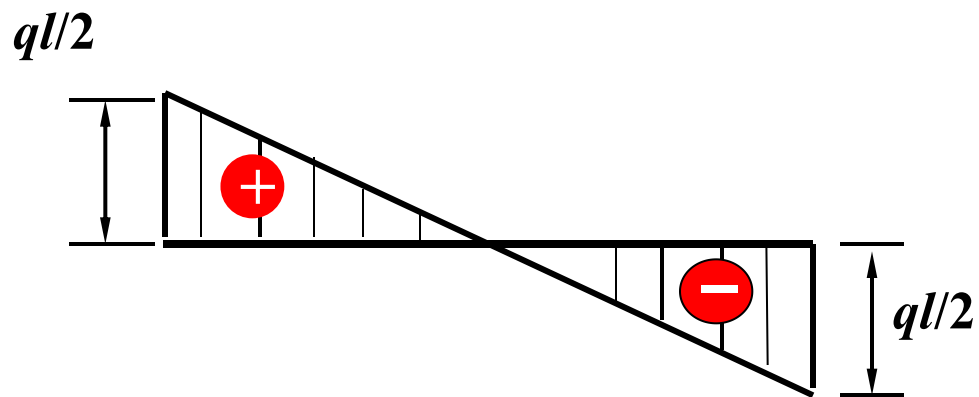
$$F_S(x) = \frac{ql}{2} - qx \quad (0 < x < l)$$

剪力图为一线斜直线



$$x=0 \text{ 处, } F_S = \frac{ql}{2}$$

$$x=l \text{ 处, } F_S = -\frac{ql}{2}$$



绘出剪力图



$$M(x) = F_{RA}x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \quad (0 \leq x \leq l)$$

弯矩图为一二次抛物线

$$x = 0, \quad M = 0$$

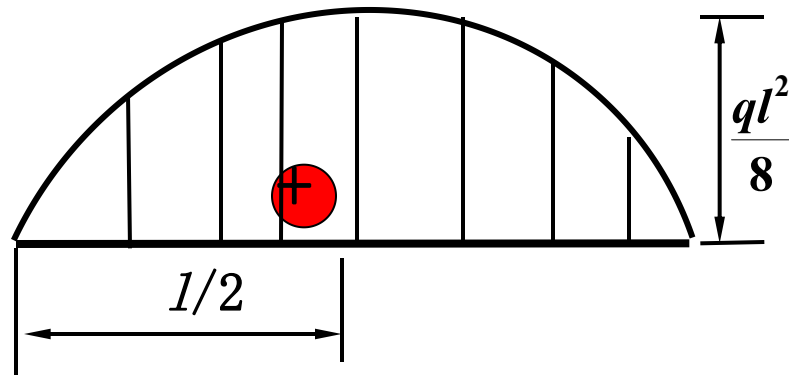
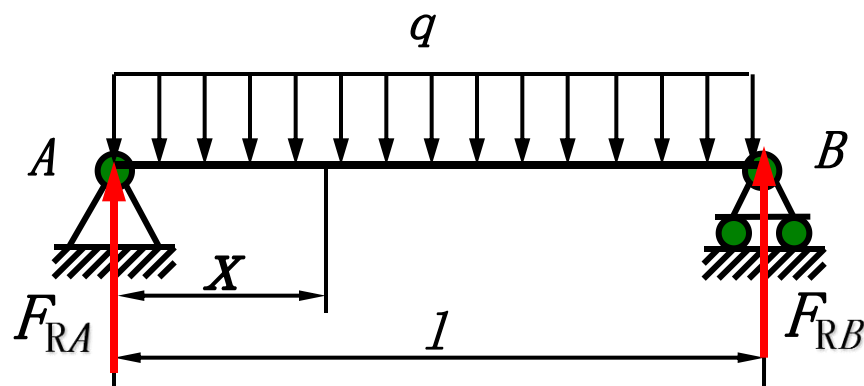
$$x = l, \quad M = 0$$

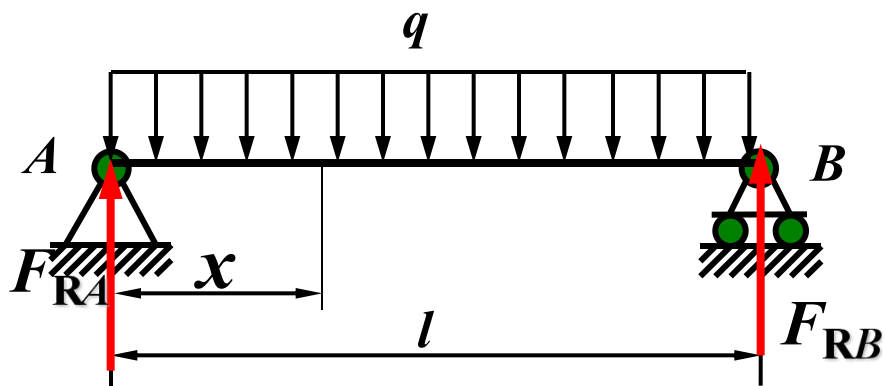
$$\text{令 } \frac{dM(x)}{dx} = \frac{ql}{2} - qx = 0$$

$$\text{得驻点 } x = \frac{l}{2}$$

$$\text{弯矩的极值 } M_{\max} = M_{x=\frac{l}{2}} = \frac{ql^2}{8}$$

绘出弯矩图

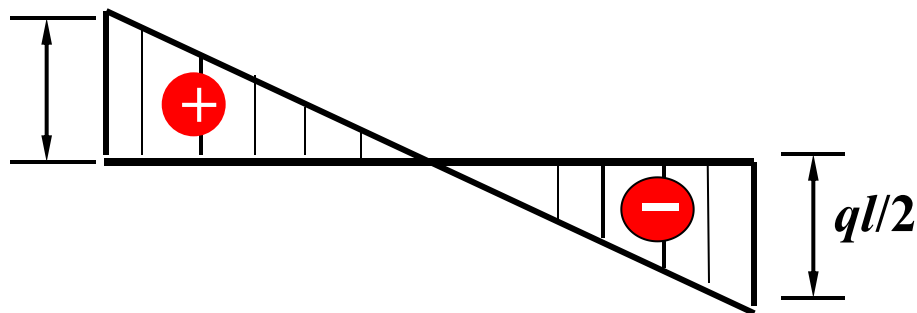




由图可见，此梁在跨中截面上的弯矩值为最大

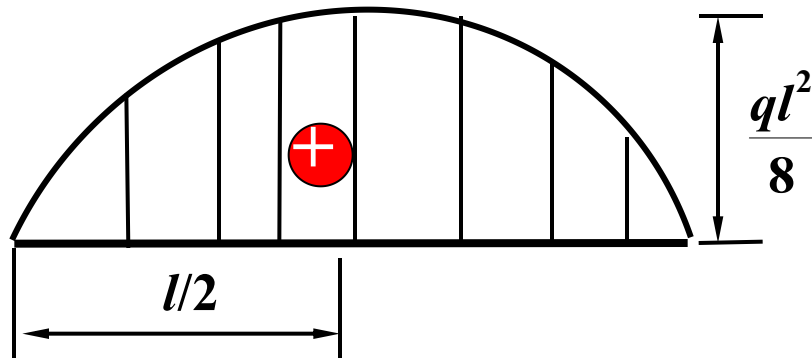
$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$$

$ql/2$



但此截面上 $F_S = 0$

两支座内侧横截面上剪力绝对值为最大



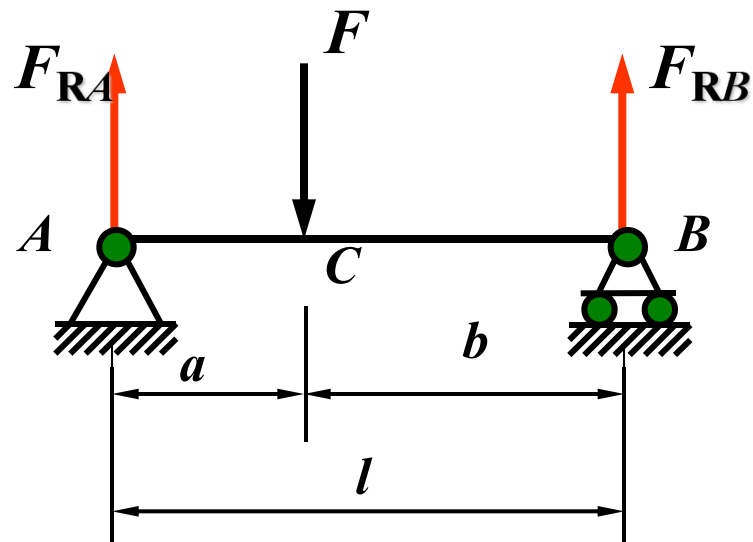
$$F_{S\max} = \frac{ql}{2}$$



例5-6 图示的简支梁在C点处受集中荷载 F 作用。
试作此梁的剪力图和弯矩图。

解：（1）求梁的支反力

$$F_{RA} = \frac{Fb}{l} \quad F_{RB} = \frac{Fa}{l}$$



因为AC段和CB段的内力方程不同，所以必须分段列剪力方程和弯矩方程。

将坐标原点取在梁的左端



将坐标原点取在梁的左端

AC段

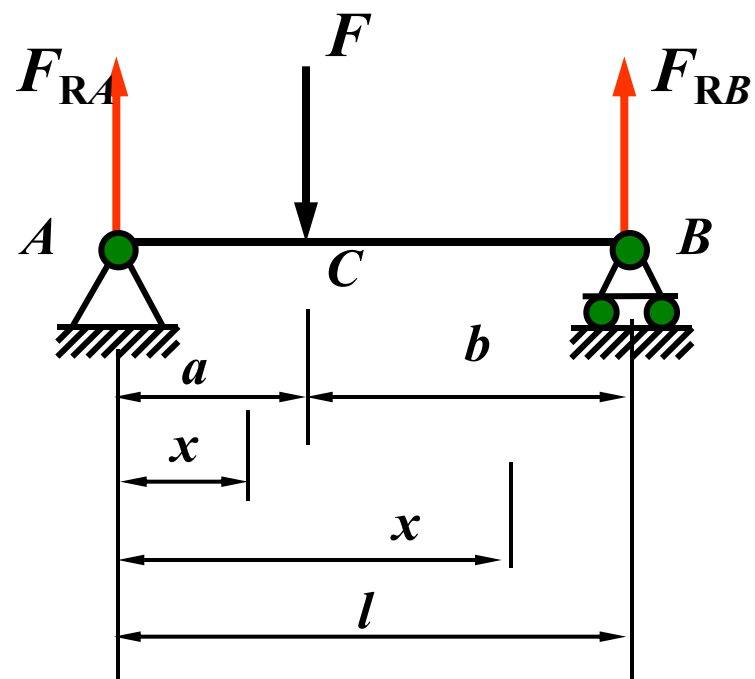
$$F_S(x) = \frac{Fb}{l} \quad (0 < x < a) \quad (1)$$

$$M(x) = \frac{Fb}{l} x \quad (0 \leq x \leq a) \quad (2)$$

CB段

$$F_S(x) = \frac{Fb}{l} - F = -\frac{F(l-b)}{l} = -\frac{Fa}{l} \quad (a < x < l) \quad (3)$$

$$M(x) = \frac{Fb}{l} x - F(x-a) = \frac{Fa}{l} (l-x) \quad (a \leq x \leq l) \quad (4)$$



$$F_S(x) = \frac{Fb}{l} \quad (0 < x < a) \quad (1)$$

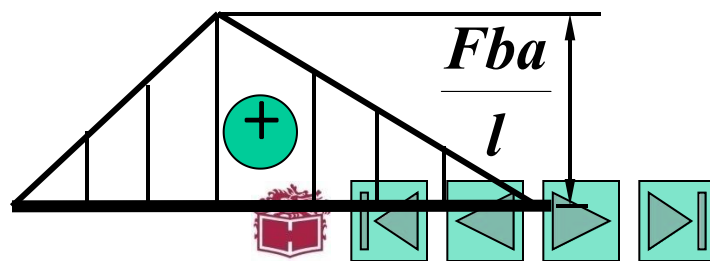
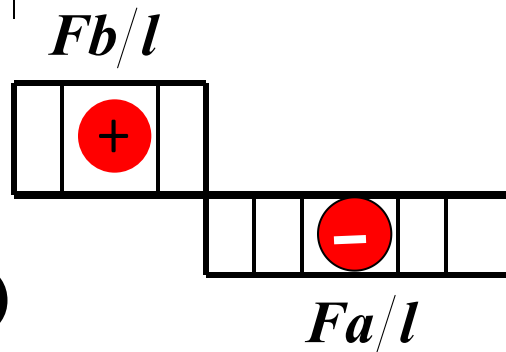
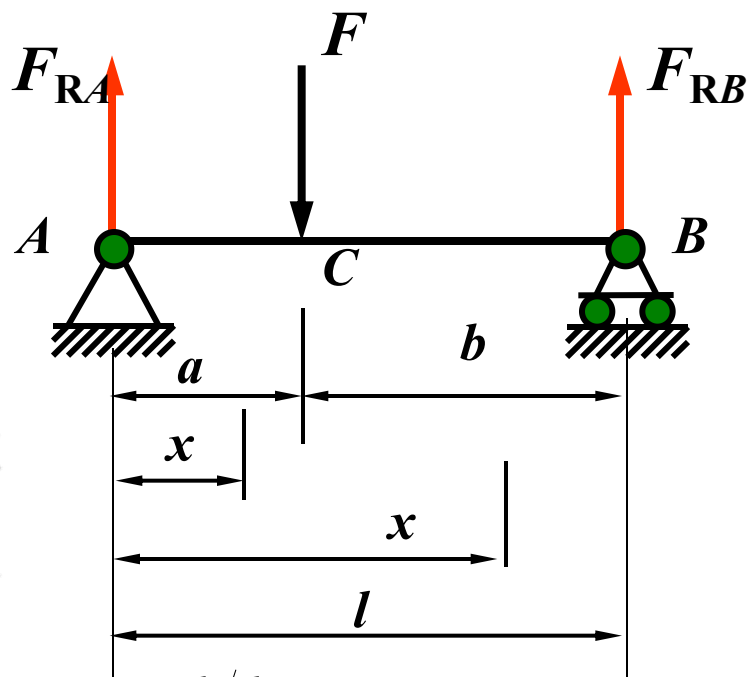
$$F_S(x) = -\frac{Fa}{l} \quad (a < x < l) \quad (3)$$

由 (1) , (3) 两式可知, AC 、 CB 两段梁的剪力图各是一条平行于 x 轴的直线.

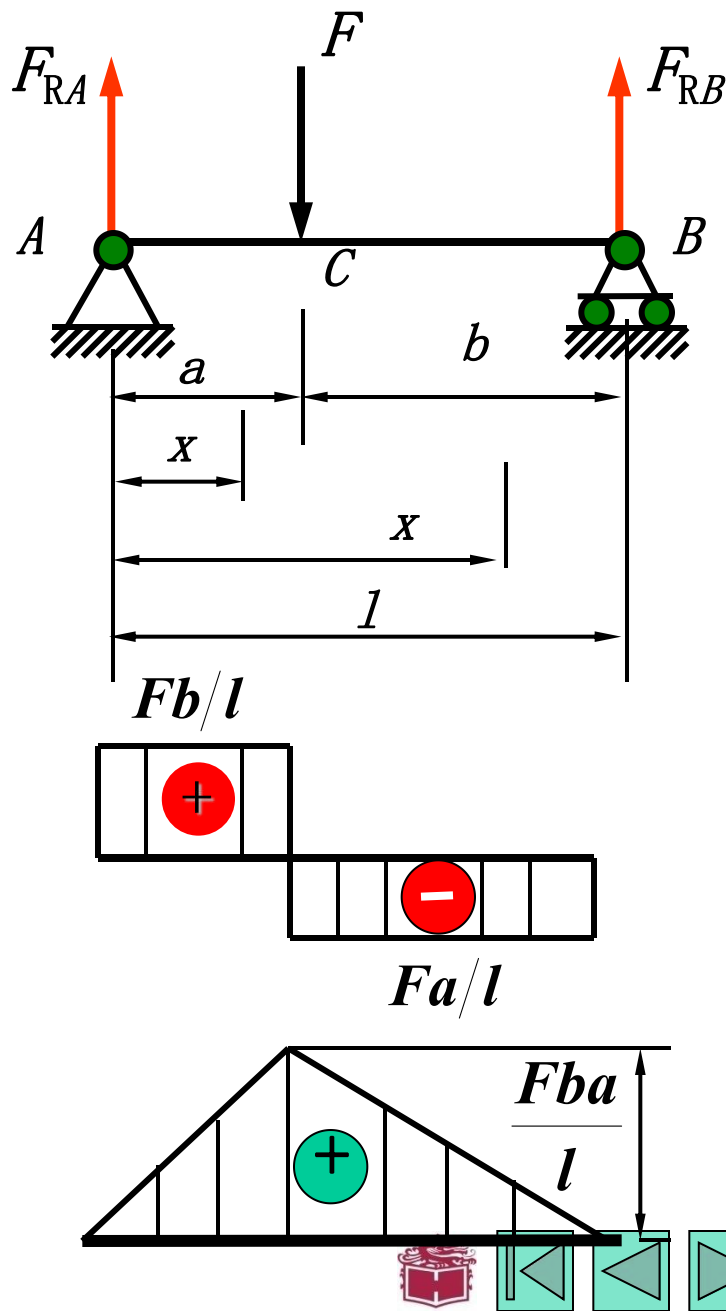
$$M(x) = \frac{Fb}{l} x \quad (0 \leq x \leq a) \quad (2)$$

$$M(x) = \frac{Fa}{l} (l - x) \quad (a \leq x \leq l) \quad (4)$$

由 (2) , (4) 式可知, AC 、 CB 两段梁的弯矩图各是一条斜直线.



在集中荷载作用处的左,右两侧截面上剪力值(图)有突变,突变值等于集中荷载 F . 弯矩图形成尖角,该处弯矩值最大.



例5-7 图示的简支梁在 C 点处受矩为 M 的集中力偶作用。
试作此梁的的剪力图和弯矩图。

解：求梁的支反力

$$F_{RA} = \frac{M}{l} \quad F_{RB} = -\frac{M}{l}$$

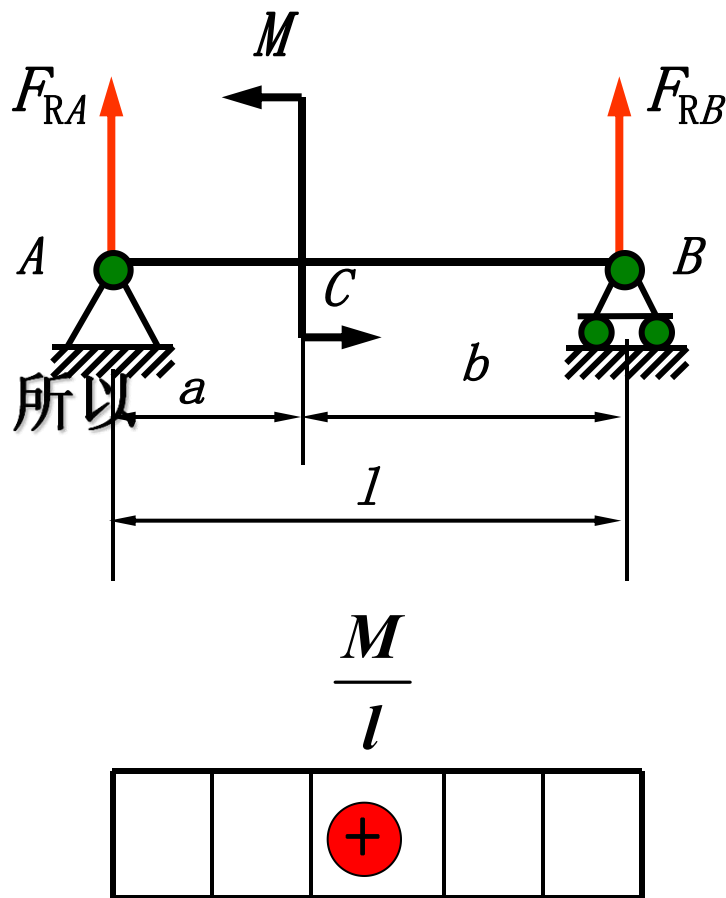
将坐标原点取在梁的左端。

因为梁上没有横向外力，所以

全梁只有一个剪力方程

$$F_S(x) = \frac{M}{l} \quad (0 < x < l) \quad (1)$$

由(1)式画出整个梁的剪力图是一条平行于 x 轴的直线。



AC 段和 BC 段的弯矩方程不同

AC 段

$$M(x) = \frac{M}{l}x \quad (0 \leq x < a)$$

CB 段

$$M(x) = \frac{M}{l}x - M = -\frac{M}{l}(l-x) \quad (a < x \leq l)$$

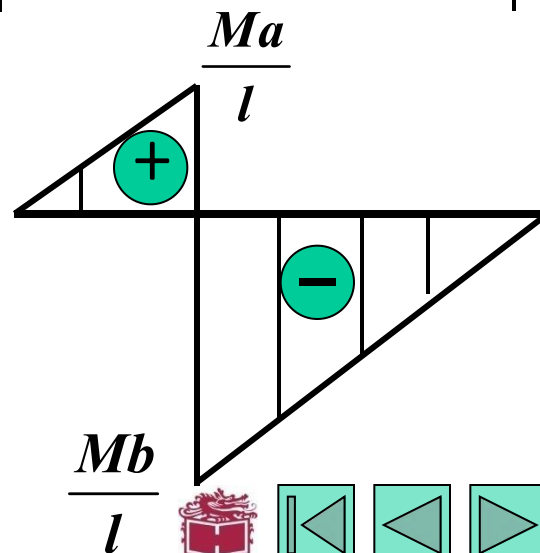
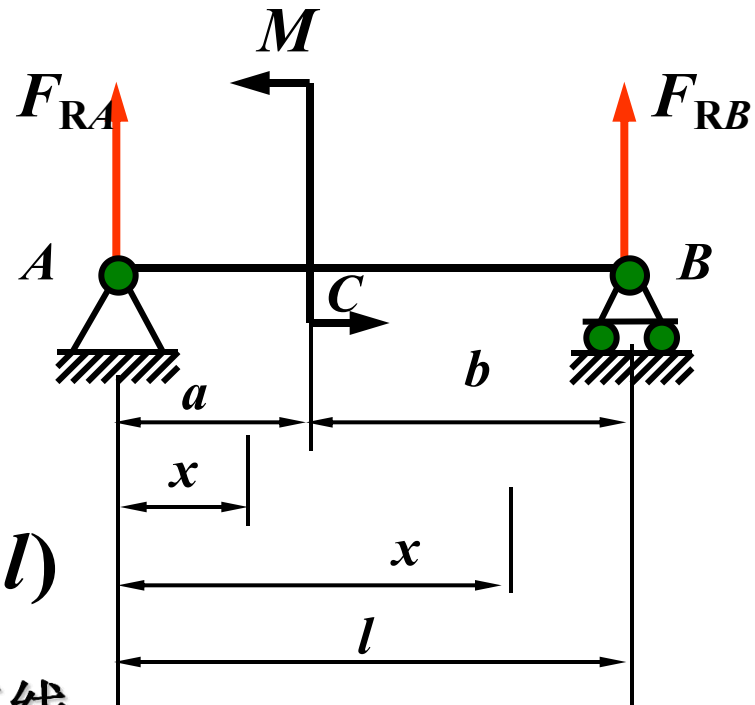
AC , CB 两梁段的弯矩图各是一条倾斜直线.

AC 段 $x = 0$, $M = 0$

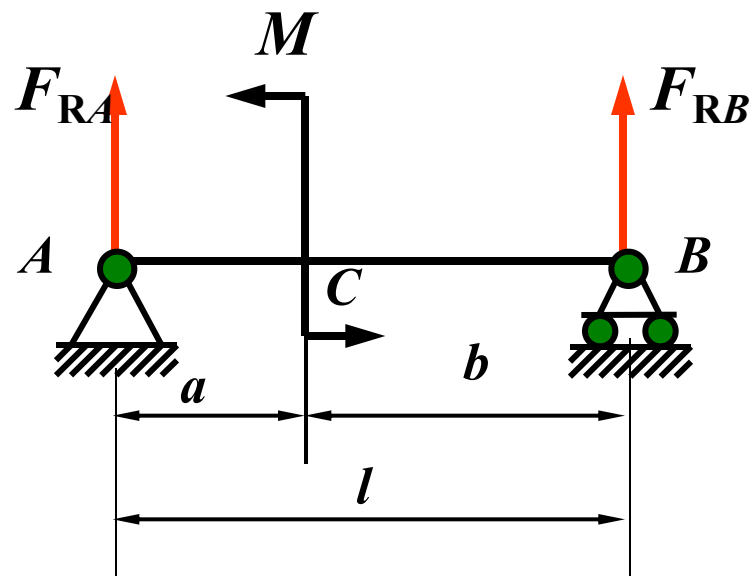
$$x = a$$
 , $M_{C左} = \frac{Ma}{l}$

CB 段

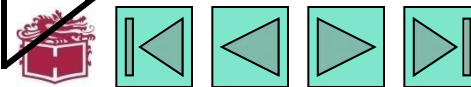
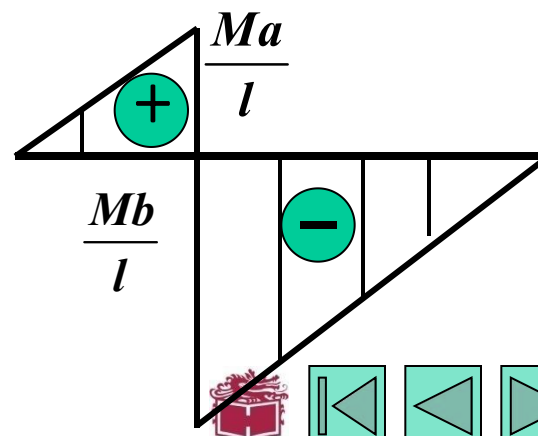
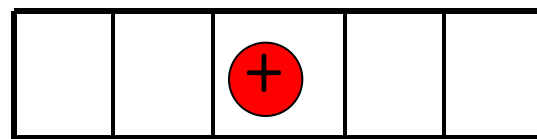
$$x = a$$
 , $M_{C右} = -\frac{Mb}{l}$
 $x = l$, $M = 0$



梁上集中力偶作用处左、右两侧横截面上的弯矩值(图)发生突变, 其突变值等于集中力偶矩的数值. 此处剪力图没有变化.



$$M / l$$



小 结

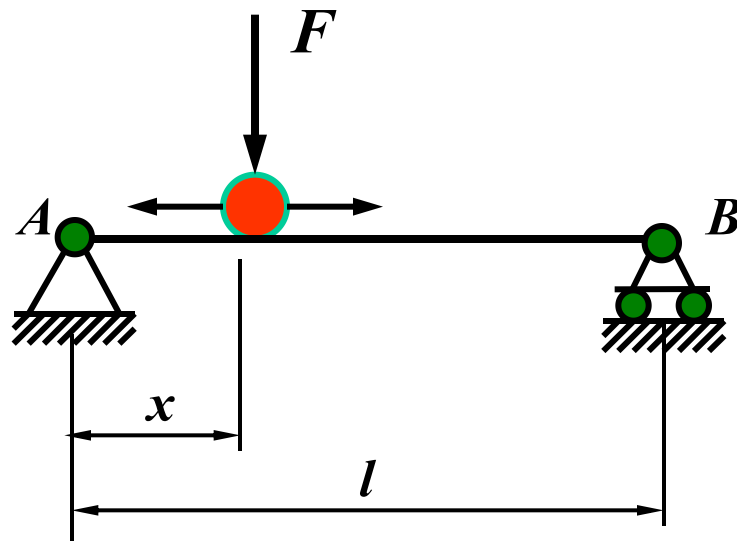
1. 取梁的左端点为坐标原点, x 轴向右为正: 剪力图向上为正; 弯矩图向上为正.
2. 以集中力、集中力偶作用处、分布荷载开始或结束处, 及支座截面处为界点将梁分段. 分段写出剪力方程和弯矩方程, 然后绘出剪力图和弯矩图.
3. 梁上集中力作用处左、右两侧横截面上, 剪力 (图) 有突变, 突变值等于集中力的数值. 在此处弯矩图则形成一个尖角.
4. 梁上集中力偶作用处左、右两侧横截面上的弯矩 (图) 有突变, 其突变值等于集中力偶矩的数值. 但在此处剪力图没有变化.
5. 梁上的 $F_{S\max}$ 发生在全梁或各梁段的边界截面处; 梁上的 M_{\max} 发生在全梁或各梁段的边界截面, 或 $F_S = 0$ 的截面处.



例5-8 一简支梁受移动荷载 F 的作用如图所示. 试求梁的最大弯矩为极大时荷载 F 的位置.

解 : 先设 F 在距左支座 A 为 x 的任意位置. 在此情况梁的最大弯矩为极大. 荷载在任意位置时, 支反力为

$$F_{RA} = \frac{F(l-x)}{l} \quad F_{RB} = \frac{Fx}{l}$$



当荷载 F 在距左支座为 x 的任意位置 C 时, 梁的弯矩为

$$M_C = F_{RA}x = \frac{F(l-x)}{l}x$$

$$\text{令 } \frac{dM_C}{dx} = 0 \quad \frac{F}{l} - (l - 2x) = 0 \quad x = \frac{l}{2}$$



此结果说明，当移动荷载 F 在简支梁的跨中时，梁的最大弯矩为极大。

将 $x = \frac{l}{2}$ 代入式

$$M_C = F_{RA}x = \frac{F(l-x)}{l}x$$

得最大弯矩值

$$M_{\max} = \frac{1}{4}Fl$$



一、弯矩、剪力与分布荷载集度间的微分关系

在进行弯矩图和剪力图分析时，分段计算剪力方程和弯矩方程，是比较麻烦的事。

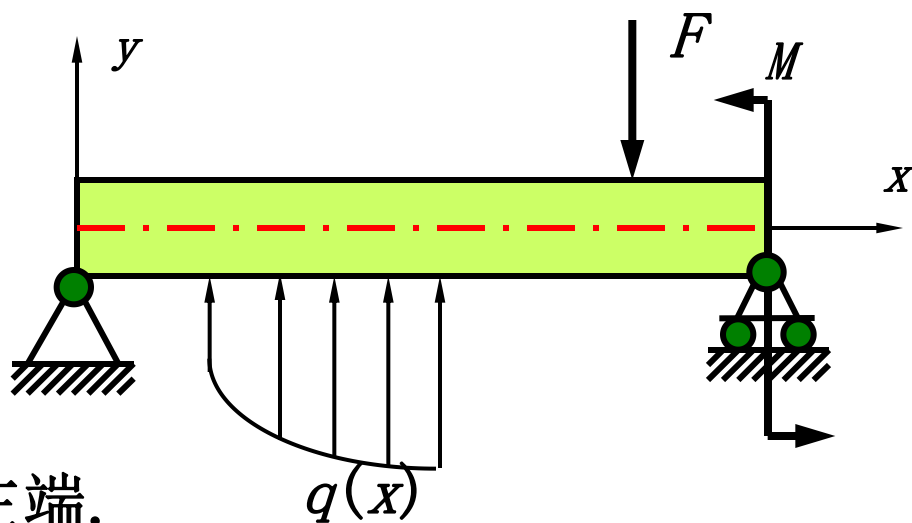
利用弯矩、剪力、载荷集度之间关系，可以简化这个过程，方便最大（小）弯矩、剪力的确定

设梁上作用有任意分布荷载

其集度 $q = q(x)$

规定 $q(x)$ 向上为正。

将 x 轴的坐标原点取在梁的左端。



假想地用坐标为 x 和 $x+dx$ 的两横截面 $m-m$ 和 $n-n$ 从梁中取出 dx 微段。

$m-m$ 截面上内力为 $F_S(x)$, $M(x)$

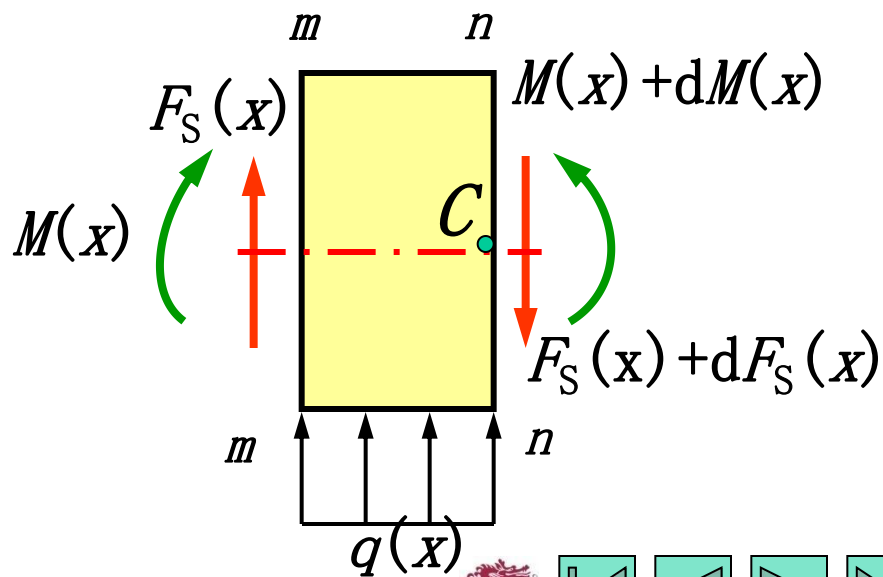
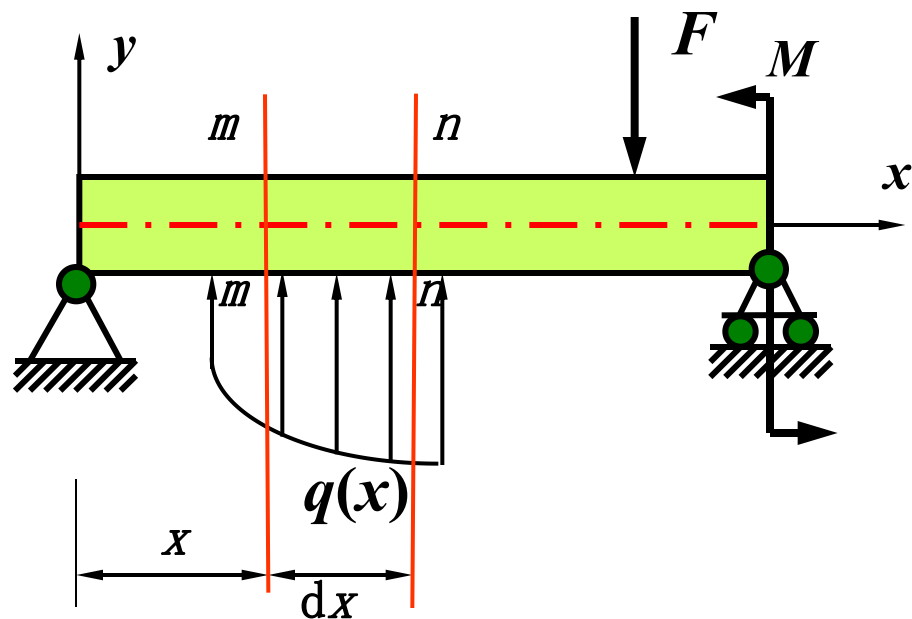
$x+dx$ 截面处 则分别为

$F_S(x) + dF_S(x)$,

$M(x) + dM(x)$.

由于 dx 很小, 略去 $q(x)$

沿 dx 的变化.



写出微段梁的平衡方程

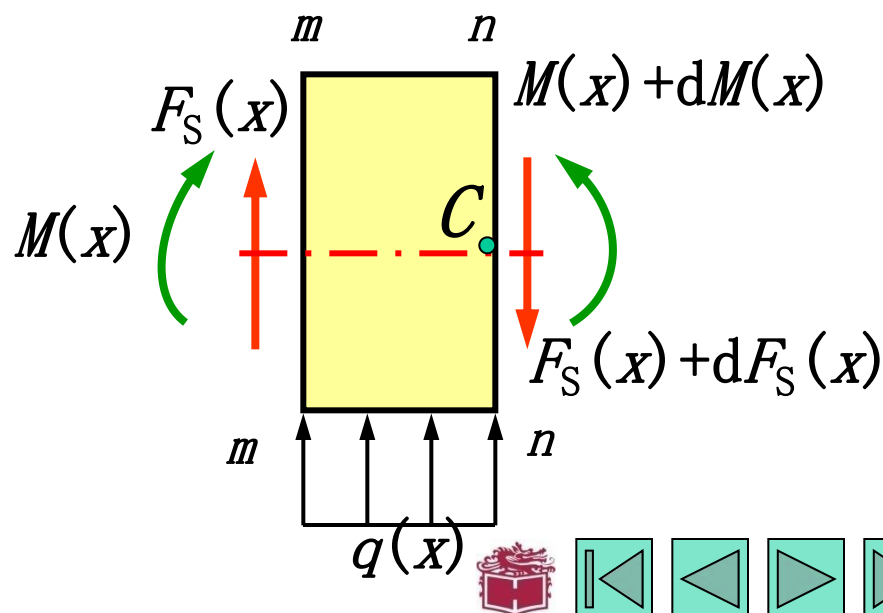
$$\sum F_x = 0 \quad F_S(x) - [F_S(x) + dF_S(x)] + q(x)dx = 0$$

$$\sum M_C = 0 \quad \text{得到} \quad \frac{dF_S(x)}{dx} = q(x)$$

$$[M(x) + dM(x)] - M(x) - F_S(x)dx - q(x)dx \frac{dx}{2} = 0$$

略去二阶无穷小量即得

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_S(x)$$



$$\frac{dF_s(x)}{dx} = q(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_s(x)$$

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = q(x)$$

公式的几何意义

- (1) 剪力图上某点处的切线斜率等于该点处荷载集度的大小；
- (2) 弯矩图上某点处的切线斜率等于该点处剪力的大小；
- (3) 根据 $q(x) > 0$ 或 $q(x) < 0$ 来判断弯矩图的凹凸性。



二、 $q(x)$ 、 $F_S(x)$ 图、 $M(x)$ 图三者间的关系

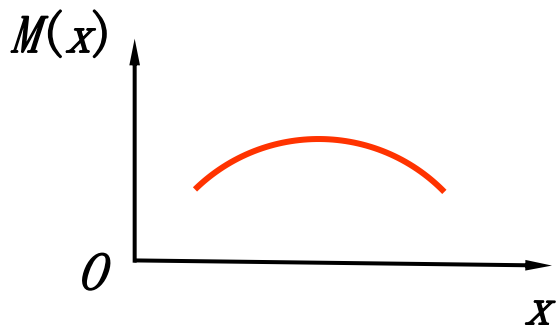
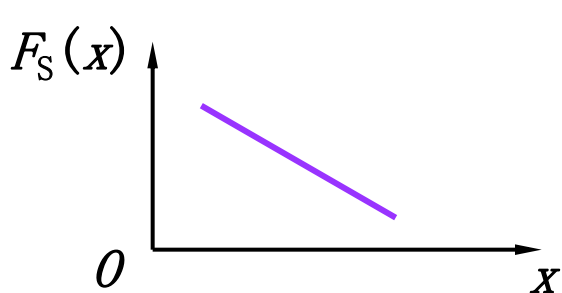
(Relationships between load, shear force, and bending moment diagrams)

1. 梁上有向下的均布荷载, 即 $q(x) < 0$ $\frac{dF_S(x)}{dx} = q(x)$

$F_S(x)$ 图为一向右下方倾斜的直线.

$M(x)$ 图为一向上凸的二次抛物线.

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_S(x)$$



$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = q(x)$$



2. 梁上无荷载区段, $q(x) = 0$

剪力图为一水平直线.

弯矩图为一斜直线.

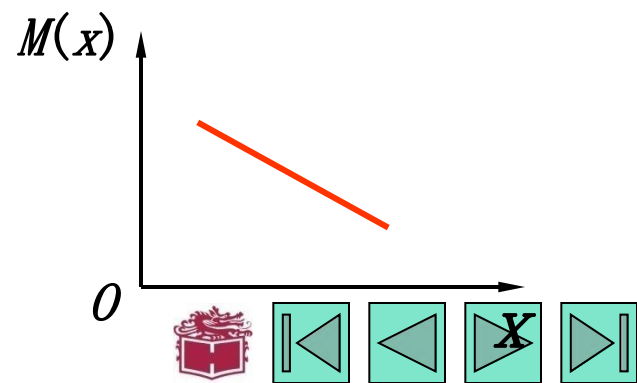
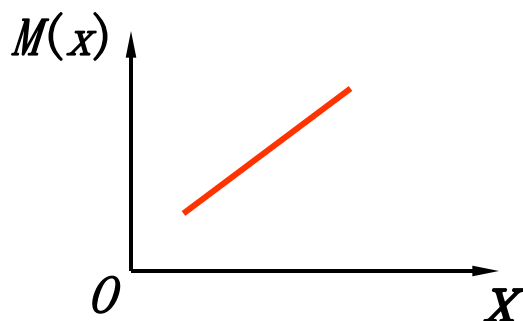
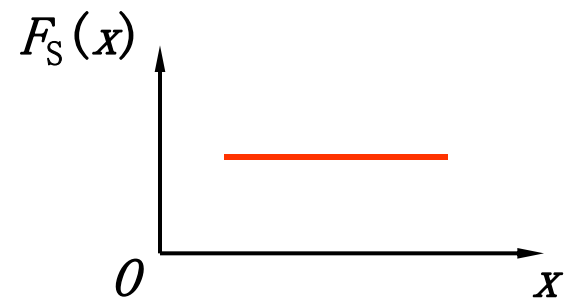
当 $F_S(x) > 0$ 时, 向右上方倾斜.

当 $F_S(x) < 0$ 时, 向右下方倾斜.

$$\frac{dF_S(x)}{dx} = q(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_S(x)$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x)$$



3. 在集中力作用处剪力图有突变, 其突变值等于集中力的值. 弯矩图有转折.

$$\frac{dF_s(x)}{dx} = q(x)$$

4. 在集中力偶作用处弯矩图有突变, 其突变值等于集中力偶的值, 但剪力图无变化.

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_s(x)$$

5. 最大剪力可能发生在集中力所在截面的一侧; 或分布载荷发生变化的区段上.

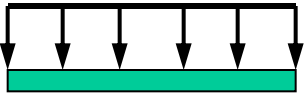

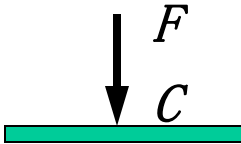
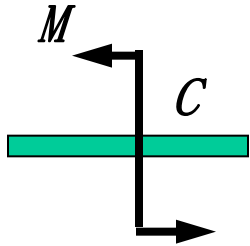


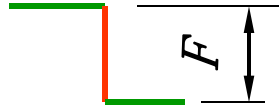
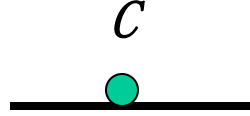



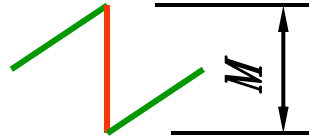


$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x)$$

梁上最大弯矩 M_{\max} 可能发生在

$F_s(x) = 0$ 的截面上; 或发生在集中力所在的截面上; 或集中力偶作用处的一侧.



表 4-1 在几种荷载下剪力图与弯矩图的特征

一段梁上的外力情况	向下的均布荷载 $q < 0$ 	无荷载 	集中力 	集中力偶 
剪力图的特征	向下倾斜的直线 	水平直线 	在C处有突变 	在C处无变化 
弯矩图的特征	上凸的二次抛物线 	一般斜直线 或 	在C处有转折 	在C处有突变 
M_{\max} 所在截面的可能位置	在 $F_S = 0$ 的截面		在剪力突变的截面 	在紧靠C的某一侧截面 

三、分布荷载集度、剪力和弯矩之间的积分关系 (Integral relationships between load, shear force, and bending moment)

$$\frac{dF_s(x)}{dx} = q(x)$$

若在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 处两个横截面无集中力则

$$\int_{x_1}^{x_2} dF_s(x) = \int_{x_1}^{x_2} q(x)dx$$

$$F_s(x_2) - F_s(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} q(x)dx$$

$$F_s(x_2) - F_s(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} q(x)dx$$



$$F_S(x_2) - F_S(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx$$

式中, $F_S(x_1)$ 、 $F_S(x_2)$ 分别为在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 处两个横截面上的剪力.

等号右边积分的几何意义是 x_1 、 x_2 两横截面间分布荷载图的面积.

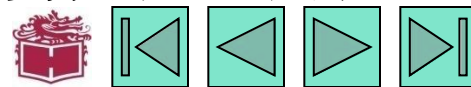
$$\frac{dM(x)}{dx} = F_S(x)$$

若横截面 $x=x_1$ 、 $x=x_2$ 间无集中力偶作用则得

$$M(x_2) - M(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} F_S(x) dx$$

式中 $M(x_1)$ 、 $M(x_2)$ 分别为在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 处两个横截面上的弯矩.

等号右边积分的几何意义是 x_1 、 x_2 两个横截面间剪力图的面积.



四、利用弯矩、剪力、载荷集度关系画图

1. 当某一段梁上没有载荷作用时，该段梁的剪力图为水平直线；弯矩图为斜直线，其斜率等于剪力值，即，剪力大于0，弯矩图向上斜，剪力小于0，则向下倾斜

2. 当某一段梁上作用均布载荷，则该段梁的剪力图是斜直线，斜率等于均布载荷值，即，均布载荷大于0

（向上），则剪力向上斜，均布载荷小于0（向下），则剪力图也向下倾斜；弯矩图为抛物线，抛物线开口取决于均布载荷，若均布载荷大于0，则抛物线开口向上，且若此时剪力也大于0，则抛物线为开口向上的右半枝，若剪力小于0，则为左半枝；如均布载荷小于0，则抛物线开口向下，且剪力大于0，为左半枝，剪力小于0，为开口向下的右半枝



3. 若梁上某点作用集中力，则该点的剪力图发生间断，函数的间断值等于集中力大小，该力大于0，则函数向上跳跃，力小于0，则函数向下跳跃；该点的弯矩图出现拐点，函数连续而导数不连续。
4. 若梁上某点作用有集中力偶，则该点的剪力图没有影响；弯矩图发生间断，函数的间断值等于集中力偶大小，若该力偶大于0，则弯矩函数向上跳跃，力偶小于0，则弯矩函数向下跳跃



- 5. 梁上某点的弯矩值，等于梁（左方）前一点处的弯矩值加上剪力图在该2点之间所围的面积
- 6. 剪力等于0处，对应于弯矩的某个极值
- 7. 梁的最大弯矩，可能发生在下列点：极值点、集中力偶作用点，左右端点



例5-9一简支梁受两个力 F 作用, 如图所示. 已知 $F= 25.3\text{kN}$, 有关尺寸如图所示. 试用本节所述关系作剪力图和弯矩图.

解: (1) 求梁的支反力

$$F_{RA} = 23.6\text{kN} \quad F_{RB} = 27\text{kN}$$

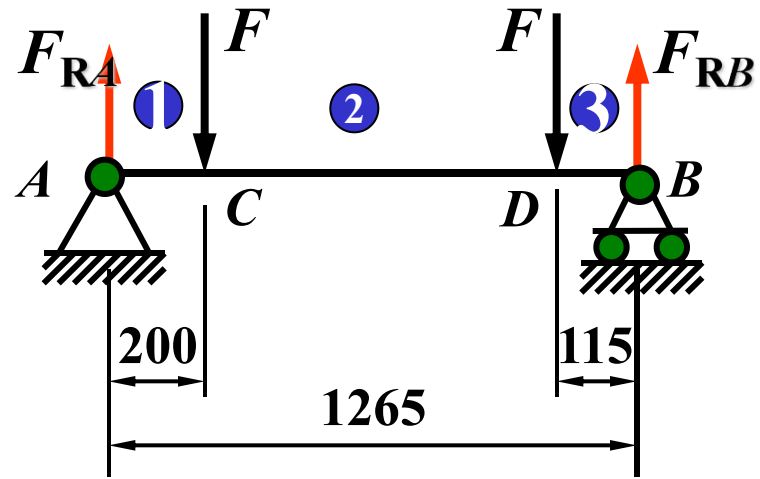
将梁分为 AC 、 CD 、 DB 三段.

每一段均属无载荷区段.

(2) 剪力图

每段梁的剪力图均为水平直线

$$AC\text{段} \quad F_{SA\text{右}} = F_{RA} = 23.6\text{kN}$$



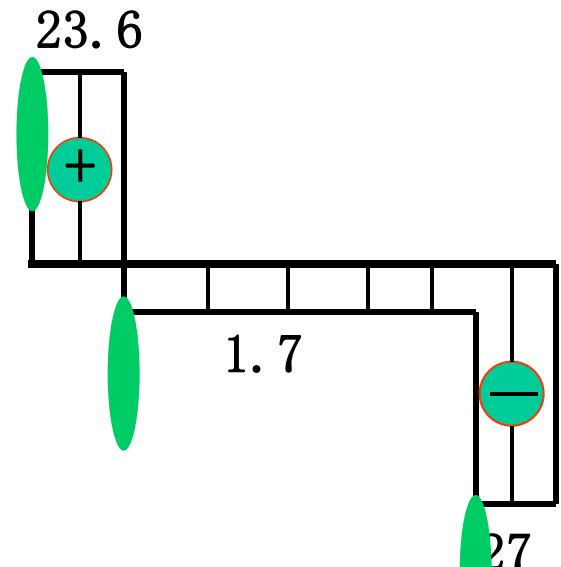
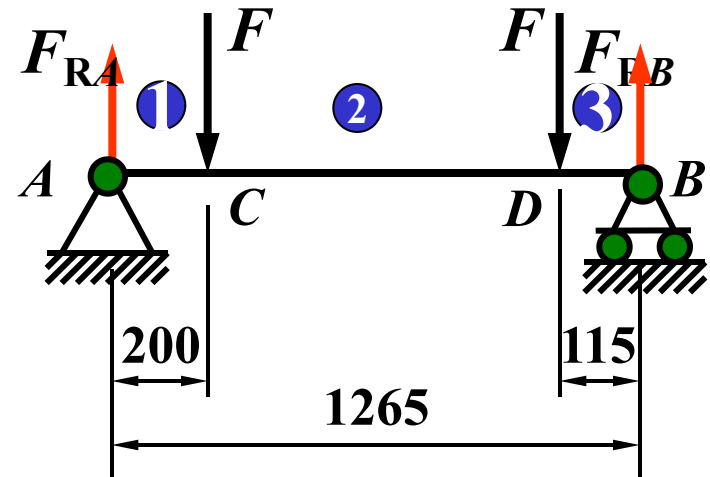
*CD*段 $F_{SC右} = F_{RA} - F = -1.7\text{kN}$

*DB*段 $F_{SD右} = -F_{RB} = -27\text{kN}$

$F_{SB右} = 0\text{kN}$

最大剪力发生在*DB*段中的任一横截面上

$F_{Smax} = 27\text{kN}$



(3) 弯矩图

每段梁的弯矩图均为斜直线. 且梁上无集中力偶.

$$M_A = 0$$

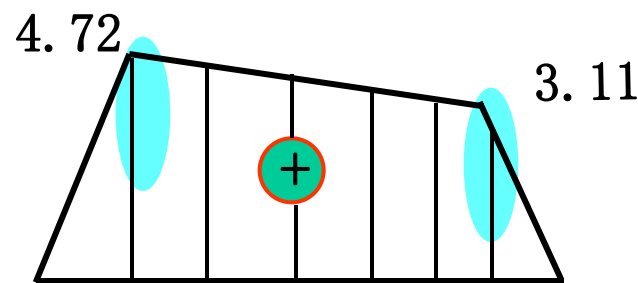
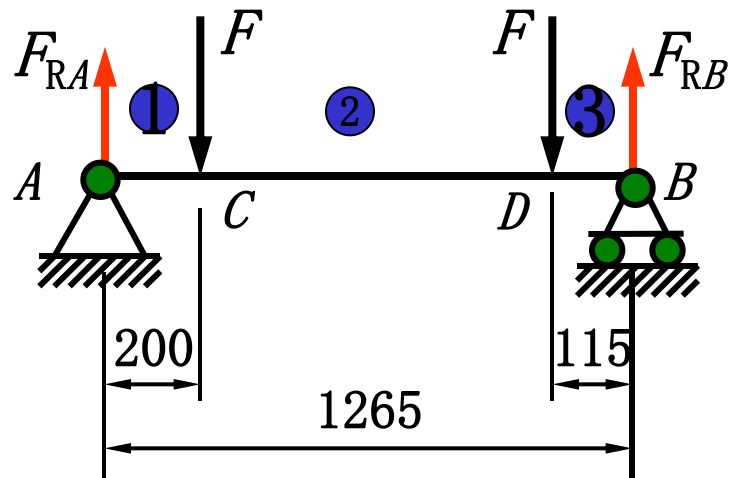
$$M_C = F_{RA} \times 0.2 = 4.72 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_D = F_{RB} \times 0.115 = 3.11 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_B = 0$$

最大弯矩发生在 C 截面

$$M_{\max} = 4.72 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



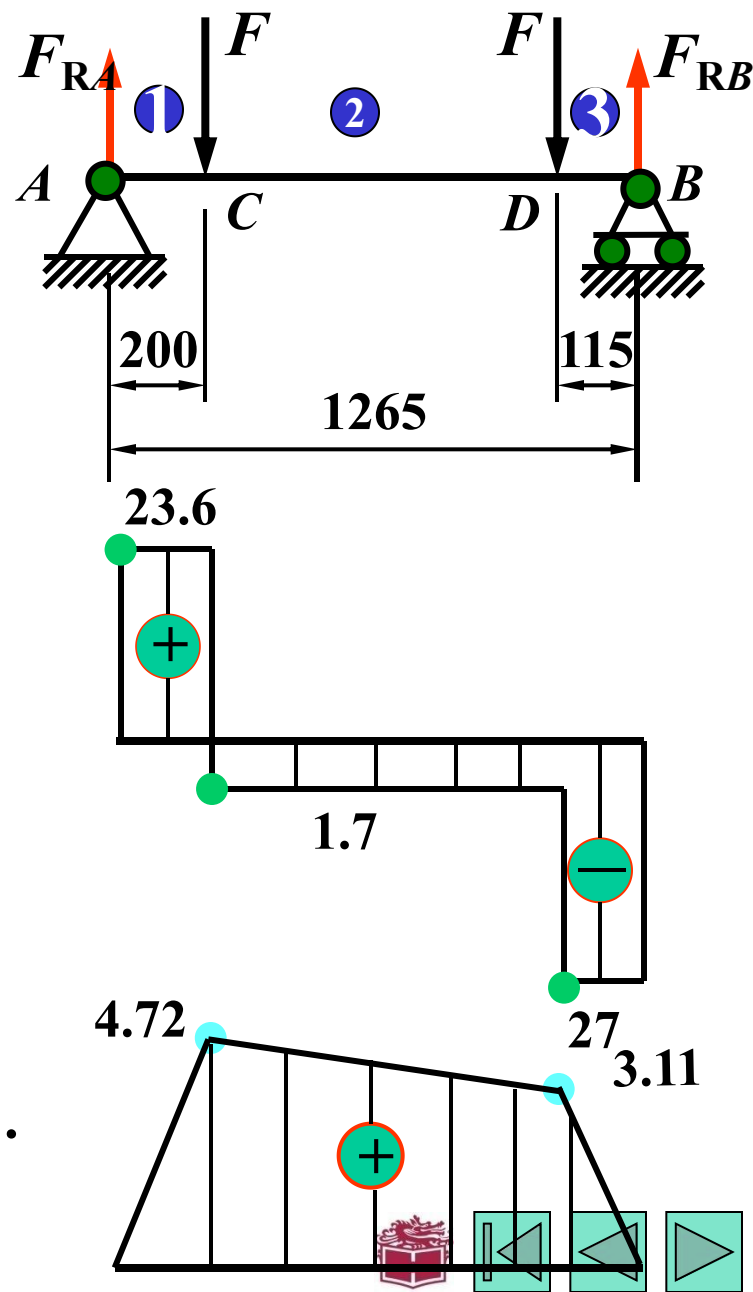
(4) 对图形进行校核

在集中力作用的 C, D 两点剪力图发生突变, 突变值 $F=25.3\text{kN}$. 而弯矩图有尖角.

在 AC 段剪力为正值, 弯矩图为向上倾斜的直线.

在 CD 和 DB 段, 剪力为负值, 弯矩图为向下倾斜的直线.

最大弯矩发生在剪力改变正、负号的 C 截面. 说明剪力图和弯矩图是正确的.



例5-10 一简支梁受均布荷载作用，其集度 $q=100\text{kN/m}$ ，如图所示. 试用简易法作此梁的剪力图和弯矩图.

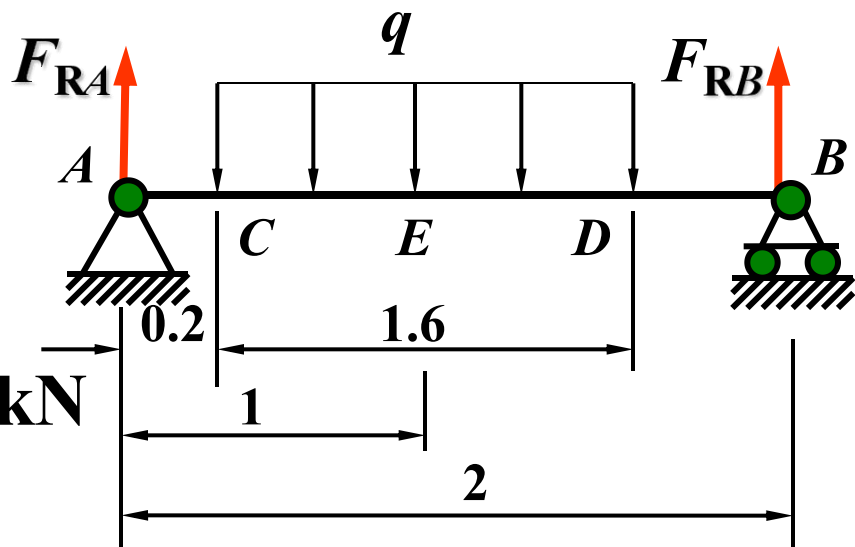
解：

(1) 计算梁的支反力

$$F_{RA} = F_{RB} = 0.5 \times 100 \times 1.6 = 80\text{kN}$$

将梁分为 AC 、 CD 、 DB 三段.

AC 和 DB 上无荷载， CD 段有向下的均布荷载.



(2) 剪力图

AC段 水平直线

$$F_{SA右} = F_{RA} = 80\text{kN}$$

CD段 向右下方的斜直线

$$F_{SC} = F_{RA} = 80\text{kN}$$

$$F_{SD} = -F_{RB} = -80\text{kN}$$

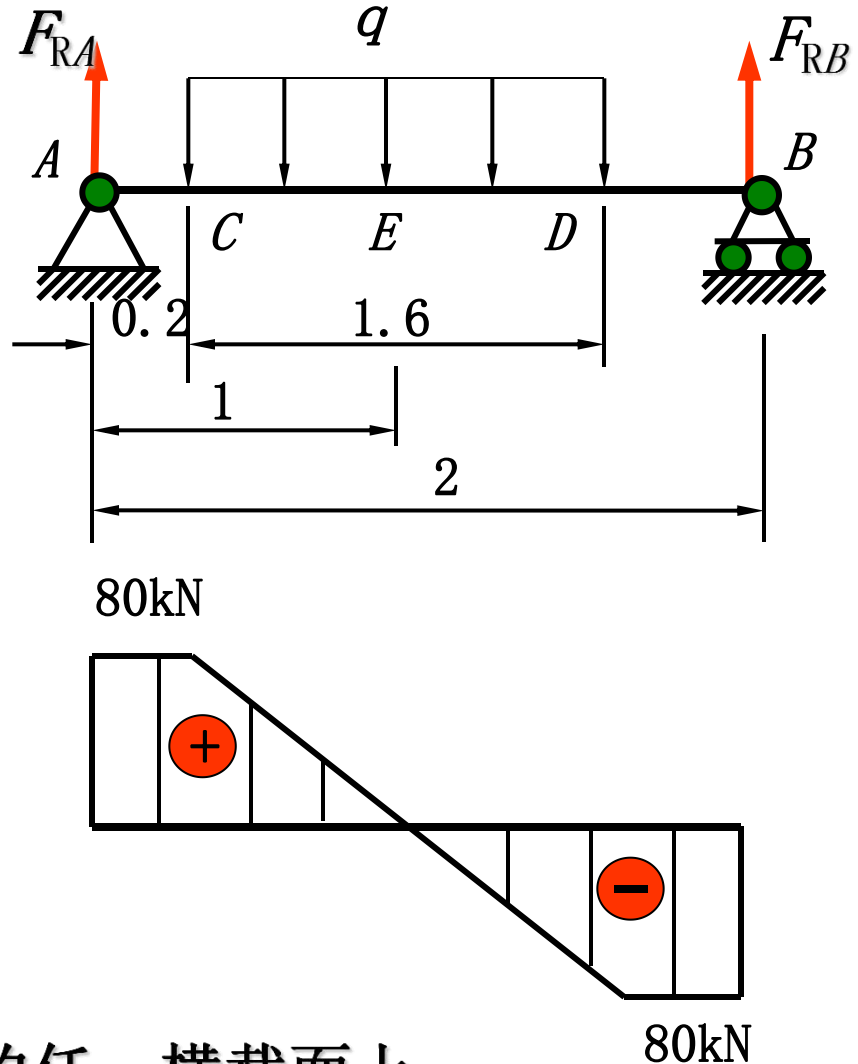
DB段 水平直线

$$F_{SB左} = -F_{RB} = -80\text{kN}$$

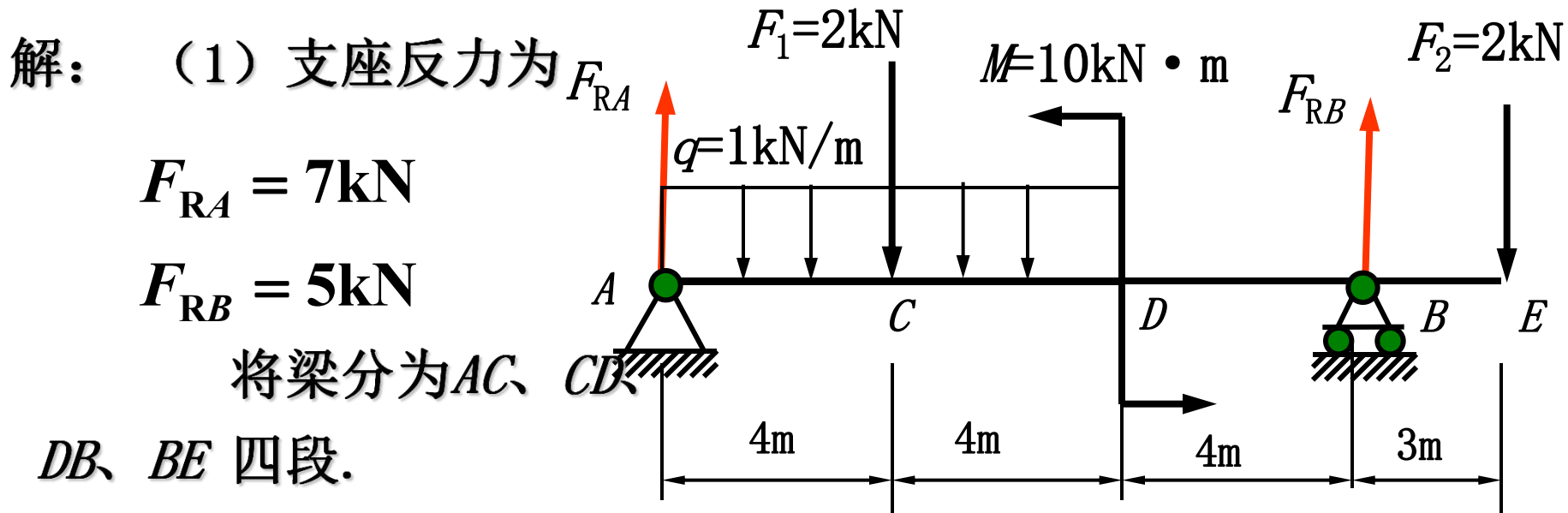
$$F_{SB右} = 0\text{kN}$$

最大剪力发生在 AC 和 DB 段的任一横截面上.

$$F_{S\max} = 80\text{kN}$$



例5-11 梁尺寸与载荷如图，作梁的内力图.



(2) 剪力图

AC 段 向下斜的直线 (\searrow)

$$F_{SA右} = F_{RA} = 7\text{kN} \quad F_{SC左} = F_{RA} - 4q = 3\text{kN}$$

CD 段 向下斜的直线

$$(\searrow) F_{SC右} = F_{RA} - 4q - F_1 = 1\text{kN} \quad F_{SD} = F_2 - F_{RB} = -3\text{kN}$$



AC段 向下斜的直线 (↘)

$$F_{SA右} = 7\text{kN}$$

$$F_{SC左} = 3\text{kN}$$

CD段 向下斜的直线 (↘)

$$F_{SC右} = 1\text{kN}$$

$$F_{SD} = -3\text{kN}$$

DB段 水平直线 (-)

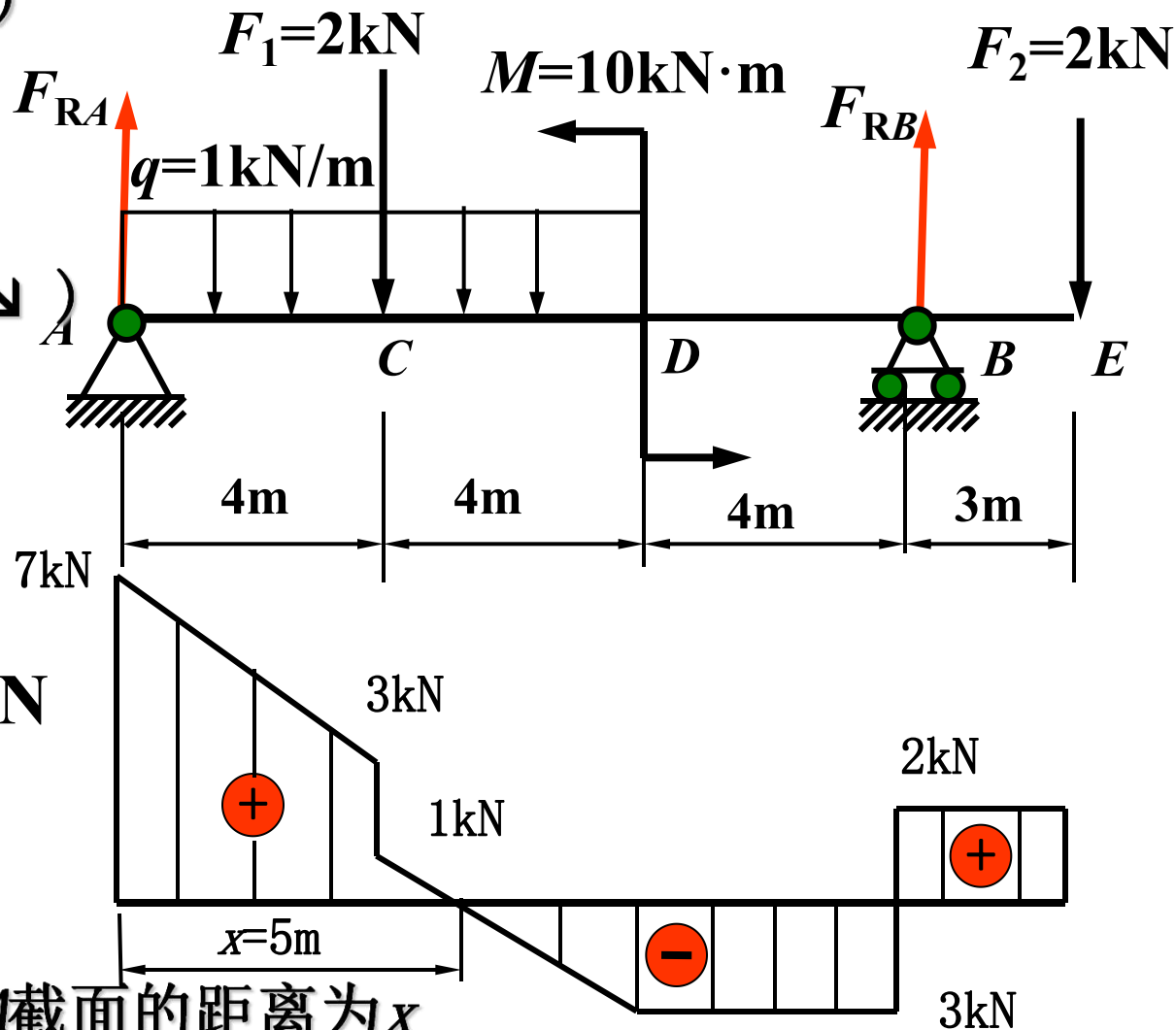
$$F_S = F_2 - F_{RB} = -3\text{kN}$$

EB段 水平直线 (-)

$$F_{SB右} = F_2 = 2\text{kN}$$

F点剪力为零, 令其距 A截面的距离为x

$$F_{Sx} = F_{RA} - qx - F_1 = 0 \quad x = 5\text{m}$$



(3) 弯矩图

AC段 $M_A = 0$

$$M_C = 4F_{RA} - \frac{q}{2}4^2 = 20$$

CD段

$$M_{D左} = -7F_2 + 4F_{RB} + M = 16$$

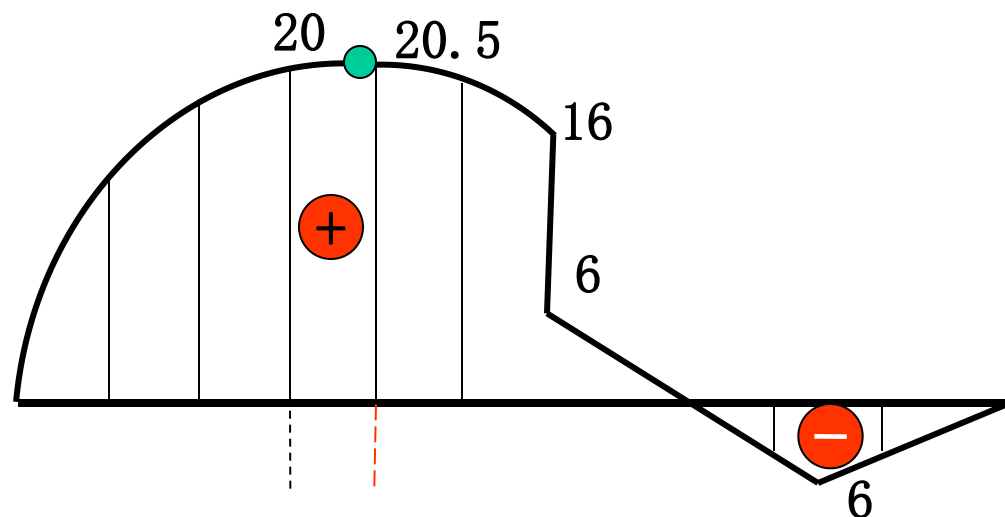
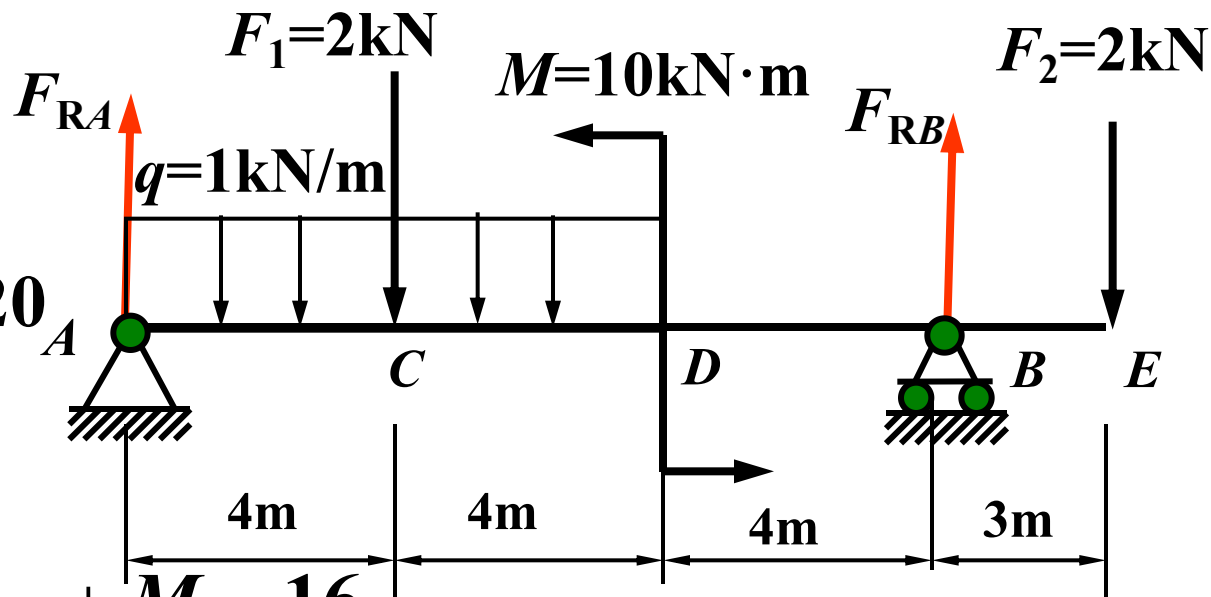
$$M_{\max} = M_F = 20.5$$

DB段

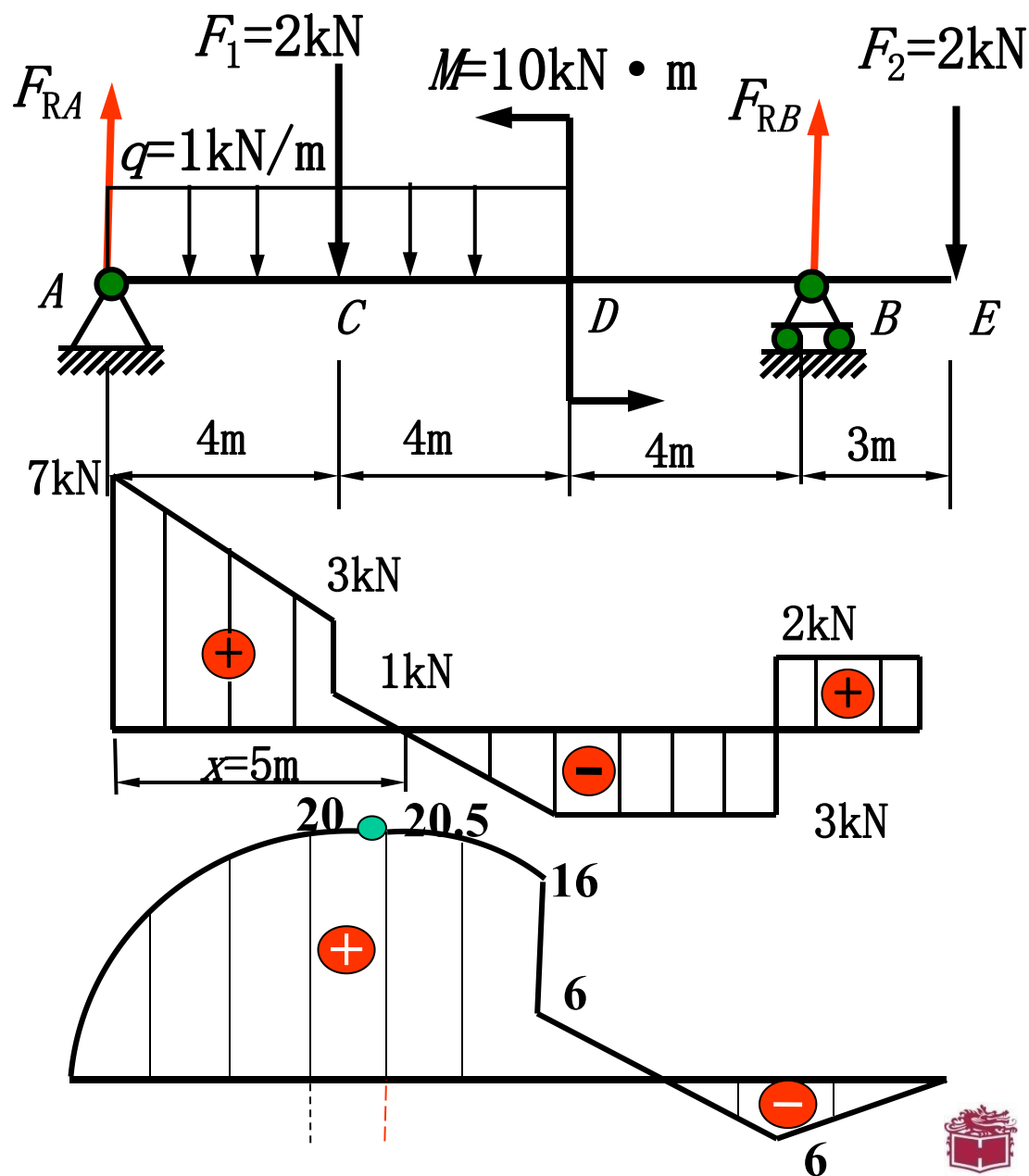
$$M_{D右} = -7F_2 + 4F_{RB} = 6$$

$$M_B = -3F_2 = -6$$

BE段 $M_E = 0$



(4) 校核



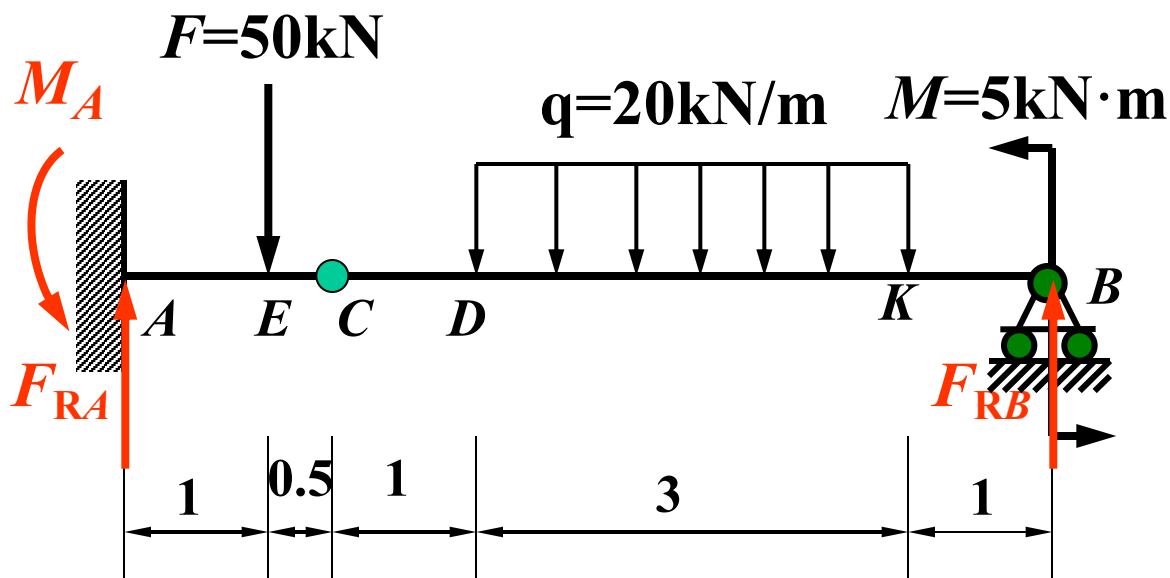
例5-12 用简易法作组合梁的剪力图和弯矩图.

解： 支座反力为

$$F_{RA} = 81 \text{ kN}$$

$$F_{RB} = 29 \text{ kN}$$

$$M_A = 96.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



将梁分为 AE, EC, CD, DK, KB 五段。



(1) 剪力图

AE段 水平直线

$$F_{SA右} = F_{SE左} = F_{RA} = 81\text{kN}$$

ED 段 水平直线

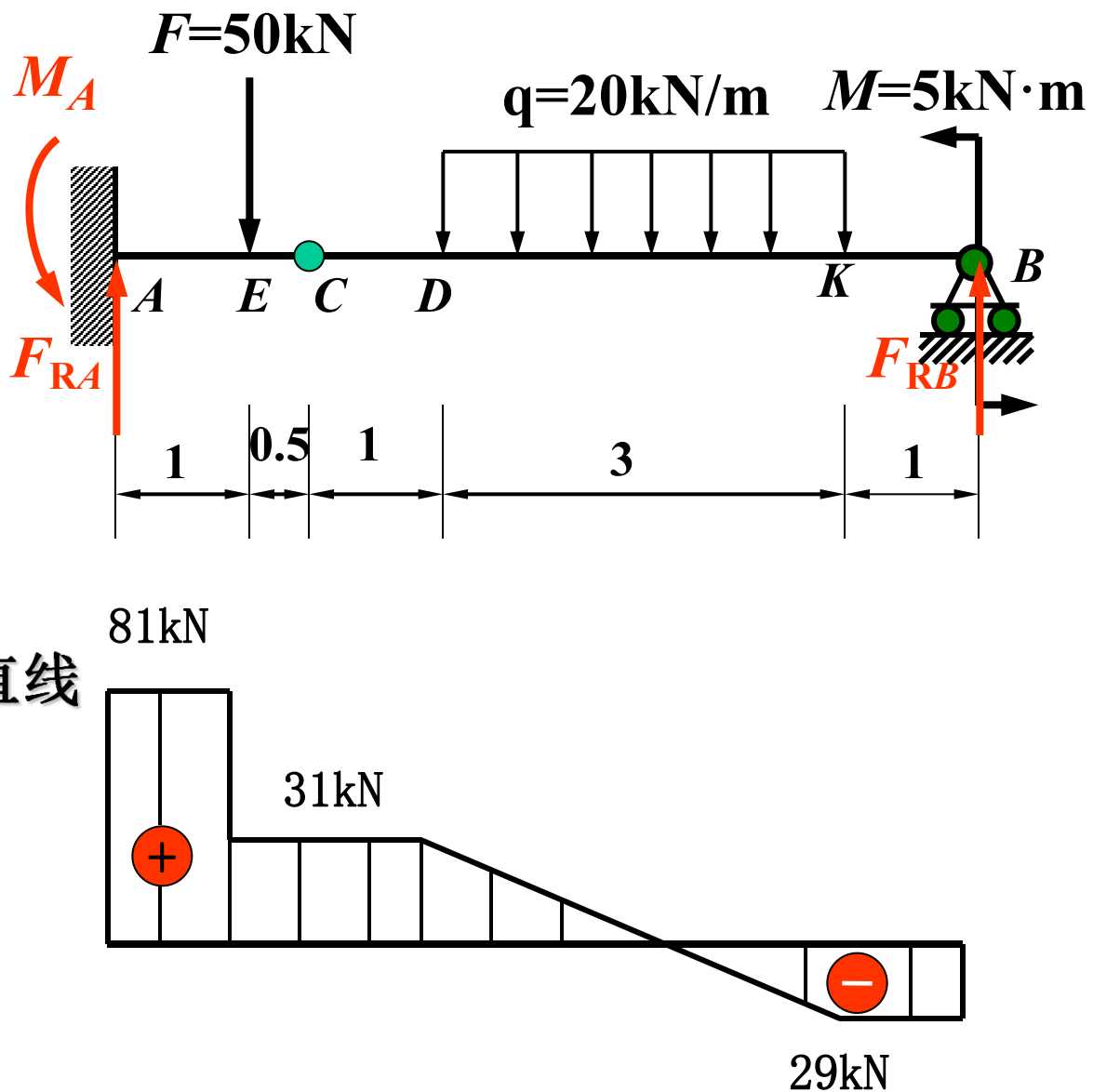
$$F_{SE右} = F_{RA} - F = 31\text{kN}$$

DK 段 向右下方倾斜的直线

$$F_{SK} = -F_{RB} = -29\text{kN}$$

KB 段 水平直线

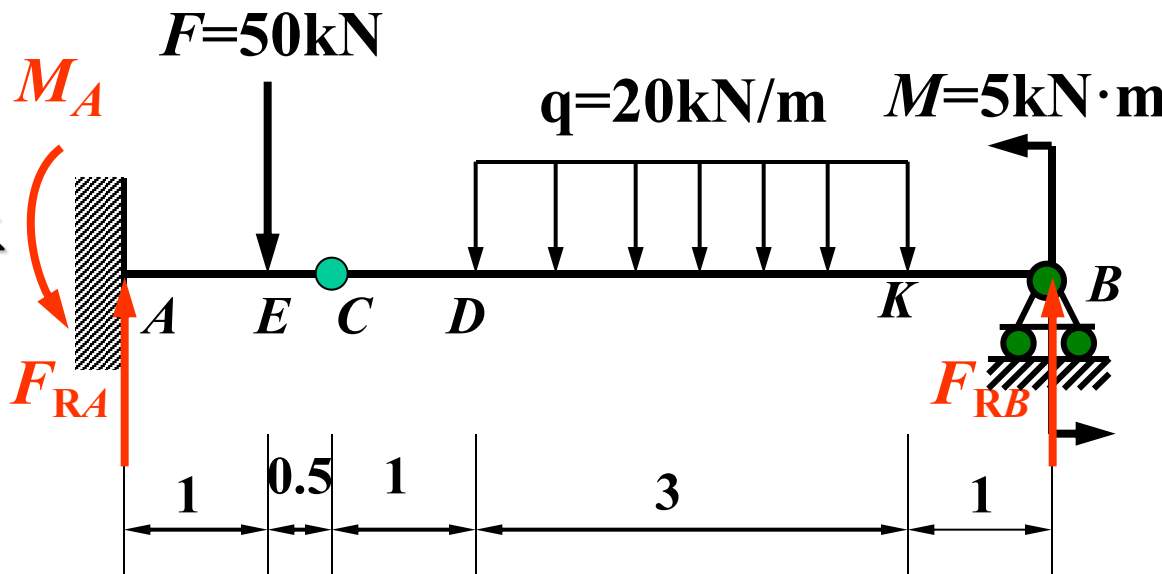
$$F_{SB左} = -F_{RB} = -29\text{kN}$$



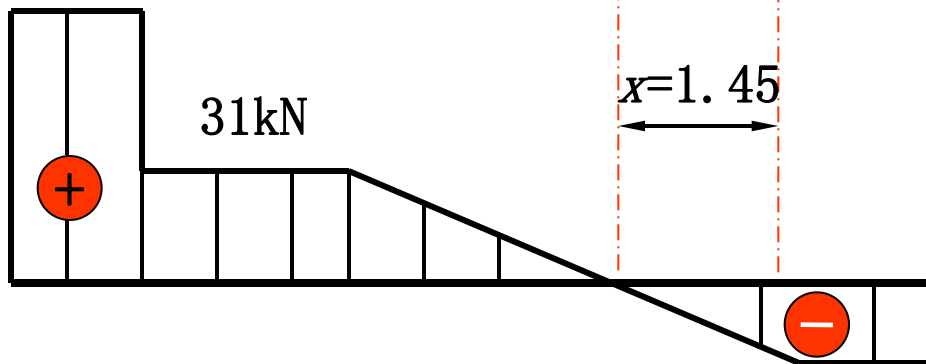
设距K截面为 x 的截面上
剪力 $F_S = 0$. 即

$$F_{Sx} = -F_{RB} + qx = 0$$

$$x = \frac{F_{RB}}{q} = 1.45\text{m}$$



81kN



29kN



(2) 弯矩图

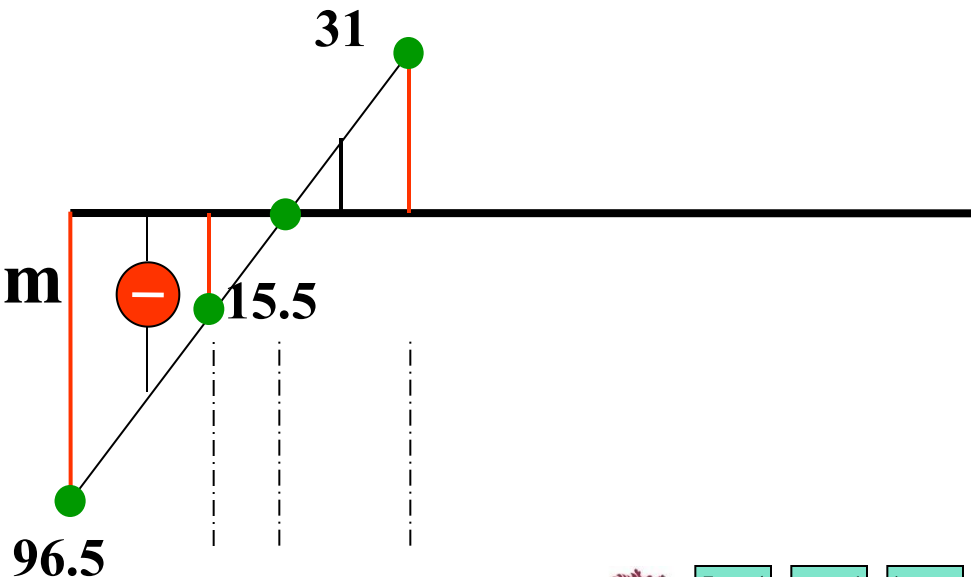
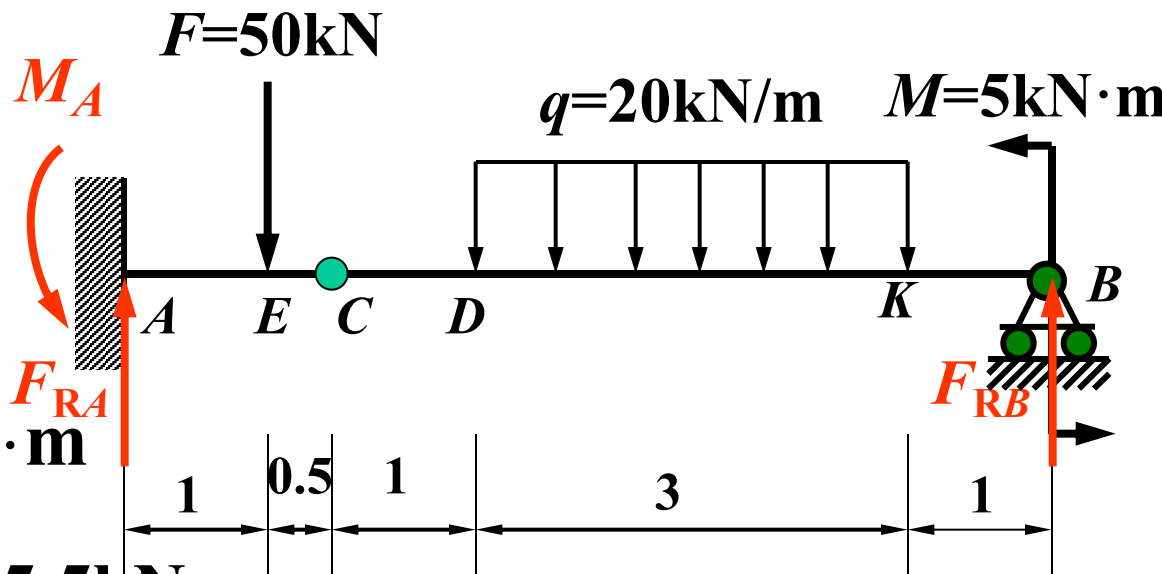
AE , EC , CD 梁段均为向上倾斜的直线

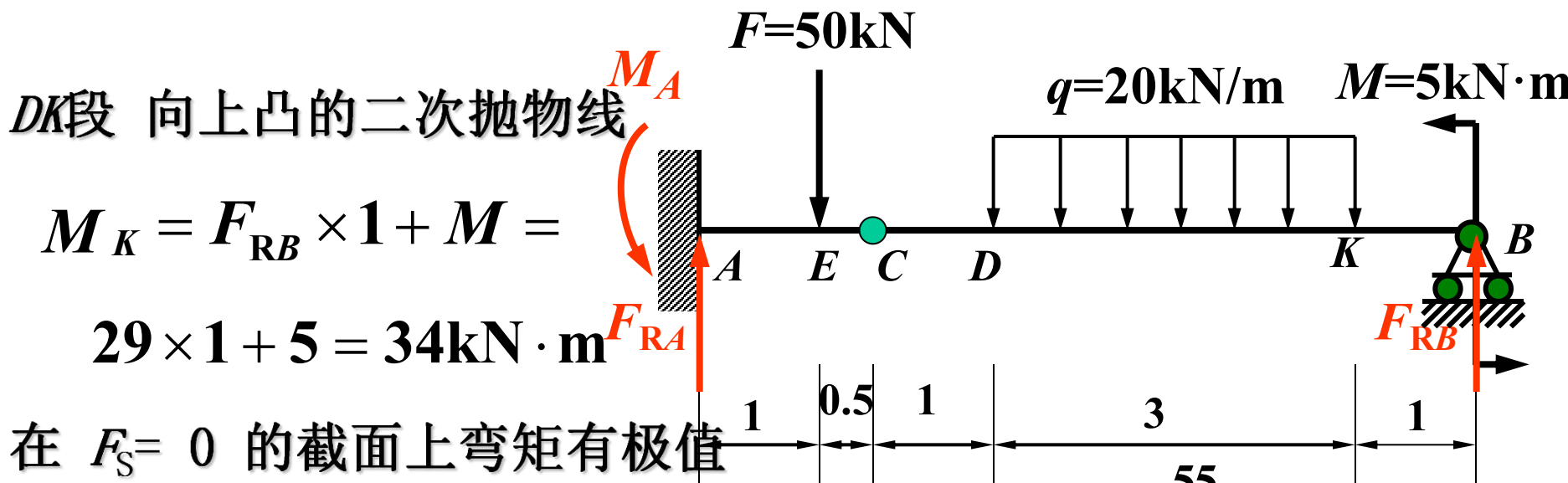
$$M_{A\text{右}} = -M_A = -96.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_E = M_A + 81 \times 1 = -15.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_C = M_E + 31 \times 0.5 = 0$$

$$M_D = M_C + 31 \times 1 = 31 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



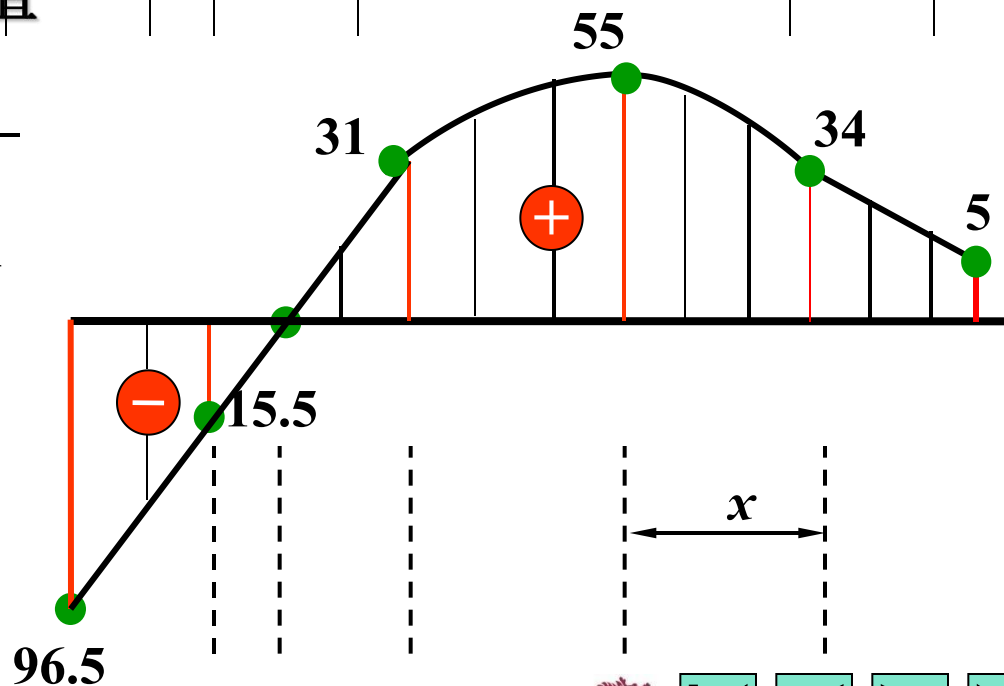


$$M_{\max} = F_{RB} \times 2.45 + M - \frac{q}{2} \times 1.45^2 = 55\text{kN}\cdot\text{m}$$

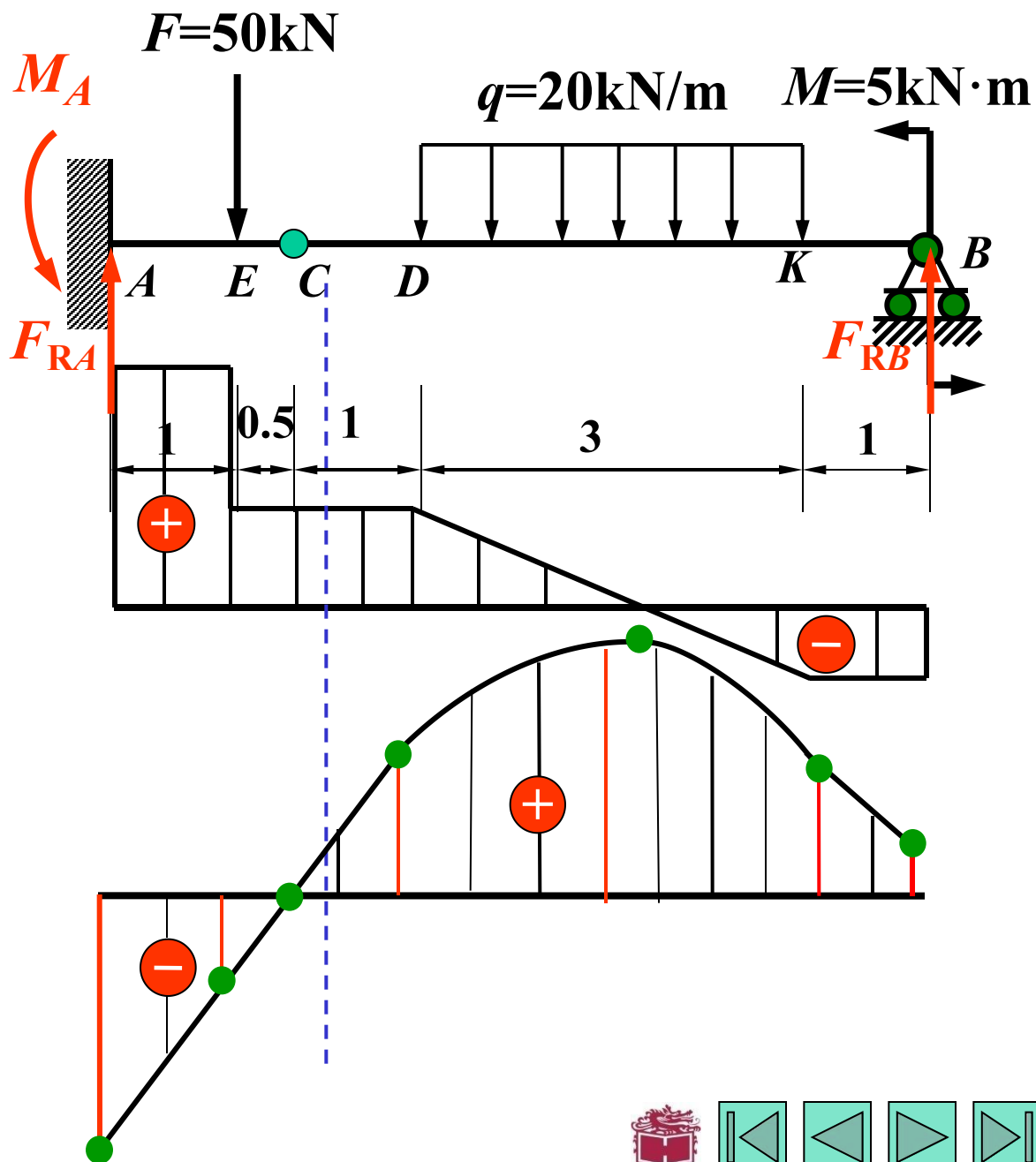
KB 段 向下倾斜的直线

$$M_{B\text{左}} = M = 5\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{B\text{右}} = 0$$



中间铰链传递剪力(铰链左, 右两侧的剪力相等);
但不传递弯矩(铰链处弯矩必为零).



5.4 静矩、惯性矩和惯性积

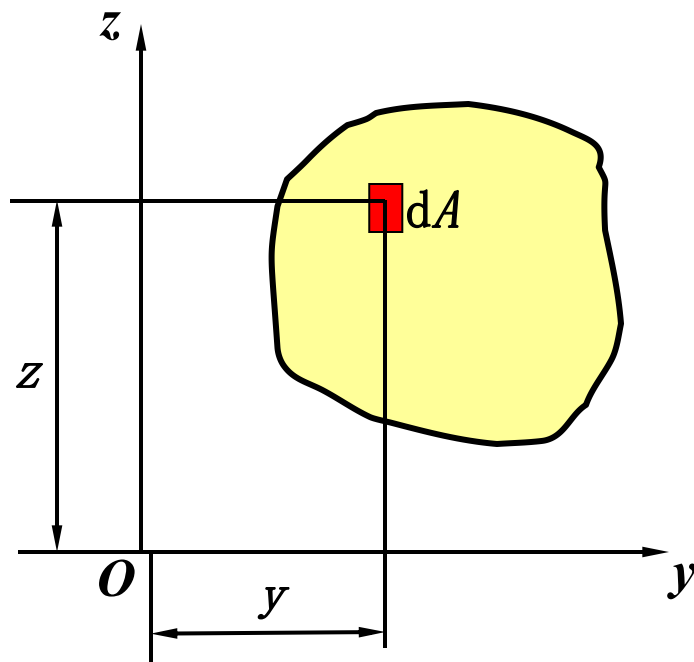
一、静矩(The first moment of the area)

截面对 y , z 轴的静矩为

$$S_y = \int_A z dA$$

$$S_z = \int_A y dA$$

静矩可正，可负，也可能等于零.

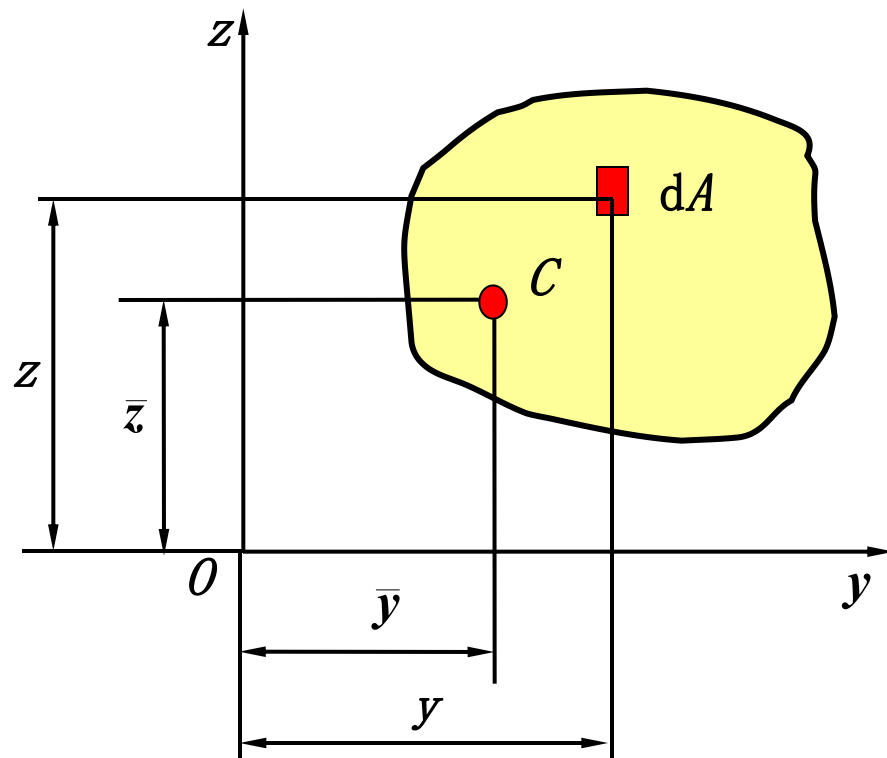


二、截面的形心(Centroid of an area)

$$\bar{z} = \frac{\int_A z dA}{A} = \frac{S_y}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A y dA}{A} = \frac{S_z}{A}$$

$$S_y = A\bar{z} \quad S_z = A\bar{y}$$



(1) 若截面对某一轴的静矩等于零，则该轴必过形心.

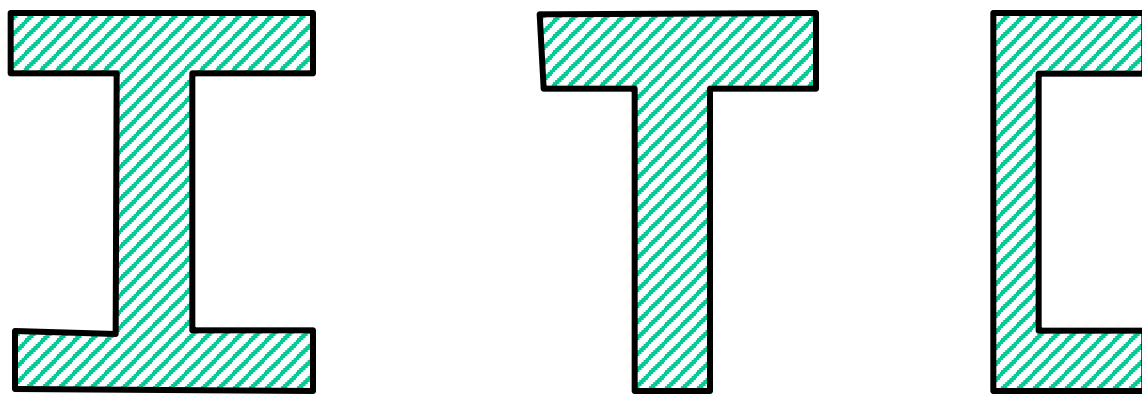
(2) 截面对形心轴的静矩等于零.



三、组合截面的静矩和形心

(The first moments & centroid of a composite area)

由几个简单图形组成的截面称为组合截面.



截面各组成部分对于某一轴的静矩之代数和，等于该截面对于同一轴的静矩.



1. 组合截面静矩 (The first moments of a composite area)

$$S_y = \sum_{i=1}^n A_i \bar{z}_i \quad S_z = \sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i$$

其中 A_i — 第 i 个简单截面面积

(\bar{z}_i, \bar{y}_i) — 第 i 个简单截面的形心坐标

2. 组合截面形心 (Centroid of a composite area)

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \bar{z}_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$



例5-13 试确定图示截面形心 C 的位置.

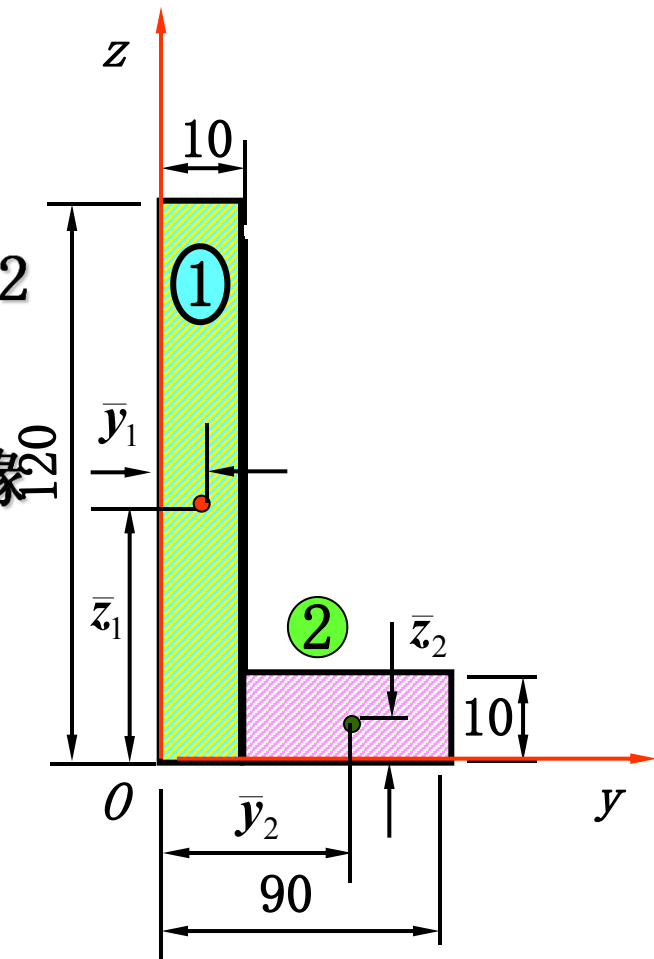
解: 组合图形, 用正负面积法解之.

方法1 用正面积法求解. 将截面分为1, 2两个矩形.

取 z 轴和 y 轴分别与截面的底边和左边缘重合

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{A_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2}{A_1 + A_2}$$

$$\bar{z} = \frac{A_1 \bar{z}_1 + A_2 \bar{z}_2}{A_1 + A_2}$$



图(a)



矩形 1 $A_1 = 10 \times 120 = 1200 \text{mm}^2$

$$\bar{y}_1 = 5 \text{mm} \quad \bar{z}_1 = 60 \text{mm}$$

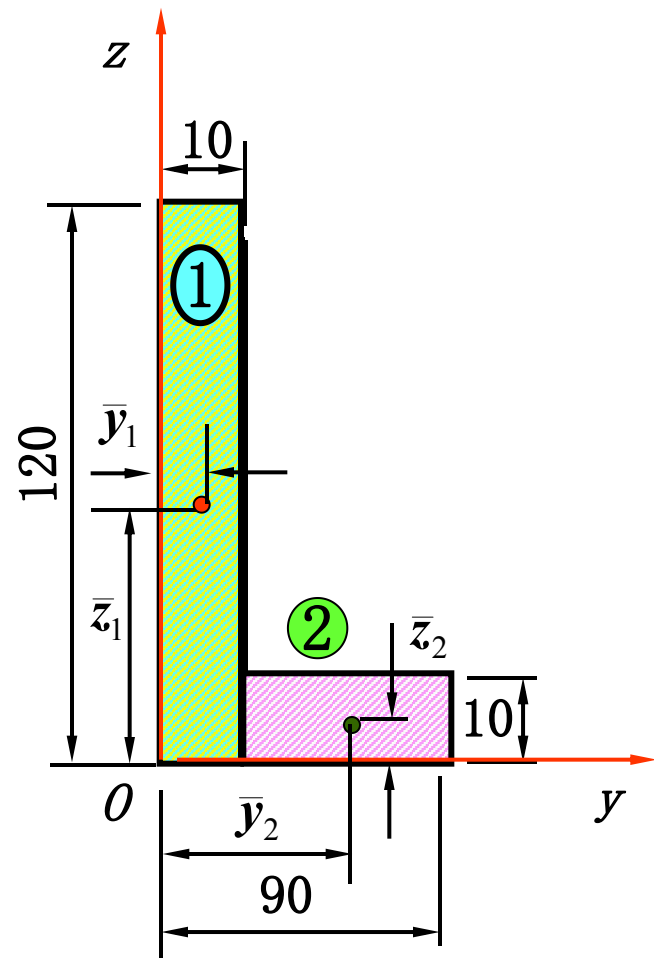
矩形 2 $A_2 = 10 \times 80 = 800 \text{mm}^2$

$$\bar{y}_2 = 10 + \frac{80}{2} = 50 \text{mm}$$

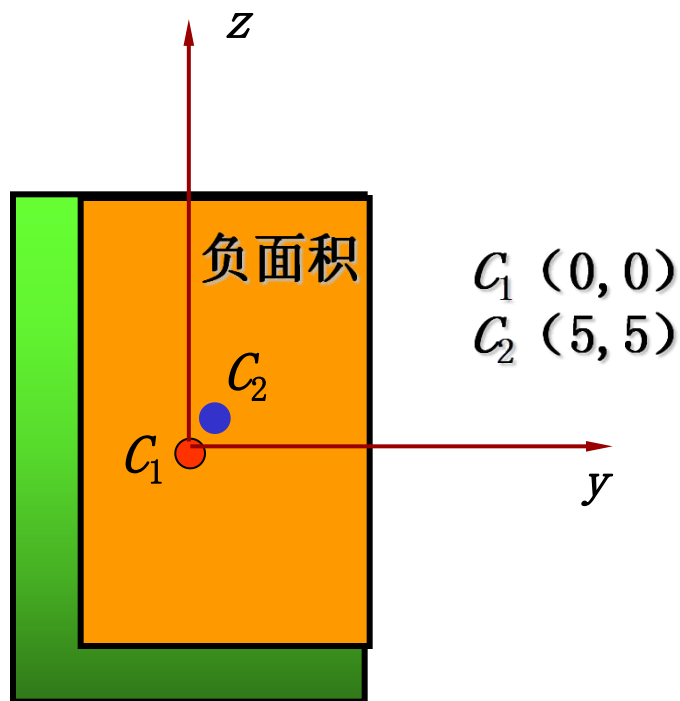
$$\bar{z}_2 = 5 \text{mm}$$

所以 $\bar{y} = \frac{A_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2}{A_1 + A_2} = 23 \text{mm}$

$$\bar{z} = \frac{A_1 \bar{z}_1 + A_2 \bar{z}_2}{A_1 + A_2} = 38 \text{mm}$$



方法2 用负面积法求解，图形分割及坐标如图(b)



图(b)

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{A} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2}{A_1 + A_2} =$$
$$\frac{5 \times (-80 \times 110)}{120 \times 90 - 80 \times 110} = -22$$

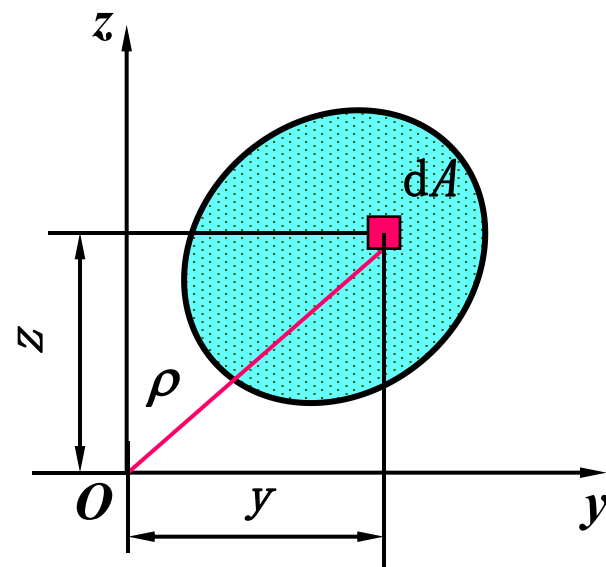


二、极惯性矩、惯性矩、惯性积

1. 惯性矩 (Moment of inertia)

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

$$I_z = \int_A y^2 dA$$



2. 极惯性矩 (Polar moment of inertia)

$$I_P = \int_A \rho^2 dA \quad \rho^2 = z^2 + y^2 \quad I_P = \int_A \rho^2 dA$$

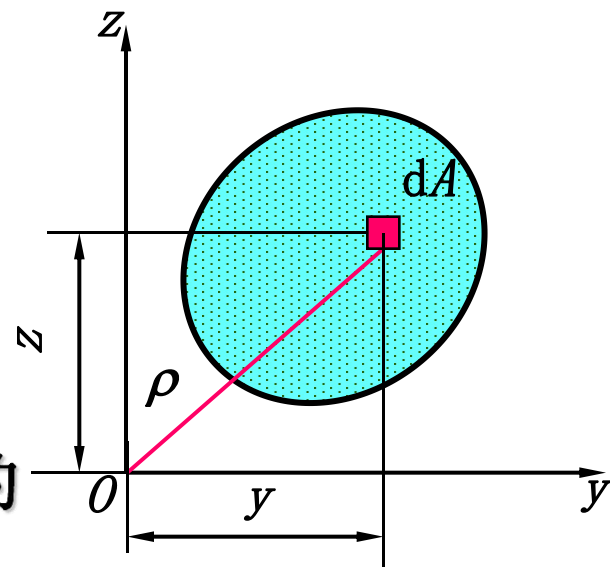
所以 $I_P = I_z + I_y$



3. 惯性积 (Product of inertia)

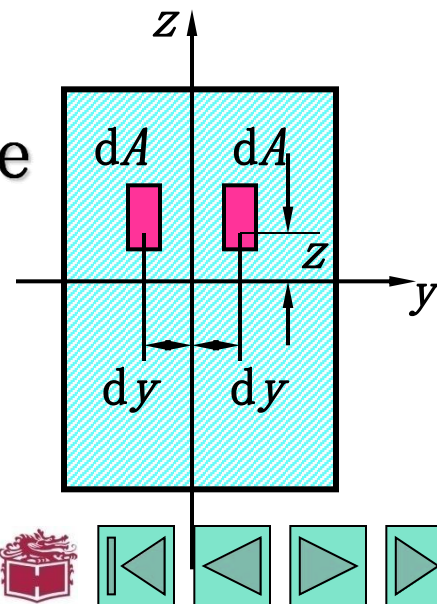
$$I_{yz} = \int_A yz dA$$

- (1) 惯性矩的数值恒为正, 惯性积则可能为正值, 负值, 也可能等于零;
- (2) 若 y, z 两坐标轴中有一个为截面的对称轴, 则截面对 y, z 轴的惯性积一定等于零.



4. 惯性半径 (Radius of gyration of the area)

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$



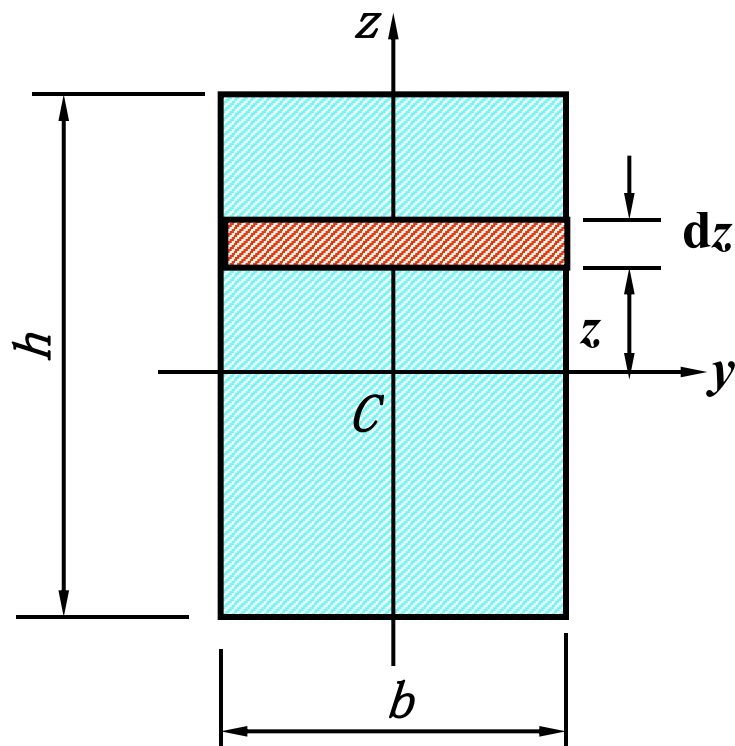
例5-14 求矩形截面对其对称轴 y , z 轴的惯性矩.

解:
$$I_y = \int_A z^2 dA$$

$$dA = b dz$$

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b z^2 dz = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_z = \frac{hb^3}{12}$$



例5-14 求圆形截面对其对称轴的惯性矩.

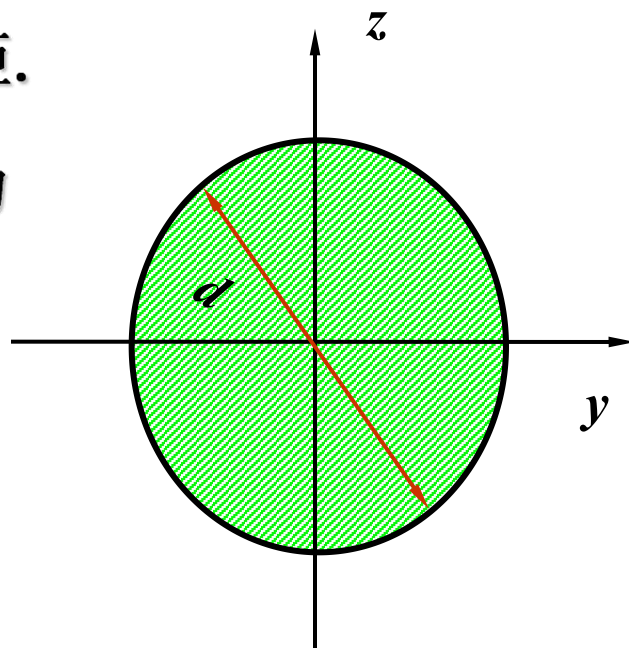
解: 因为截面对其圆心 O 的极惯性矩为

$$I_P = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$I_y + I_z = I_P$$

$$I_y = I_z$$

所以
$$I_y = I_z = \frac{\pi d^4}{64}$$



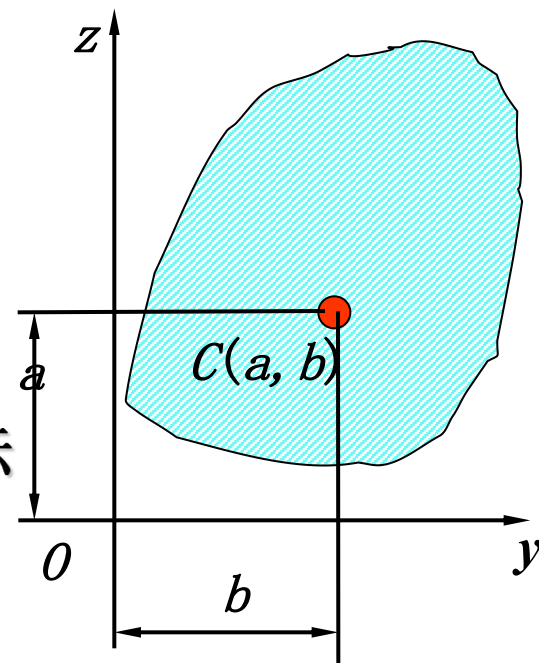
5.5 平行移轴公式

一、平行移轴公式 (Parallel-Axis theorem for moment of inertia)

y, z — 任意一对坐标轴

C — 截面形心

(a, b) — 形心 C 在 yOz 坐标系下的坐标

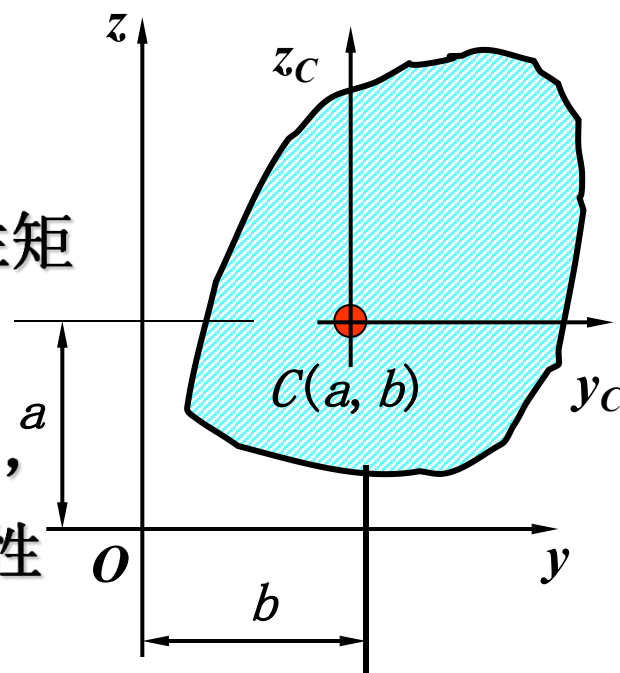


y_C , z_C — 过截面的形心 C 且与 y , z 轴平行的坐标轴(形心轴)

I_y , I_z , I_{yz} — 截面对 y , z 轴的惯性矩和惯性积.

I_{y_C} , I_{z_C} , $I_{y_C z_C}$ — 截面对形心轴 y_C , z_C 的惯性矩和惯性积.

已知截面对形心轴 y_C , z_C 的惯性矩和惯性积, 求截面对与形心轴平行的 y , z 轴惯性矩和惯性积, 则平行移轴公式



$$I_y = I_{y_C} + a^2 A$$

$$I_z = I_{z_C} + b^2 A$$

$$I_{yz} = I_{y_C z_C} + abA$$



二、组合截面的惯性矩、惯性积 (Moment of inertia & product of inertia for composite areas)

组合截面的惯性矩，惯性积

$$I_y = \sum_{i=1}^n I_{yi}$$

$$I_z = \sum_{i=1}^n I_{zi}$$

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^n I_{yzi}$$

I_{yi}, I_{zi}, I_{yzi} —第 i 个简单截面对 y, z 轴的惯性矩，惯性积.



例5-15 求梯形截面对其形心轴 y_C 的惯性矩.

解: 将截面分成两个矩形截面.

截面的形心必在对称轴 z_C 上.

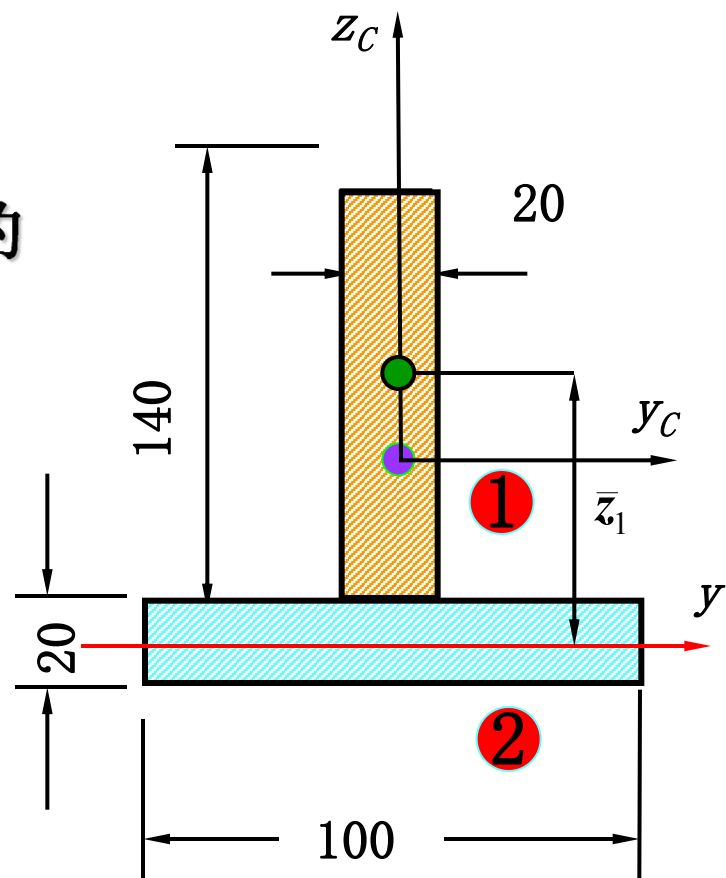
取过矩形 2 的形心且平行于底边的轴作为参考轴记作 y 轴.

$$A_1 = 20 \times 140 \quad \bar{z}_1 = 80$$

$$A_2 = 100 \times 20 \quad \bar{z}_2 = 0$$

所以截面的形心坐标为

$$\bar{z}_C = \frac{A_1 \bar{z}_1 + A_2 \bar{z}_2}{A_1 + A_2} = 46.7\text{mm}$$

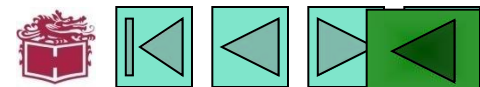
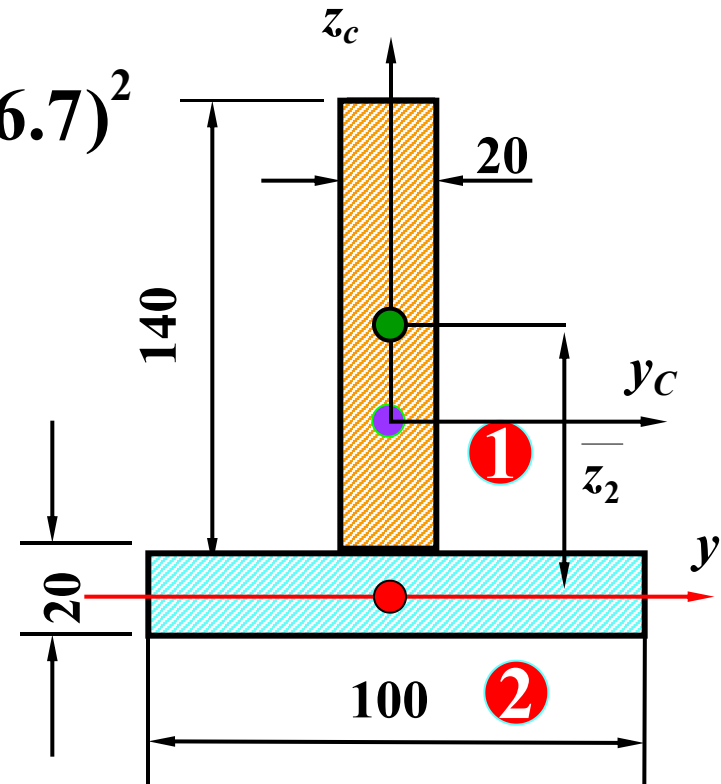


$$I_y = I_{y_c} + a^2 A$$

$$I_{y_c}^1 = \frac{1}{12} \times 20 \times 140^3 + 20 \times 140 \times (80 - 46.7)^2$$

$$I_{y_c}^2 = \frac{1}{12} \times 100 \times 20^3 + 100 \times 20 \times (46.7)^2$$

$$I_{y_c} = I_{y_c}^1 + I_{y_c}^2 = 12.12 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$



5.6 梁弯曲正应力计算与强度设计

一、纯弯曲构件横截面上的应力

(Stresses in flexural members)

当梁上有横向外力作用时，一般情况下，梁的横截面上既有弯矩 M ，又有剪力 F_S 。

内力 $\left\{ \begin{array}{l} \text{剪力 } F_S \longrightarrow \text{切应力 } \tau \\ \text{弯矩 } M \longrightarrow \text{正应力 } \sigma \end{array} \right.$

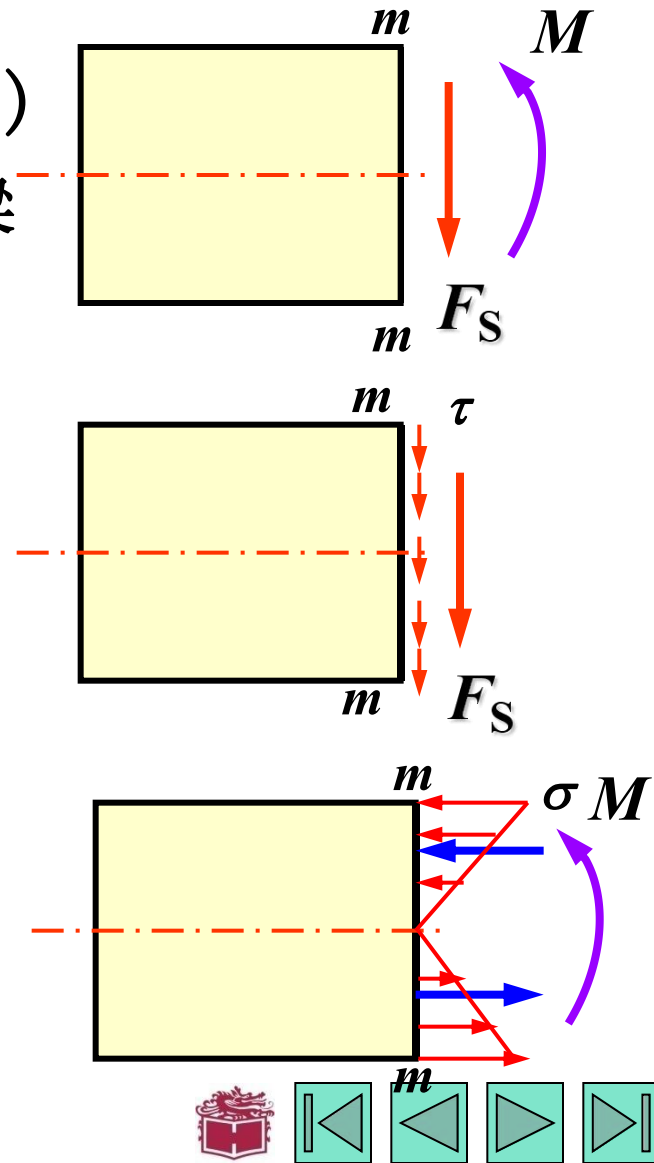
只有与切应力有关的切向内力元素

$dF_S = \tau dA$ 才能合成剪力；

只有与正应力有关的法向内力元素

$dF_N = \sigma dA$ 才能合成弯矩。

所以，在梁的横截面上一般既有正应力，又有切应力。



二、分析方法 (Analysis method)

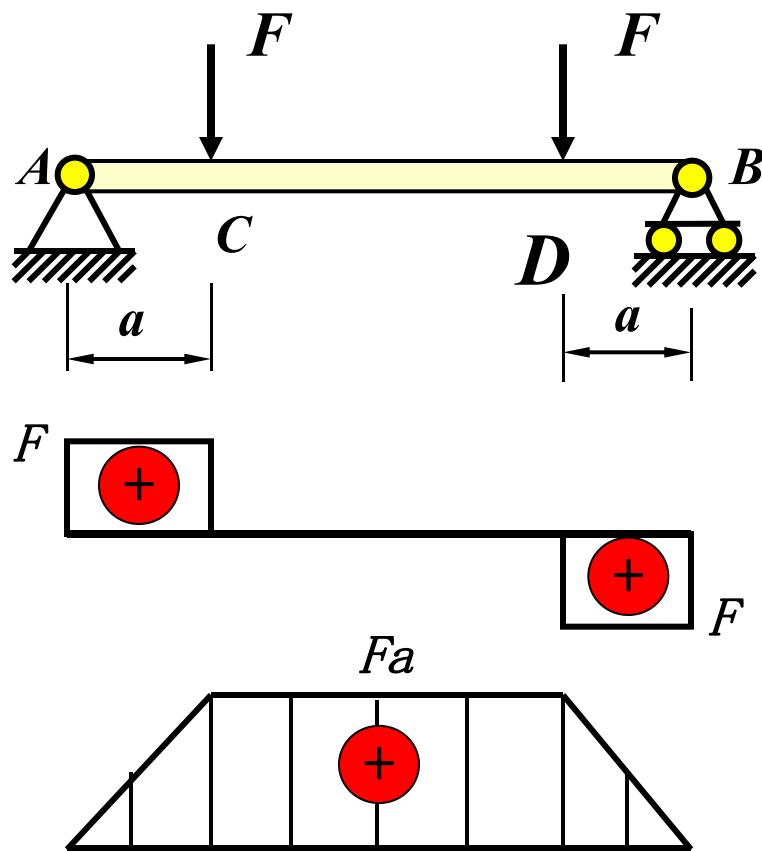
平面弯曲时横截面 $\xrightarrow{\sigma}$ 纯弯曲梁 (横截面上只有 M 而无 F_S 的情况)

平面弯曲时横截面 $\xrightarrow{\frac{\sigma}{\tau}}$ 横力弯曲 (横截面上既有 F_S 又有 M 的情况)

三、纯弯曲 (Pure bending)

若梁在某段内各横截面的弯矩为常量, 剪力为零, 则该段梁的弯曲就称为纯弯曲.

简支梁 CD 段任一横截面上, 剪力等于零, 而弯矩为常量, 所以该段梁的弯曲就是纯弯曲.

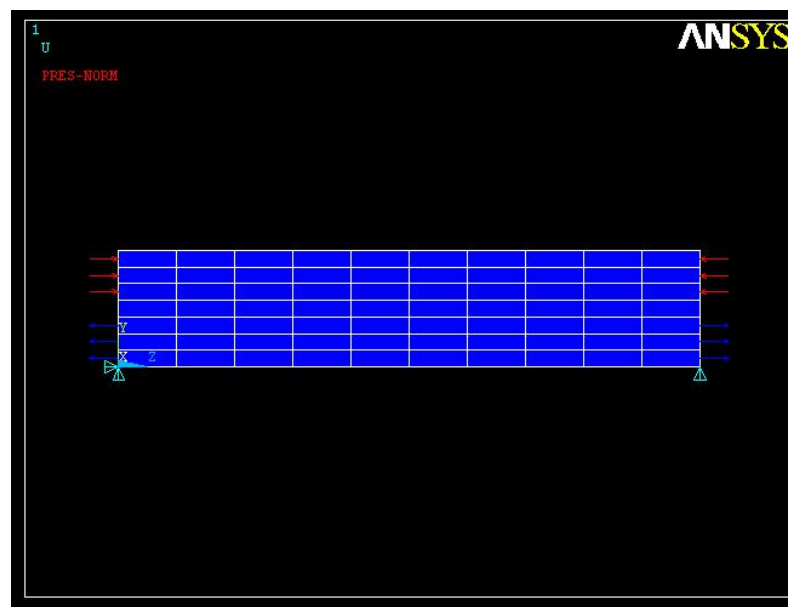


数值仿真实验

1. 变形现象 (Deformation phenomenon)

纵向线 各纵向线段弯成弧线，
且靠近顶端的纵向线缩短，
靠近底端的纵向线段伸长。

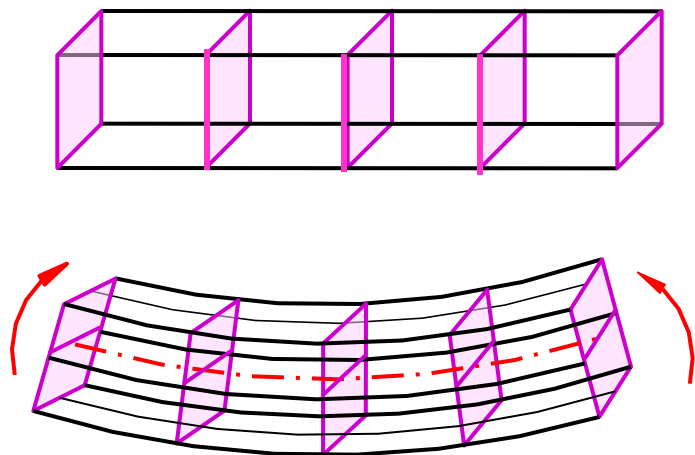
横向线 各横向线仍保持为直线，
相对转过了一个角度，
仍与变形后的纵向弧线垂直。



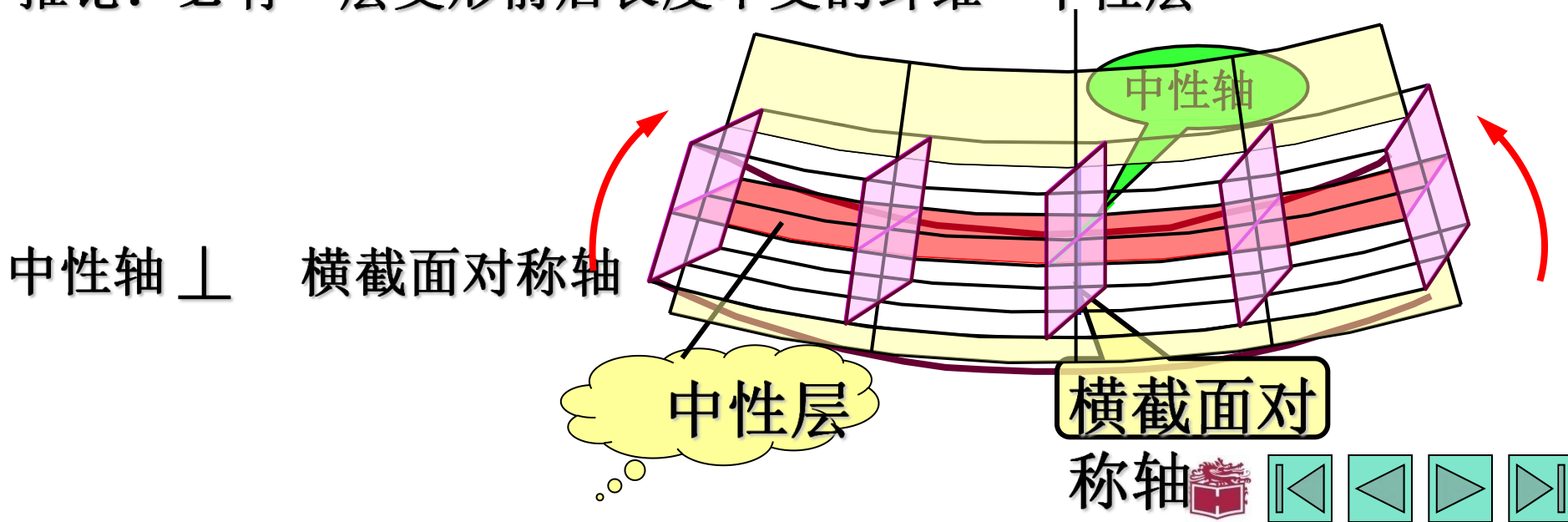
2. 提出假设 (Assumptions)

(a) 平面假设：变形前为平面的横截面变形后仍保持为平面且垂直于变形后的梁轴线；

(b) 单向受力假设：纵向纤维不相互挤压，只受单向拉压。



推论：必有一层变形前后长度不变的纤维—中性层



二、变形几何关系

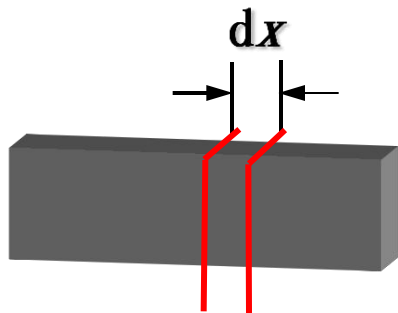


图 (a)

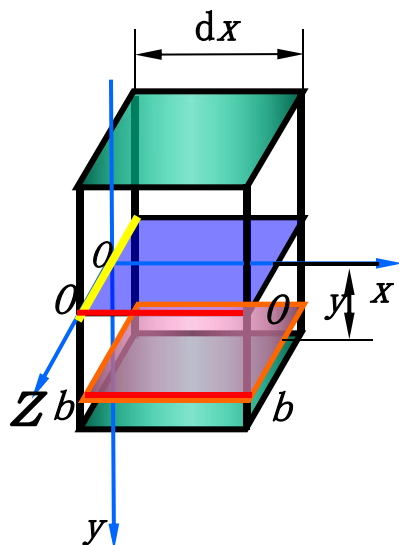


图 (b)

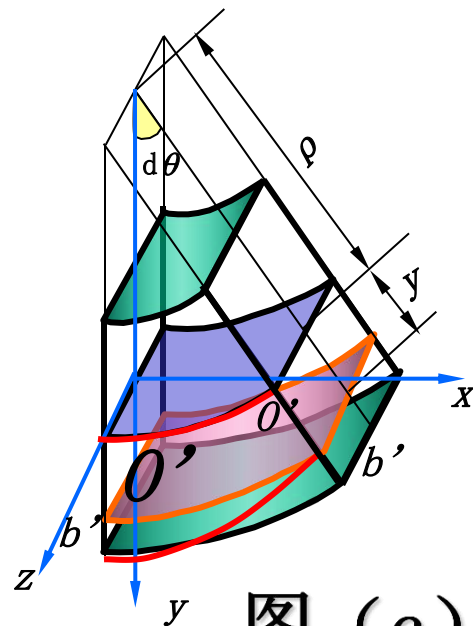


图 (c)

$$\overline{b'b'} = (\rho + y)d\theta$$

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

$$\overline{bb} = dx = \overline{OO} = \overline{O'O'} = \rho d\theta$$

应变分布规律:

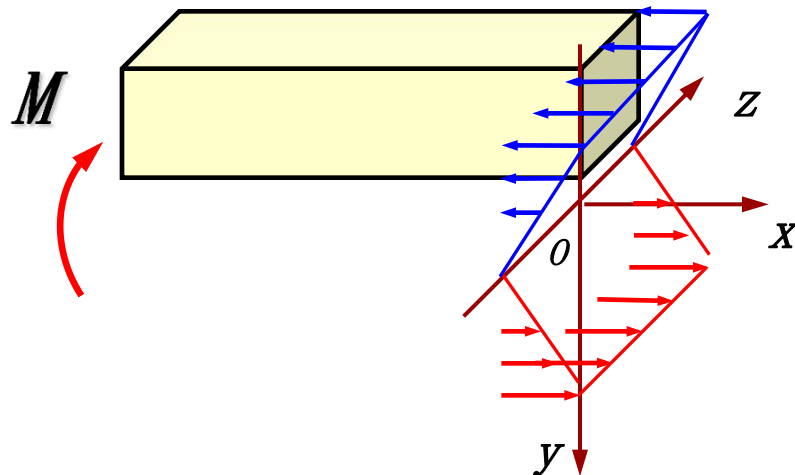
直梁纯弯曲时纵向纤维的应变与它到中性层的距离成正比。



三、物理关系 (Physical relationship)

Hooke's Law $\sigma = E\varepsilon$

所以 $\sigma = E \frac{y}{\rho}$?
 ?



应力分布规律:

直梁纯弯曲时横截面上任意一点的正应力, 与它到中性轴的距离成正比.

待解决问题

■ 中性轴的位置

■ 中性层的曲率半径 r



四、静力关系 (Static relationship)

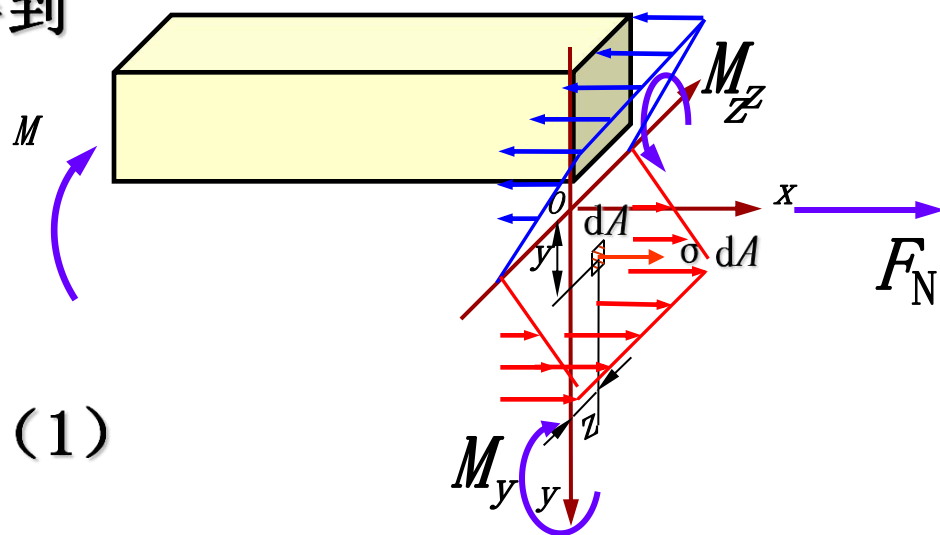
横截面上内力系为垂直于横截面的空间平行力系，这一力系简化得到三个内力分量。

内力与外力相平衡可得

$$F_N = \int_A dF_N = \int_A \sigma dA = 0 \quad (1)$$

$$M_{iy} = \int_A dM_y = \int_A z \sigma dA = 0 \quad (2)$$

$$M_{iz} = \int_A dM_z = \int_A y \sigma dA = M \quad (3)$$



$$dF_N = \sigma dA$$

$$dM_y = z \sigma dA$$

$$dM_z = y \sigma dA$$



将应力表达式代入 (1) 式, 得

$$F_N = \int_A E \frac{y}{\rho} dA = 0 \Rightarrow \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0 \Rightarrow S_z = \int_A y dA = 0$$

→ 中性轴通过横截面形心

将应力表达式代入 (2) 式, 得

$$M_{iy} = \int_A z E \frac{y}{\rho} dA = 0 \Rightarrow \frac{E}{\rho} \int_A yz dA = 0 \Rightarrow I_{yz} = \int_A yz dA = 0$$

→ 自然满足

将应力表达式代入 (3) 式, 得

$$M_{iz} = \int_A y E \frac{y}{\rho} dA = M \Rightarrow \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M \Rightarrow \frac{E}{\rho} I_z = M$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E I_z}$$



将 $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$ 代入 $\sigma = E \frac{y}{\rho}$

得到纯弯曲时横截面上正应力的计算公式：

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

M 为梁横截面上的弯矩；

y 为梁横截面上任意一点到中性轴的距离；

I_z 为梁横截面对中性轴的惯性矩。



讨论

(1) 应用公式时, 一般将 M_y 以绝对值代入. 根据梁变形的情况直接判断 σ 的正负号. 以中性轴为界, 梁变形后凸出边的应力为拉应力 (σ 为正号). 凹入边的应力为压应力 (σ 为负号);

(2) 最大正应力发生在横截面上离中性轴最远的点处.

$$\sigma_{\max} = \frac{M y_{\max}}{I_z}$$

引用记号 $W = \frac{I_z}{y_{\max}}$ — 抗弯截面系数

则公式改写为 $\sigma_{\max} = \frac{M}{W}$



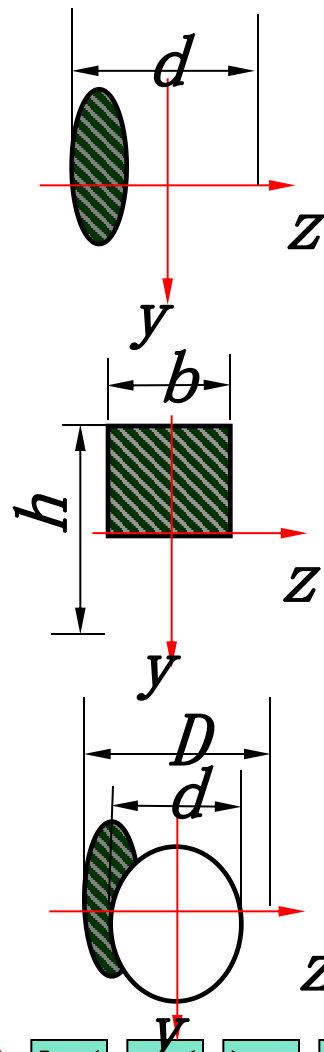
(1) 当中性轴为对称轴时

实心圆截面 $W = \frac{I_z}{d/2} = \frac{\pi d^4 / 64}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32}$

矩形截面 $W = \frac{I_z}{h/2} = \frac{bh^3 / 12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$

空心圆截面 $W = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4)$

$$\alpha = \frac{d}{D}$$

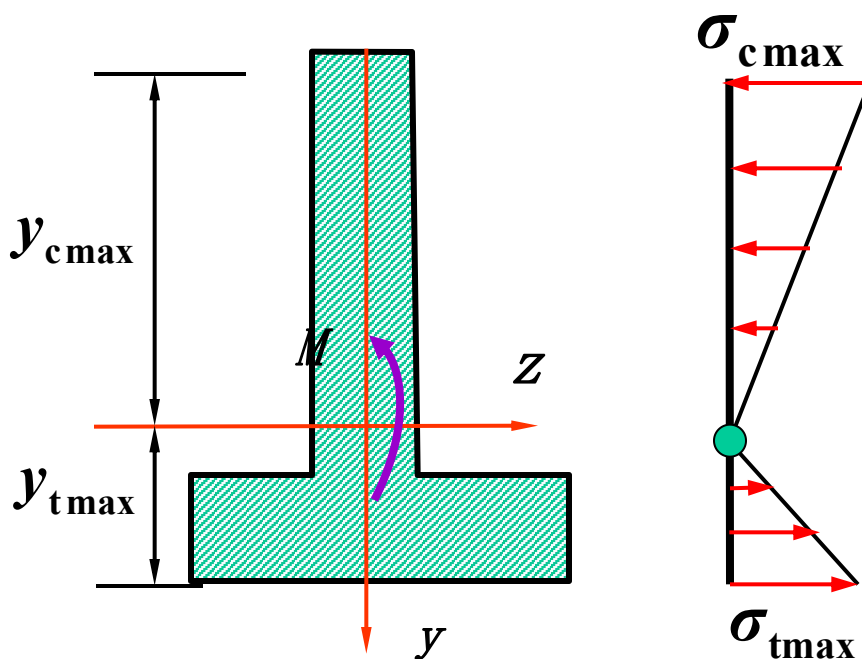


(2) 对于中性轴不是对称轴的横截面

应分别以横截面上受拉和受压部分距中性轴最远的距离

$y_{c\max}$ 和 $y_{t\max}$ 直接代入公式

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$



$$\sigma_{t\max} = \frac{My_{t\max}}{I_z}$$

$$\sigma_{c\max} = \frac{My_{c\max}}{I_z}$$



当梁上有横向力作用时，横截面上既有弯矩又有剪力. 梁在此种情况下的弯曲称为横力弯曲.

横力弯曲时，梁的横截面上既有正应力又有切应力. 切应力使横截面发生翘曲， 横向力引起与中性层平行的纵截面的挤压应力，纯弯曲时所作的平面假设和单向受力假设都不成立.

虽然横力弯曲与纯弯曲存在这些差异，但进一步的分析表明，工程中常用的梁，纯弯曲时的正应力计算公式，可以精确的计算横力弯曲时横截面上的正应力.

等直梁横力弯曲时横截面上的正应力公式为 $\sigma = \frac{M(x)}{W}$



二、公式的应用范围

(The applicable range of the flexure formula)

1. 在弹性范围内

(All stresses in the beam are below the proportional limit)

2. 具有切应力的梁 (The beam with the shear stresses) $h \geq 5$

3. 平面弯曲 (Plane bending)

4. 直梁 (Straight beams)

三、强度条件 (Strength condition)

梁内的最大工作应力不超过材料的许用应力.

1. 数学表达式 (Mathematical formula)
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]$$



2. 强度条件的应用 (Application of strength condition)

(1) 强度校核 $\frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]$ (2) 设计截面 $W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$

(3) 确定许可载荷 $M_{\max} \leq W[\sigma]$

对于铸铁等脆性材料制成的梁，由于材料的 $[\sigma_t] \neq [\sigma_c]$
且梁横截面的中性轴一般也不是对称轴，所以梁的

$$\sigma_{t\max} \neq \sigma_{c\max} \text{ (两者有时并不发生在同一横截面上)}$$

要求分别不超过材料的许用拉应力和许用压应力

$$\sigma_{t\max} \leq [\sigma_t]$$

$$\sigma_{c\max} \leq [\sigma_c]$$



例5-16 螺栓压板夹紧装置如图所示. 已知板长 $3a=150\text{mm}$, 压板材料的弯曲许用应力 $[\sigma]=140\text{MP}$. 试计算压板传给工件的最大允许压紧力 F .

解: (1) 作出弯矩图的最大弯矩为 Fa ;

(2) 求惯性矩, 抗弯截面系数

$$I_z = \frac{(3\text{cm})(2\text{cm})^3}{12} - \frac{(1.4\text{cm})(2\text{cm})^3}{12} = 1.07\text{cm}^4$$

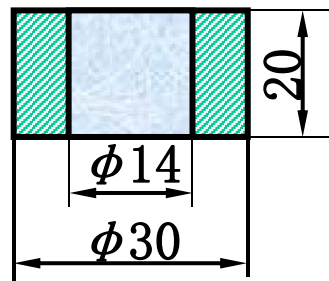
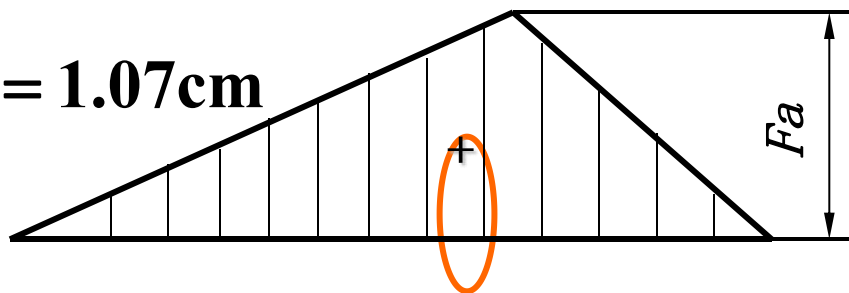
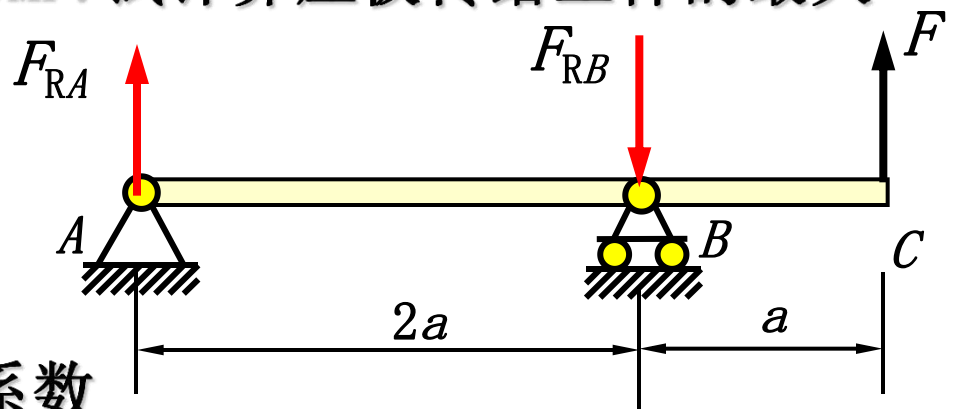
$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{1.07\text{cm}^4}{1\text{cm}} = 1.07\text{cm}^3$$

(3) 求许可载荷

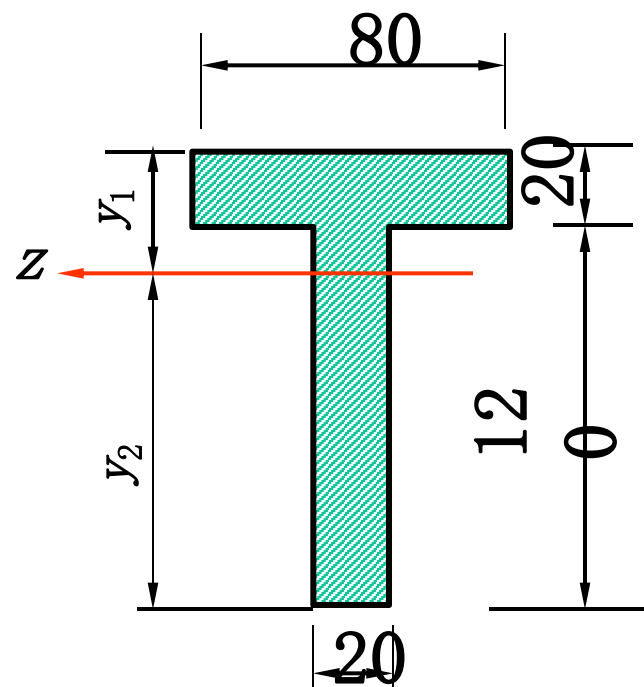
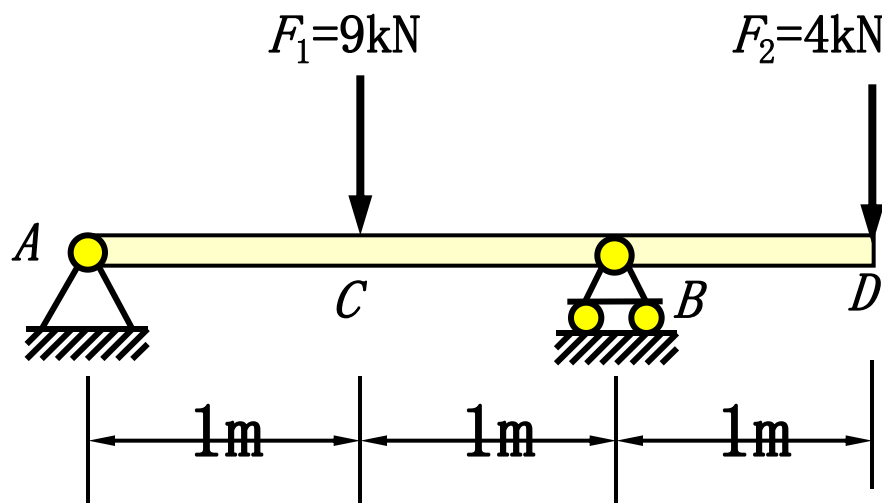
$$M_{\max} \leq W_z [\sigma]$$

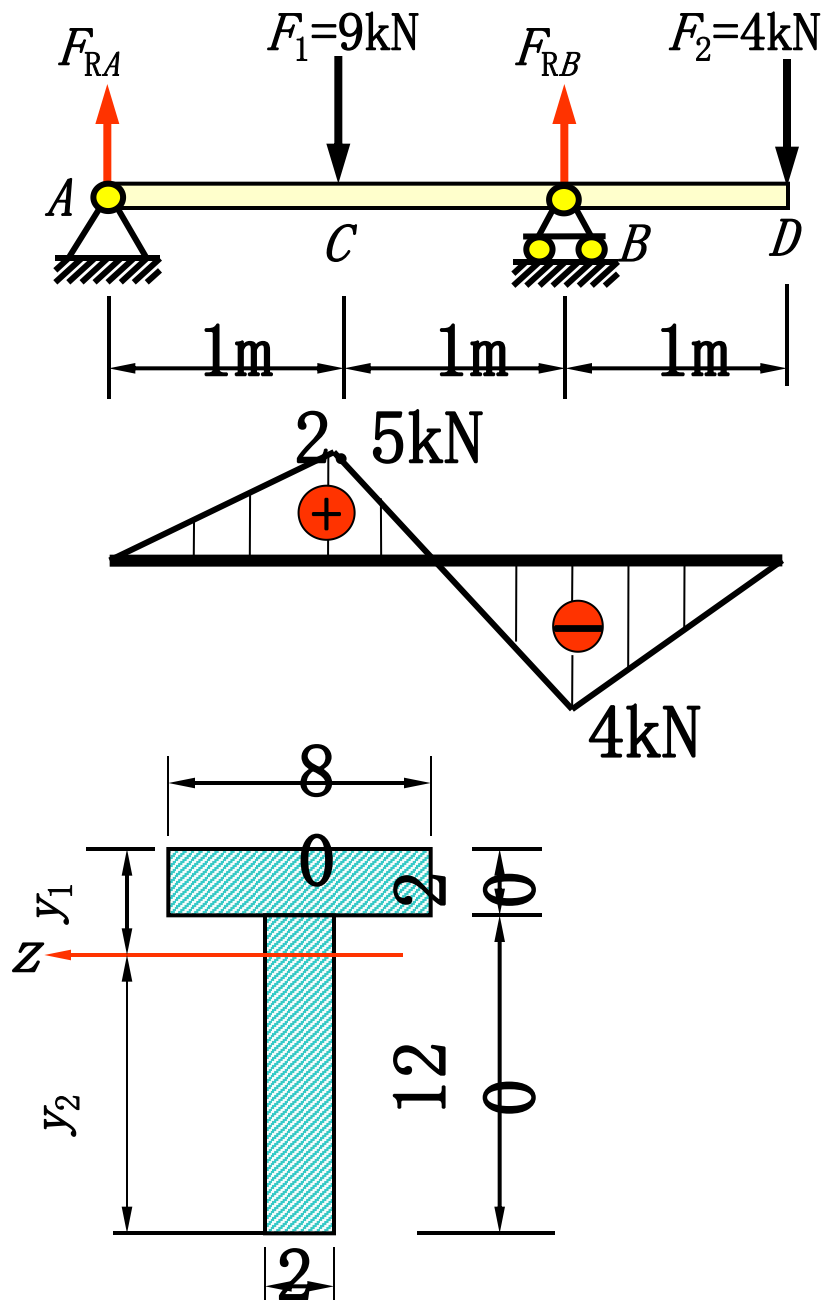
$$Fa \leq W_z [\sigma]$$

$$F \leq \frac{W_z [\sigma]}{a} = 3\text{kN}$$



例5-17 T形截面铸铁梁的荷载和截面尺寸如图所示. 铸铁的抗拉许用应力为 $[\sigma_t] = 30\text{MPa}$, 抗压许用应力为 $[\sigma_c] = 160\text{MPa}$. 已知截面对形心轴 z 的惯性矩为 $I_z = 763\text{cm}^4$, $y_1 = 52\text{mm}$, 校核梁的强度.





解: $F_{RA} = 2.5\text{kN}$ $F_{RB} = 10.5\text{kN}$

最大正弯矩在截面C上

$$M_C = 2.5\text{kN} \cdot \text{m}$$

最大负弯矩在截面B上

$$M_B = 4\text{kN} \cdot \text{m}$$

B截面

$$\sigma_{t\max} = \frac{M_B y_1}{I_z} = 27.2\text{MPa} < [\sigma_t]$$

$$\sigma_{c\max} = \frac{M_B y_2}{I_z} = 46.2\text{MPa} < [\sigma_c]$$

C截面

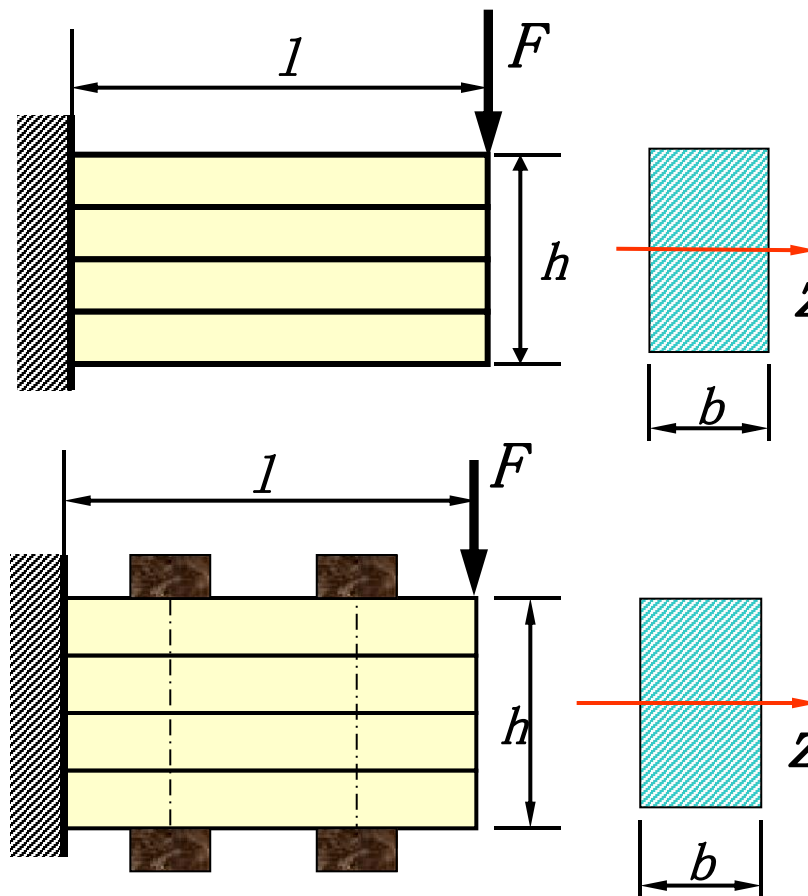
$$\sigma_{t\max} = \frac{M_C y_2}{I_z} = 28.8\text{MPa} < [\sigma_t]$$



例5-18 由 n 片薄片组成的梁，当每片间的摩擦力甚小时，每一薄片就独立弯曲，近似地认为每片上承担的外力等于 F/n

解：每一薄片中的最大正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{\frac{F}{n} \cdot l}{\frac{1}{6} \cdot b \cdot \left(\frac{h}{n}\right)^2} = \frac{6Fl}{bh^2} \cdot n$$



若用刚度足够的螺栓将薄片联紧，杆就会象整体梁一样弯曲

最大正应力等于

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{Fl}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{6Fl}{bh^2}$$



5.7 梁切应力计算与及强度条件

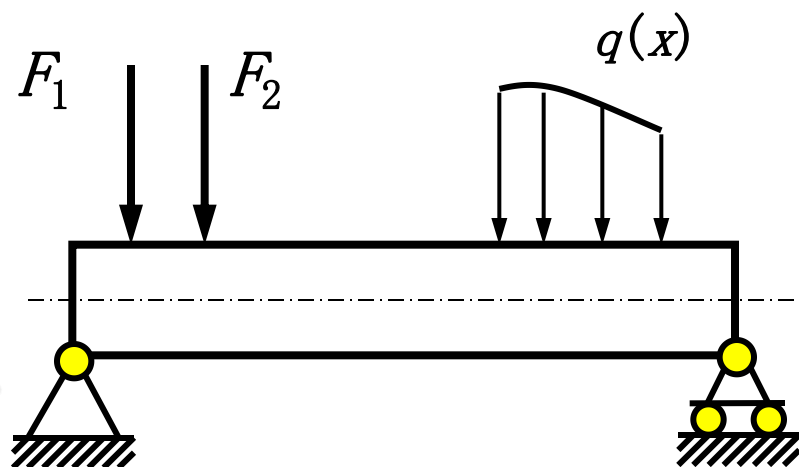
一、梁横截面上的切应力 (Shear stresses in beams)

1. 矩形截面梁(Beam of rectangular cross section)

(1) 两个假设(Two assumptions)

(a) 切应力与剪力平行;

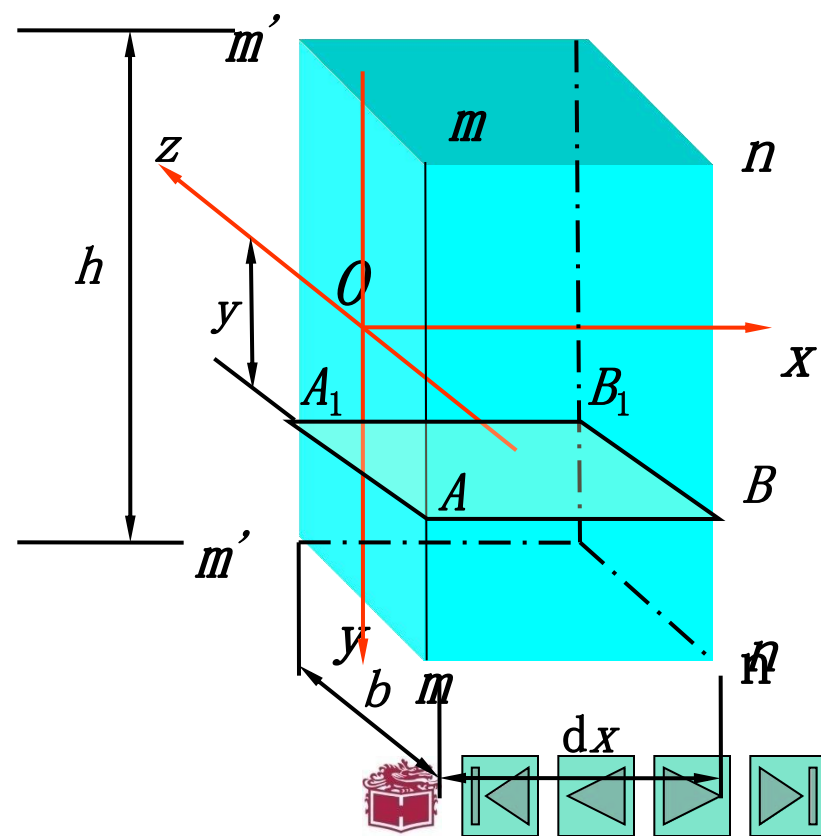
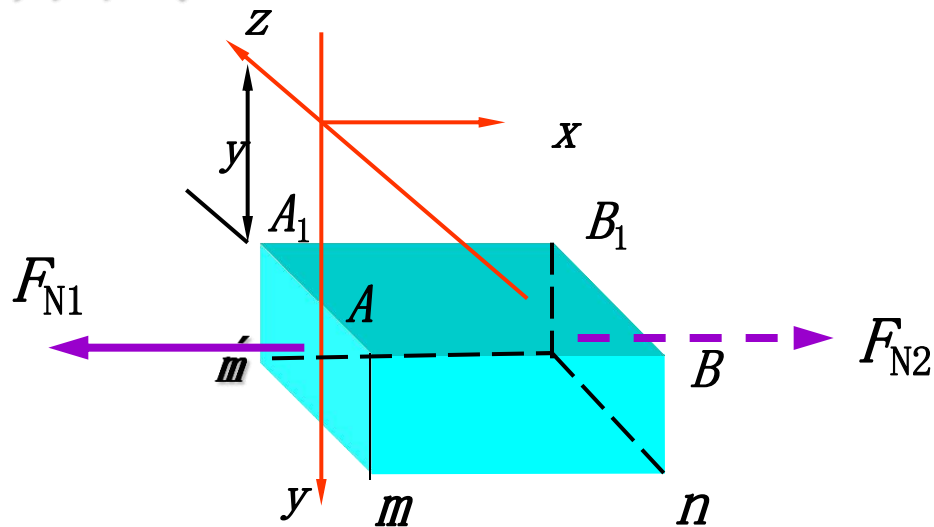
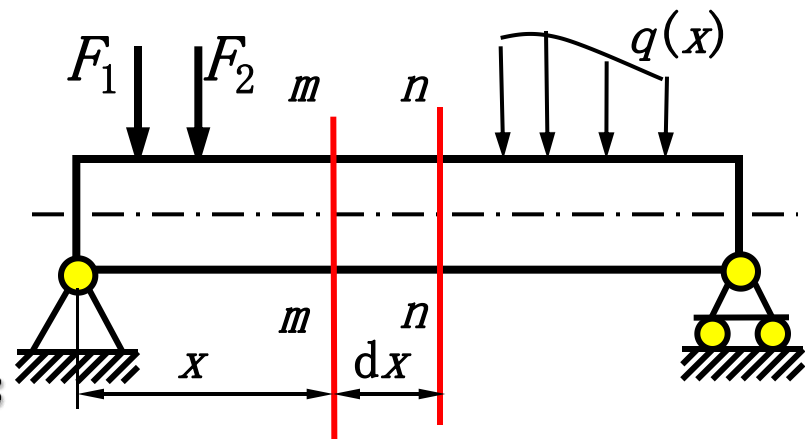
(b) 切应力沿截面宽度均匀分布
(距中性轴等距离处切应力相等) .

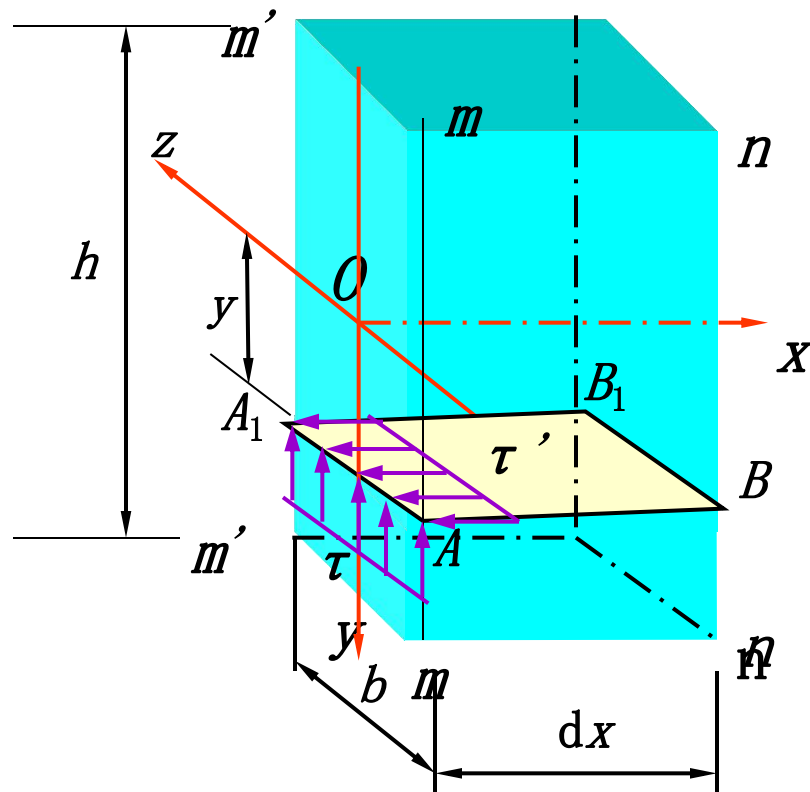
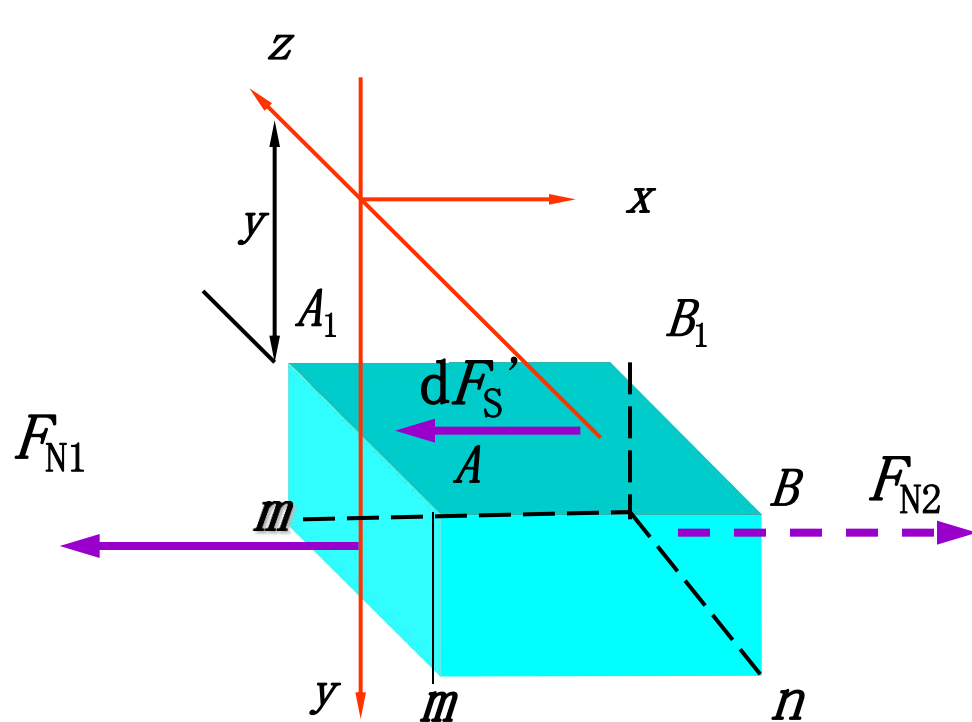


(2) 分析方法 (Analysis method)

(a) 用横截面 $m-m$, $n-n$ 从梁中截取 dx 一段. 两横截面上的弯矩不等. 所以两截面同一 y 处的正应力也不等;

(b) 假想地从梁段上截出体积元素 mB_1 , 在两端面 mA_1 , nB_1 上两个法向内力不等.





(c) 在纵截面上必有沿 x 方向的切向内力 dF_S' . 故在此面上就有切应力 τ .

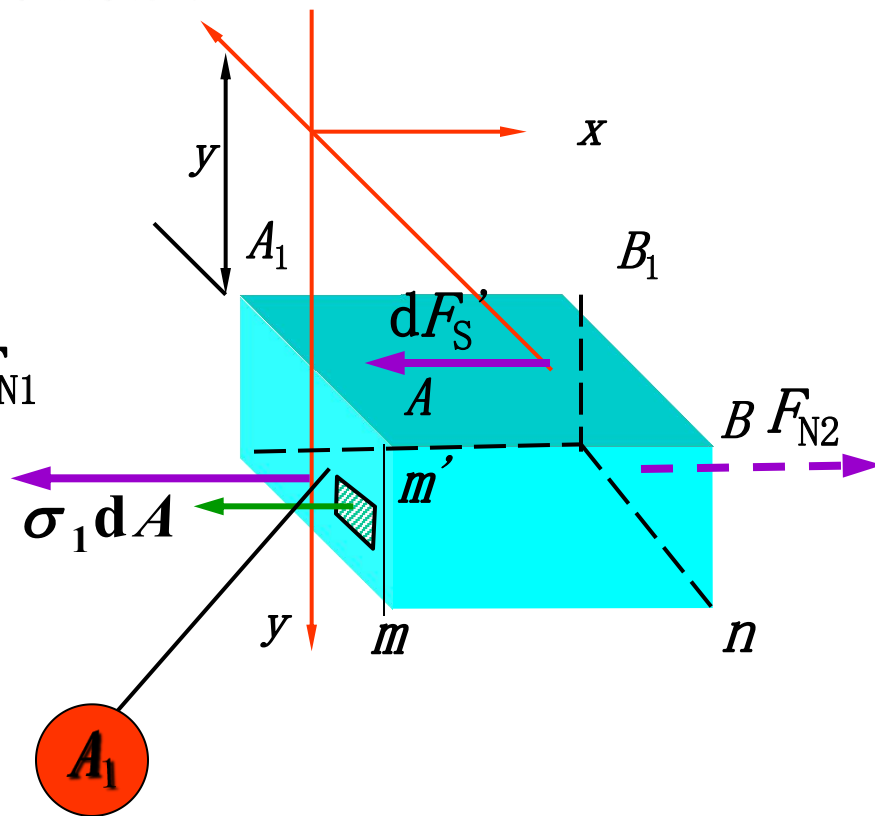
根据假设, 横截面上距中性轴等远的各点处切应力大小相等. 各点的切应力方向均与截面侧边平行. 取分离体的平衡即可求出.



(3) 公式推导(Derivation of the formula)

假设 $m-m$, $n-n$ 上的弯矩为 M 和 $M+dM$, 两截面上距中性轴 y_1 处的正应力为 σ_1 和 σ_2 .

$$\begin{aligned} F_{N1} &= \int_{A_1} \sigma_1 dA \\ &= \int_{A_1} \frac{My_1}{I_z} dA = \frac{M}{I_z} \int_{A_1} y_1 dA \quad F_{N1} \\ &= \frac{M}{I_z} S_z^* \\ F_{N2} &= \int_{A_1} \sigma_2 dA = \frac{M+dM}{I_z} S_z^* \end{aligned}$$



式中: A_1 为距中性轴为 y 的横线以外部分的横截面面积.

$S_z^* = \int_{A_1} y_1 dA$ 为面积 A_1 对中性轴的静矩.



$$F_{N1} = \frac{M}{I_z} S_z^*$$

$$F_{N2} = \frac{M + dM}{I_z} S_z^*$$

$$dF'_s = \tau' b dx$$

由平衡方程

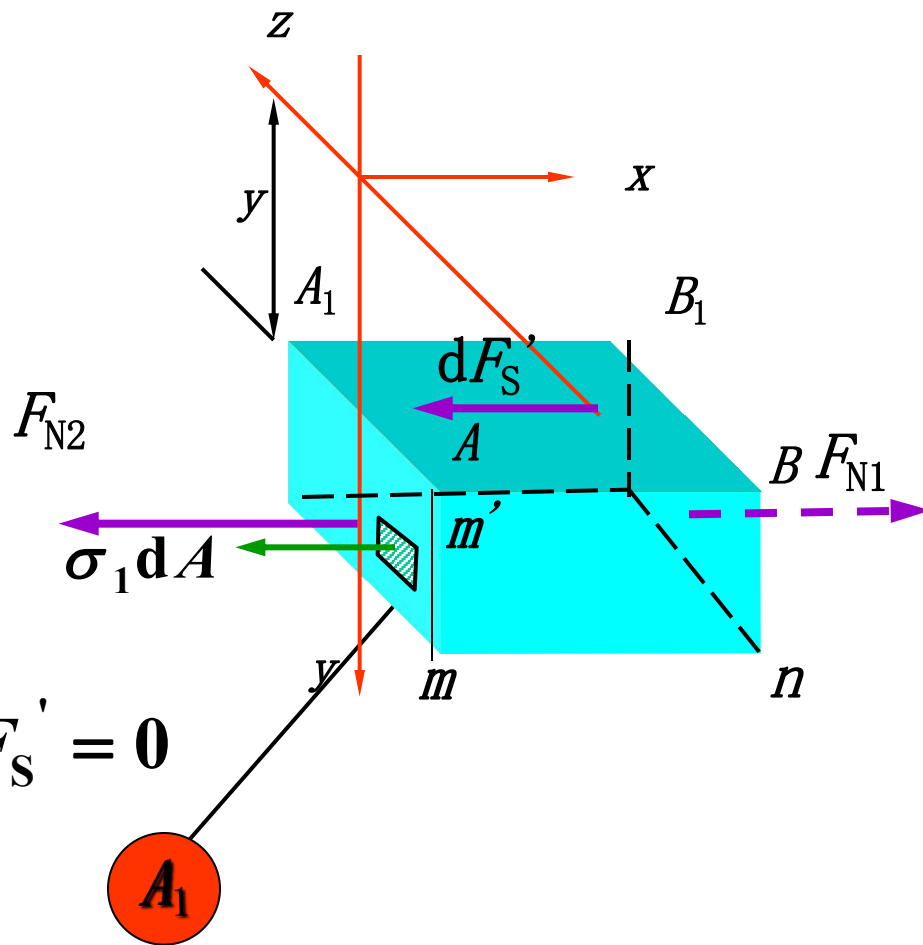
$$\sum F_x = 0 \quad F_{N2} - F_{N1} - dF'_s = 0$$

化简后得

$$\tau' = \frac{dM}{dx} \times \frac{S_z^*}{I_z b}$$

$$\frac{dM}{dx} = F_S$$

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b}$$

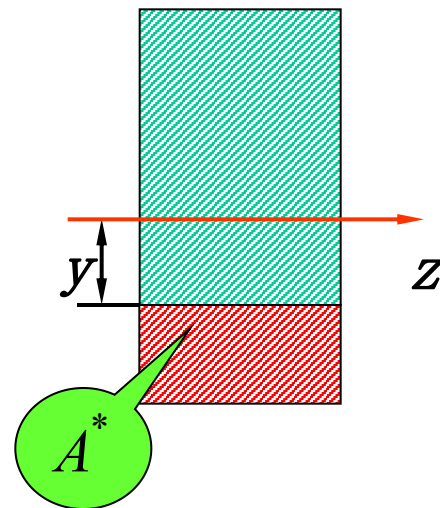


$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{I_z b}$$

I_z —— 整个横截面对中性轴的惯性矩.

b —— 矩型截面的宽度.

S_z^* —— 距中性轴为 y 的横线以外部分横截面面积对中性轴的静矩.



(4) 切应力沿截面高度的变化规律

(The shear- stress distribution on the rectangular cross section)

τ 沿截面高度的变化由静矩 S_z^* 与 y 之间的关系确定.



$$\begin{aligned}
 S_z^* &= \int_{A_1} y_1 dA \\
 &= \int_{-h/2}^{h/2} y_1 b dy_1 = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \\
 \tau &= \frac{F_S S_z^*}{I_z b} = \frac{F_S}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)
 \end{aligned}$$

可见，切应力沿截面高度按抛物线规律变化。

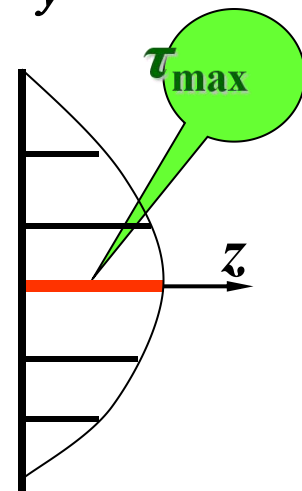
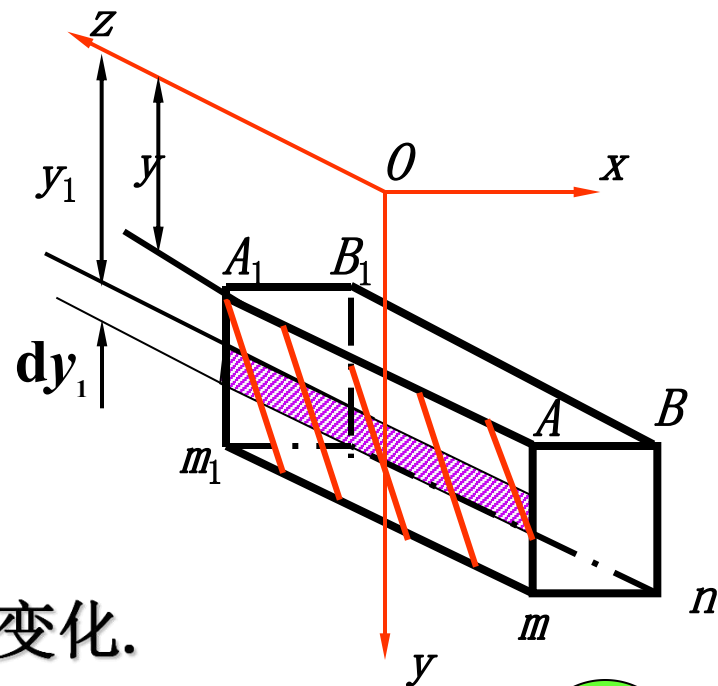
$y = \pm h/2$ （即在横截面上距中性轴最远处） $\tau = 0$

$y = 0$ （即在中性轴上各点处），切应力达到最大值

$$\tau_{\max} = \frac{F_S h^2}{8I_z} = \frac{F_S h^2}{8 \times \frac{bh^3}{12}} = \frac{3}{2} \times \frac{F_S}{bh}$$

$$\tau_{\max} = \frac{3F_S}{2A}$$

式中， $A = bh$ 为矩形截面的面积。

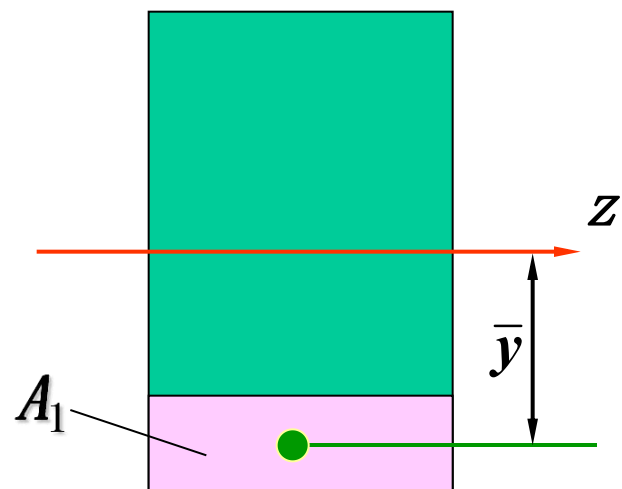


截面静矩的计算方法

$$S_z = \int_A y dA = A\bar{y}$$

A 为截面面积

\bar{y} 为截面的形心坐标

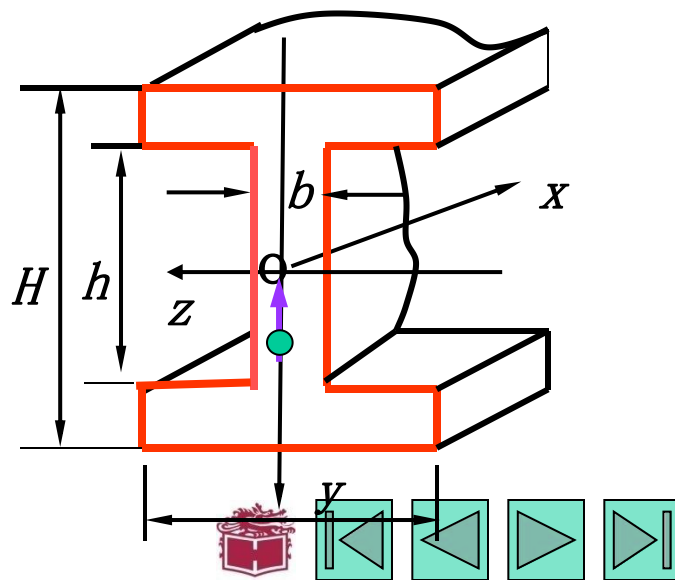


2. 工字形截面梁 (工-section beam)

研究方法与矩形截面同，切应力的计算公式亦为

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b}$$

假设求应力的点到中性轴的距离为 y .



$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z d}$$

d — 腹板的厚度

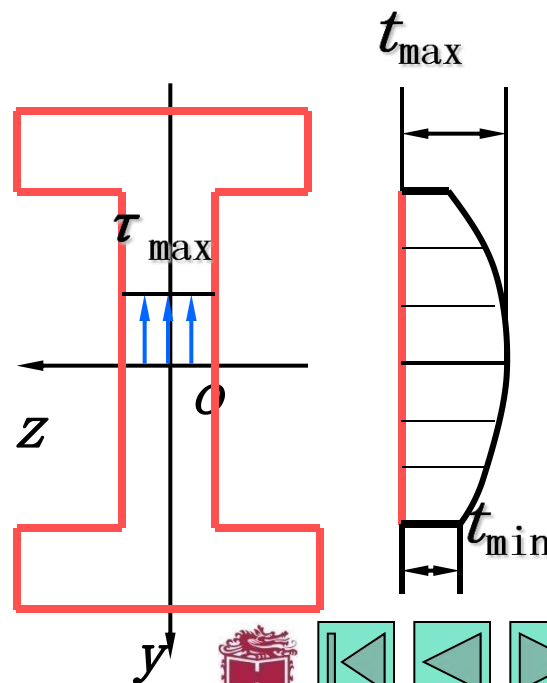
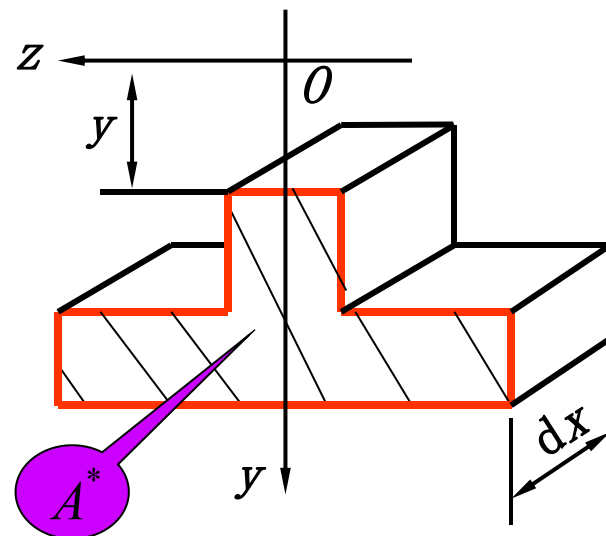
S_z^* — 距中性轴为 y 的横线外部分的横截面面积 A 对中性轴的静矩。

$$\tau_{\max} = \frac{F_S}{I_z b} \left[\frac{BH^2}{8} - (B-b) \frac{h^2}{8} \right]$$

(a) 腹板上的切应力沿腹板高度按二次抛物线规律变化；

(b) 最大切应力也在中性轴上. 这也是整个横截面上的最大切应力。

$$\tau_{\max} \approx \tau_{\min} \quad \tau \approx \frac{F_S}{bh}$$



$$\tau_{\max} = \frac{F_S S_{z\max}^*}{I_z d}$$

式中：

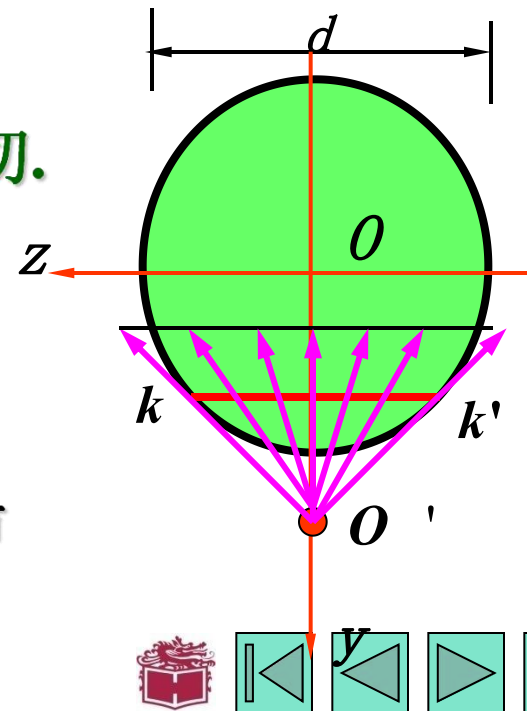
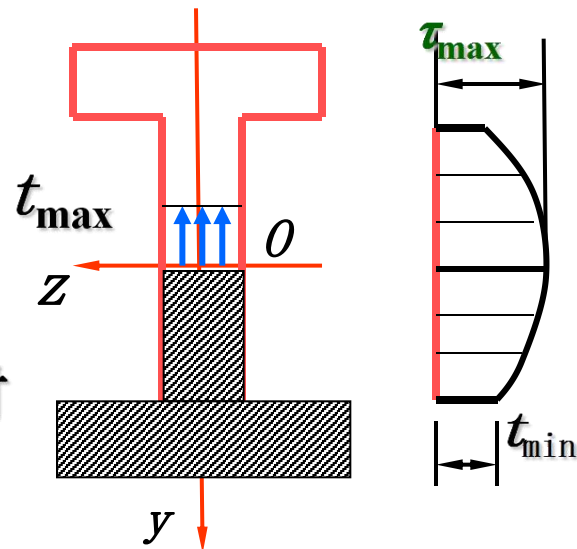
$S_{z\max}^*$ — 中性轴任一边的一半横截面面积对
中性轴的静矩。

3. 圆截面梁(Beam of circular cross section)

在截面边缘上各点的切应力的方向与圆周相切。

假设： (a) 沿宽度 $k-k'$ 上各点处的切应力
均汇交于 O' 点；

(b) 各点处切应力沿 y 方向的分量沿
宽度相等。



最大切应力发生在中性轴上

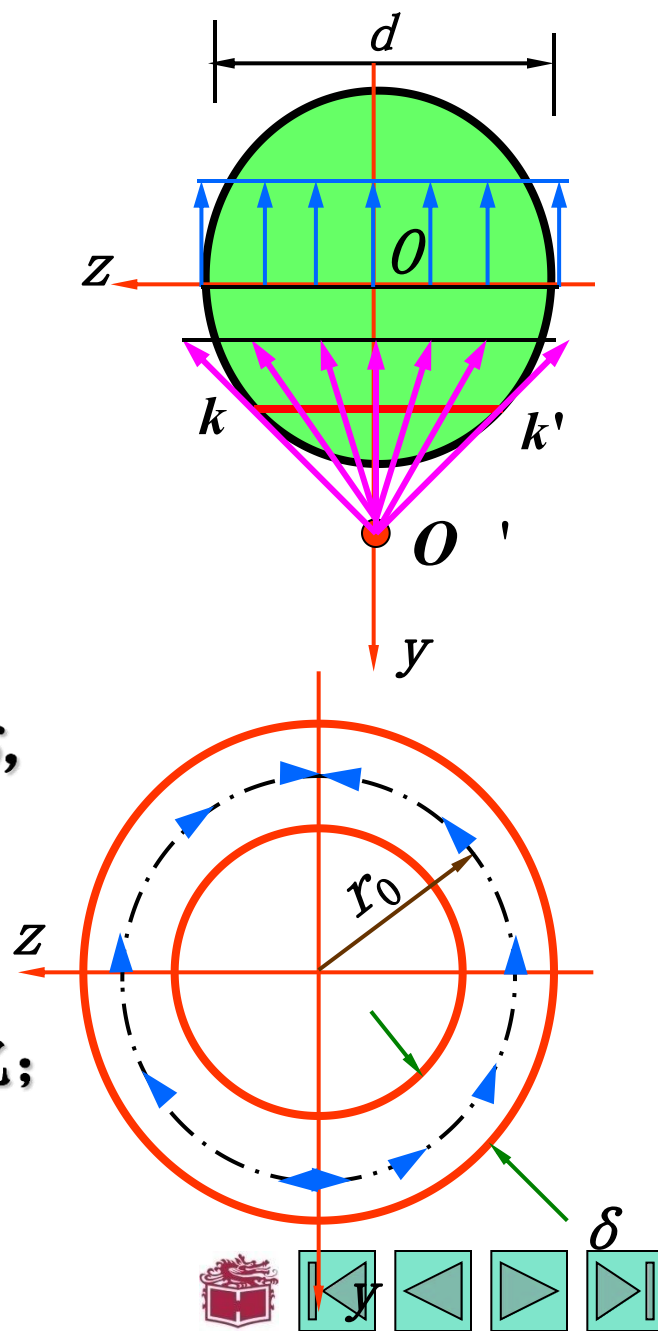
$$\tau_{\max} = \frac{F_S S_z^*}{I_z b} = \frac{4 F_S}{3 A}$$

式中 $A = \frac{\pi d^2}{4}$ 为圆截面的面积.

4. 圆环形截面梁(Circular pipe beam)

图示为一段薄壁环形截面梁. 环壁厚度为 δ , 环的平均半径为 r_0 , 由于 $\delta \ll r_0$ 故可假设

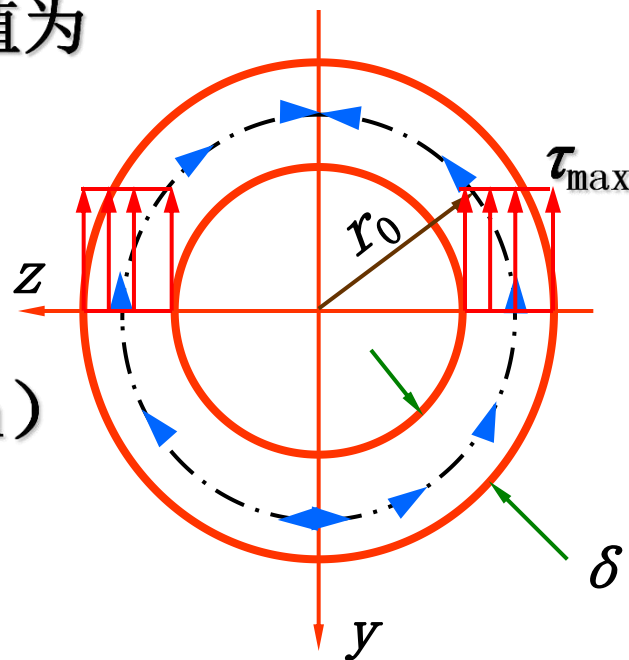
- (a) 横截面上切应力的大小沿壁厚无变化;
- (b) 切应力的方向与圆周相切.



横截面上最大的切应力发生中性轴上，其值为

$$\tau_{\max} = 2 \frac{F_S}{A} \quad \text{式中 } A = 2\pi r_0 \delta$$

为环形截面的面积



二、强度条件 (Strength condition)

$$\tau_{\max} \leq [\tau] \quad \tau_{\max} = \frac{F_{S\max} S_{z\max}^*}{I_z b} \leq [\tau]$$

三、需要校核切应力的几种特殊情况

- (1) 梁的跨度较短， M 较小，而 F_S 较大时，要校核切应力；
- (2) 铆接或焊接的组合截面，其腹板的厚度与高度比小于型钢的相应比值时，要校核切应力；
- (3) 各向异性材料(如木材)的抗剪能力较差，要校核切应力。



例5-17 一简易起重设备如图所示.

起重量(包含电葫芦自重) $F = 30 \text{ kN}$.

跨长 $l = 5 \text{ m}$. 吊车大梁 AB 由 20a

工字钢制成. 其许用弯曲正应力

$[\sigma] = 170 \text{ MPa}$, 许用弯曲切应力 $[\tau] =$

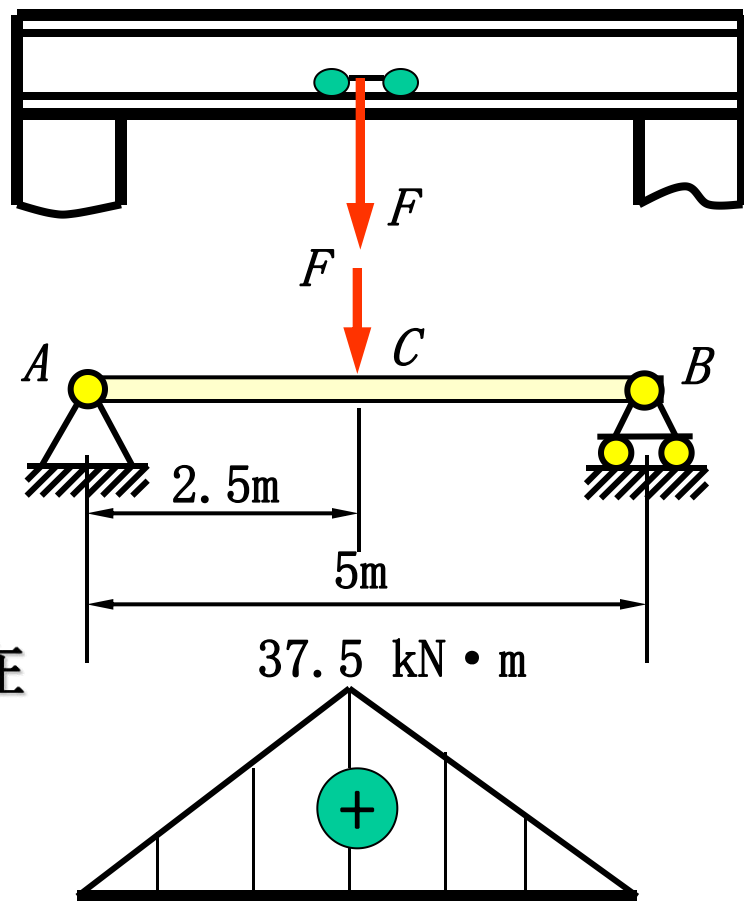
100 MPa , 试校核梁的强度.

解: 此吊车梁可简化为简支梁, 力 F 在梁中间位置时有最大正应力.

$$M_{\max} = 37.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(a) 正应力强度校核 由型钢表查得 20a 工字钢的 $W_z = 237 \text{ cm}^3$

所以梁的最大正应力为 $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = 158 \text{ MPa} < [\sigma]$



(b) 切应力强度校核

在计算最大切应力时，应取荷载 F 在紧靠任一支座例如支座 A 处所示，因为此时该支座的支反力最大，而梁的最大切应力也就最大。

$$F_{S\max} = F_{RA} \approx F = 30\text{kN}$$

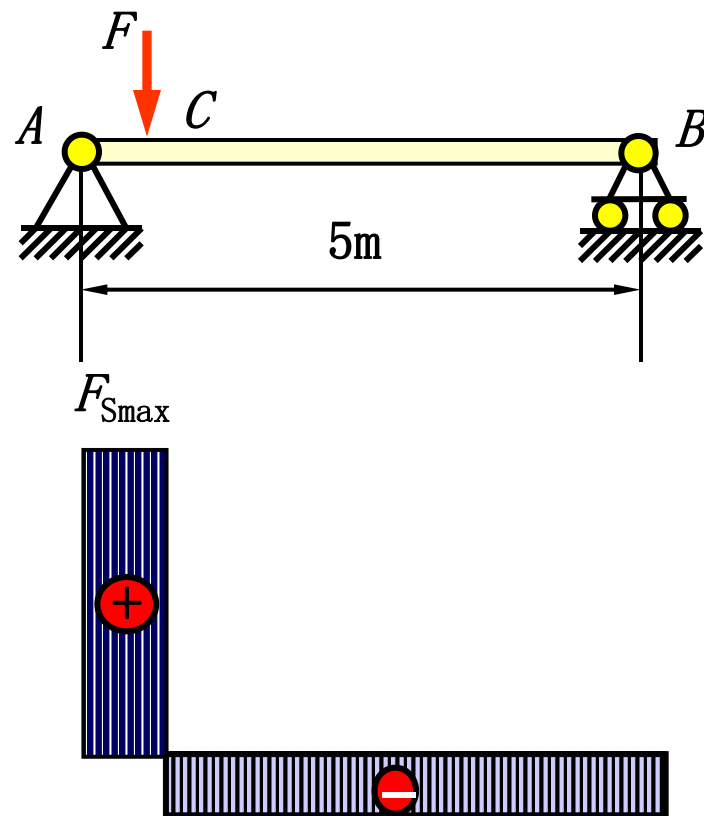
查型钢表中，20a号工字钢，有

$$\frac{I_z}{S_{z\max}^*} = 17.2\text{cm} \quad d = 7\text{mm}$$

据此校核梁的切应力强度

$$\tau_{\max} = \frac{F_{S\max} S_{z\max}^*}{I_z d} = 24.9\text{MPa} < [\tau]$$

以上两方面的强度条件都满足，所以此梁是安全的。



例5-18 简支梁 AB 如图所示. $l=2\text{m}$, $a=0.2\text{m}$. 梁上的载荷为 q 为 10kN/m , $F=200\text{kN}$. 材料的许用应力为 $[\sigma]=160\text{MPa}$, $[\tau]=100\text{MPa}$, 试选择工字钢型号.

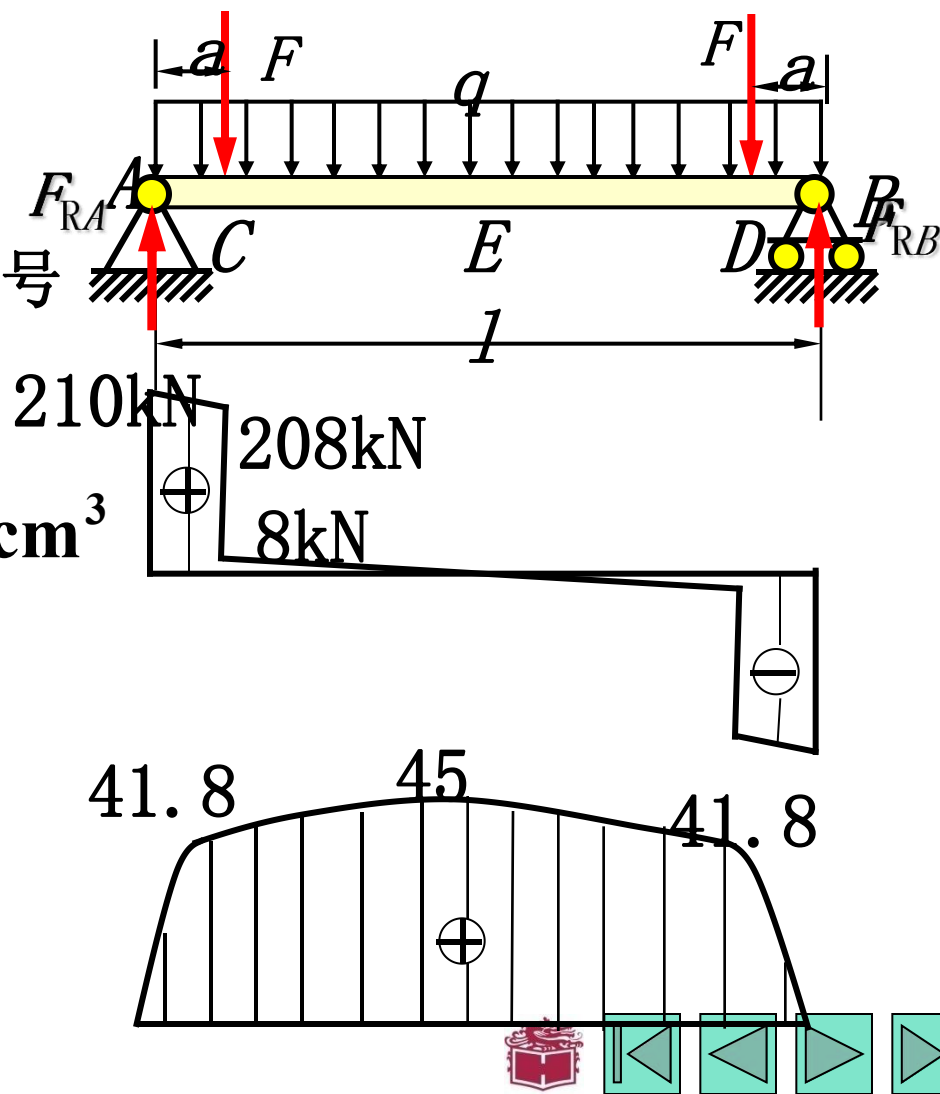
解: (1) 计算支反力做内力图.

(2) 根据最大弯矩选择工字钢型号

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{45 \times 10^3}{160 \times 10^6} = 281\text{cm}^3$$

查型钢表, 选用22a工字钢, 其

$$W_z = 309\text{cm}^3$$



(3) 校核梁的切应力 查表得 $\frac{I_z}{S_{z\max}^*} = 18.9\text{cm},$

腹板厚度 $d=0.75\text{cm}$, 由剪力图知最大剪力为210kN

$$\tau_{\max} = \frac{F_{S\max} S_{z\max}^*}{I_z b} = \frac{210 \times 10^3}{18.9 \times 10^{-2} \times 0.75 \times 10^{-2}} \\ = 148\text{MPa} > [\tau] = 100\text{MPa}$$

τ_{\max} 超过 $[\tau]$ 很多, 应重新选择更大的截面. 现已25b工字钢进行试算

查表得 $\frac{I_z}{S_{z\max}^*} = 18.9\text{cm}, d=1\text{cm}$

$$\tau_{\max} = \frac{210 \times 10^3}{21.3 \times 10^{-2} \times 1 \times 10^{-2}} = 98.6\text{MPa} > [\tau] = 100\text{MPa}$$

所以应选用型号为25b的工字钢.



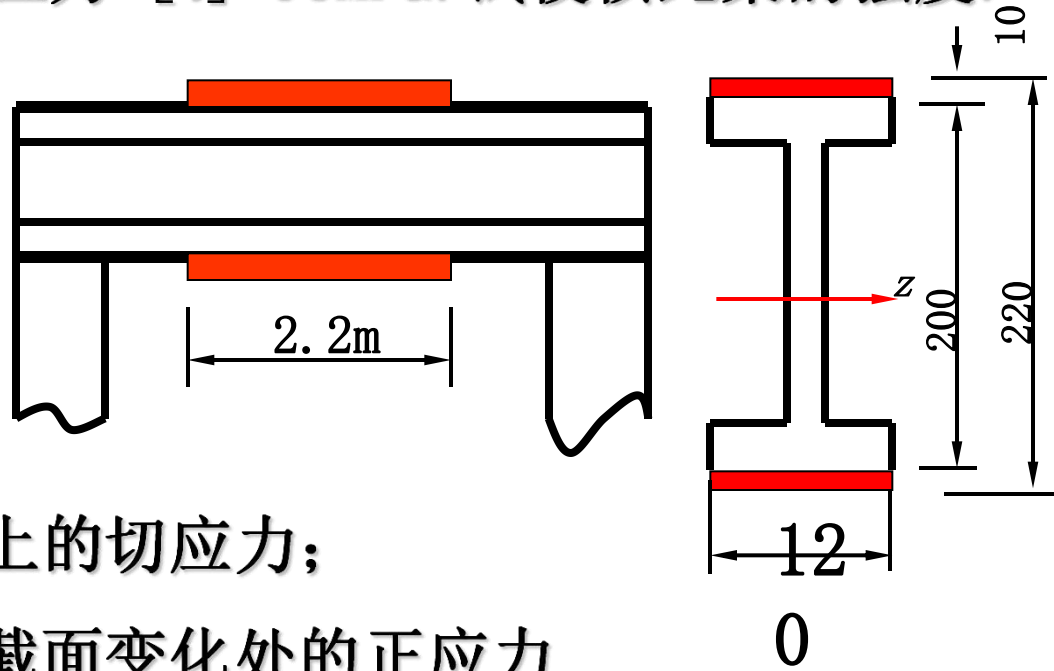
例5-19 对于图中的吊车大梁，现因移动荷载 F 增加为50kN，故在 20a号工字钢梁的中段用两块横截面为120mm×10mm而长度2.2mm的钢板加强加强段的横截面尺寸如图所示. 已知许用弯曲正应力 $[\sigma]=152\text{MPa}$ ，许用切应力 $[\tau]=95\text{MPa}$. 试校核此梁的强度.

解：加强后的梁是阶梯状变截面梁. 所以要校核

(1) F 位于跨中时跨中截面上的弯曲正应力；

(2) F 靠近支座时支座截面上的切应力；

(3) F 移至未加强的梁段在截面变化处的正应力.



(1) 校核 F 位于跨中截面时的弯曲正应力

最大弯矩值为 $M_{\max} = 62.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$

查表得20a工字钢 $I_z = 2370 \text{ cm}^4$

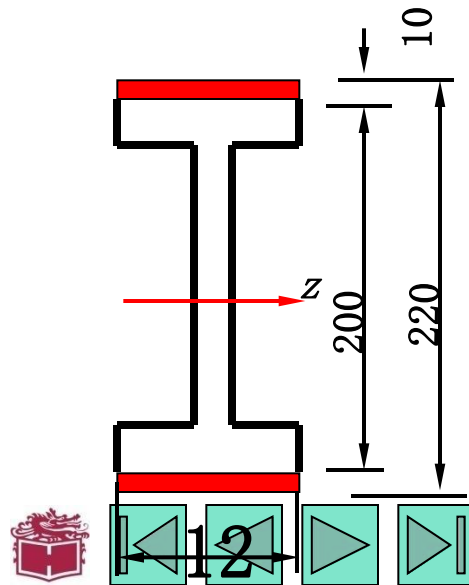
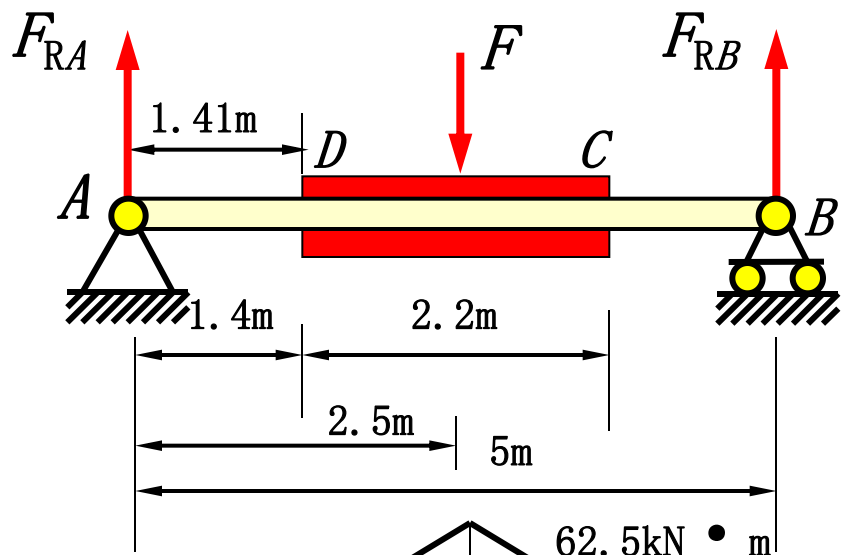
跨中截面对中性轴的惯性矩为

$$I_z = 2730 \times 10^{-8} + 2[10 \times 120(110 - 5) \times 10^{-12}] = 5020 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

略去了加强板对其自身形心轴的惯性矩。

抗弯截面系数 $W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = 456 \times 10^{-6} \text{ m}^3$

$$\sigma_{\text{cmax}} = \frac{M_{\max}}{W_z} = 137 \text{ MPa} < [\sigma]$$



(2) 校核突变截面处的正应力，
也就是校核未加强段的正应力强度。
该截面上的最大弯矩为

$$M_D = \frac{Fab}{l} = 50.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

从型钢表中查得20a工字钢

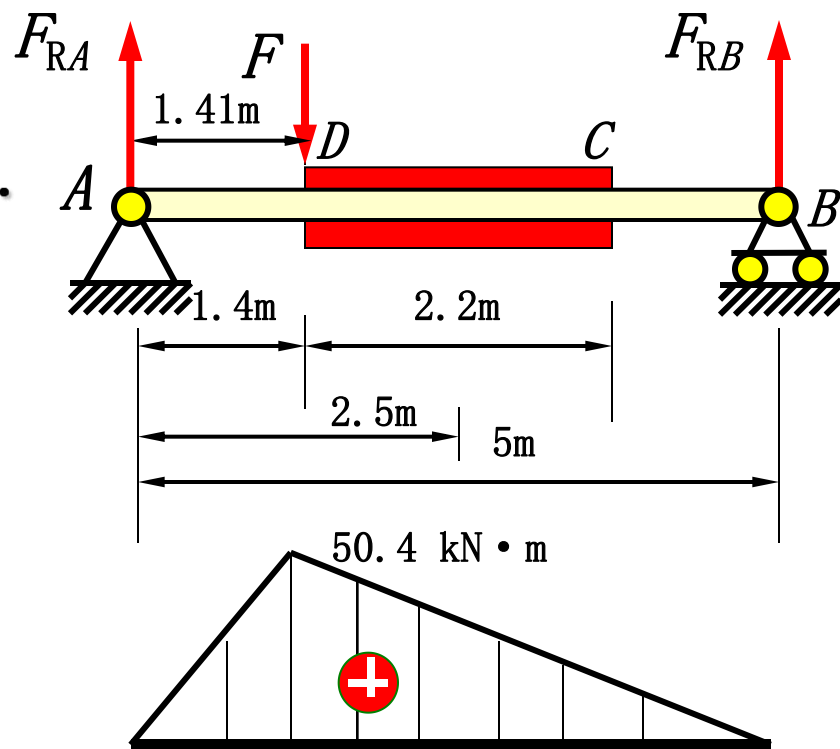
$$W_z = 237 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{D\max} = \frac{M_D}{W_z} = 213 \text{ MPa} > [\sigma]$$

(3) 校核阶梯梁的切应力

F 靠近任一支座时，支座截面为不利荷载位置 $F_{S\max} \approx F$

请同学们自行完成计算。



梁不能满足正应力强度条件。
为此应将加强板适当延长。



第6章

应力状态分析与强度理论



[返回总目录](#)

第6章 应力状态分析与强度理论

□ 应力状态的基本概念

- 平面应力状态任意方向面上的应力
 - 应力状态中的主应力与最大剪应力
 - 广义胡克定律
 - 应变能与应变能密度
 - 强度理论
 - 结论与讨论
-

□ 应力状态的基本概念

■ 应力状态概述

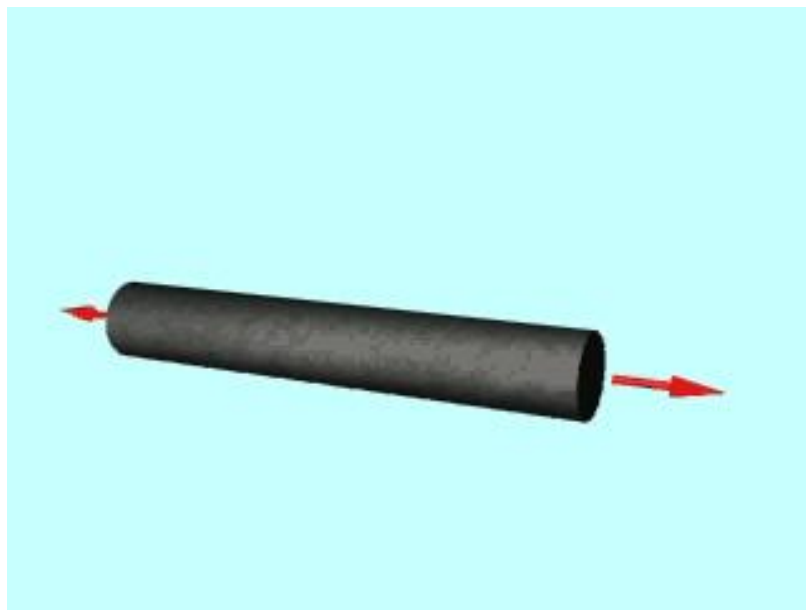
问题的提出

请看下列实验现象:

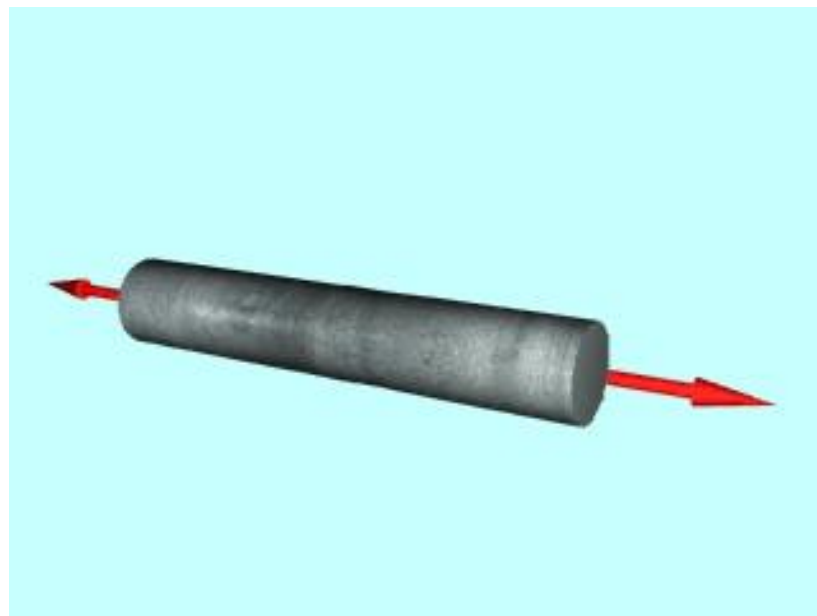
- 低碳钢和铸铁的拉伸实验
 - 低碳钢和铸铁的扭转实验
-

□ 应力状态的基本概念

铸铁拉伸实验



低碳钢拉伸实验



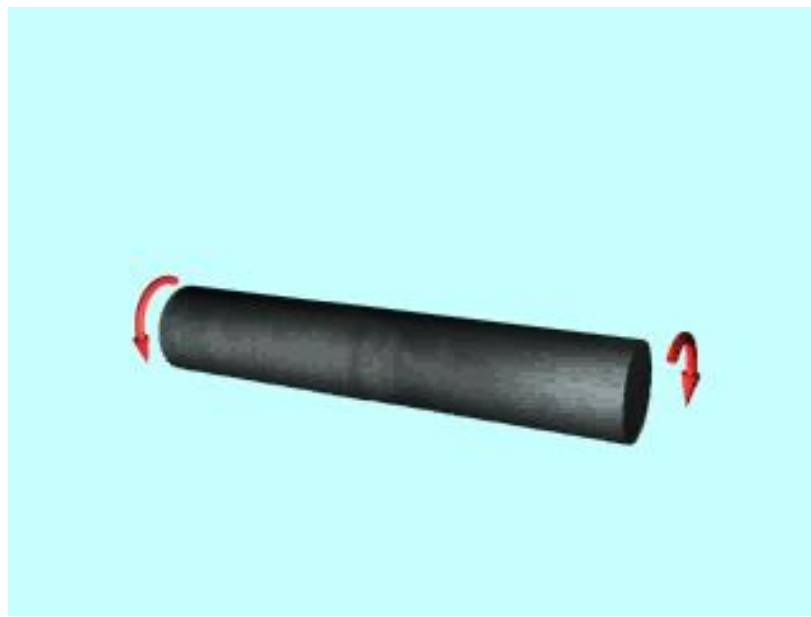
韧性材料拉伸时为什么会出现滑移线？

□ 应力状态的基本概念

低碳钢扭转实验



铸铁扭转实验



为什么脆性材料扭转时沿45°螺旋面断开？

□ 应力状态的基本概念

韧性材料与脆性材料扭转破坏时，其试样断口有着明显的区别。韧性材料试样最后沿横截面剪断，断口比较光滑、平整。

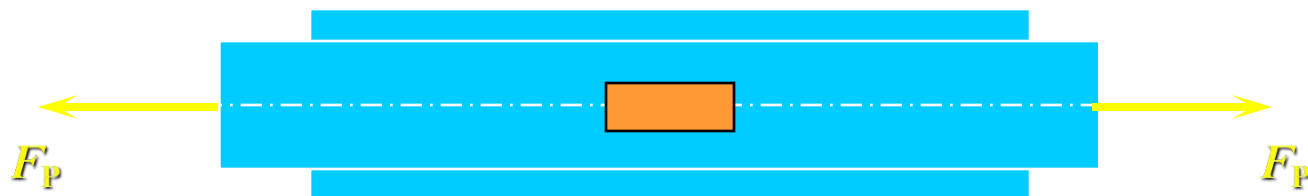


铸铁试样扭转破坏时沿45°螺旋面断开，断口呈细小颗粒状。



□ 应力状态的基本概念

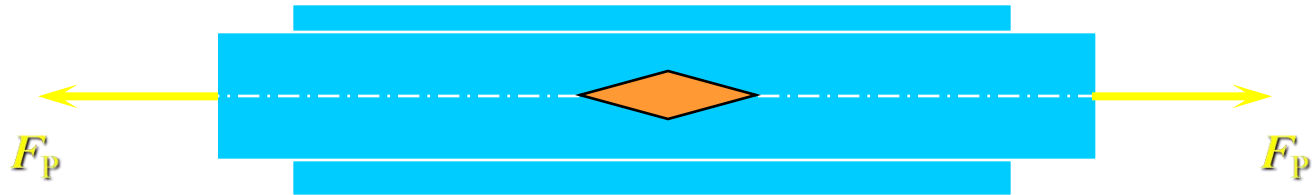
受力之前, 表面的正方形



受拉后, 正方形变成了矩形, 直角没有改变。

□ 应力状态的基本概念

受力之前, 表面斜置的正方形

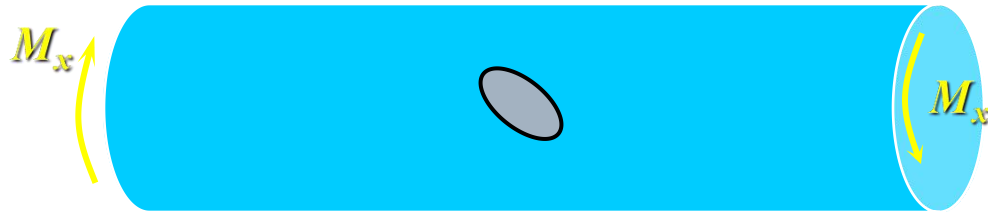


受力之前, 在其表面画一斜置的正方形; 受拉后, 正方形变成了菱形。

这表明: 拉杆的斜截面上存在剪应力。

□ 应力状态的基本概念

受扭之前，圆轴表面为正圆。

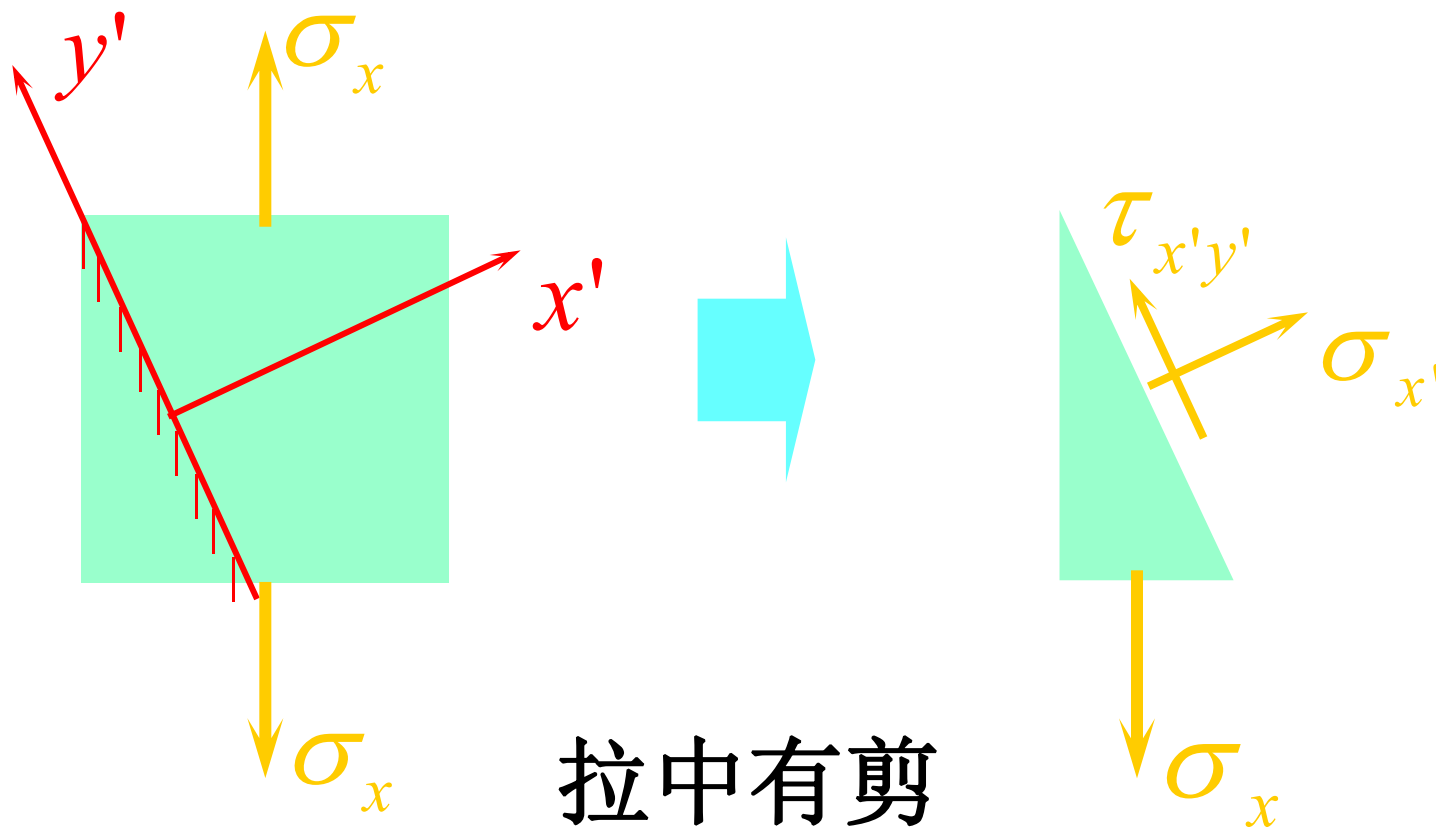


受扭后，变为一斜置椭圆，长轴方向伸长，短轴方向缩短。这是为什么？

这表明，轴扭转时，其斜截面上存在着正应力。

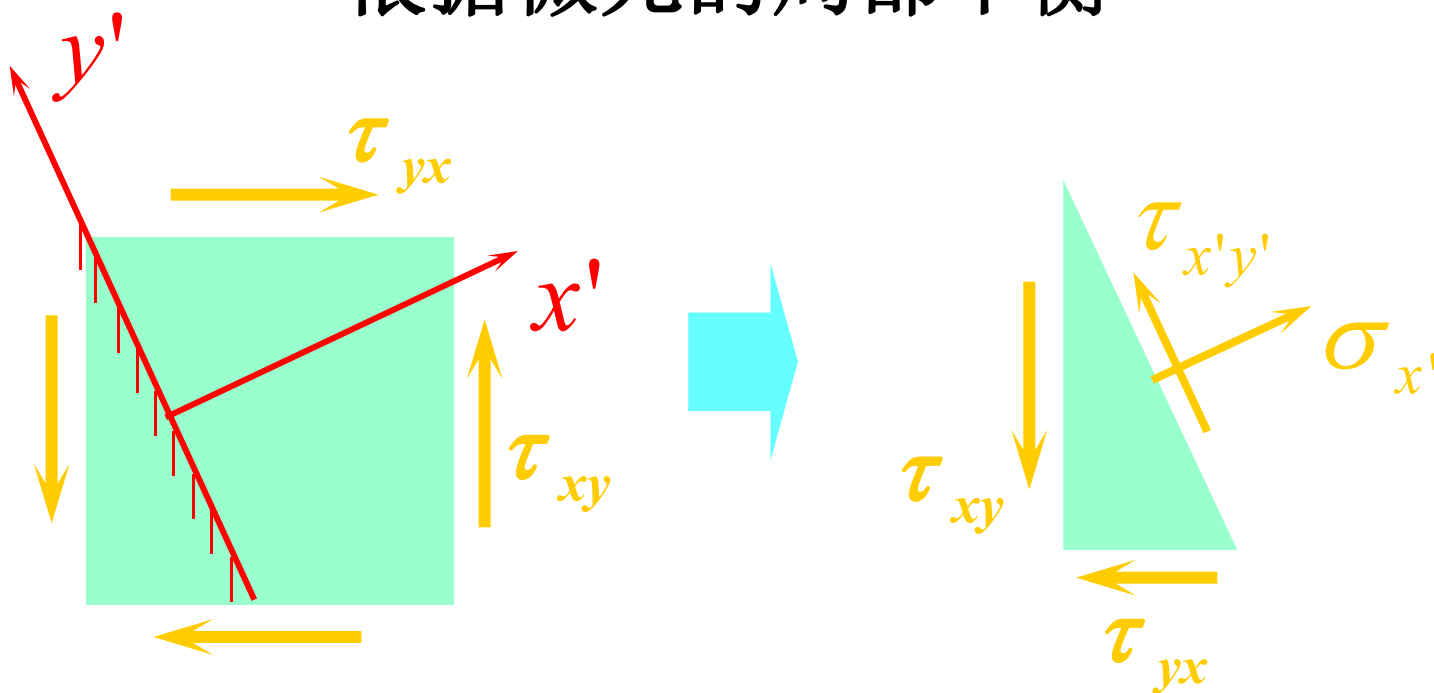
□ 应力状态的基本概念

根据微元的局部平衡



□ 应力状态的基本概念

根据微元的局部平衡



剪中有拉

□ 应力状态的基本概念

不仅横截面上存在应力，斜截面上也存在应力；不仅要研究横截面上的应力，而且也要研究斜截面上的应力。

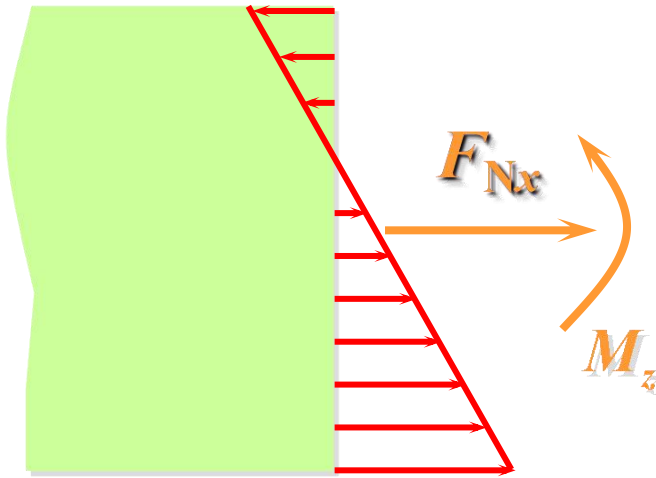
□ 应力状态的基本概念

■ 应力状态概述

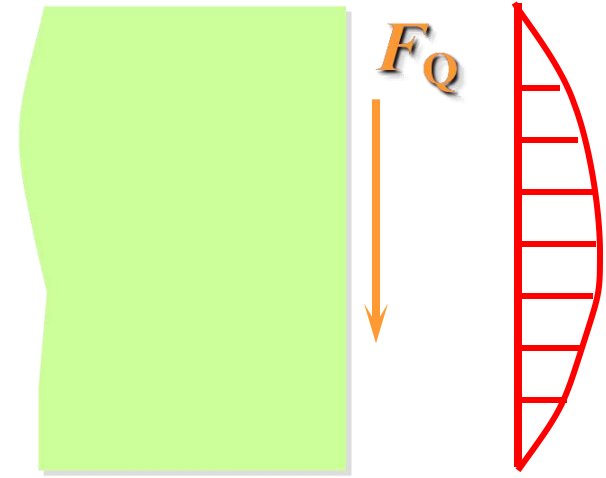
关于应力概念的深化

- 应力的点的概念
 - 应力的面的概念
 - 应力状态的概念
-

□ 应力状态的基本概念



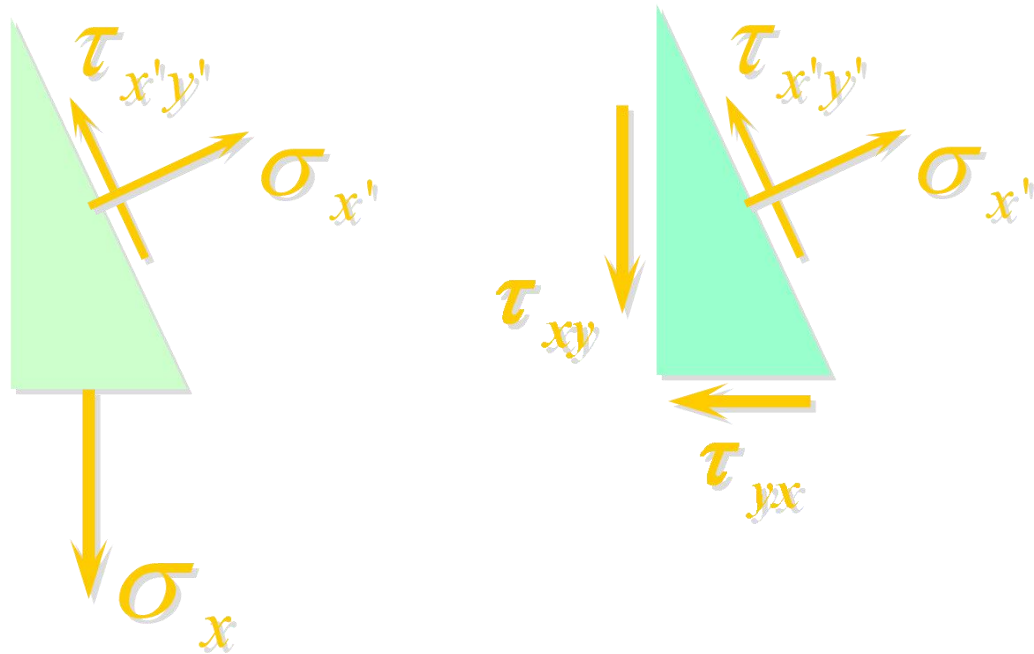
横截面上的正应力分布



横截面上的剪应力分布

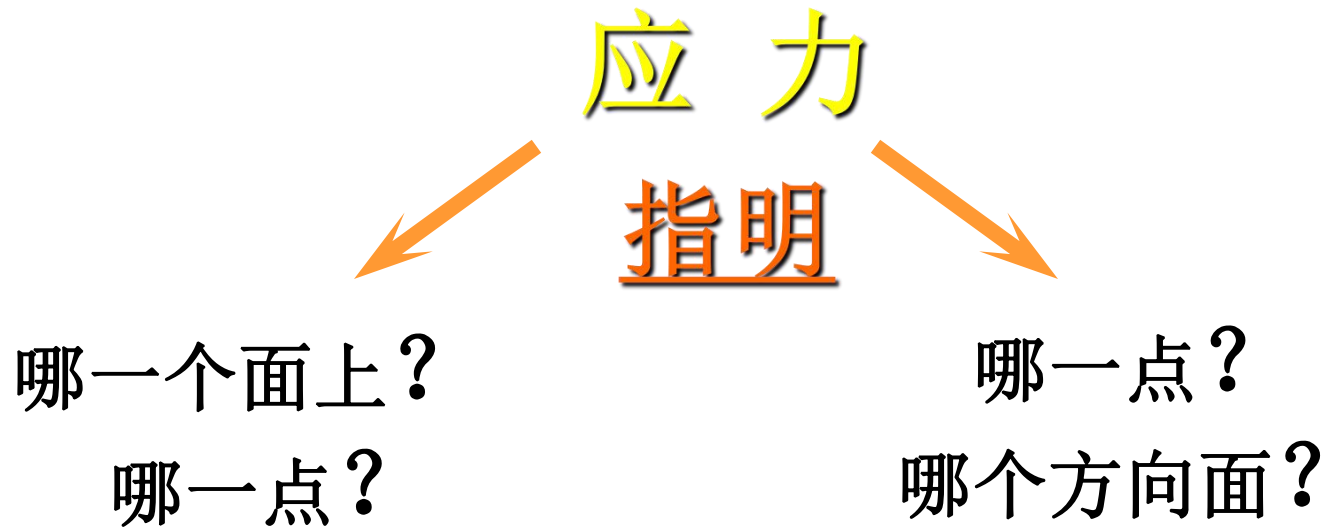
横截面上正应力分析和剪应力分析的结果表明：同一面上不同点的应力各不相同，此即**应力的点的概念**。

□ 应力状态的基本概念



微元平衡分析结果表明：即使同一点不同方向面上的应力也是各不相同的，此即**应力的面的概念**。

□ 应力状态的基本概念



过一点、在不同方向面上应力的集合，称之为
这一点的应力状态（**State of the Stresses of a Given Point**）。

□ 应力状态的基本概念

■ 应力状态概述

应力状态分析方法

应力状态分析（analysis of stress-state）是用平衡的方法，分析过一点、在不同方向面上的应力以及这些应力之间的相互关系，并确定这些应力中的极大值和极小值以及它们的作用面。

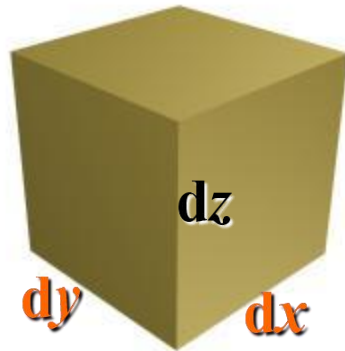
与前几章中所采用的平衡方法不同的是，应力状态分析时的平衡对象既不是整体杆或某一段杆，也不是微段杆或其一部分，而是三个方向尺度均为小量的微元局部。

此外，本章中除了采用平衡方法导出过一点所有方向面上应力的解析表达式，还将采用与平衡解析式相比拟的方法，作为分析和思考问题的一种手段，快速而有效地处理一些较为复杂的问题，从而避免死背硬记繁琐的解析公式。

□ 应力状态的基本概念

□ 描述一点应力状态的基本方法

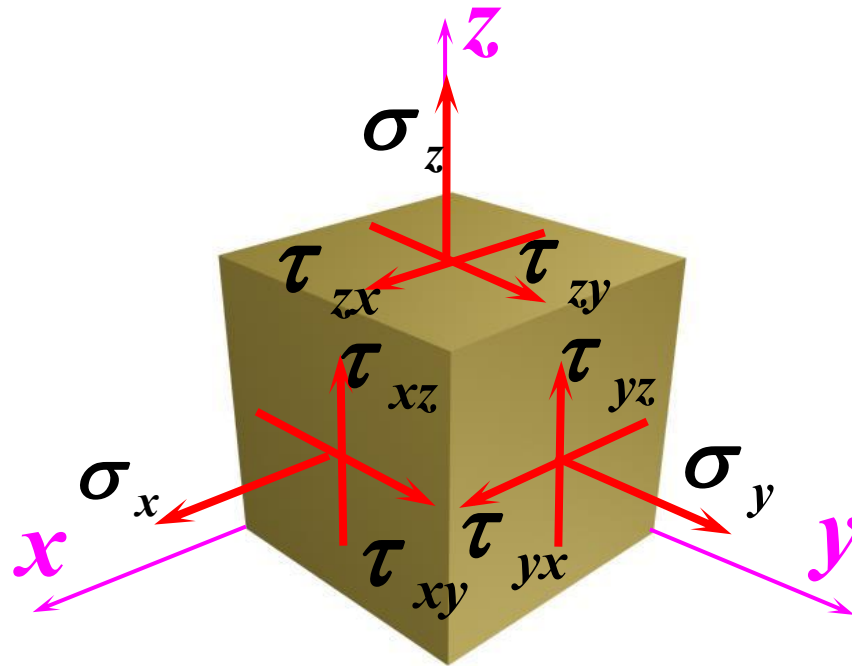
微元 (Element)



微元及其各面上一
点应力状态的描述

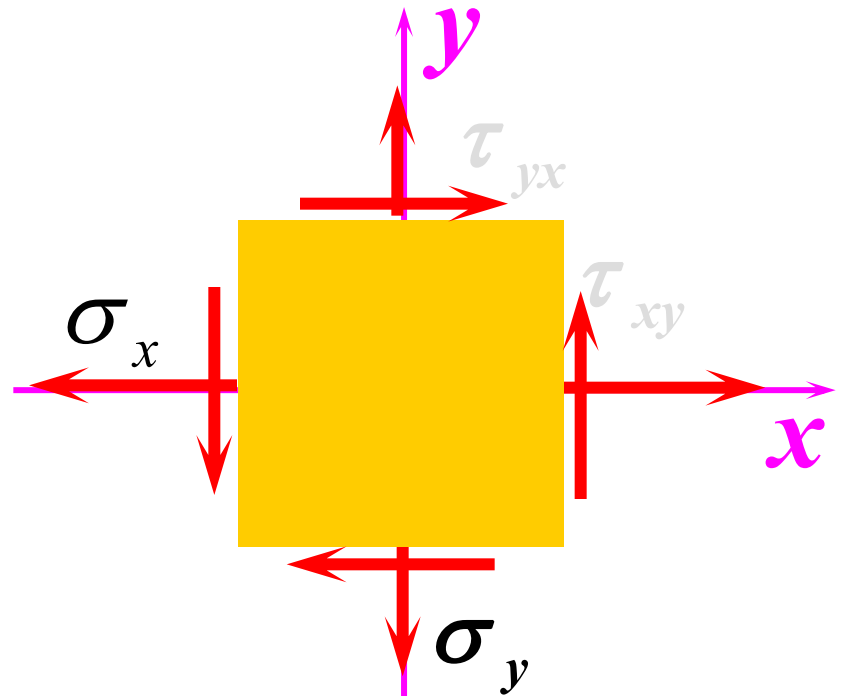
□ 应力状态的基本概念

三向（空间）应力状态 (Three-Dimensional State of Stresses)

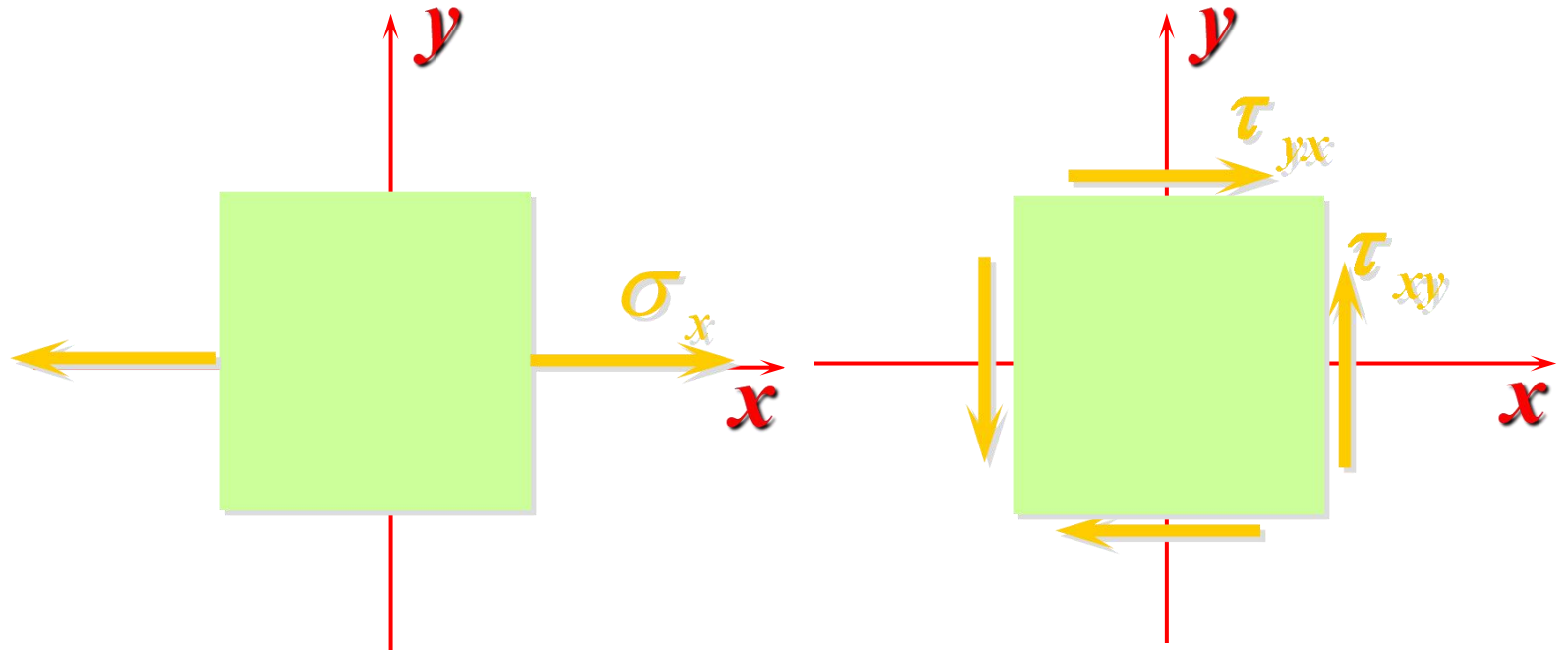


□ 应力状态的基本概念

平面（二向）
应力状态
(Plane State of
Stresses)



□ 应力状态的基本概念

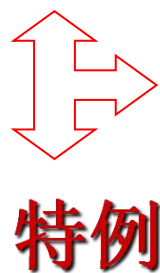


单向应力状态
(One Dimensional State of
Stresses)

纯剪应力状态
(Shearing State of Stresses)

□ 应力状态的基本概念

三向应力状态



平面应力状态



单向应力状态

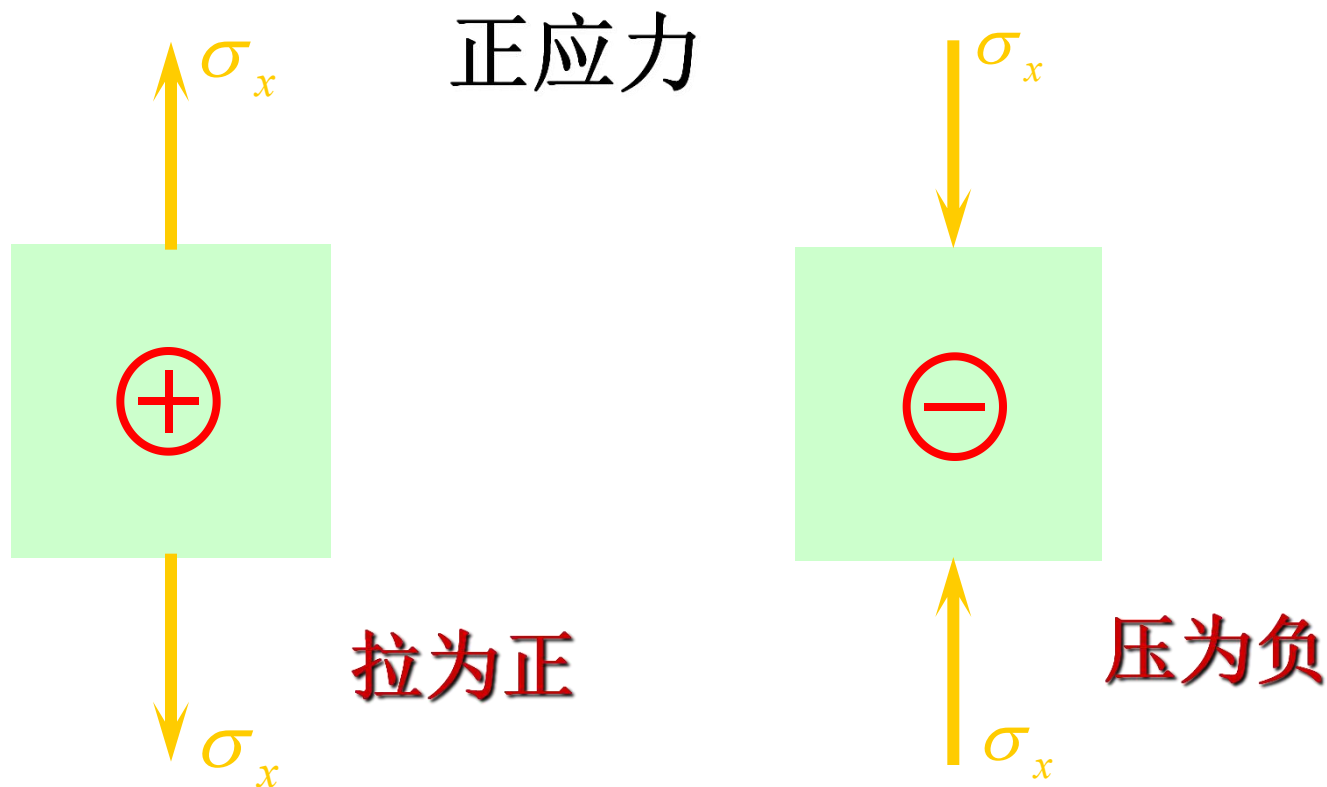
纯剪应力状态

第6章 应力状态分析与强度理论

- 应力状态的基本概念
 - 平面应力状态任意方向面上的应力
 - 应力状态中的主应力与最大剪应力
 - 广义胡克定律
 - 应变能与应变能密度
 - 强度理论
 - 结论与讨论
-

平面应力状态任意方向面上的应力

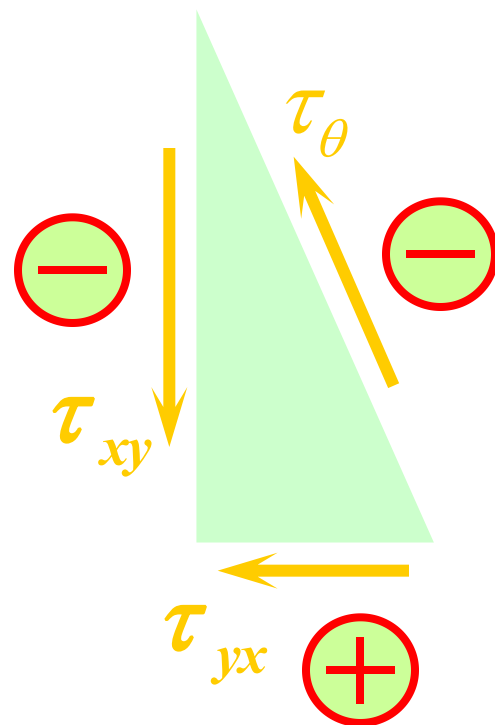
■ 方向角与应力分量的正负号约定



平面应力状态任意方向面上的应力

剪应力

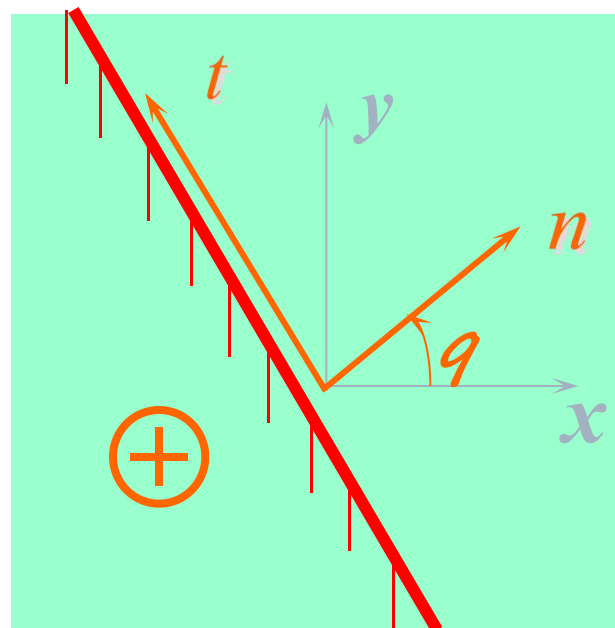
使微元或其局部顺时针方向转动为正；反之为负。



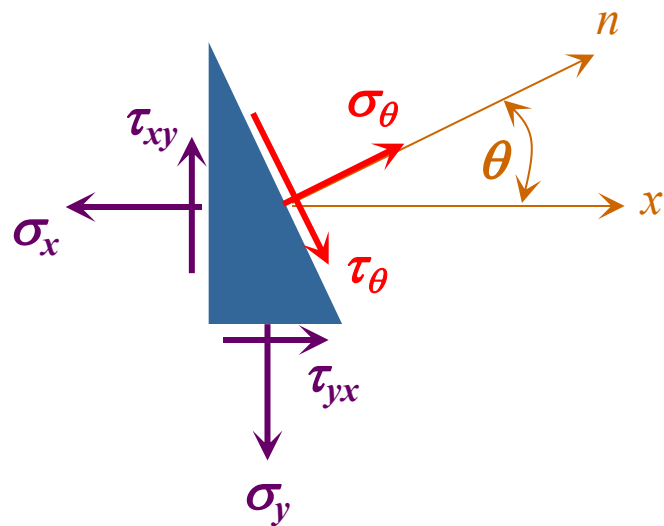
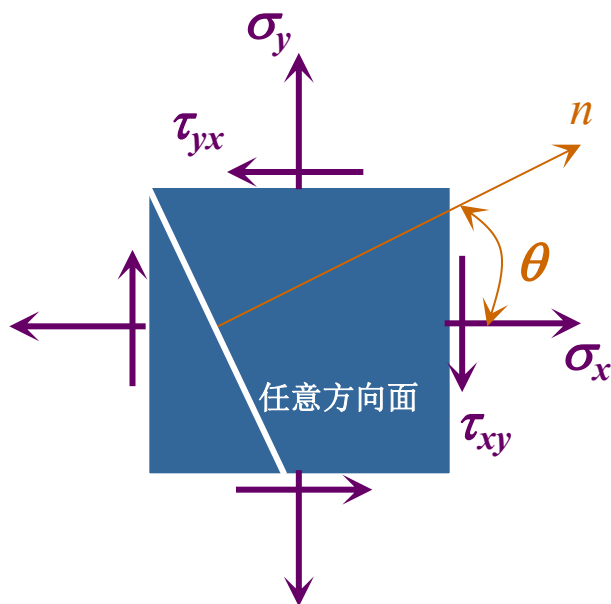
平面应力状态任意方向面上的应力

方向角 θ

由 x 正向反时针转到 x' 正向者为正；反之为负。



平面应力状态任意方向面上的应力



平面应力状态任意方向面上的应力

微元的局部平衡

☐ 平衡对象

——用 θ 斜截面截取的微元局部

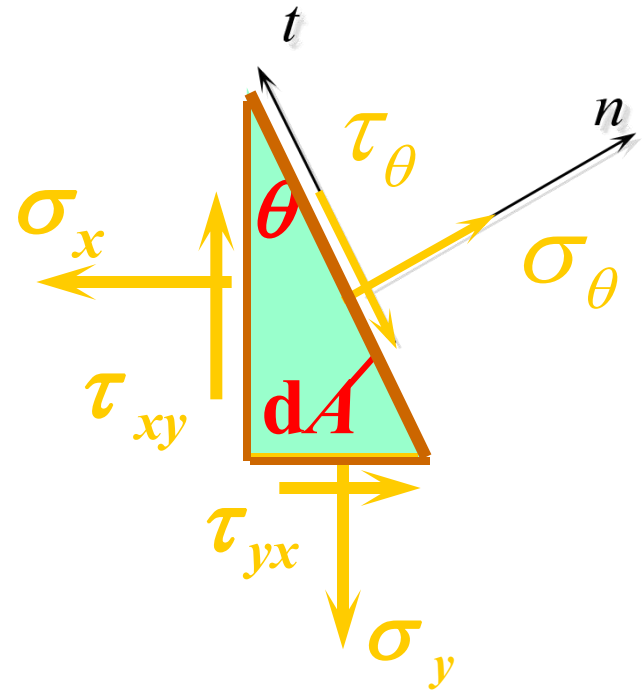
☐ 参加平衡的量

——应力乘以其作用的面积

☐ 平衡方程

$$\sum F_m = 0$$

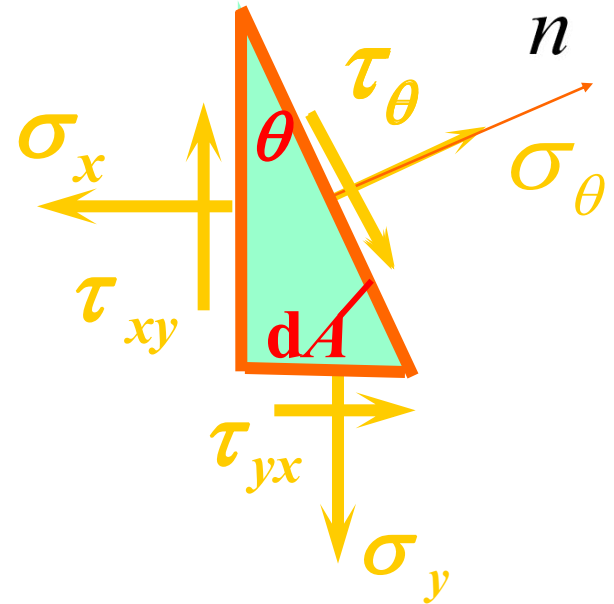
$$\sum F_l = 0$$



平面应力状态任意方向面上的应力

$$\sum F_n = 0$$

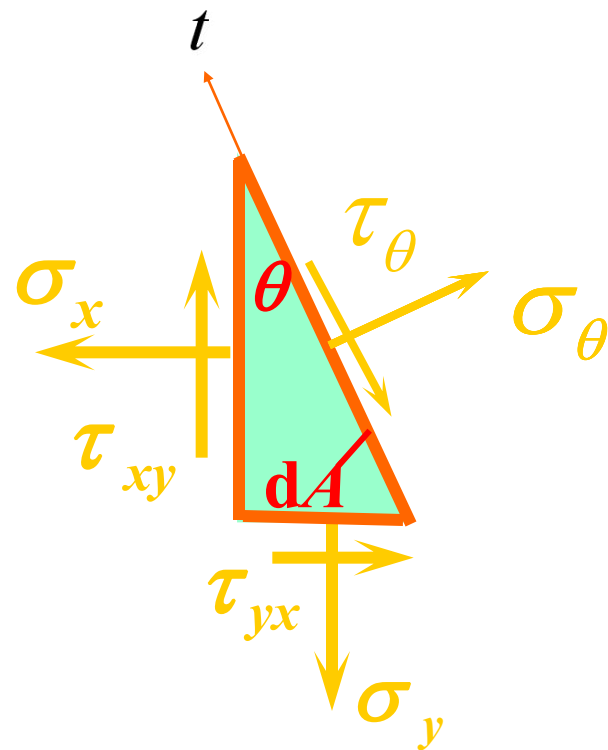
$$\begin{aligned}\sigma_{\theta} dA - \sigma_x (dA \cos \theta) \cos \theta \\ + \tau_{xy} (dA \cos \theta) \sin \theta \\ + \tau_{yx} (dA \sin \theta) \cos \theta \\ - \sigma_y (dA \sin \theta) \sin \theta = 0\end{aligned}$$



平面应力状态任意方向面上的应力

$$\sum F_t = 0$$

$$\begin{aligned} & -\tau_{\theta} dA + \sigma_x (dA \cos \theta) \sin \theta \\ & + \tau_{xy} (dA \cos \theta) \cos \theta \\ & - \tau_{yx} (dA \sin \theta) \sin \theta \\ & - \sigma_y (dA \sin \theta) \sin \theta = 0 \end{aligned}$$



平面应力状态任意方向面上的应力

■ 平面应力状态中任意方向面上的正应力与剪应力

利用三角倍角公式，根据上述平衡方程式，可以得到计算平面应力状态中任意方向面上正应力与剪应力的表达式：

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

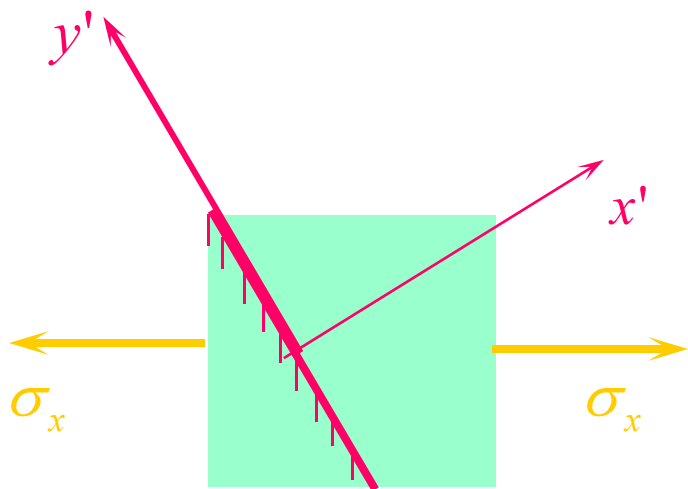
平面应力状态任意方向面上的应力

例 题 1

分析轴向拉伸杆件的最大剪应力的作用面，说明低碳钢拉伸时发生屈服的主要原因。

杆件承受轴向拉伸时，其上任意一点均为单向应力状态。

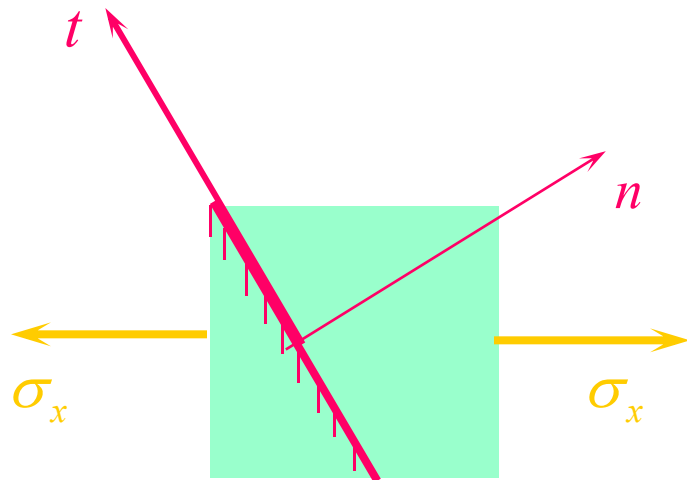
根据平面应力状态任意斜截面上的正应力和剪应力公式



$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

平面应力状态任意方向面上的应力



根据平面应力状态任意斜截面上的正应力和剪应力公式

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

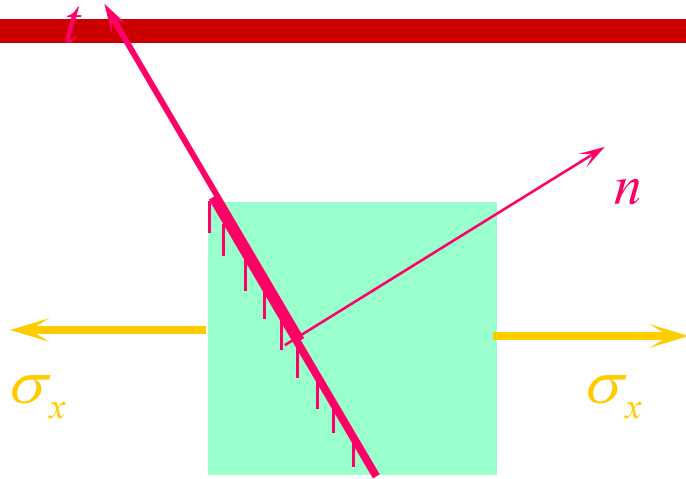
$$\tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

在本例的情形下， $\sigma_y = 0$ ， $\tau_{yx} = 0$ 。

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\theta$$

$$\tau_{\theta} = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta$$

平面应力状态任意方向面上的应力



$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\theta$$

$$\tau_{\theta} = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta$$

根据这一结果，当 $\theta = 45^\circ$ 时，斜截面上既有正应力又有剪应力，其值分别为

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma_x}{2}, \tau_{45^\circ} = \frac{\sigma_x}{2}$$

不难看出，在所有的方向面中， 45° 斜截面上的正应力不是最大值，而剪应力却是最大值。

这表明，轴向拉伸时最大剪应力发生在与轴线夹 45° 角的斜面上，这正是低碳钢试样拉伸至屈服时表面出现滑移线的方向。因此，可以认为屈服是由最大剪应力引起的。

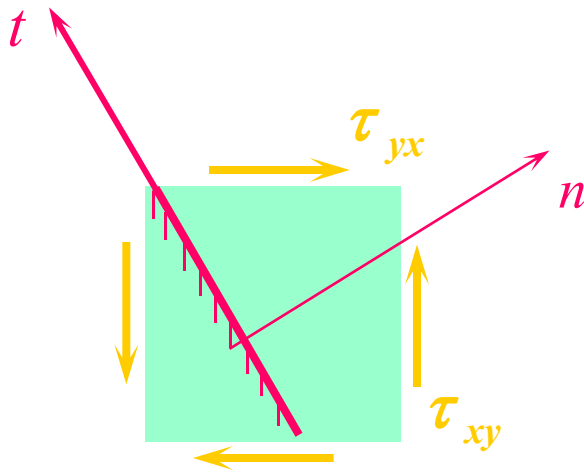
平面应力状态任意方向面上的应力

例 题 2

分析圆轴扭转时最大剪应力的作用面，说明铸铁圆试样扭转破坏的主要原因。

圆轴扭转时，其上任意一点的应力状态为纯剪应力状态。

根据平面应力状态任意斜截面上的正应力和剪应力公式

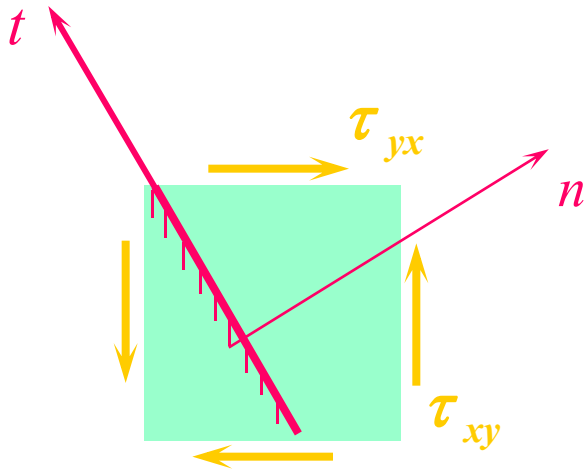


$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

平面应力状态任意方向面上的应力

根据平面应力状态任意斜截面上的正应力和剪应力公式



$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

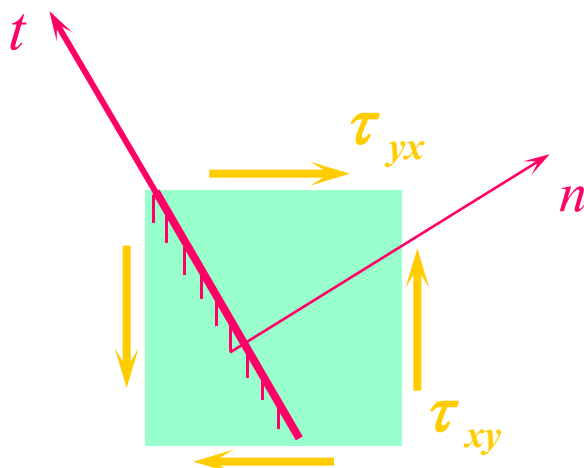
$$\tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

在本例的情形下， $\sigma_x = \sigma_y = 0$ 。

$$\sigma_{\theta} = -\tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{\theta} = \tau_{xy} \cos 2\theta$$

□ 平面应力状态任意方向面上的应力



$$\sigma_{\theta} = -\tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{\theta} = \tau_{xy} \cos 2\theta$$

可以看出，当 $\theta = 45^\circ$ 或 $\theta = -45^\circ$ 时，斜截面上只有正应力没有剪应力。 $\theta = 45^\circ$ 时(自 x 轴逆时针方向转过 45°)，压应力最大； $\theta = -45^\circ$ 时(自 x 轴顺时针方向转过 45°)，拉应力最大：

$$\sigma_{45^\circ} = \sigma_{\max}^- = -\tau_{xy} \quad \sigma_{-45^\circ} = \sigma_{\max}^+ = \tau_{xy}$$

$$\tau_{45^\circ} = 0 \quad \tau_{-45^\circ} = 0$$

进行铸铁圆试样扭转实验时，正是沿着最大拉应力作用面（即 -45° 螺旋面）断开的。因此，可以认为这种脆性破坏是由最大拉应力引起的。

第6章 应力状态分析与强度理论

- 应力状态的基本概念
 - 平面应力状态任意方向面上的应力
 - 应力状态中的主应力与最大剪应力
 - 广义胡克定律
 - 应变能与应变能密度
 - 强度理论
 - 结论与讨论
-

应力状态中的主应力与最大剪应力

主平面、主应力与主方向

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$


$$\tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta_p = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

剪应力 $\tau_{\theta}=0$ 的方向面，称为主平面（principal plane），其方向角用 θ_p 表示。

应力状态中的主应力与最大剪应力

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

将上式对 θ 求一次导数，并令其等于零，有

$$\frac{d\sigma_{\theta}}{d\theta} = (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta - 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

由此解出的角度

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

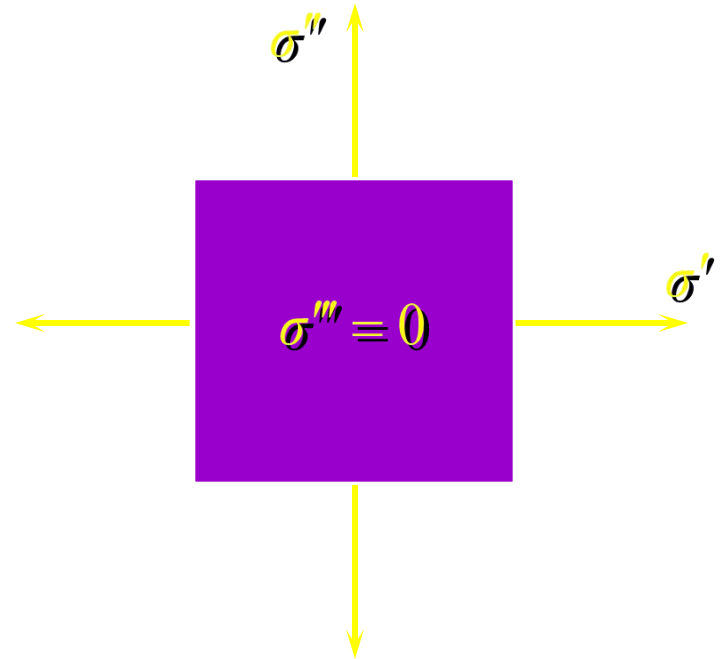
角度 θ 与 θ_p 具有完全一致的形式。这表明，主应力具有极值的性质，即当坐标系绕 z 轴(垂直于 xy 坐标面)旋转时，主应力为所有坐标系中正应力的极值。

应力状态中的主应力与最大剪应力

根据剪应力成对定理，当一对方向面为主平面时，另一对与之垂直的方向面($\theta = \theta_p + \pi/2$)，其上之剪应力也等于零，因而也是主平面，其上之正应力也是主应力。

应力状态中的主应力与最大剪应力

需要指出的是，对于平面应力状态，平行于 xy 坐标面的平面，其上既没有正应力，也没有剪应力作用，这种平面也是主平面。这一主平面上的主应力等于零。



应力状态中的主应力与最大剪应力

平面应力状态的三个主应力

$$\tan 2\theta = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\theta_p \quad \theta_p + \frac{\pi}{2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma'' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma''' = 0$$

应力状态中的主应力与最大剪应力

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma'' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma''' = 0$$

以后将按三个主应力代数值由大到小顺序排列，并分别用

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

表示，即

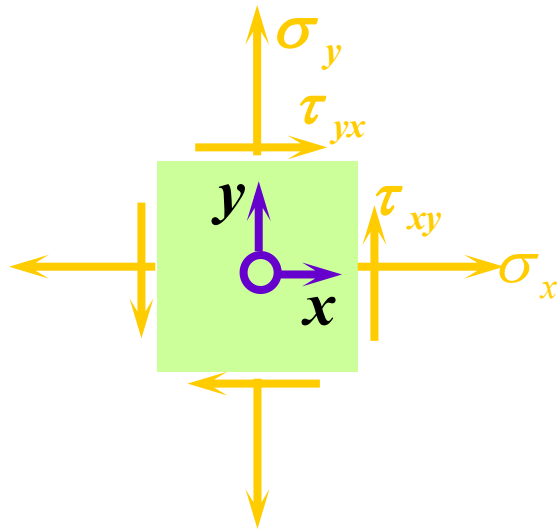
$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

应力状态中的主应力与最大剪应力

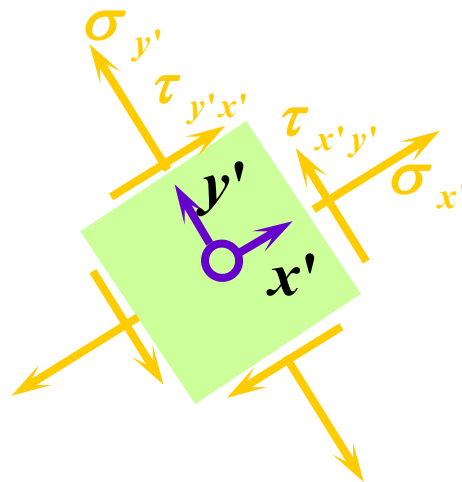
根据主应力的大小与方向可以确定材料何时发生失效或破坏，确定失效或破坏的形式。因此，可以说主应力是反映应力状态本质的特征量。

应力状态中的主应力与最大剪应力

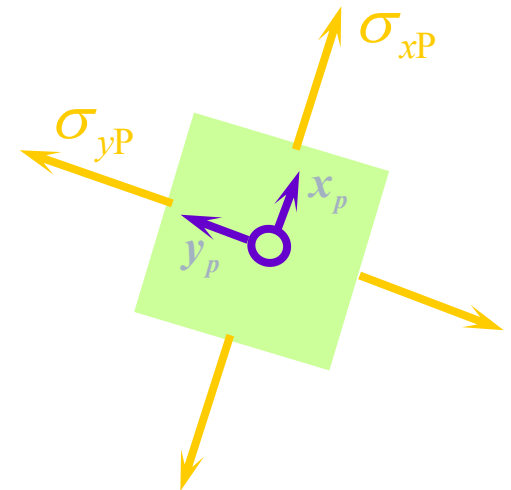
因此，同一点的应力状态可以有无穷多种表达形式。在无穷多种表达形式中有没有一种简单的、但又能反映一点应力状态本质的表达形式？



x - y 坐标系



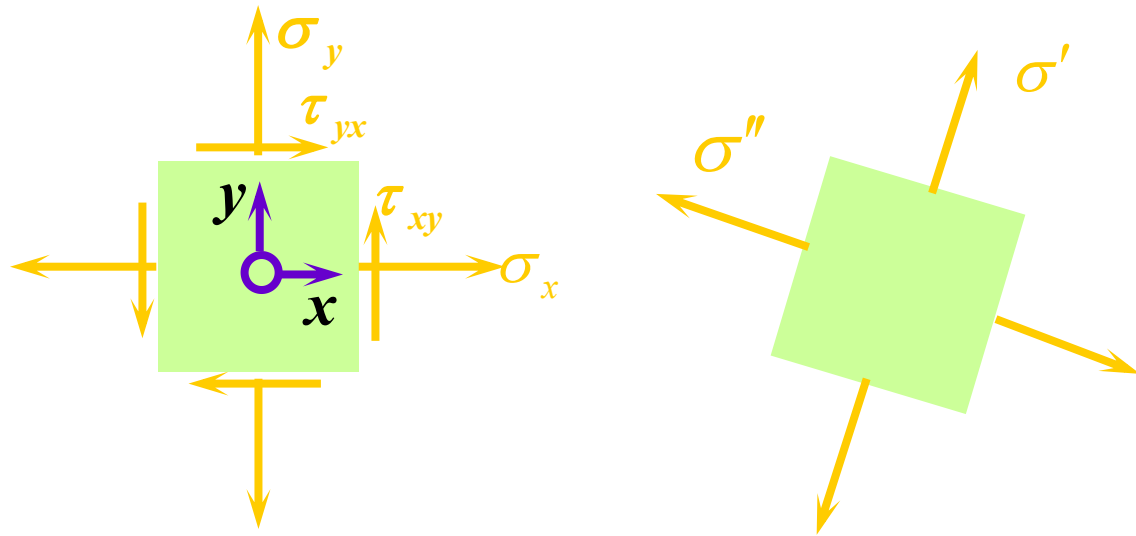
x' - y' 坐标系



x_p - y_p 坐标系

应力状态中的主应力与最大剪应力

根据上述结果，原来用 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 和 τ_{yx} 表示的应力状态，现在可以用主应力表示。



显然，用主应力表示的应力状态要比用一般应力分量表示的应力状态简单。用主应力表示一点处的应力状态可以说明某些应力状态表面上是不同的，但实质是相同的，即其主应力和主方向都相同。

应力状态中的主应力与最大剪应力

■ 面内最大剪应力

与正应力相类似，不同方向面上的剪应力亦随着坐标的旋转而变化，因而剪应力亦可能存在极值。为求此极值，将

$$\tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

对 θ 求一次导数，并令其等于零，得到

$$\frac{d\tau_{\theta}}{d\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - 2\tau_{xy} \sin 2\theta = 0$$

由此得出另一特征角，用 θ_s 表示

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

应力状态中的主应力与最大剪应力

■ 面内最大剪应力

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$
$$\tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

得到 τ_θ 的极值

$$\tau' = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

需要特别指出的是，上述剪应力极值仅对垂直于xy坐标面的方向面而言，因而称为面内最大剪应力（**maximum shearing stresses in plane**）与面内最小剪应力。二者不一定是过一点的所有方向面中剪应力的最大和最小值。

应力状态中的主应力与最大剪应力

■ 过一点所有方向面中的最大剪应力

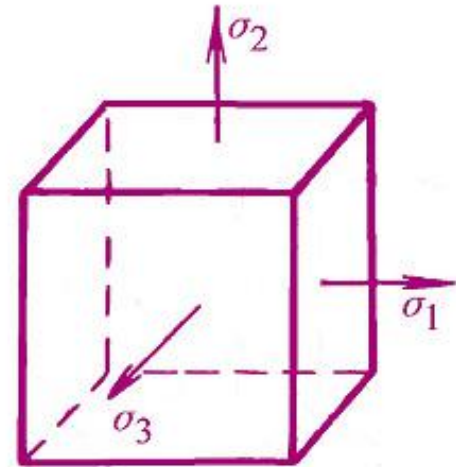
为确定过一点的所有方向面上的最大剪应力，可以将平面应力状态视为有三个主应力（ σ_1 、 σ_2 、 σ_3 ）作用的应力状态的特殊情形，即三个主应力中有一个等于零。

考察微元三对面上分别作用着三个主应力（ $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \neq 0$ ）的应力状态。

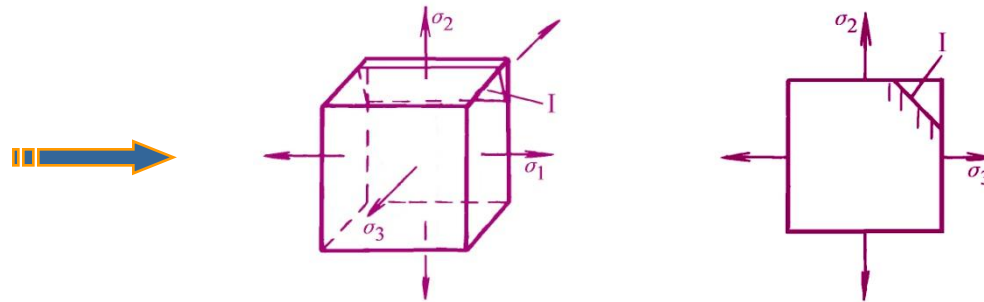
应力状态中的主应力与最大剪应力

■ 过一点所有方向面中的最大剪应力

考察微元三对面上分别作用着三个主应力（ $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \neq 0$ ）的应力状态。



应力状态中的主应力与最大剪应力



在平行于主应力 σ_1 方向的任意方向面 I 上，正应力和剪应力都与 σ_1 无关。因此，当研究平行于 σ_1 的这一组方向面上的应力时，所研究的应力状态可视为一平面应力状态：

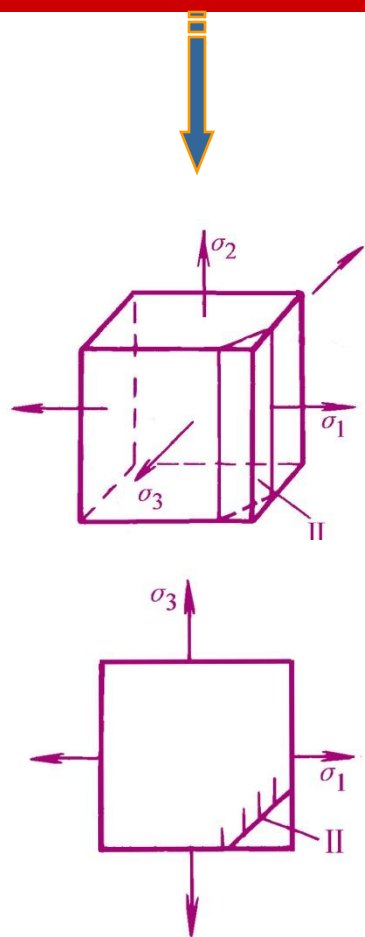
$$\sigma_x = \sigma_3, \quad \sigma_y = \sigma_2, \quad \tau_{xy} = 0$$

$$\tau' = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\tau' = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

这就是 I 组方向面内的最大剪应力。

□ 应力状态中的主应力与最大剪应力



在平行于主应力 σ_2 方向的任意方向面 II 上，正应力和剪应力都与 σ_2 无关。因此，当研究平行于 σ_2 的这一组方向面上的应力时，所研究的应力状态可视为一平面应力状态：

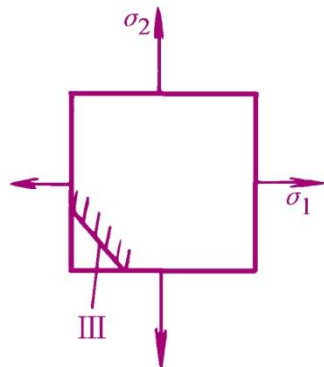
$$\sigma_x = \sigma_1, \quad \sigma_y = \sigma_3, \quad \tau_{xy} = 0。$$

$$\tau' = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

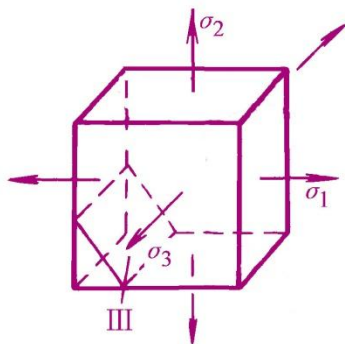
$$\tau'' = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

这就是 II 组方向面内的最大剪应力。

□ 应力状态中的主应力与最大剪应力



在平行于主应力 σ_3 方向的任意方向面III上，正应力和剪应力都与 σ_3 无关。因此，当研究平行于 σ_3 的这一组方向面上的应力时，所研究的应力状态可视为一平面应力状态：



$$\sigma_x = \sigma_1, \quad \sigma_y = \sigma_2, \quad \tau_{xy} = 0。$$

$$\tau' = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\tau''' = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

这就是III组方向面内的最大剪应力。

□ 应力状态中的主应力与最大剪应力

■ 过一点所有方向面中的最大剪应力

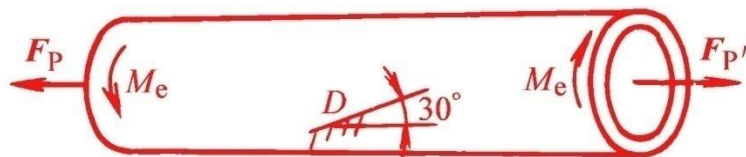
$$\tau' = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad \tau'' = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad \tau''' = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

一点应力状态中的最大剪应力，必然是上述三者中最大的，即

$$\tau_{\max} = \tau'' = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

应力状态中的主应力与最大剪应力

例 题 3

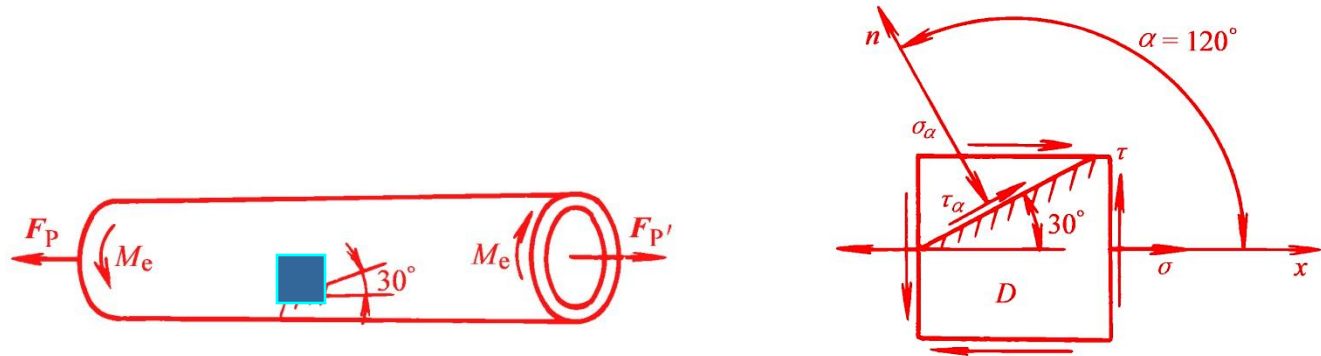


薄壁圆管受扭转和拉伸同时作用（如图所示）。已知圆管的平均直径 $D=50\text{ mm}$ ，壁厚 $\delta=2\text{ mm}$ 。外加力偶的力偶矩 $M_e=600\text{ N}\cdot\text{m}$ ，轴向载荷 $F_P=20\text{ kN}$ 。薄壁管截面的扭转截面系数可近似取为

$$W_P = \frac{\pi d^2 \delta}{2}$$

- 求：**
1. 圆管表面上过 D 点与圆管母线夹角为 30° 的斜截面上的应力；
 2. D 点主应力和最大剪应力。

应力状态中的主应力与最大剪应力

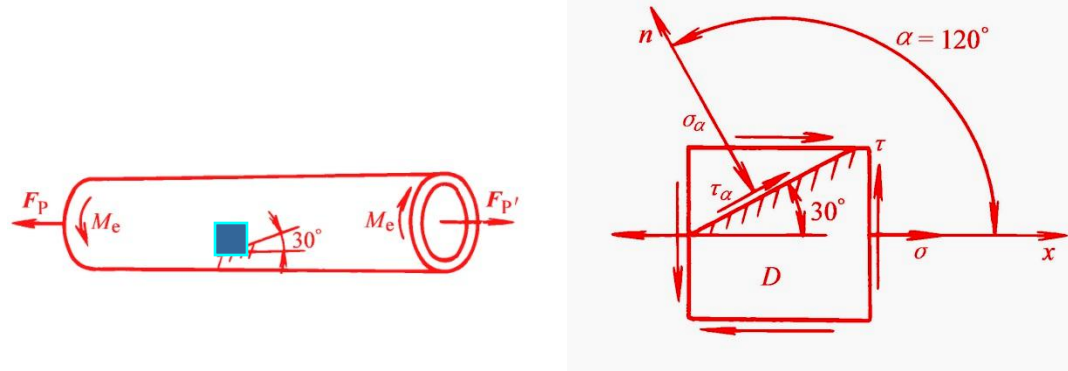


解：1. 取微元，确定微元各个面上的应力

围绕 D 点用横截面、纵截面和圆柱面截取微元。

利用拉伸和圆轴扭转时横截面上的正应力和剪应力公式计算微元各面上的应力：

应力状态中的主应力与最大剪应力



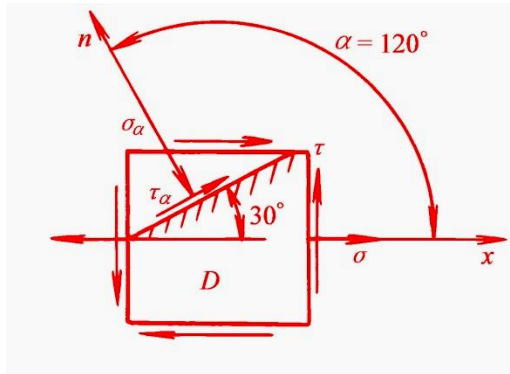
解：1. 取微元，确定微元各个面上的应力

利用拉伸和圆轴扭转时横截面上的正应力和剪应力公式计算微元各面上的应力：

$$\sigma = \frac{F_P}{A} = \frac{F_P}{\pi D \delta} = \frac{20 \text{ kN} \times 10^3}{\pi \times 50 \text{ mm} \times 10^{-3} \times 2 \text{ mm} \times 10^{-3}} = 63.7 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{M_x}{W_P} = \frac{2 M_e}{\pi d^2 \delta} = \frac{2 \times 600 \text{ N} \cdot \text{m}}{\pi \times (50 \text{ mm} \times 10^{-3})^2 \times 2 \text{ mm} \times 10^{-3}} = 76.4 \text{ MPa}$$

应力状态中的主应力与最大剪应力



解：2. 求斜截面上的应力

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

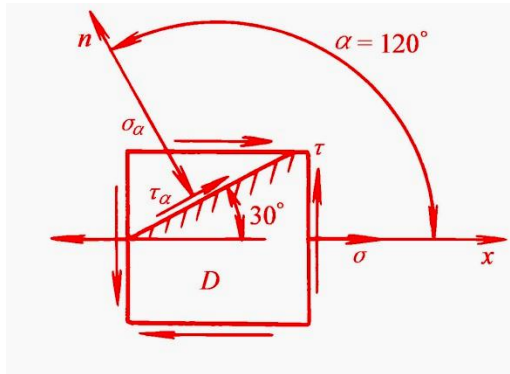
$$\tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

在本例中有：

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 63.7 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 0, \\ \tau_{xy} &= -76.4 \text{ MPa}, \quad \theta = 120^\circ. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{30^\circ} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= \frac{63.7 \text{ MPa} + 0}{2} + \frac{63.7 \text{ MPa} - 0}{2} \cos(2 \times 120^\circ) - (-76.4 \text{ MPa}) \sin(2 \times 120^\circ) \\ &= -50.3 \text{ MPa} \end{aligned}$$

应力状态中的主应力与最大剪应力



解：2. 求斜截面上的应力

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

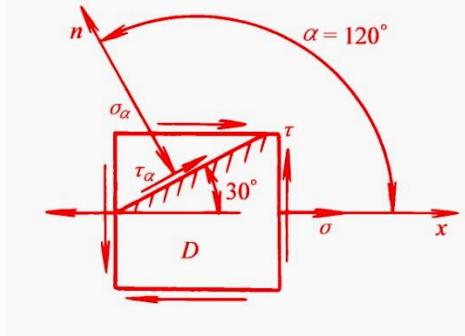
在本例中有：

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 63.7 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 0, \\ \tau_{xy} &= -76.4 \text{ MPa}, \quad \theta = 120^\circ. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{30^\circ} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \\ &= \frac{63.7 \text{ MPa} - 0}{2} \sin(2 \times 120^\circ) + (-76.4 \text{ MPa}) \cos(2 \times 120^\circ) \\ &= 10.7 \text{ MPa} \end{aligned}$$

应力状态中的主应力与最大剪应力

解：3. 确定主应力与最大剪应力



$$\begin{aligned}\sigma' &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ &= \frac{63.7\text{MPa} + 0}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(63.7\text{MPa} - 0)^2 + 4(-76.4\text{MPa})^2} \\ &= 114.6\text{MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma'' &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ &= \frac{63.7\text{MPa} + 0}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(63.7\text{MPa} - 0)^2 + 4(-76.4\text{MPa})^2} \\ &= -50.9\text{MPa}\end{aligned}$$

$$\sigma''' = 0$$

应力状态中的主应力与最大剪应力

解：3. 确定主应力与最大剪应力

$$\sigma' = 114.6 \text{MPa} \quad \sigma'' = -50.9 \text{MPa} \quad \sigma''' = 0$$

根据主应力代数值大小顺序排列，**D**点的三个主应力为

$$\sigma_1 = \sigma' = 114.6 \text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma''' = 0$$

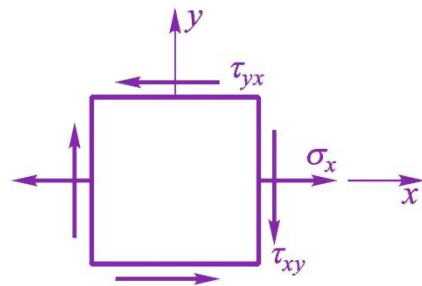
$$\sigma_3 = \sigma'' = -50.9 \text{MPa}$$

D点的最大剪应力为

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{114.6 \text{MPa} - (-50.9 \text{MPa})}{2} = 82.75 \text{MPa}$$

应力状态中的主应力与最大剪应力

例 题 4 **已知:** 应力状态如图所示。



试求: 1. 写出主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 的表达式;
2. 若已知 $\sigma_x = 63.7 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 76.4 \text{ MPa}$, 当坐标轴 x 、 y 反时针方向旋转 $\theta = 120^\circ$ 后至 x' 、 y' , 求:
 $\sigma_{x'}$ 、 $\tau_{x'y'}$ 。

解: 1. 确定主应力

应用平面应力状态主应力公式

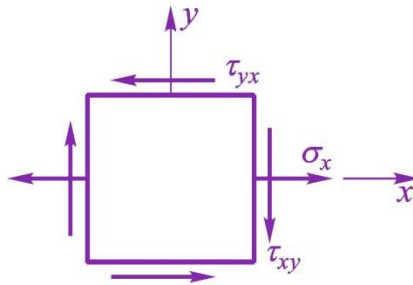
$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma'' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

应力状态中的主应力与最大剪应力

解： 1.确定主应力

应用平面应力状态主应力公式



$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma'' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

因为 $\sigma_y=0$ ，所以有

$$\sigma' = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} > 0 \quad \sigma'' = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} < 0$$

又因为是平面应力状态，故有

$$\sigma''' = 0$$

应力状态中的主应力与最大剪应力

$$\sigma' = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} > 0$$

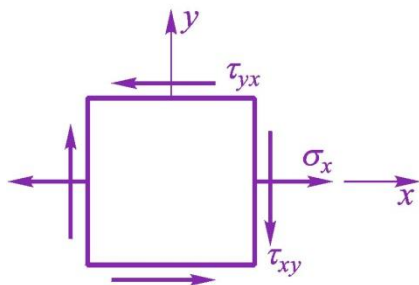
$$\sigma'' = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} < 0$$

$$\sigma''' = 0$$

于是，根据 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 的排列顺序，得

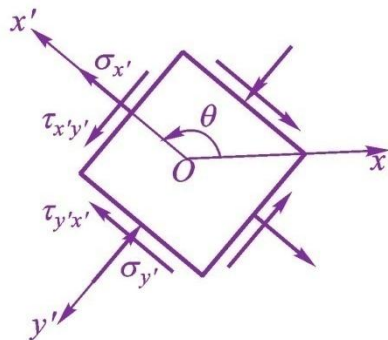
$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma' = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 &= \sigma'' = 0 \\ \sigma_3 &= \sigma''' = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \end{aligned} \right\}$$

应力状态中的主应力与最大剪应力



解：2. 计算方向面法线旋转后的应力分量

将已知数据 $\sigma_x = 63.7 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = -\tau_{yx} = 76.4 \text{ MPa}$, $\theta = 120^\circ$ 等代入任意方向面上应力分量的表达式，求得：

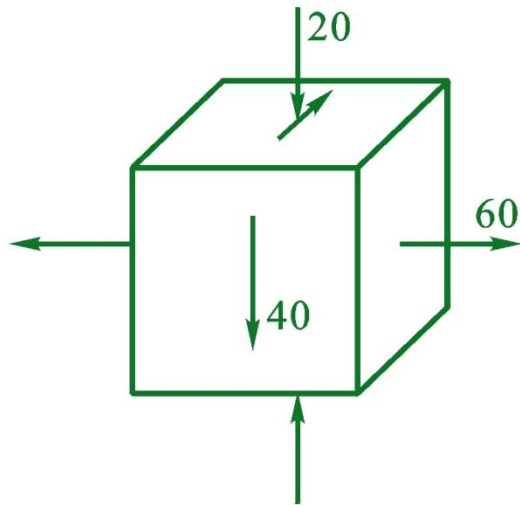


$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \left[\frac{63.7 + 0}{2} \times 10^6 \cos(2 \times 120^\circ) - 2 \times 76.4 \times 10^6 \sin(2 \times 120^\circ) \right] \\ &= 82.1 \times 10^6 \text{ Pa} = 82.1 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{x'y'} &= \left[\frac{63.7 - 0}{2} \times 10^6 \times \sin(2 \times 120^\circ) + 76.4 \times 10^6 \cos(2 \times 120^\circ) \right] \\ &= -65.8 \times 10^6 \text{ Pa} = -65.8 \text{ MPa}\end{aligned}$$

应力状态中的主应力与最大剪应力

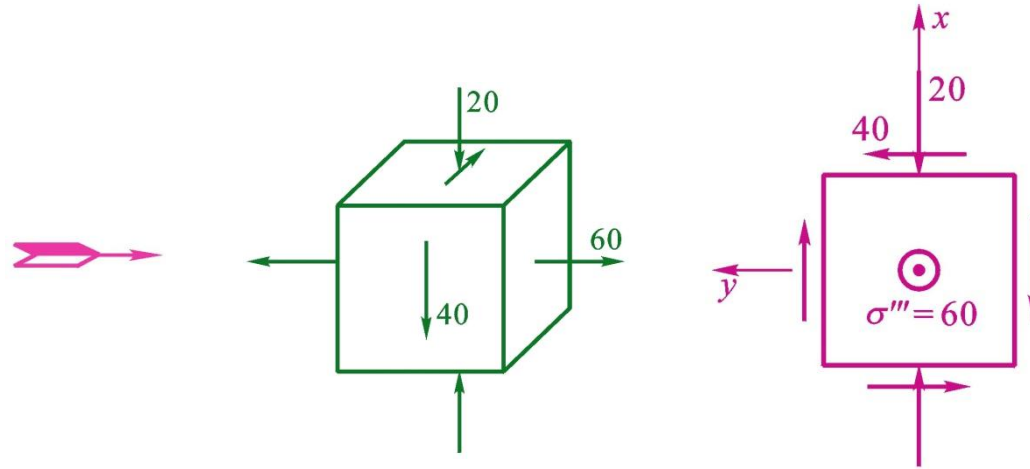
例 题 5



已知: 三向应力状态如图所示, 图中应力的单位为MPa。

试求: 主应力及微元内的最大剪应力。

应力状态中的主应力与最大剪应力

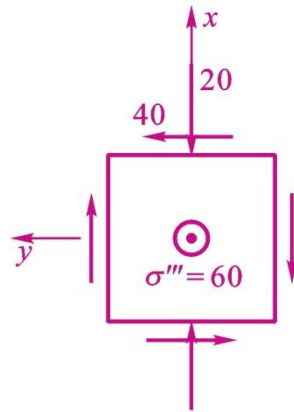


解：所给的应力状态中有一个主应力是已知的，即

$$\sigma''' = 60\text{MPa}$$

故微元上平行于 σ''' 的方向面上的应力值与 σ''' 无关。因此，当确定这一组方向面上的应力，以及这一组方向面中的主应力 σ' 和 σ'' 时，可以将所给的应力状态视为平面应力状态。

应力状态中的主应力与最大剪应力



解：所给的应力状态中有一个主应力是已知的，即

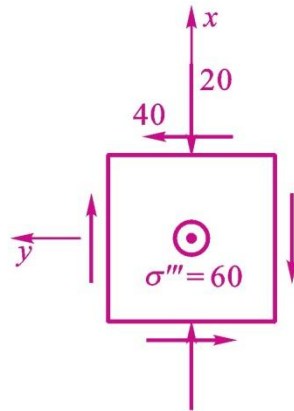
$$\sigma''' = 60\text{MPa}$$

这与**例题1**中的平面应力状态相类似。于是，**例题1**中得到的主应力 σ' 和 σ'' 公式可直接应用

$$\sigma' = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} > 0$$

$$\sigma'' = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} < 0$$

应力状态中的主应力与最大剪应力



$$\sigma' = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} > 0$$

$$\sigma'' = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} < 0$$

本例中 $\sigma_x = -20$ MPa, $\tau_{xy} = -40$ MPa。据此, 求得

$$\sigma' = \left[\frac{(-20) \times 10^6}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(-20 \times 10^6)^2 + 4(-40 \times 10^6)^2} \right] \text{Pa} = 31.23 \text{ MPa}$$

$$\sigma'' = \left[\frac{(-20) \times 10^6}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(-20 \times 10^6)^2 + 4(-40 \times 10^6)^2} \right] \text{Pa} = -51.23 \text{ MPa}$$

$$\sigma''' = 60 \text{ MPa}$$

应力状态中的主应力与最大剪应力

$$\sigma' = \left[\frac{(-20) \times 10^6}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(-20 \times 10^6)^2 + 4(-40 \times 10^6)^2} \right] \text{Pa} = 31.23 \text{MPa}$$

$$\sigma'' = \left[\frac{(-20) \times 10^6}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(-20 \times 10^6)^2 + 4(-40 \times 10^6)^2} \right] \text{Pa} = -51.23 \text{MPa}$$

$$\sigma''' = 60 \text{MPa}$$

根据 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 的排列顺序，可以写出

$$\sigma_1 = 60 \quad \text{MPa}$$

$$\sigma_2 = 31.23 \quad \text{MPa}$$

$$\sigma_3 = -51.23 \quad \text{MPa}$$

微元内的最大剪应力

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \left(\frac{60 \times 10^6 + 51.23 \times 10^6}{2} \right) \text{Pa} = 55.6 \times 10^6 \text{Pa} = 55.6 \text{MPa}$$

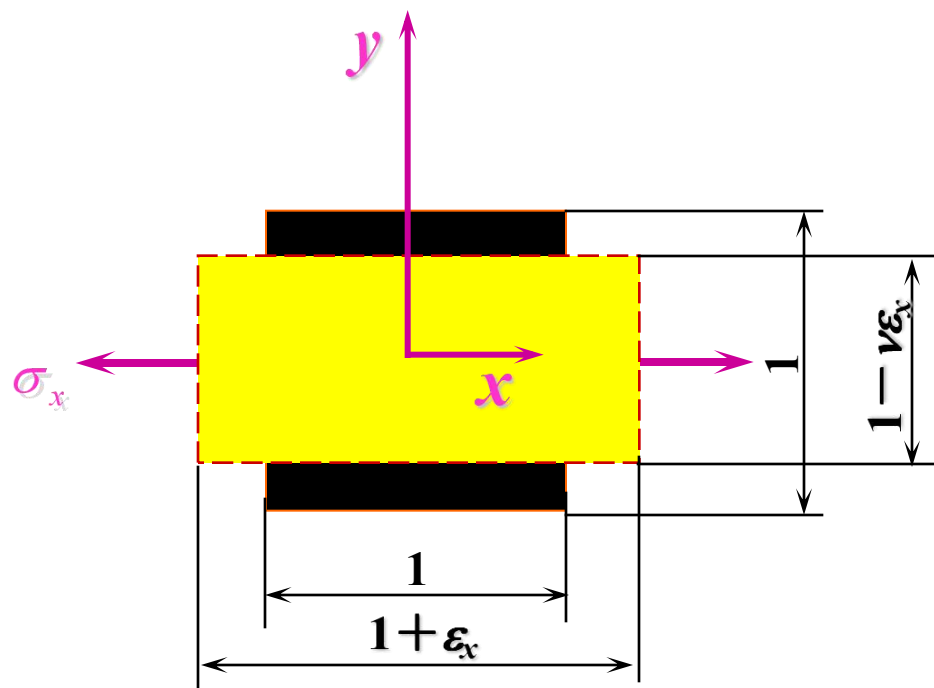
第6章 应力状态分析与强度理论

- 应力状态的基本概念
 - 平面应力状态任意方向面上的应力
 - 应力状态中的主应力与最大剪应力
 - 广义胡克定律
 - 应变能与应变能密度
 - 强度理论
 - 结论与讨论
-

广义胡克定律

■ 广义胡克定律

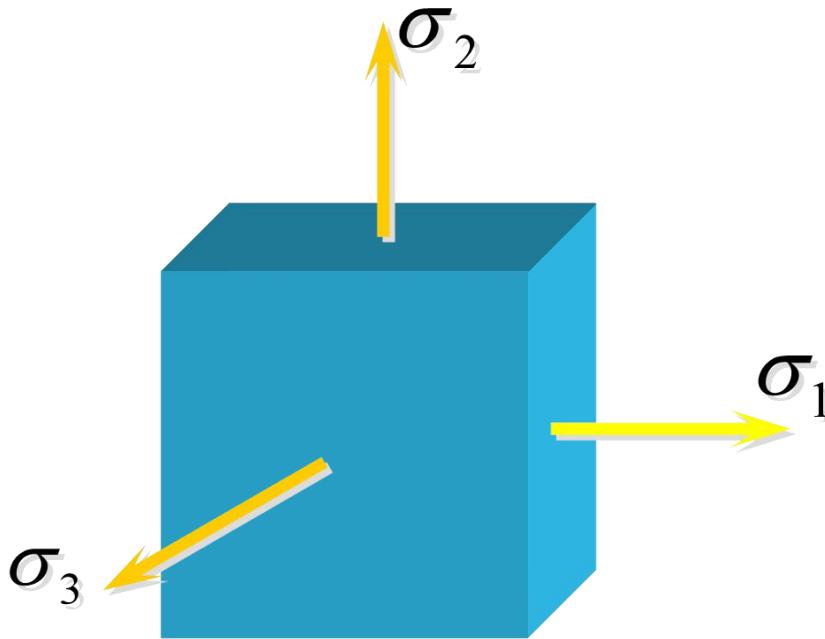
横向变形与泊松比



$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \epsilon_y = -\nu\epsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad \nu \text{ —— 泊松比}$$

广义胡克定律

三向应力状态的广义胡克定律——叠加法



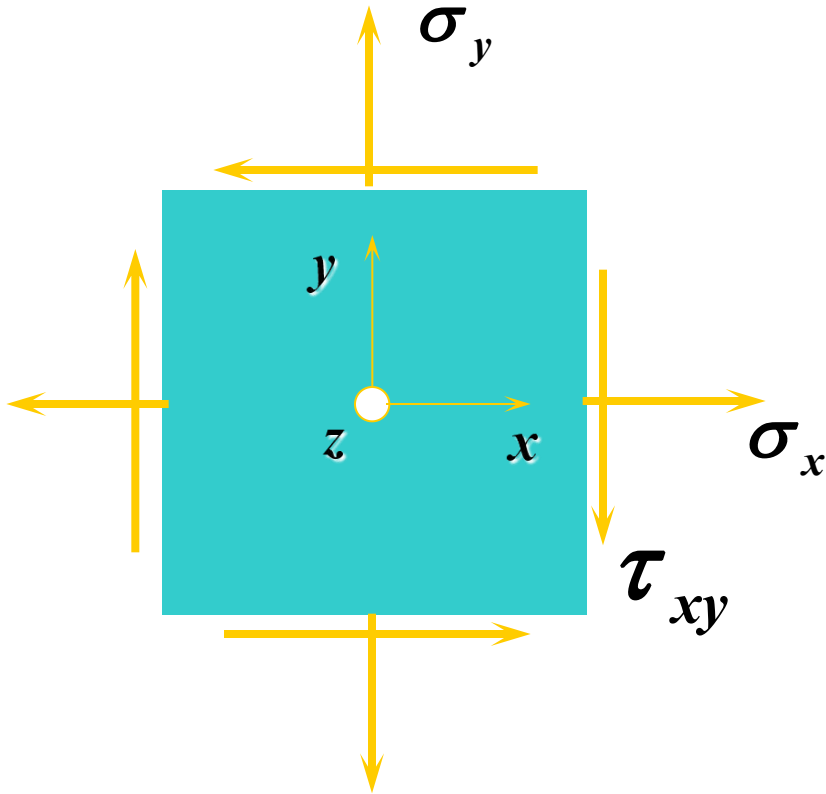
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

广义胡克定律

对于平面应力状态，广义胡克定律为



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

广义胡克定律

■ 各向同性材料各弹性常数之间的关系

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

这表明，对于各向同性材料，三个弹性常数中，只有两个是独立的。

第6章 应力状态分析与强度理论

□ 平面应力状态应力圆分析

平面应力状态应力圆分析

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

移项，整理得

$$\left(\sigma_{\theta} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{\theta}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

该圆称为应力圆，圆心

$$\sigma_a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

半径

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

第6章 应力状态分析与强度理论

- 应力状态的基本概念
 - 平面应力状态任意方向面上的应力
 - 应力状态中的主应力与最大剪应力
 - 广义胡克定律
 - 应变能与应变能密度
 - 强度理论
 - 结论与讨论
-

§ 6-5 复杂应力状态的应变能密度

一、应变能密度的定义

(Definition of Strain-energy density)

物体在单位体积内所积蓄的应变能.

二、应变能密度的计算公式

(Calculation formula for Strain-energy density)

1. 单向应力状态下, 物体内所积蓄的应变能密度为
(Strain-energy density for simple stress-state)

$$v_{\varepsilon} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E}{2} \varepsilon^2$$

2. 三个主应力同时存在时, 单元体的应变能密度为 (Strain-energy density for simple stress-state)

$$\nu_{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3)$$

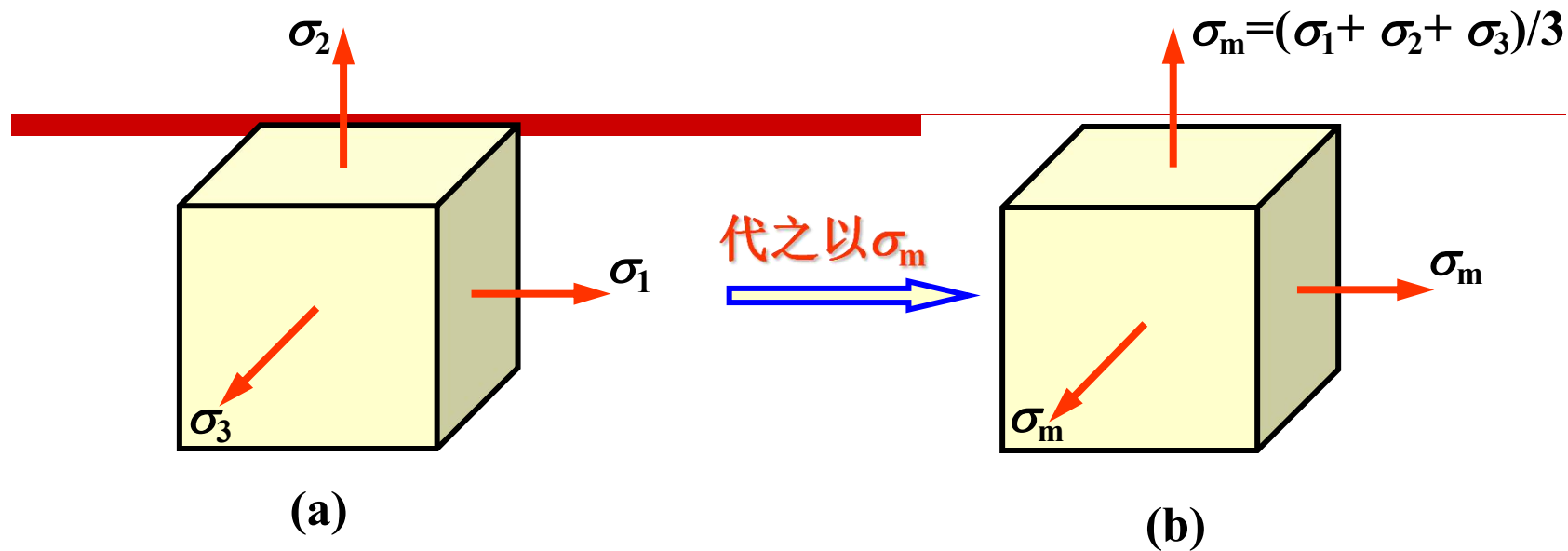
将广义胡克定律代入上式, 经整理得

$$\nu_{\varepsilon} = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]$$

用 ν_V 表示单元体体积改变相应的那部分应变能密度, 称为**体积改变能密度** (the strain-energy density corresponding to the volumetric)

用 ν_d 表示与单元体形状改变相应的那部分应变能密度, 称为**畸变能密度** (the strain-energy density corresponding to the distortion.)

应变能密度 ν_{ε} 等于两部分之和 $\nu_{\varepsilon} = \nu_V + \nu_d$



图（a）所示单元体的三个主应力不相等,因而,变形后既发生体积改变也发生形状改变.

图（b）所示单元体的三个主应力相等,因而,变形后的形状与原来的形状相似,即只发生体积改变而无形状改变.

$$(\nu_{\varepsilon})_a = (\nu_V)_a + (\nu_d)_a \quad (\nu_{\varepsilon})_b = (\nu_V)_b$$

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad \Rightarrow \quad (\nu_V)_a = (\nu_V)_b$$

图 b 所示单元体的体积改变比能密度

$$\begin{aligned} (\nu_V)_b &= (\nu_{\varepsilon})_b = \frac{1}{2E}[(\sigma_m^2 + \sigma_m^2 + \sigma_m^2 - 2\mu(\sigma_m^2 + \sigma_m^2 + \sigma_m^2))] \\ &= \frac{3(1-2\mu)}{2E}\sigma_m^2 \\ &= \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \end{aligned}$$

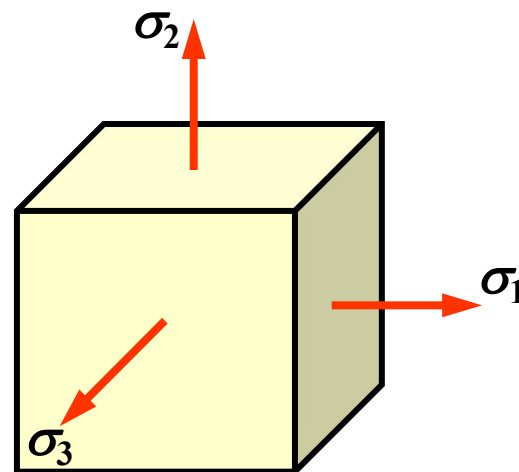
a单元体的比能为

$$v_\varepsilon = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

a所示单元体的体积改变比能

$$(v_V)_a = (v_V)_b = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

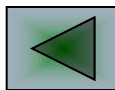
空间应力状态下单元体的 畸变能密度



(a)

$$v_d = v_\varepsilon - v_V$$

$$= \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$



第7章 应力状态分析与强度理论

- 应力状态的基本概念
 - 平面应力状态任意方向面上的应力
 - 应力状态中的主应力与最大剪应力
 - 广义胡克定律
 - 应变能与应变能密度
 - 强度理论
 - 强度理论应用举例
 - 结论与讨论
-

强度理论(The failure criteria)

一、强度理论的概念 (Concepts of failure criteria)

1. 引言 (introduction)

正应力强度条件

(strength condition for normal stress)

轴向拉压

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{N\max}}{A} \leq [\sigma]$$

弯曲

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

剪切

$$\tau = \frac{F_S}{A} \leq [\tau]$$

切应力强度条件

(strength condition for shear stress)

扭转

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} \leq [\tau]$$

弯曲

$$\tau_{\max} = \frac{F_{S\max} \cdot S_{z\max}^*}{I_z b} \leq [\tau]$$

上述强度条件具有如下特点

(1) 危险点处于单向应力状态或纯剪切应力状态;

(2) 材料的许用应力,是通过拉(压)试验或纯剪试验测定试件在破坏时其横截面上的极限应力,以此极限应力作为强度指标,除以适当的安全因数而得,即根据相应的试验结果建立的强度条件.

2. 强度理论的概念(Concepts for failure criteria)

是关于“构件发生强度失效起因”的假说.

根据材料在复杂应力状态下破坏时的一些现象与形式,进行分析,提出破坏原因的假说.在这些假说的基础上,可利用材料在单向应力状态时的试验结果,来建立材料在复杂应力状态下的强度条件.

基本观点

构件受外力作用而发生破坏时,不论破坏的表面现象如何复杂,其破坏形式总不外乎几种类型,而同一类型的破坏则可能是某一个共同因素所引起的.

二、材料破坏的两种类型（常温、静载荷）

(Two failure types for materials in normal temperature and static loads)

1. 屈服失效（Yielding failure）

材料出现显著的塑性变形而丧失其正常的工作能力。

2. 断裂失效（Fracture failure）

（1）脆性断裂：无明显的变形下突然断裂。

（2）韧性断裂：产生大量塑性变形后断裂。

最大正应力

最大线应变

引起破坏
的某一共同
因素

最大切应力

形状改变
比能

三、四个强度理论 (Four failure criteria)

1.伽利略播下了第一强度理论的种子;

2.马里奥特关于变形过大引起破坏的论述,是第二强度理论的萌芽;

3.杜奎特 (C. Duguet) 提出了最大切应力理论;

4.麦克斯威尔最早提出了最大畸变能理论,这是后来人们在他的书信出版后才知道的.

(1) 第一类强度理论—以脆断作为破坏的标志

包括:最大拉应力理论和最大伸长线应变理论

(2) 第二类强度理论—以出现屈服现象作为破坏的标志

包括:最大切应力理论和形状改变比能理论

四、第一类强度理论 (The first types of failure criteria)

1. ~~最大拉应力理论 (第一强度理论)~~

(Maximum-normal-stress criterion)

根据:当作用在构件上的外力过大时, 其危险点处的材料就会沿最大拉应力所在截面发生脆断破坏.

基本假说:最大拉应力 σ_1 是引起材料脆断破坏的因素.

脆断破坏的条件: $\sigma_1 = \sigma_b$

强度条件: $\sigma_1 \leq [\sigma]$

2. 最大伸长线应变理论（第二强度理论）

(Maximum-normal-strain criterion)

根据:当作用在构件上的外力过大时,其危险点处的材料就会沿垂直于最大伸长线应变方向的平面发生破坏.

基本假说:最大伸长线应变 ε_1 是引起材料脆断破坏的因素.

脆断破坏的条件: $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_b}{E}$

最大伸长线应变: $\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$

强度条件: $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$

五、第二类强度理论

(The second types of failure criterion)

1. 最大切应力理论 (第三强度理论)

(Maximum-shear-stress criterion)

根据:当作用在构件上的外力过大时,其危险点处的材料就会沿最大切应力所在截面滑移而发生屈服失效.

基本假说:最大切应力 τ_{\max} 是引起材料屈服的因素.

屈服条件 $\tau_{\max} = \frac{\sigma_s}{2}$

在复杂应力状态下一点处的最大切应力为 $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$

强度条件 $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$$

2. 畸变能密度理论（第四强度理论）

(Maximum-distortion-energy criterion)

基本假说:畸变能密度 ν_d 是引起材料屈服的因素.

单向拉伸下, $\sigma_1 = \sigma_s, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$,材料的极限值

$$\nu_d = \frac{1 + \mu}{6E} \cdot 2\sigma_s^2$$

屈服准则:
$$\nu_d = \frac{1 + \mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

$$= \frac{1 + \mu}{6E} \cdot 2\sigma_s^2$$

强度条件:
$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]$$

六、相当应力 (Equivalent stress)

把各种强度理论的强度条件写成统一形式 $\sigma_r \leq [\sigma]$

σ_r 称为复杂应力状态的相当应力.

$$\sigma_{r1} = \sigma_1$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

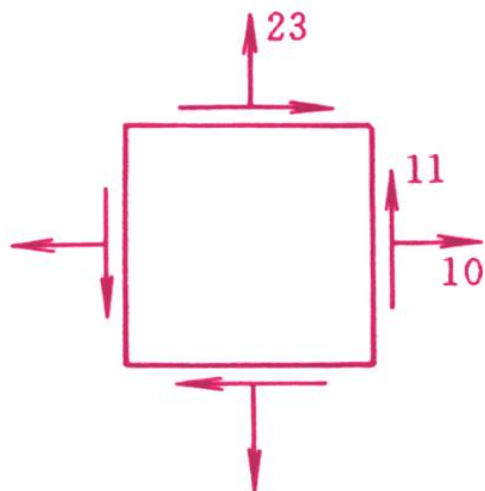


第6章 应力状态分析与强度理论

- 应力状态的基本概念
 - 平面应力状态任意方向面上的应力
 - 应力状态中的主应力与最大剪应力
 - 广义胡克定律
 - 应变能与应变能密度
 - 关于脆性断裂的强度理论
 - 关于屈服的强度理论
 - 强度理论应用举例
 - 结论与讨论
-

强度理论应用举例

例题 1

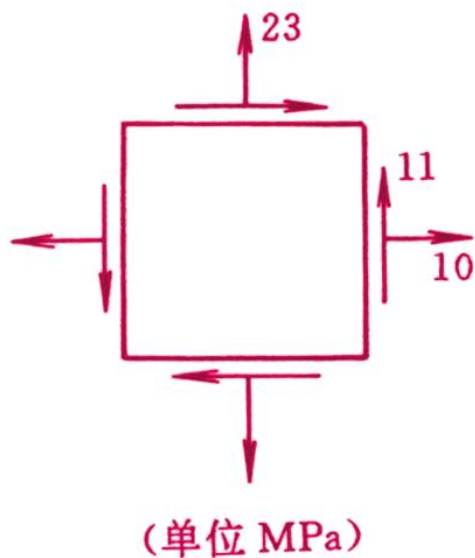


(单位 MPa)

已知：铸铁构件上危险点的应力状态。铸铁拉伸许用应力 $[\sigma]^+ = 30 \text{ MPa}$ 。

试校核：该点的强度。

强度理论应用举例



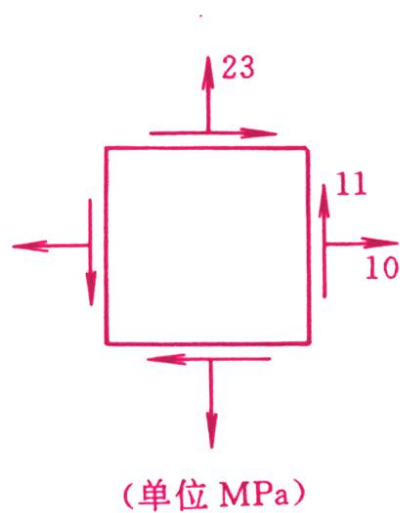
解：首先根据材料和应力状态确定失效形式，选择设计准则。

脆性断裂，由第一强度理论

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 \leq [\sigma]^+$$

其次是确定主应力

强度理论应用举例



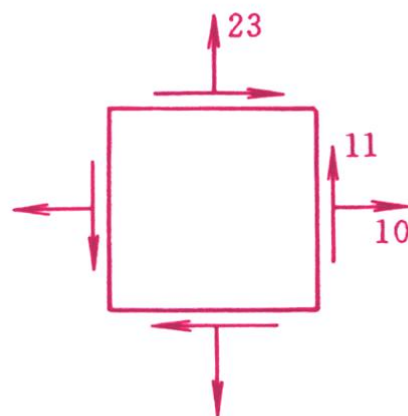
解： 其次是确定主应力

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma'' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma''' = 0$$

强度理论应用举例



(单位 MPa)

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 29.28 \text{ MPa}, \\ \sigma_2 &= 3.72 \text{ MPa}, \\ \sigma_3 &= 0\end{aligned}$$

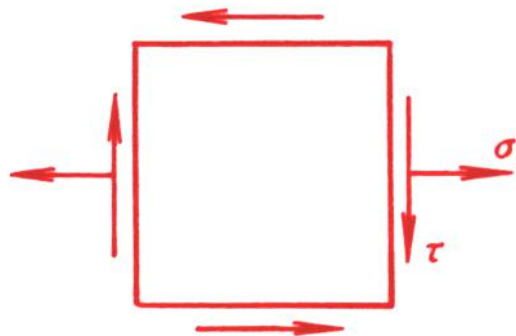
解：最后应用第一强度理论校核强度

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = 29.28 \text{ MPa} < [\sigma] = 30 \text{ MPa}$$

结论：危险点的强度是安全的。

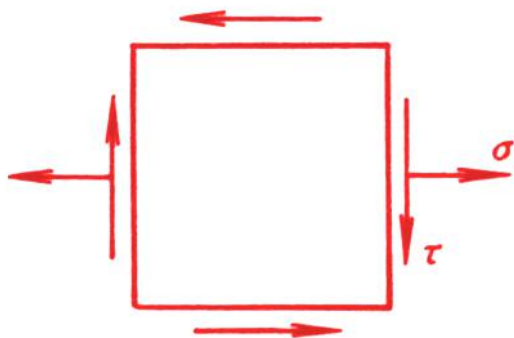
强度理论应用举例

例 题 2



已知: σ 和 τ 。
试写出: 第三强度理论和第
四强度理论的表达式。

强度理论应用举例



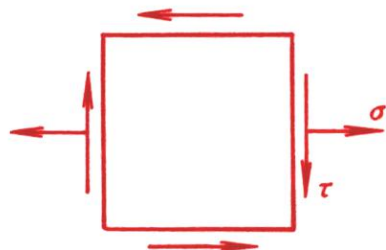
解：确定主应力

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

强度理论应用举例



$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

解：建立强度条件表达式

根据第三强度理论得到

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

根据第四强度理论得到

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

第6章 应力状态分析与强度理论

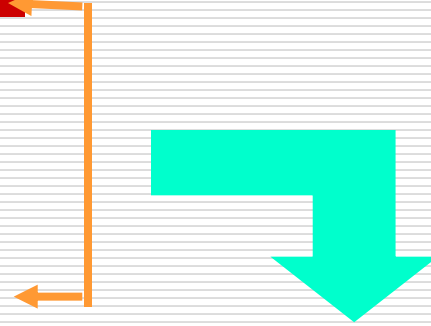
- 应力状态的基本概念
 - 平面应力状态任意方向面上的应力
 - 应力状态中的主应力与最大剪应力
 - 广义胡克定律
 - 应变能与应变能密度
 - 强度理论概述
 - 关于脆性断裂的强度理论
 - 关于屈服的强度理论
 - 强度理论应用举例
 - 结论与讨论
-

结论与讨论

■ 关于应力状态的几点重要结论

结论与讨论

应力的点的概念;
应力的面的概念;
应力状态的概念.

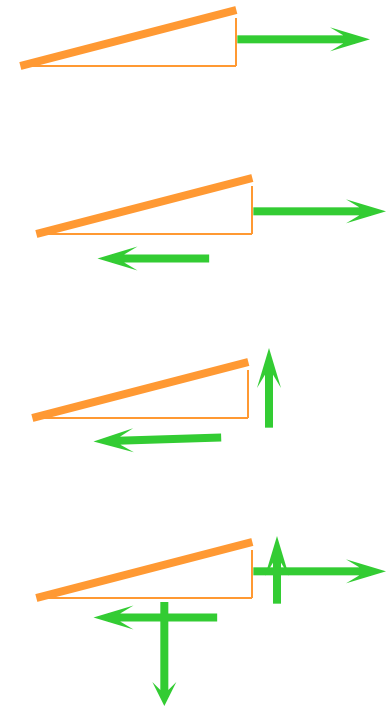
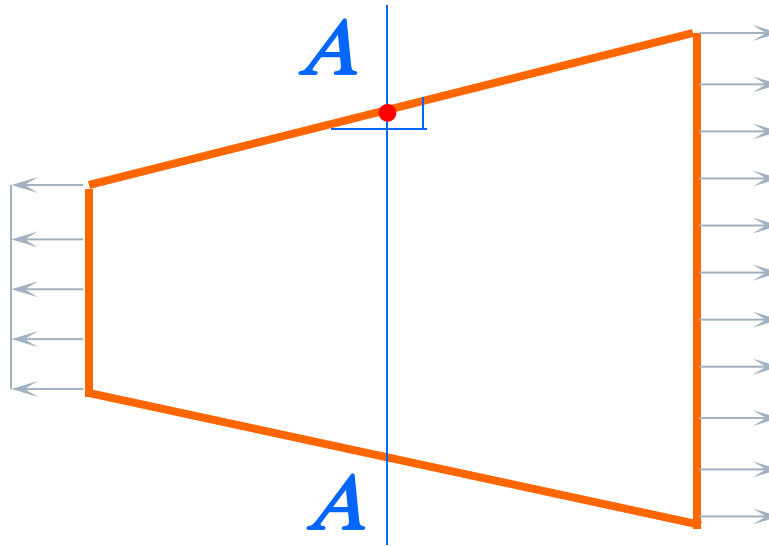


变形体力学
基础

结论与讨论

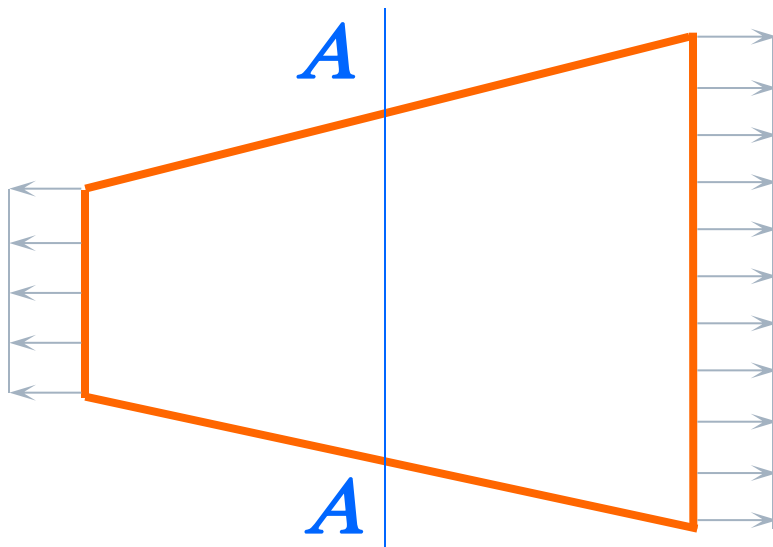
- 平衡方法是分析应力状态最重要、最基本的方法
-

结论与讨论



关于A点的应力状态有多种答案，请用平衡的概念分析哪一种是正确的？

结论与讨论



论证 $A-A$ 截面上必然存在剪应力，而且是非均匀分布的；

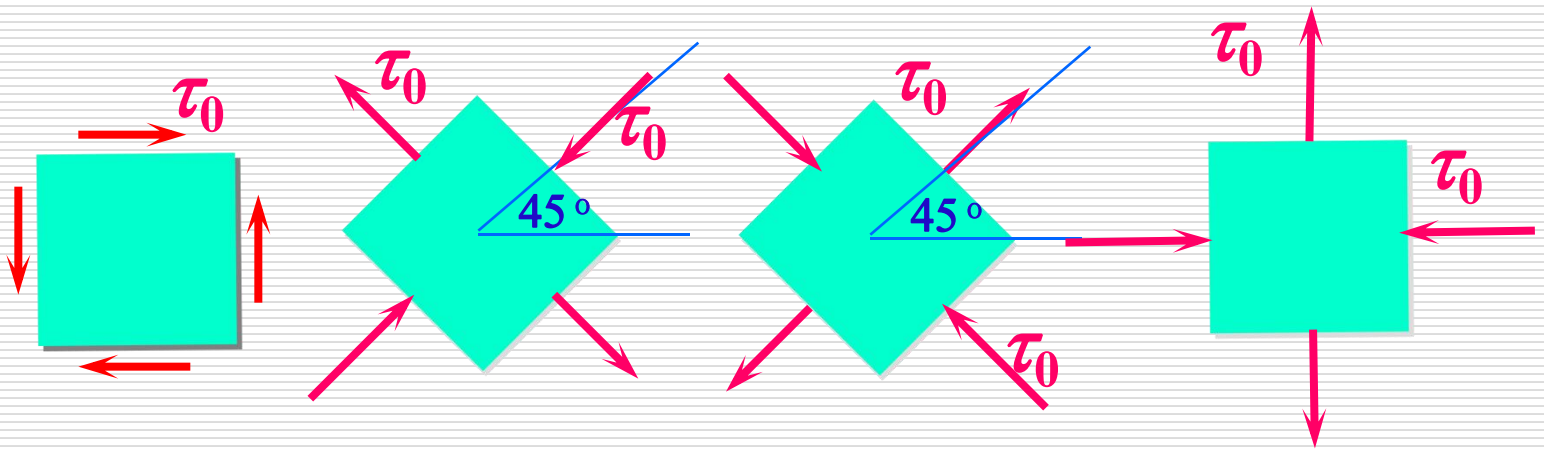
论证 $A-A$ 截面将不再保持平面。

结论与讨论

- 关于应力状态的不同的表示方法
-

结论与讨论

请分析图示四种应力状态中，哪几种是等价的？



结论与讨论

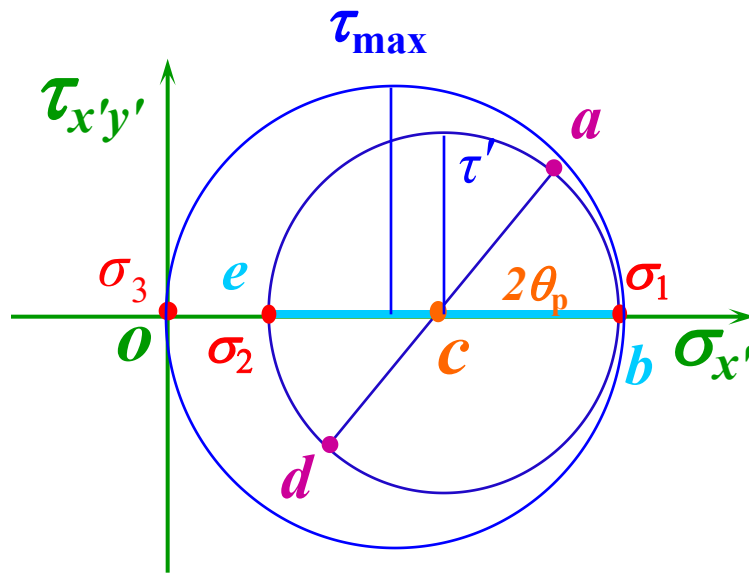
- 注意区分两种最大剪应力
-

结论与讨论

注意区分面内最大剪应力与所有方向面中的最大剪应力——一点处的最大剪应力

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

结论与讨论



最大剪应力

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

结论与讨论

■ 正确应用广义胡克定律

结论与讨论

请判断下列论述的正确性：

- 有应力一定有应变
 - 有应力不一定有应变
 - 有应变不一定有应力
 - 有应变一定有应力
-

结论与讨论

- 要注意不同强度理论的适用范围
-

结论与讨论

■ 要注意不同强度理论的适用范围

- ☞ 大多数韧性材料在一般应力状态下发生塑性屈服；
 - ☞ 大多数脆性材料在一般应力状态下发生脆性断裂；
-

总结

(1) 光滑面约束——法向约束力 \vec{F}_N

(2) 柔索约束——张力 \vec{F}_T

(3) 光滑铰链—— $\vec{F}_{Ay}, \vec{F}_{Ax}$

(4) 滚动支座—— $\vec{F}_N \perp$ 光滑面

球铰链——空间三正交分力

止推轴承——空间三正交分力

(5) 固定端约束—— $\vec{F}_{Ay}, \vec{F}_{Ax}, M_A$

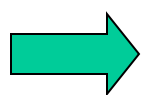


2.3 力系的平衡与应用

1. 平面任意力系的平衡方程

平面任意力系平衡的充要条件是：

力系的主矢和对任意点的主矩都等于零



$$\overline{F}'_R = 0$$

$$M_o = 0$$

因为

$$F'_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}$$

$$M_o = \sum M_o(\overline{F}_i)$$



平面任意力系的平衡方程

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_O = 0 \end{cases}$$

一般式

平面任意力系平衡的解析条件是：所有各力在两个任选的坐标轴上的投影的代数和分别等于零，以及各力对于任意一点的矩的代数和也等于零。

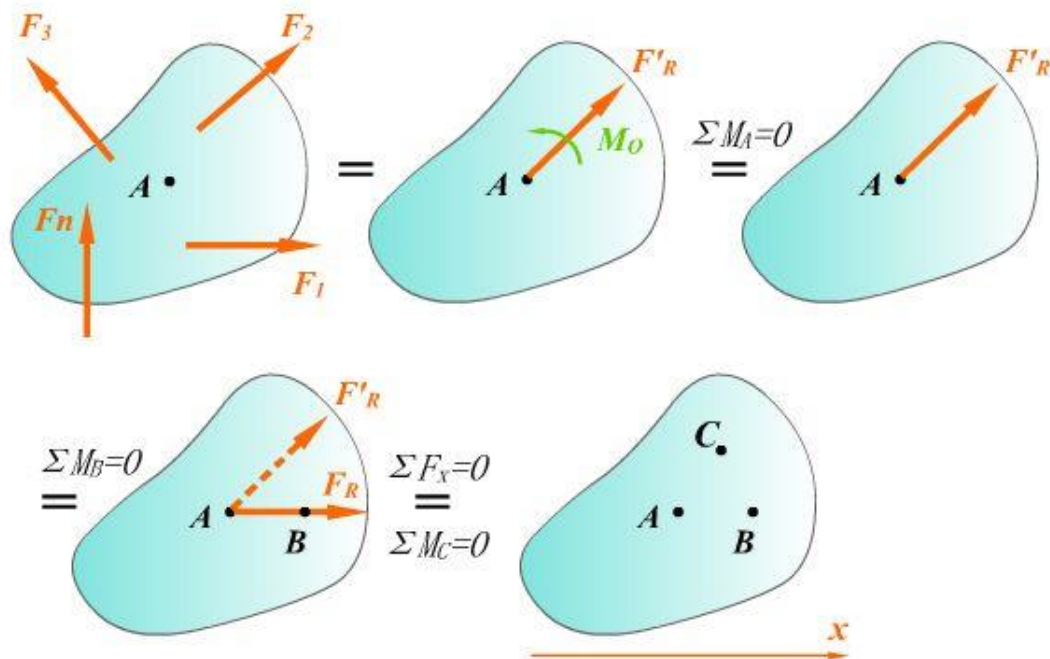


平面任意力系的平衡方程另两种形式

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases}$$

二矩式

两个取矩点连线，不得与投影轴垂直



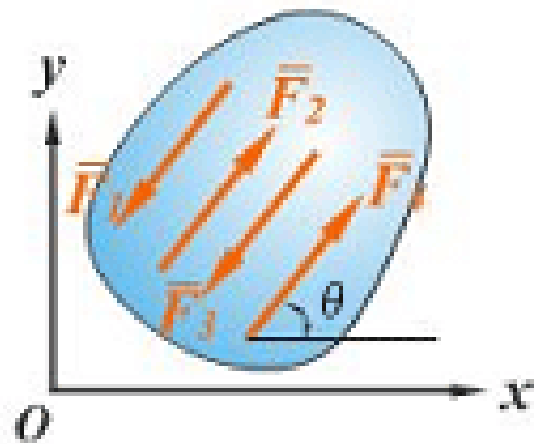
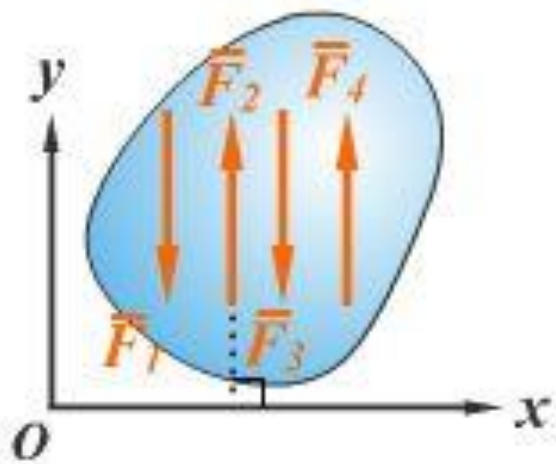
$$\begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{cases}$$

三矩式

三个取矩点，不得共线



2. 平面平行力系的平衡方程



$$\sum F_x = 0 \qquad 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

$$\sum F_x = 0 \qquad F_1 \cos \theta - F_2 \cos \theta + F_3 \cos \theta + \dots = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_1 \sin \theta - F_2 \sin \theta + F_3 \sin \theta + \dots = 0$$



平面平行力系的方程为两个，有两种形式

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases}$$

各力不得与投影轴垂直

$$\begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases}$$

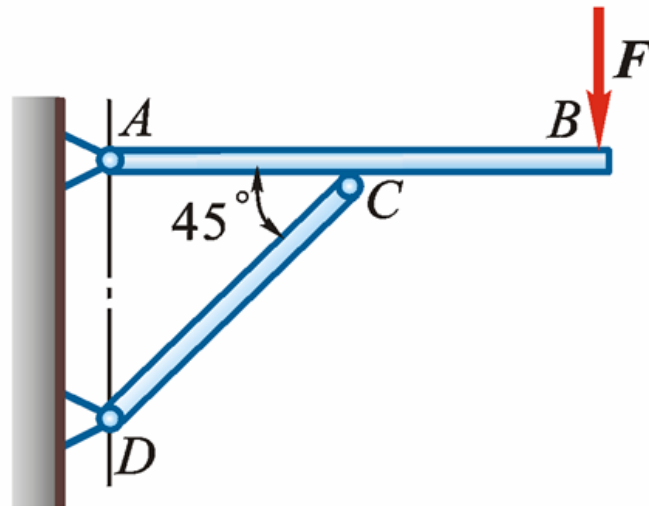
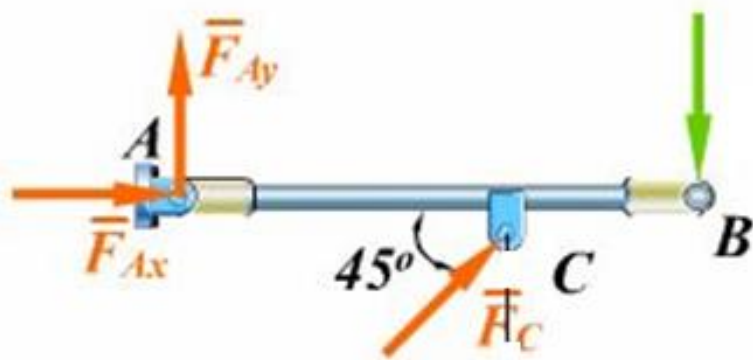
两点连线不得与各力平行



例2-2

已知: $AC = CB = l, F = 10\text{kN}$

求: 铰链 A 和 DC 杆受力.



解: 取 AB 梁, 画受力图.

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} + F_C \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_C \sin 45^\circ - F = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad F_C \cos 45^\circ \cdot l - F \cdot 2l = 0$$

解得 $F_C = 28.28\text{kN}, F_{Ax} = -20\text{kN}, F_{Ay} = -10\text{kN}$

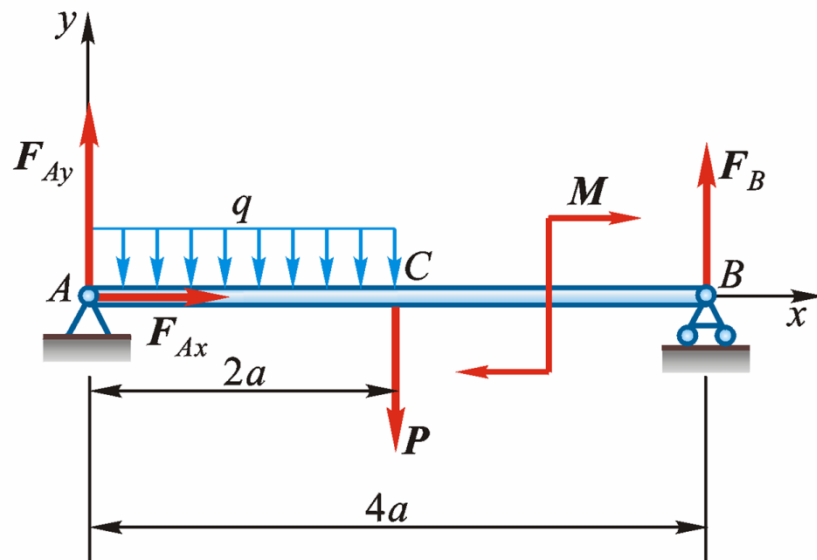


例2-4

已知: $P, q, a, M = qa$ 。

求: 支座 A, B 处的约束力。

解: 取 AB 梁, 画受力图。



$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad F_B \cdot 4a - M - P \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a = 0$$

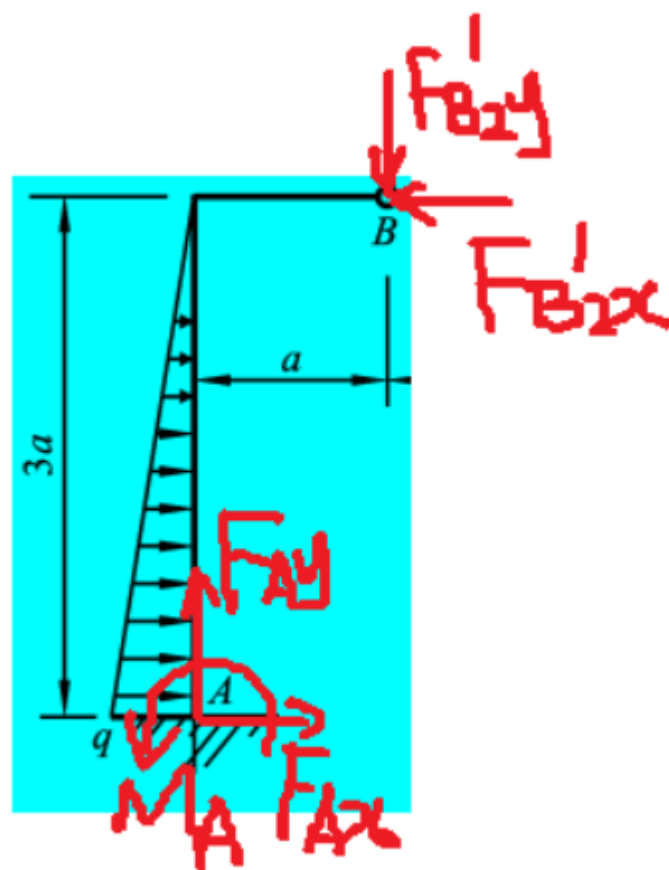
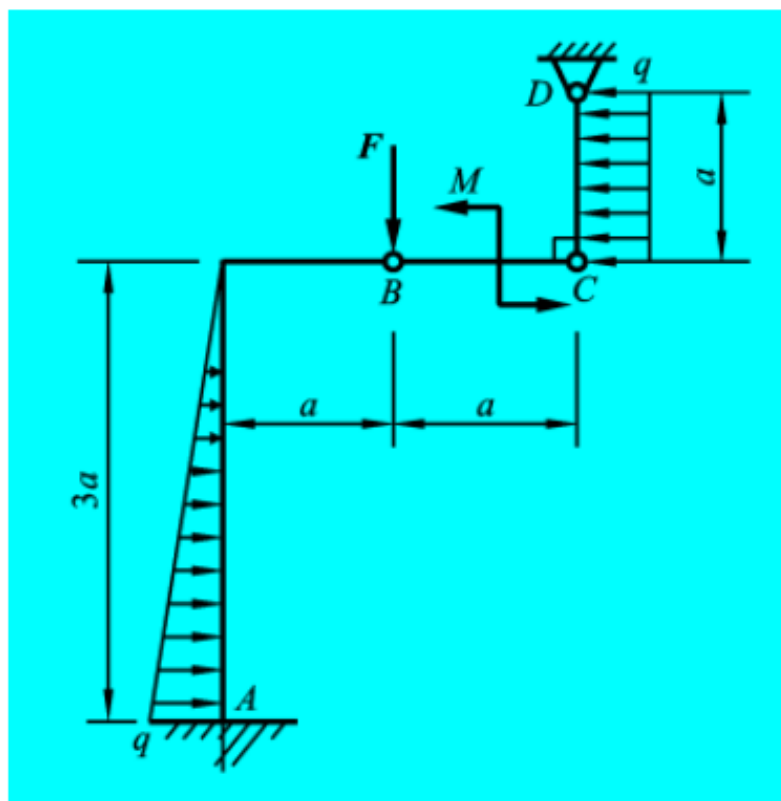
$$F_B = \frac{3}{4}P + \frac{1}{2}qa$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} - q \cdot 2a - P + F_B = 0$$

$$F_{Ay} = \frac{P}{4} + \frac{3}{2}qa$$



2-15 图示构架由直杆 BC 、 CD 及直角弯杆 AB 组成,各杆自重不计,载荷分布及尺寸如图,销钉 B 穿透 AB 及 BC 两构件。在销钉 B 上作用一集中载荷 F 。已知 q 、 a 、 M , 且 $M = qa^2$ 。求固定端 A 的约束力及销钉 B 对杆 BC 、 AB 的作用力。



考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

仍为平衡问题，仍然使用平衡方程求解，但由于增加了摩擦力（约束力），需要增加相应的补充方程，求解步骤与前面基本相同。

几个新特点

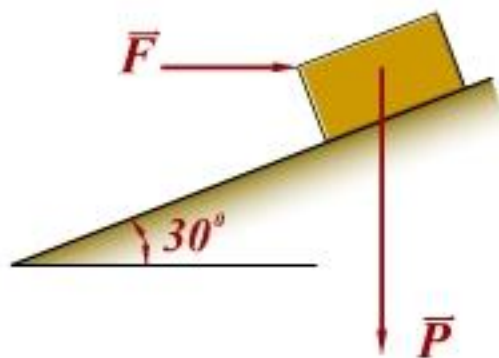
- 1 画受力图时，必须考虑摩擦力；
- 2 严格区分物体处于临界、非临界状态；
- 3 因 $0 \leq F_s \leq F_{\max}$ ，问题的解有时在一个范围内。



例2-21

已知： $P = 1500\text{N}$, $f_s = 0.2$, $f_d = 0.18$, $F = 400\text{N}$ 。

求： 物块是否静止， 摩擦力的大小和方向。



解： 取物块，画受力图，设物块平衡

$$\Sigma F_x = 0 \quad F \cos 30^\circ - P \sin 30^\circ - F_s = 0$$

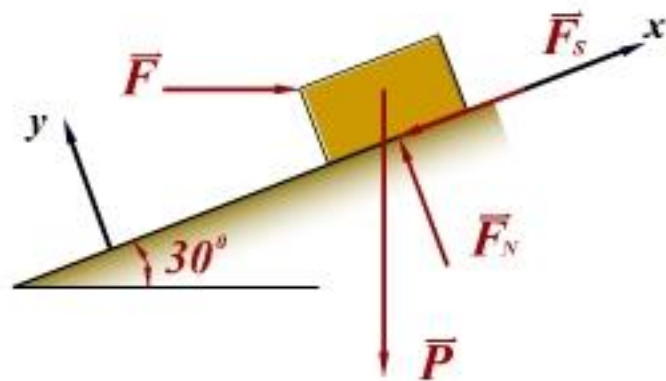
$$\Sigma F_y = 0 \quad -F \sin 30^\circ - P \cos 30^\circ + F_N = 0$$

→ $F_s = -403.6\text{N}$ (向上) $F_N = 1499\text{N}$

而 $F_{\max} = f_s F_N = 299.8\text{N}$

→ 物块处于非静止状态.

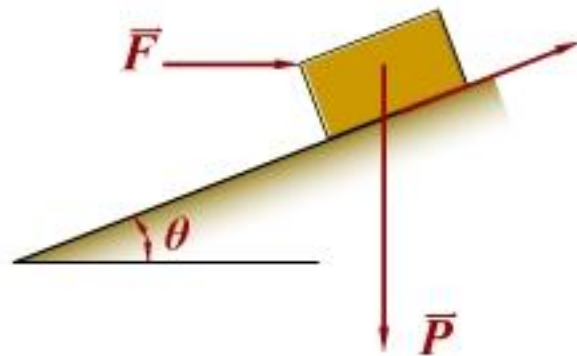
$$F_d = f_d F_N = 269.8\text{N}, \text{向上.}$$



例2-22

已知: P, θ, f_s .

求: 使物块静止, 水平推力 \vec{F} 的大小.



解： 使物块有上滑趋势时，推力为 \vec{F}_1

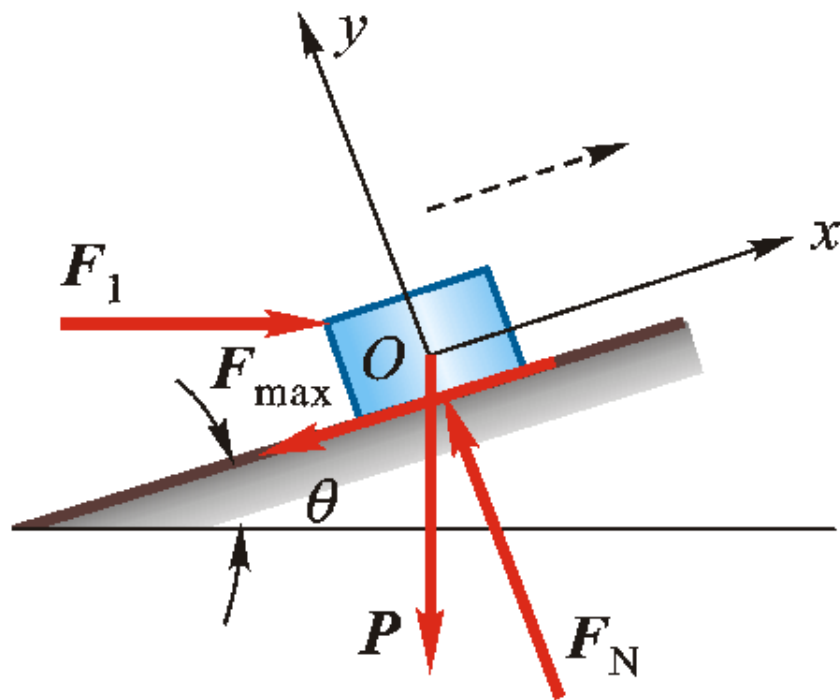
画物块受力图

$$\sum F_x = 0 \quad F_1 \cos \theta - P \sin \theta - F_{\max} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -F_1 \sin \theta - P \cos \theta + F_N = 0$$

$$F_{\max} = f_s F_N$$

→
$$F_1 = \frac{\sin \theta + f_s \cos \theta}{\cos \theta - f_s \sin \theta} P$$



设物块有下滑趋势时，推力为 \vec{F}_2

画物块受力图

$$\Sigma F_x = 0 \quad F_1 \cos \theta - P \sin \theta + F_{\max}' = 0$$

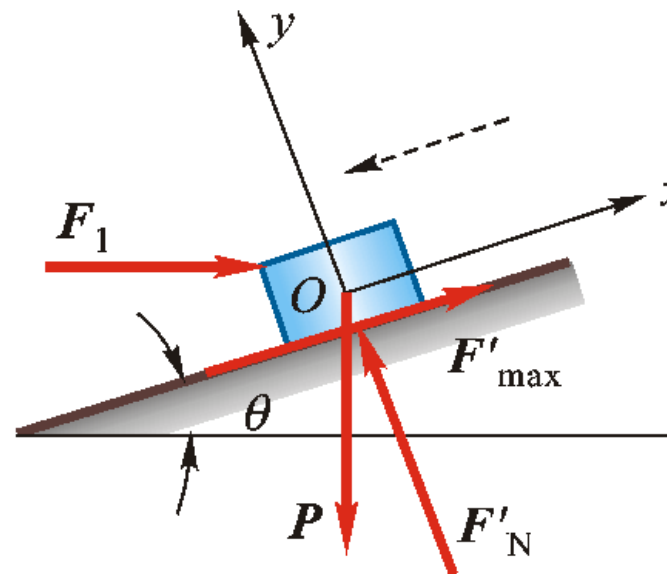
$$\Sigma F_y = 0 \quad -F_1 \sin \theta - P \cos \theta + F_N' = 0$$

$$F_{\max}' = f_s F_N'$$

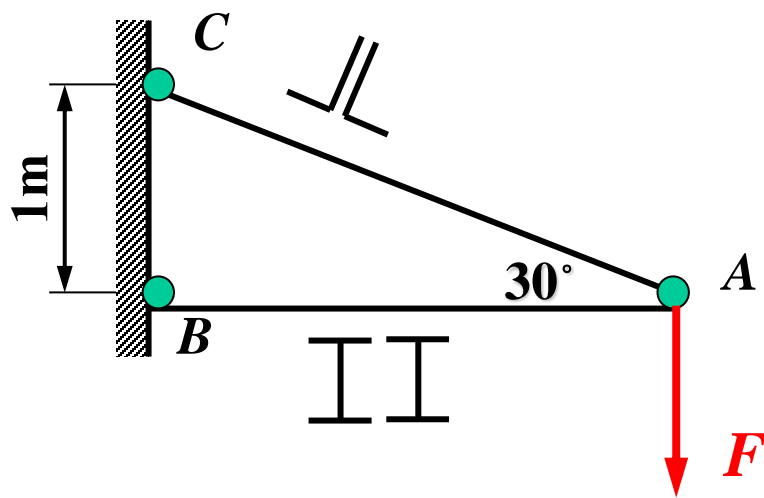
→
$$F_1 = \frac{\sin \theta - f_s \cos \theta}{\cos \theta + f_s \sin \theta} P$$



$$\frac{\sin \theta - f_s \cos \theta}{\cos \theta + f_s \sin \theta} P \leq F \leq \frac{\sin \theta + f_s \cos \theta}{\cos \theta - f_s \sin \theta} P$$



例题3-3 简易起重设备中， AC 杆由两根 $80\times 80\times 7$ 等边角钢组成， AB 杆由两根 10号工字钢组成。材料为Q235钢，许用应力 $[\sigma]=170\text{MPa}$ 。求许可荷载 $[F]$ 。



结点A的平衡方程为

$$\sum F_y = 0 \quad F_{N1} \sin 30^\circ - F = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{N2} - F_{N1} \cos 30^\circ = 0$$

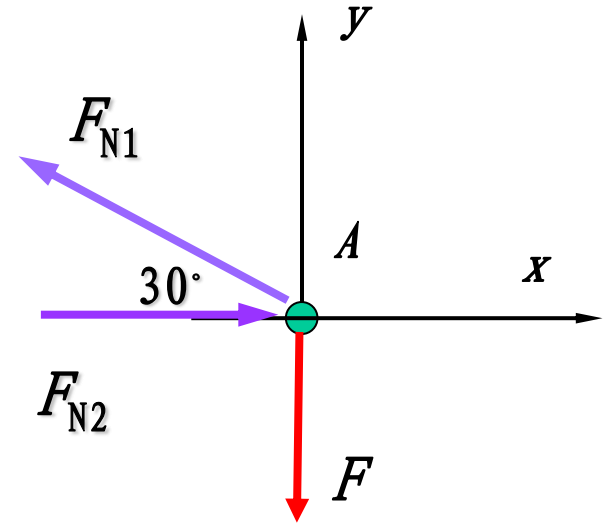
得到 $F_{N1} = 2F$

$$F_{N2} = 1.732F$$

由型钢表查得

$$A_1 = 1086 \times 2 = 2172 \times 10^{-6} \text{m}^2$$

$$A_2 = 1430 \times 2 = 2860 \times 10^{-6} \text{m}^2$$



(2) 许可轴力为

$$[F_{N1}] = [\sigma]A_1 = 369.24\text{kN}$$

$$[F_{N2}] = [\sigma]A_2 = 486.20\text{kN}$$

$$F_{N\max} \leq [\sigma]A$$

$$F_{N1} = 2F$$

(3) 各杆的许可荷载

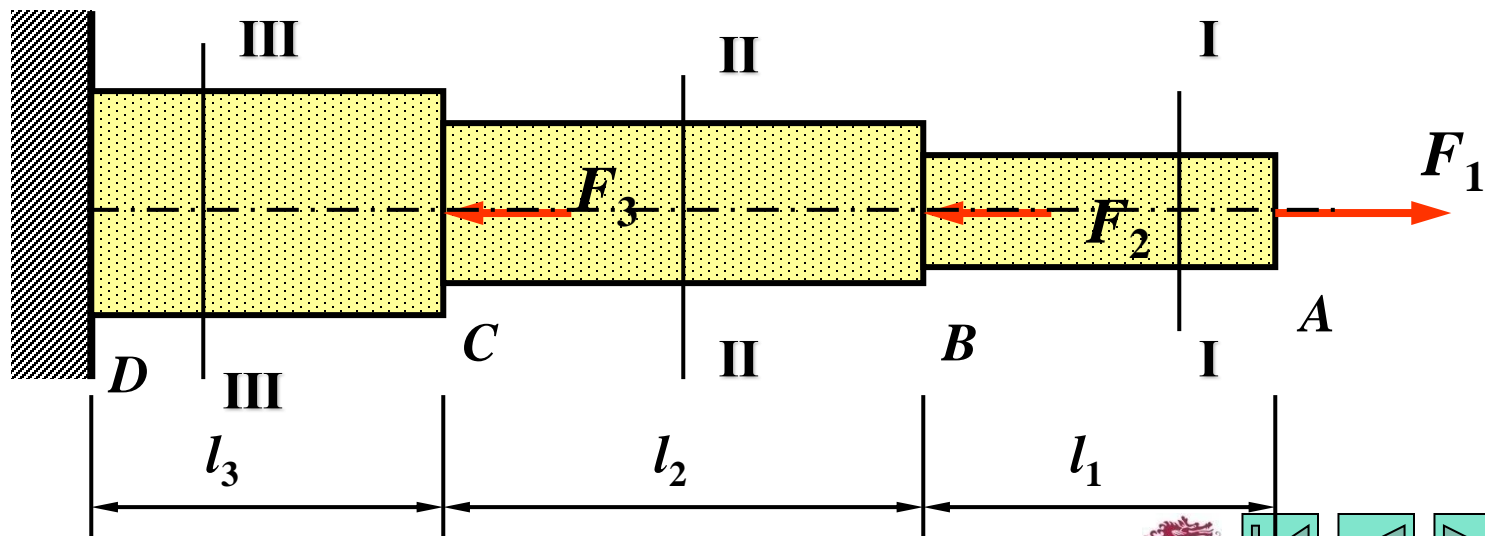
$$F_1 = \frac{[F_{N1}]}{2} = 184.6\text{kN} \quad F_2 = \frac{[F_{N2}]}{1.732} = 280.7\text{kN}$$

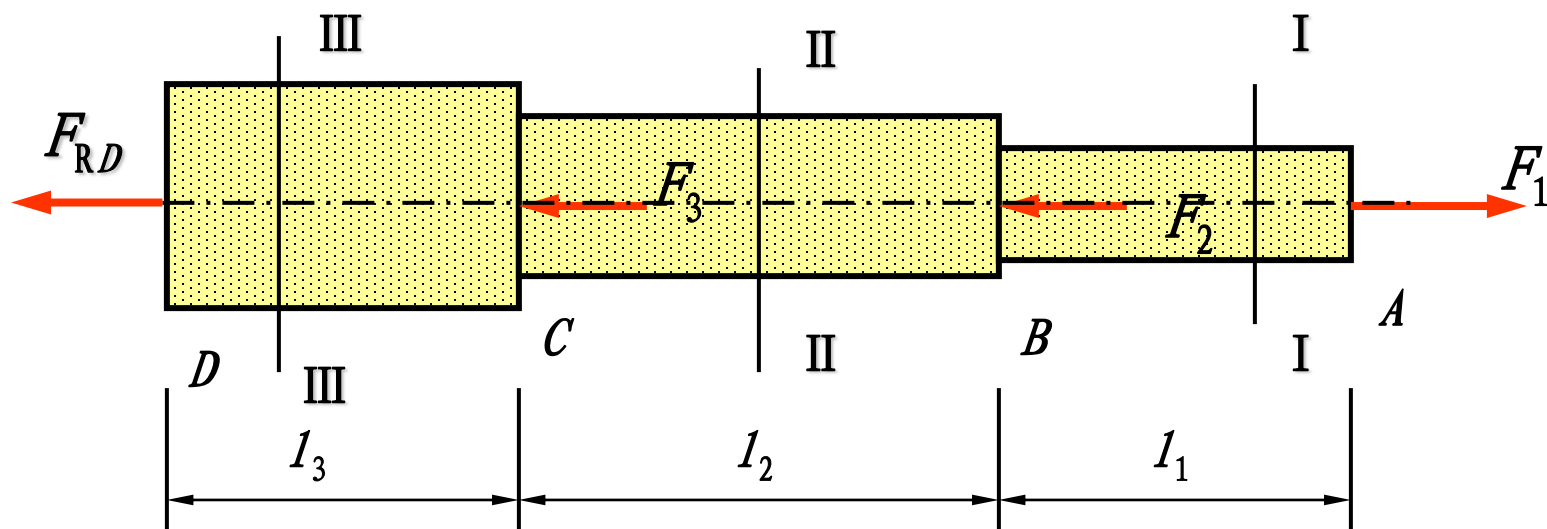
(4) 结论：许可荷载 $[F]=184.6\text{kN}$



例题3-5 图示为一变截面圆杆 $ABCD$. 已知 $F_1=20\text{kN}$, $F_2=35\text{kN}$
 $F_3=35\text{kN}$. $l_1=l_3=300\text{mm}$, $l_2=400\text{mm}$. $d_1=12\text{mm}$, $d_2=16\text{mm}$, $d_3=24\text{mm}$.
 试求:

- (1) I-I、II-II、III-III截面的轴力并作轴力图
- (2) 杆的最大正应力 σ_{\max}
- (3) B截面的位移及AD杆的变形

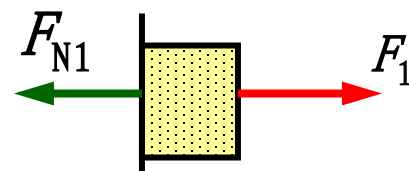




解：求支座反力 $F_{RD} = -50\text{kN}$

(1) I-I、II-II、III-III

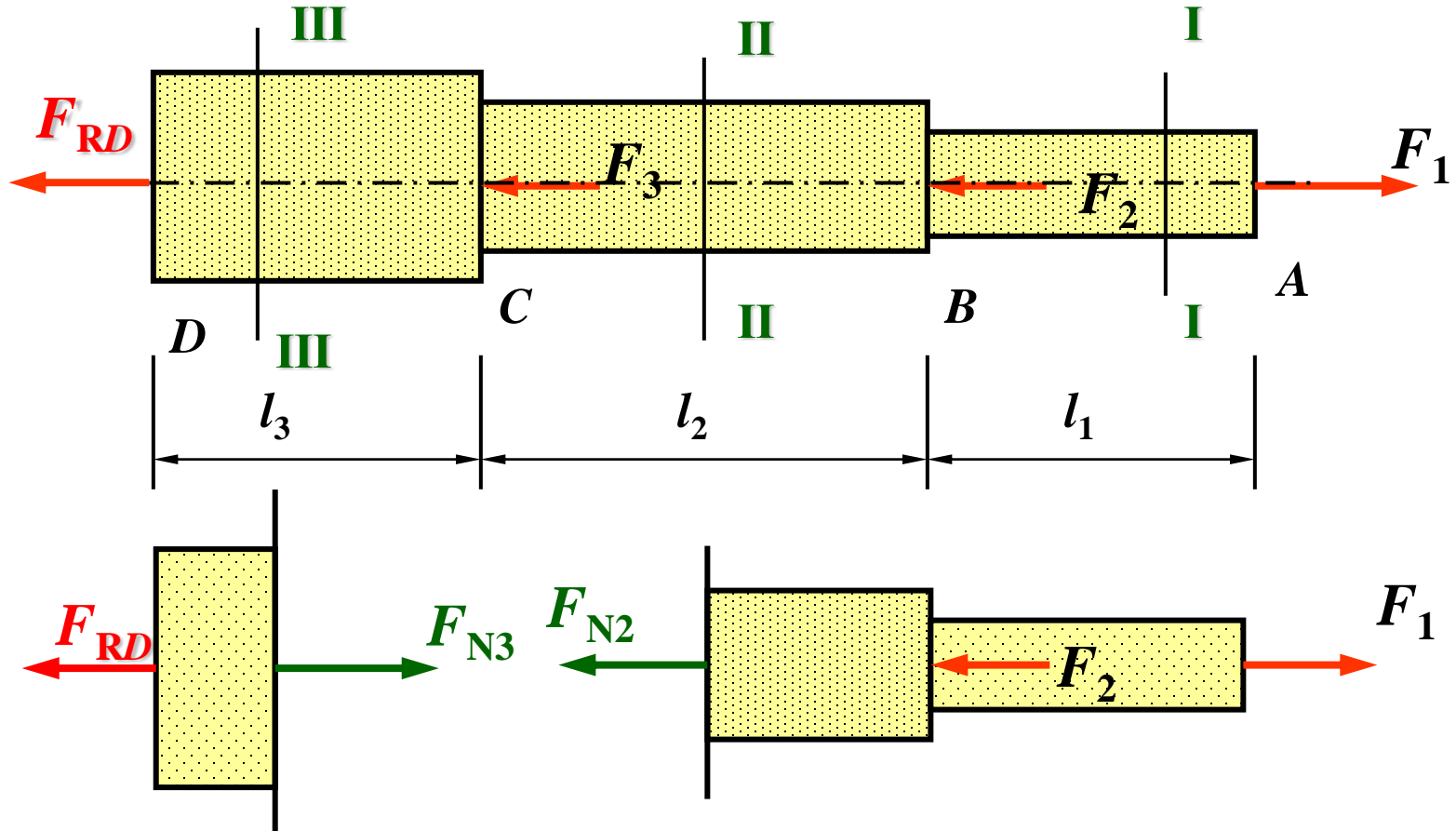
截面的轴力并作轴力图



$$F_1 - F_{N1} = 0$$

$$F_{N1} = 20\text{kN} (+)$$





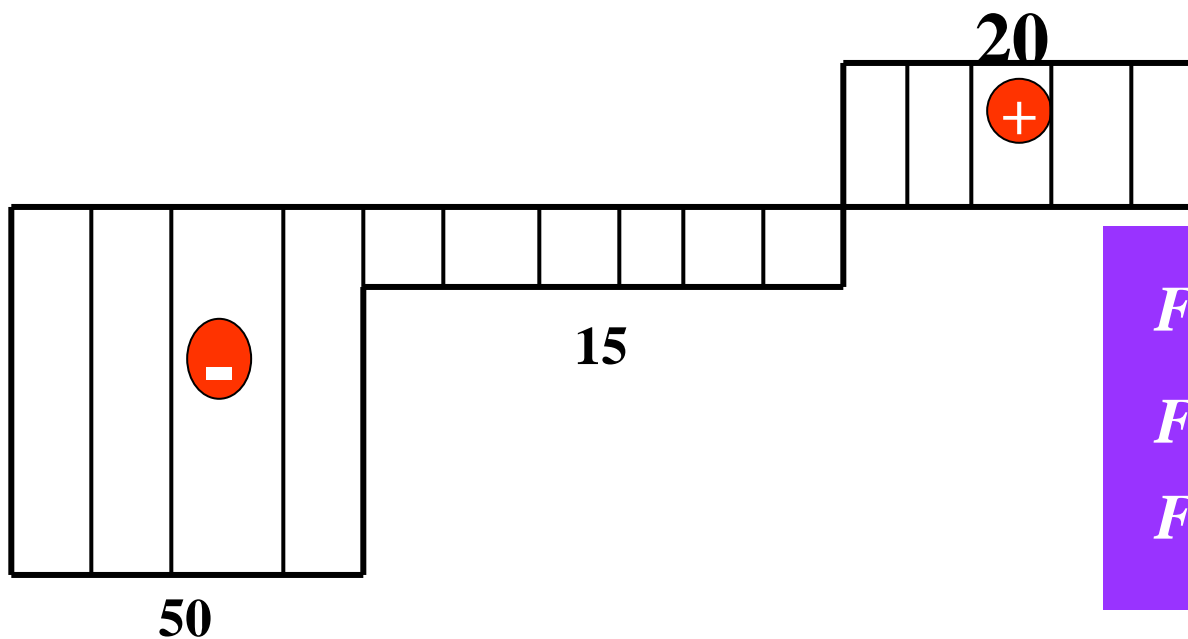
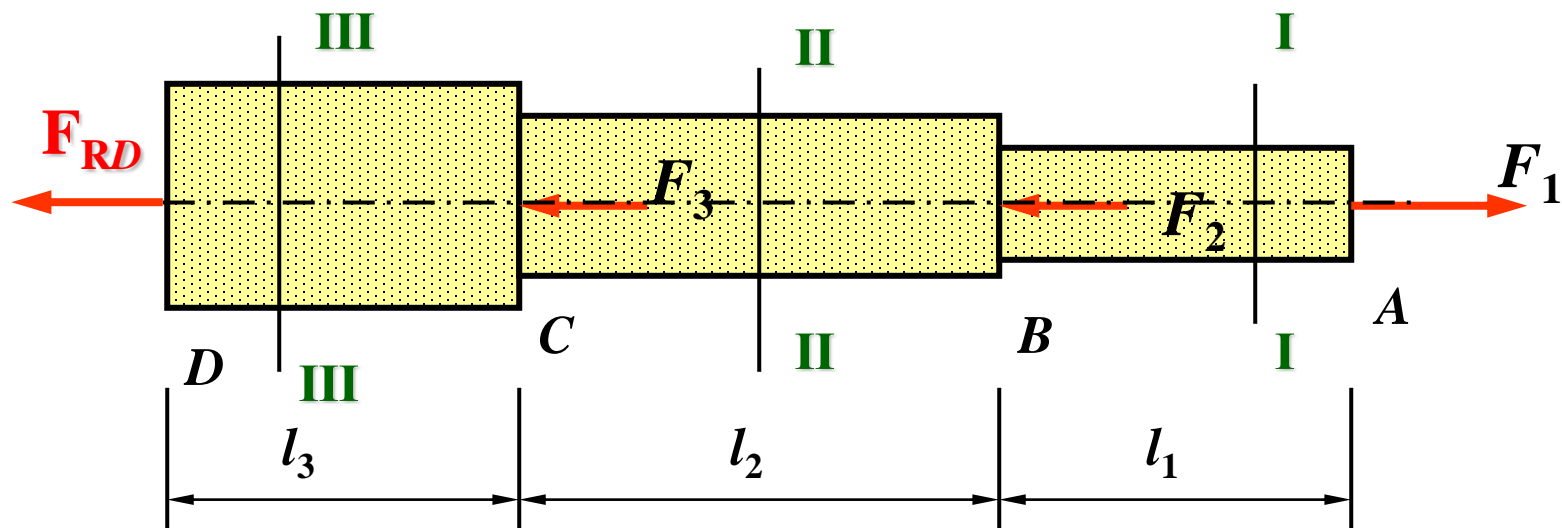
$$F_{N3} - F_{RD} = 0$$

$$F_1 - F_2 - F_{N2} = 0$$

$$F_{N3} = -50\text{kN} \quad (-)$$

$$F_{N2} = -15\text{kN} \quad (-)$$

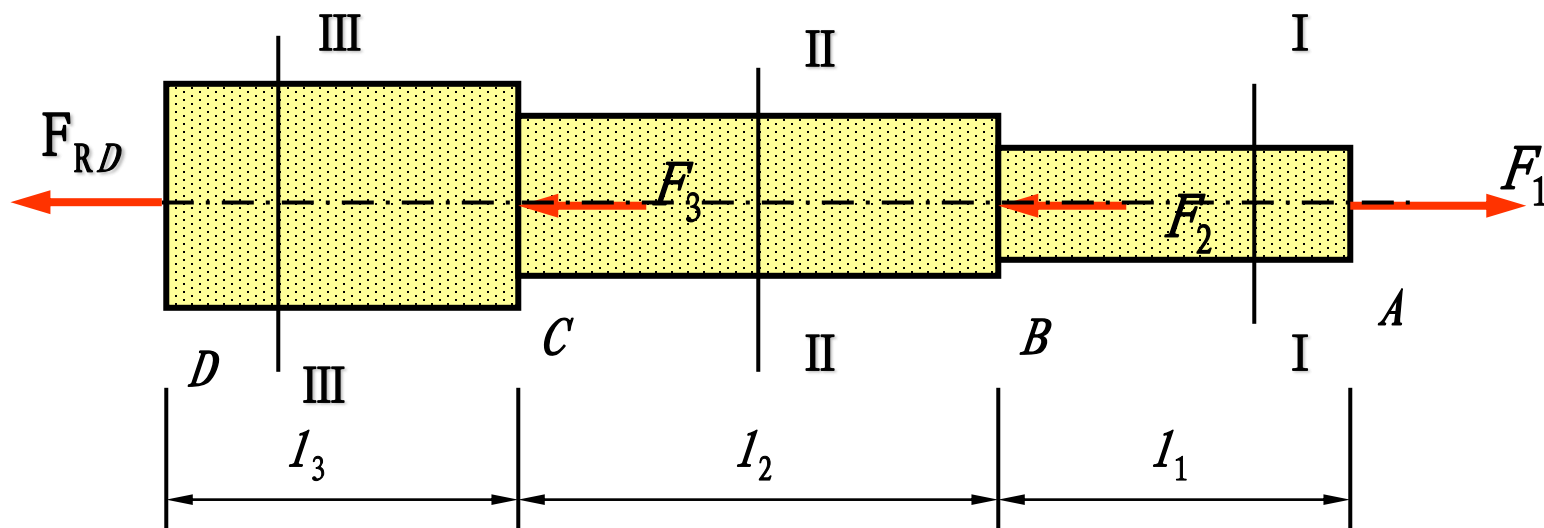




$$F_{N1} = 20 \text{ kN } (+)$$

$$F_{N2} = -15 \text{ kN } (-)$$

$$F_{N3} = -50 \text{ kN } (-)$$



(2) 杆的最大正应力 σ_{\max}

$$AB\text{段} \quad \sigma_{AB} = \frac{F_{N1}}{A_1} = 176.8\text{MPa} \quad (+)$$

$$BC\text{段} \quad \sigma_{BC} = \frac{F_{N2}}{A_2} = 74.6\text{MPa} \quad (-)$$

$$DC\text{段} \quad \sigma_{DC} = \frac{F_{N3}}{A_3} = 110.5\text{MPa} \quad (-)$$

$$F_{N1} = 20\text{kN} \quad (+)$$

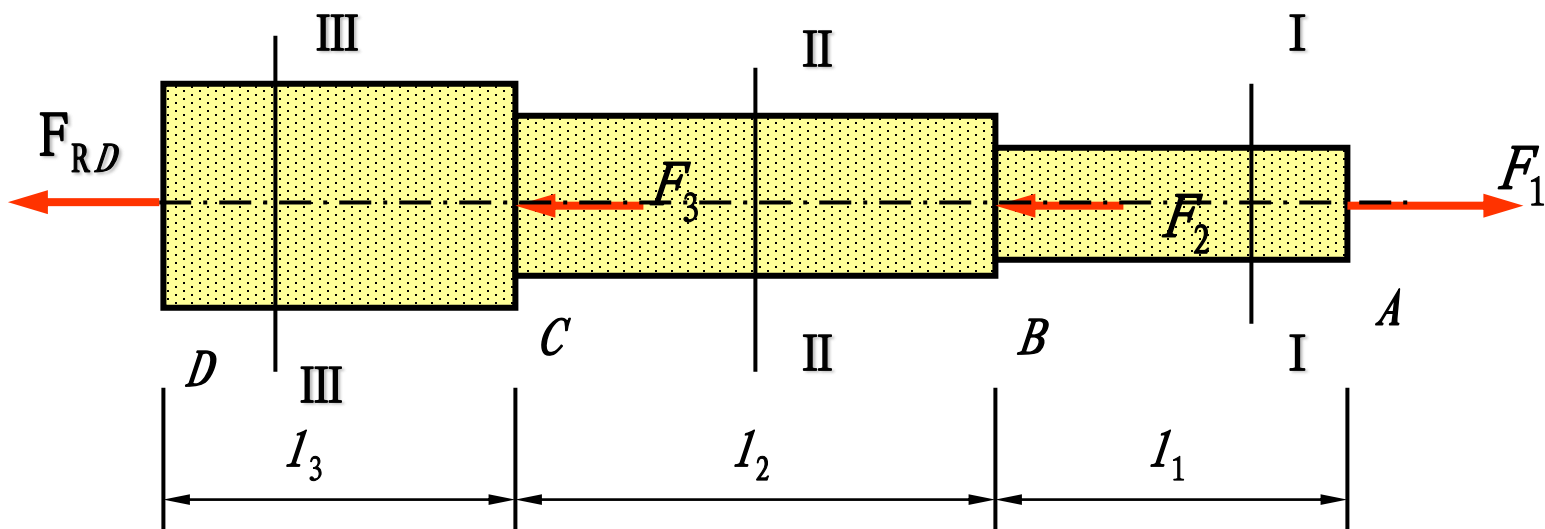
$$F_{N2} = -15\text{kN} \quad (-)$$

$$F_{N3} = -50\text{kN} \quad (-)$$

$$\sigma_{\max} = 176.8\text{MPa}$$

发生在AB段.





(3) B 截面的位移及 AD 杆的变形

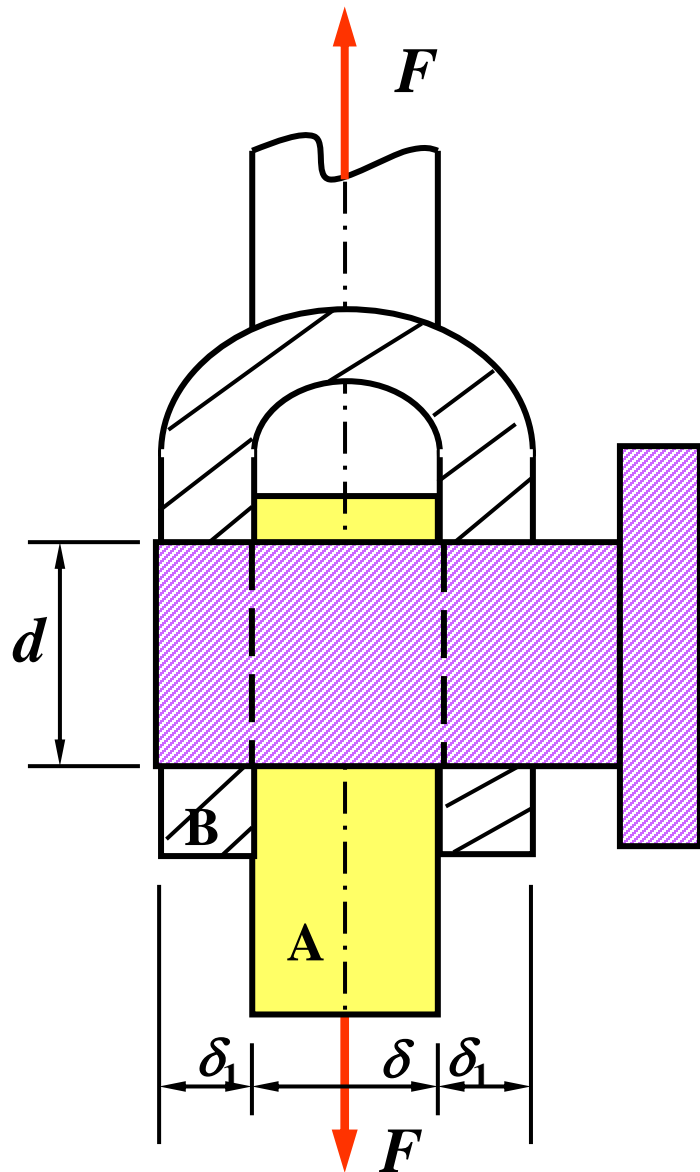
$$\Delta l_{AB} = \frac{F_{N1} l_1}{EA_1} = 2.53 \times 10^{-4} \text{ m} \quad \Delta l_{BC} = \frac{F_{N2} l_2}{EA_2} = -1.42 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\Delta l_{CD} = \frac{F_{N3} l_3}{EA_3} = -1.58 \times 10^{-4} \text{ m} \quad u_B = \Delta l_{CD} + \Delta l_{BC} = -0.3 \text{ mm}$$

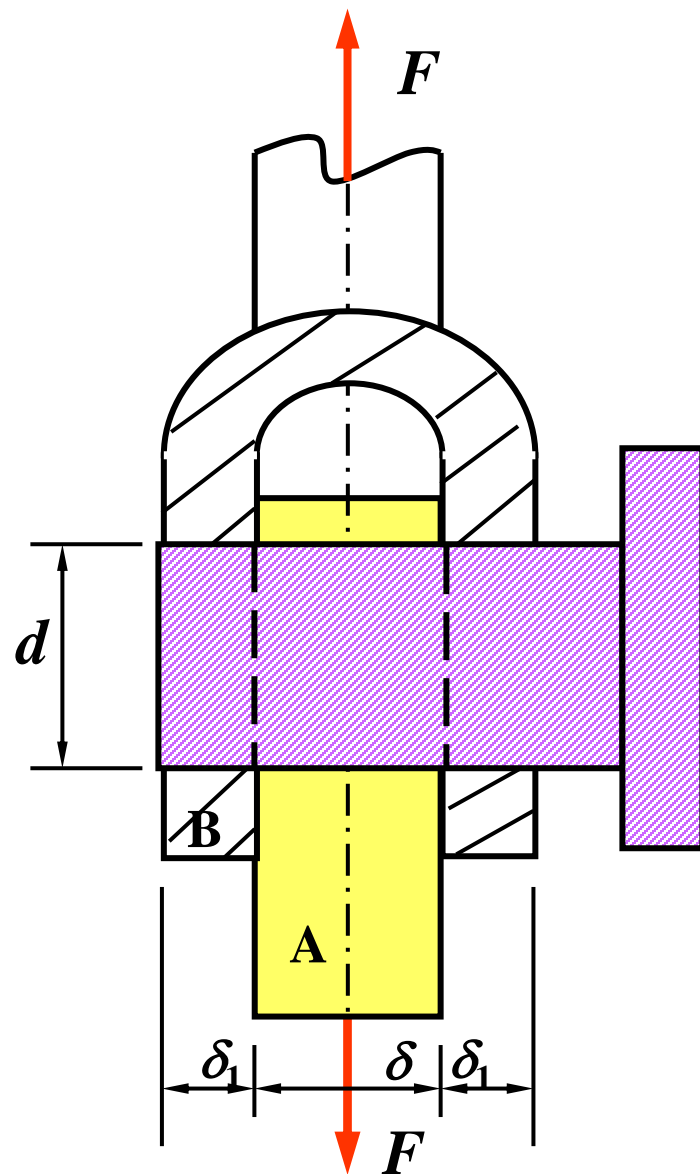
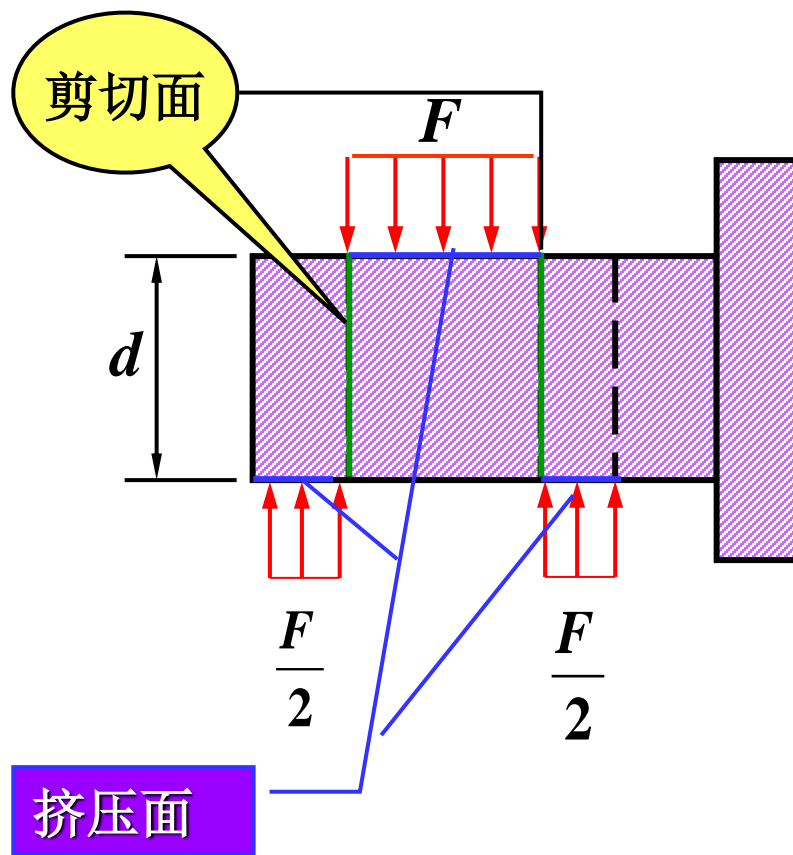
$$\Delta l_{AD} = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} = -0.47 \times 10^{-4} \text{ mm}$$



例题3-13 一销钉连接如图所示，
已知外力 $F=18\text{kN}$ ，被连接的构件
A 和 B 的厚度分别为 $\delta=8\text{mm}$ 和
 $\delta_1=5\text{mm}$ ，销钉直径 $d=15\text{mm}$ ，
销钉材料的许用切应力为
 $[\tau] = 60\text{MPa}$ ，许用挤压应力为
 $[\sigma_{bs}] = 200\text{MPa}$ 。试校核销钉的强度。



解：（1）销钉受力如图 *b* 所示



(2) 校核剪切强度

由截面法得两个面上的剪力

$$F_s = \frac{F}{2}$$

剪切面积为 $A = \frac{\pi d^2}{4}$

$$\tau = \frac{F_s}{A} = 51\text{MPa} \leq [\tau]$$

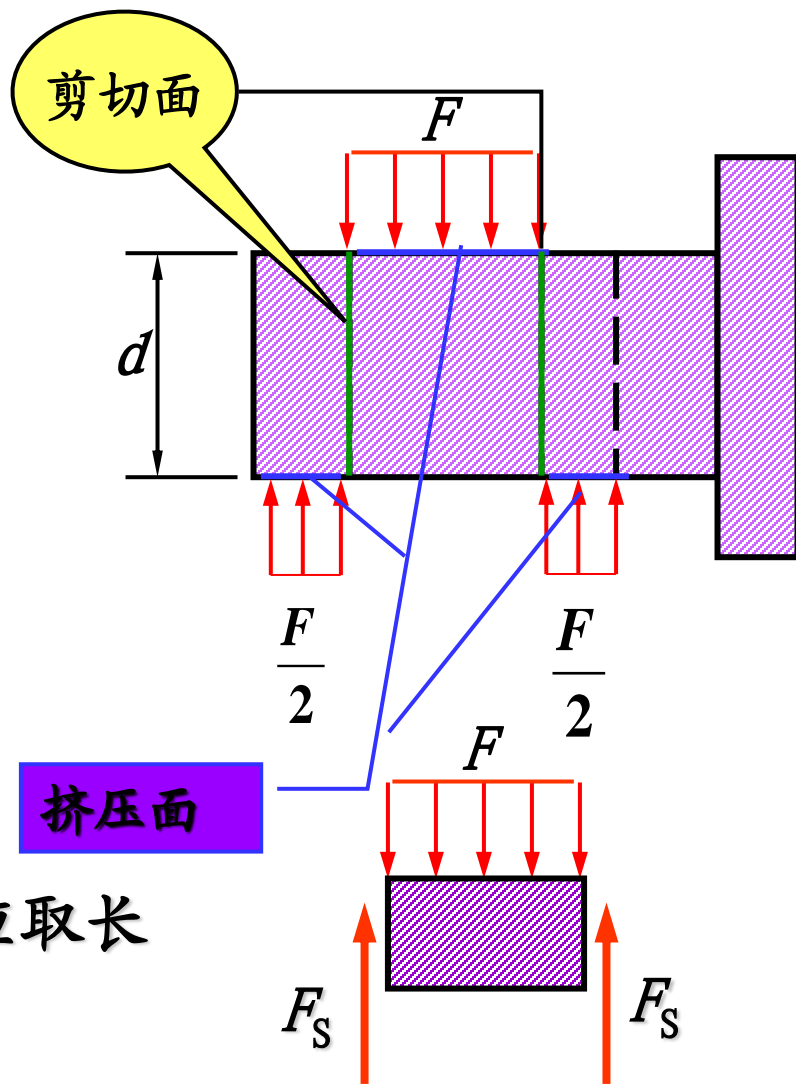
(3) 挤压强度校核 $\delta < 2\delta_1$

这两部分的挤压力相等，故应取长度

为 d 的中间段进行挤压强度校核.

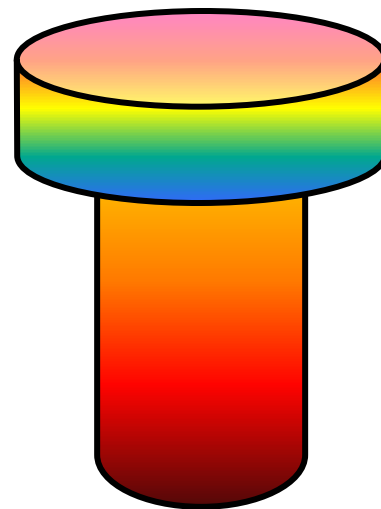
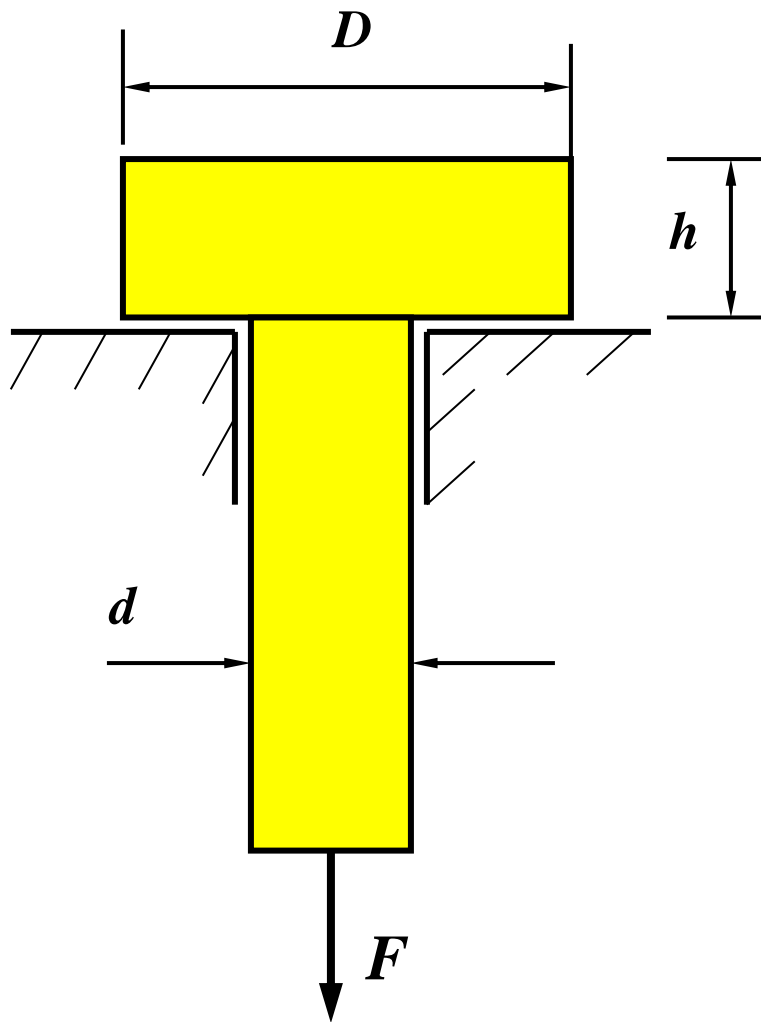
$$\sigma_{bs} = \frac{F}{A_{bs}} = \frac{F}{td} = 150\text{MPa} \leq [\sigma_{bs}]$$

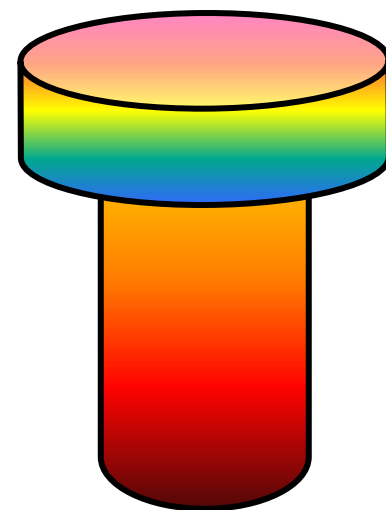
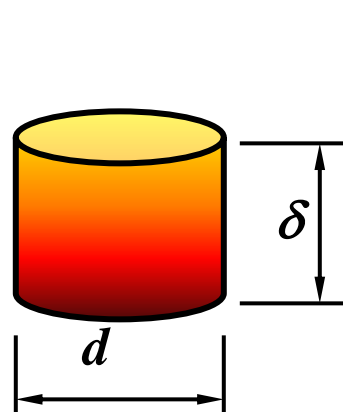
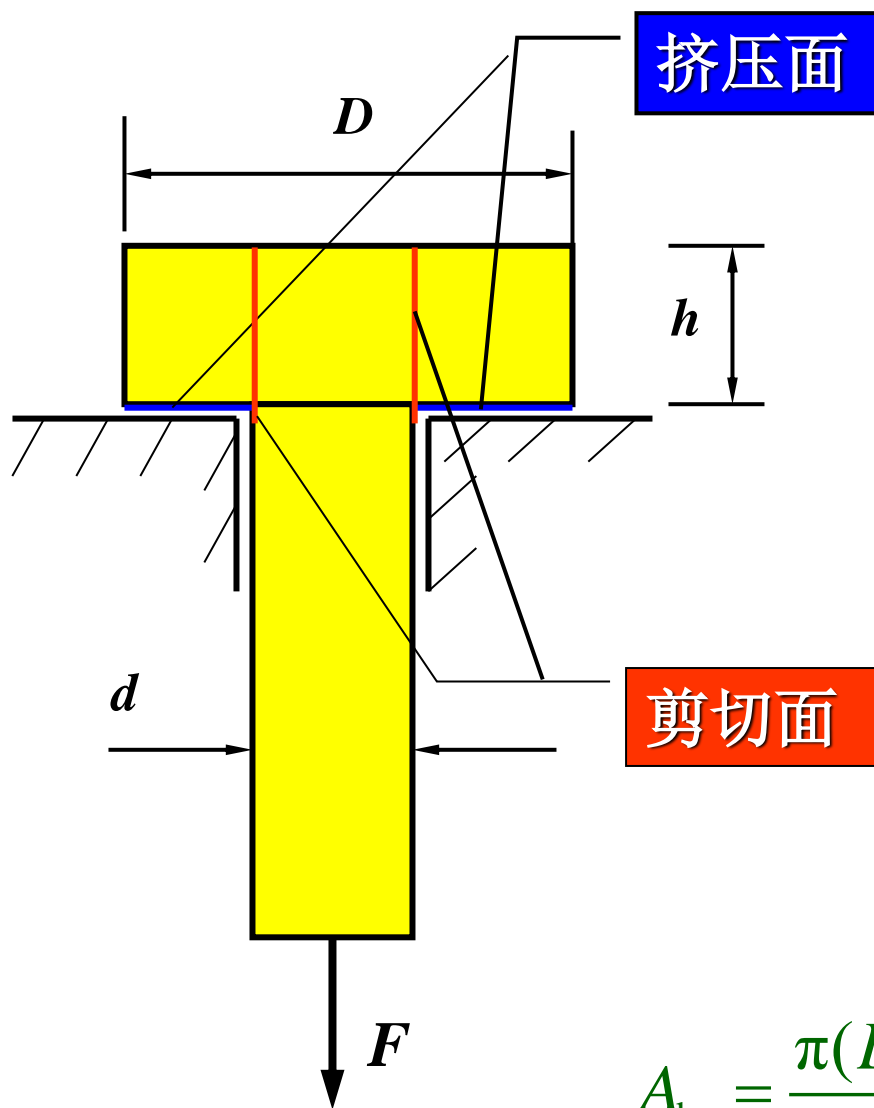
故销钉是安全的.



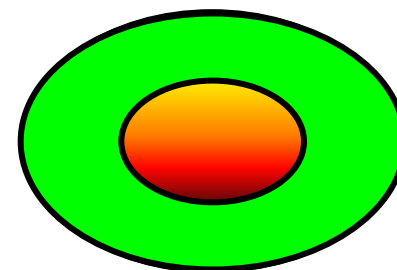
思考题

- (1) 销钉的剪切面面积 A
- (2) 销钉的挤压面面积 A_{bs}





$$A = \pi d h$$



$$A_{bs} = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$$

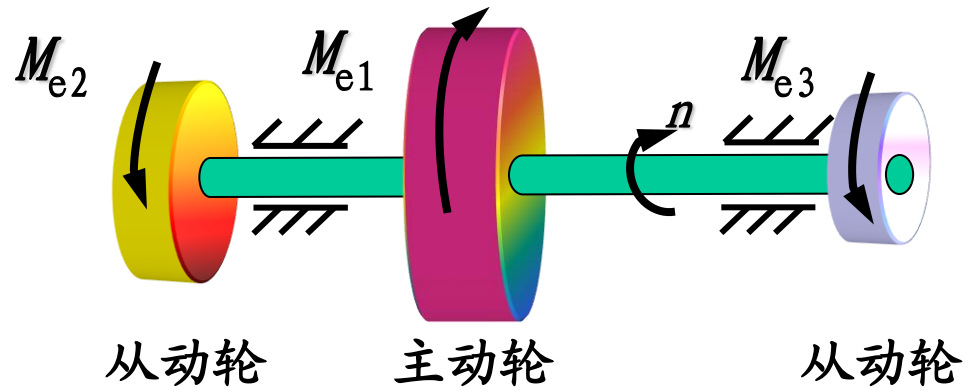
挤压面



4.2 外力偶矩的计算

一、外力偶矩的计算

$$\{M_e\}_{N \cdot m} = 9\,549 \frac{\{P\}_{kW}}{\{n\}_{r/min}}$$

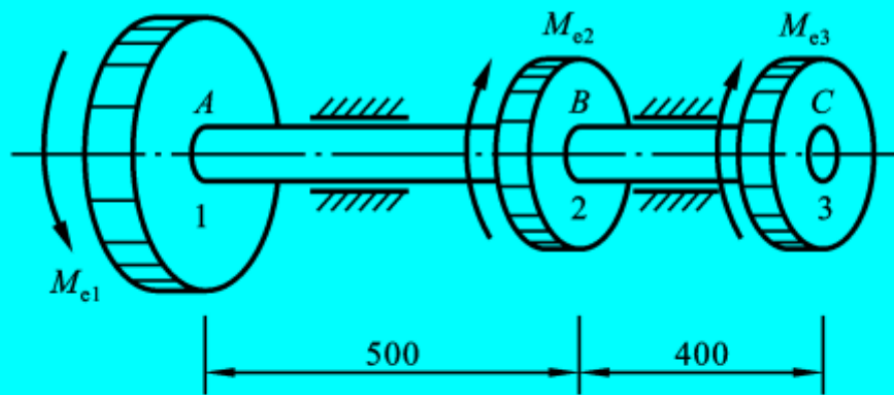


M_e —作用在轴上的力偶矩 (N · m) n —轴的转速 (r/min)

P —轴传递的功率 (kW)



4-15 图示传动轴的转速 $n=500 \text{ r/min}$, 主动轮 1 输入功率 $P_1=368 \text{ kW}$, 从动轮 2 和 3 分别输出功率 $P_2=147 \text{ kW}$ 和 $P_3=221 \text{ kW}$ 。已知 $[\tau]=70 \text{ MPa}$, $[\varphi']=1(^{\circ})/\text{m}$, $G=80 \text{ GPa}$ 。确定 AB 段的直径 d_1 和 BC 段的直径 d_2 。



题 4-15 图

$$M_{e1}=9549 \times P_1/n=9549 \times 368/500=7028.064 \text{ N}\cdot\text{m}$$

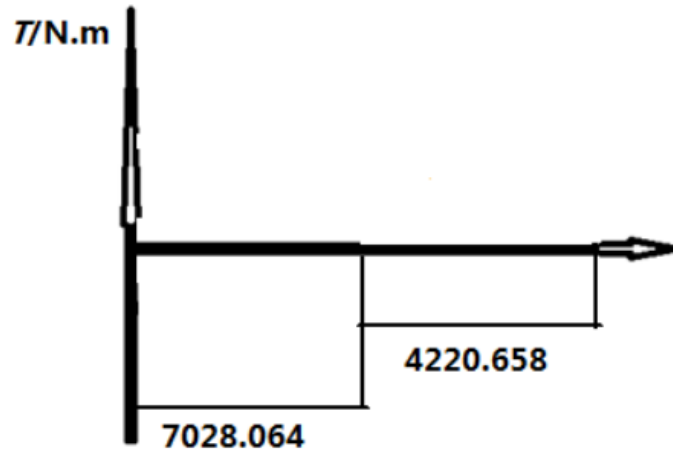
$$M_{e2}=9549 \times P_2/n=9549 \times 147/500=2807.406 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{e3}=9549 \times P_3/n=9549 \times 221/500=4220.658 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$T_1= - M_{e1}= -7028.064 \text{ N}\cdot\text{m};$$



$$T_2 = -M_{e3} = -4220.658 \text{ N}\cdot\text{m}$$



AB:

$$\tau_{1\max} = |T_1| / W_{t1} = 16 |T_1| / [\pi d_1^3] \leq [\tau]$$

$$\therefore d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16|T_1|}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 7028.064}{\pi \times 70 \times 10^6}} = 79.96 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} \varphi'_{1\max} &= |T_1| / (GI_{P1}) \times 180 / \pi \\ &= 32 |T_1| / [G\pi d_1^4] \times 180 / \pi \leq [\varphi'] \end{aligned}$$

$$\therefore d_1 \geq \sqrt[4]{\frac{32|T_1|}{G\pi [\varphi']} \frac{180}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \times 7028.064 \times 180}{80 \times 10^9 \times \pi \times 1 \times \pi}} = 84.62$$

mm



BC:

$$\tau_{2\max} = |T_2| / W_{t2} = 16 |T_2| / [\pi d_2^3] \leq [\tau]$$

$$\therefore d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16|T_2|}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 4220.658}{\pi \times 70 \times 10^6}} = 67.47 \text{ mm}$$

$$\varphi'_{2\max} = |T_2| / (GI_{P2}) \times 180/\pi$$

$$= 32 |T_2| / [G\pi d_2^4] \times 180/\pi \leq [\varphi']$$

$$\therefore d_2 \geq \sqrt[4]{\frac{32|T_2|}{G\pi [\varphi']} \frac{180}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \times 4220.658 \times 180}{80 \times 10^9 \times \pi \times 1 \times \pi}} = 74.44$$

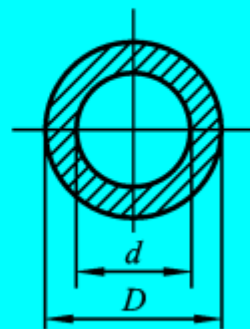
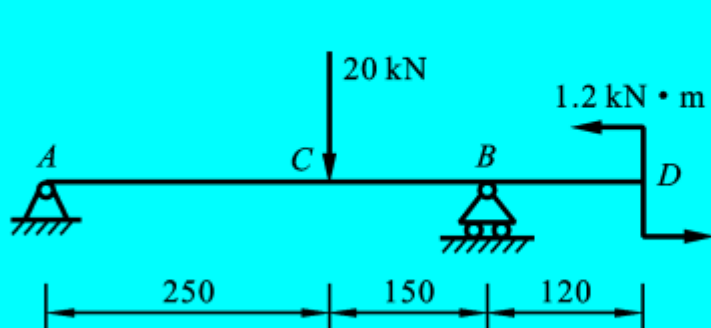
mm

$$\therefore d_1 = 74.44 \text{ mm}$$

将主动轮 1 置于 2、3 轮之间，可以减小最大扭矩。



5-13 空心管梁受载横截面尺寸如图所示。已知 $[\sigma]=150\text{ MPa}$, 管外径 $D=60\text{ mm}$, 在保证安全的条件下, 求内径 d 的最大值。



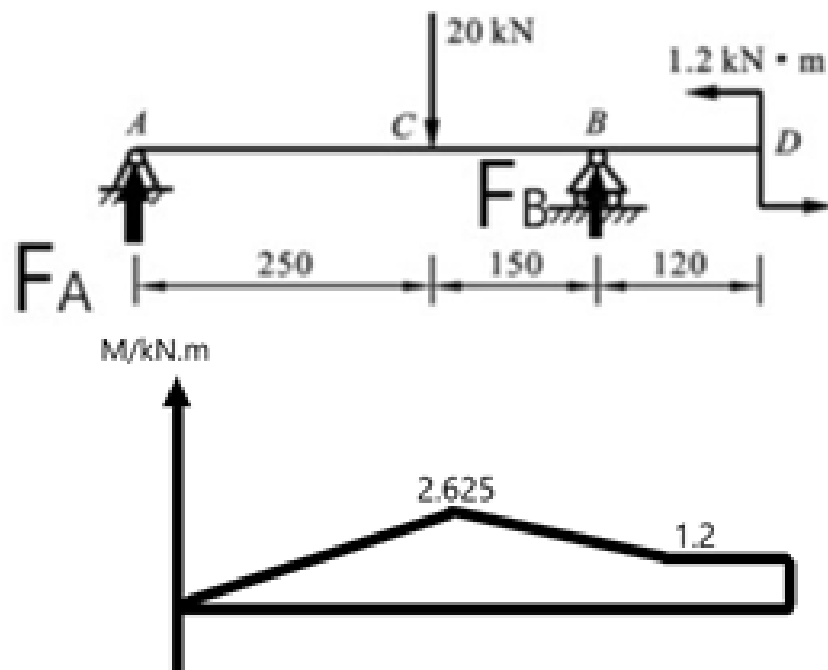
解:

$$\sum M_A = 0, F_B \times 0.4 + 1.2 - 20 \times 0.25 = 0$$

$$\sum F_y = 0, \therefore F_A + F_B - 20 = 0$$

$$\therefore F_B = 9.5\text{ kN}, \therefore F_A = 10.5\text{ kN}$$

$$\therefore M_{\max} = M_C = 2.625\text{ kN} \cdot \text{m}$$

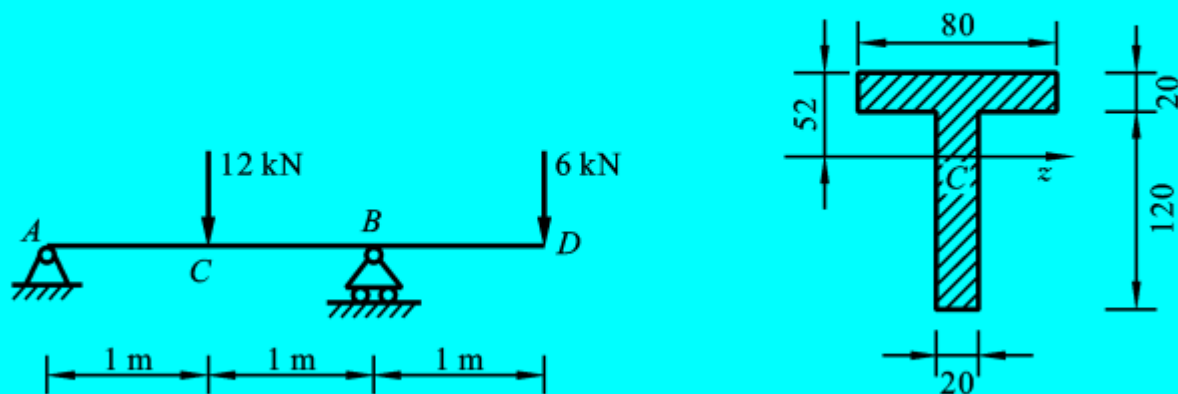


$$\sigma_{\max} = \frac{M_C}{W} = \frac{32M_C}{D^3(1-\alpha^4)} \leq [\sigma] \quad \alpha \leq \sqrt[4]{1 - \frac{32M_C}{\pi[\sigma]D^3}} = \sqrt[4]{1 - \frac{32 \times 2625}{\pi \times 150 \times 10^6 \times 0.06^3}} = 0.6466$$

$$d_{\max} = \alpha_{\max} D = 0.6466 \times 60 = 38.8\text{ mm}$$



5-14 铸铁梁的载荷及横截面尺寸如图所示。已知 $I_z = 7.63 \times 10^{-6} \text{ m}^4$, $[\sigma_t] = 30 \text{ MPa}$, $[\sigma_c] = 60 \text{ MPa}$, 试校核此梁的强度。

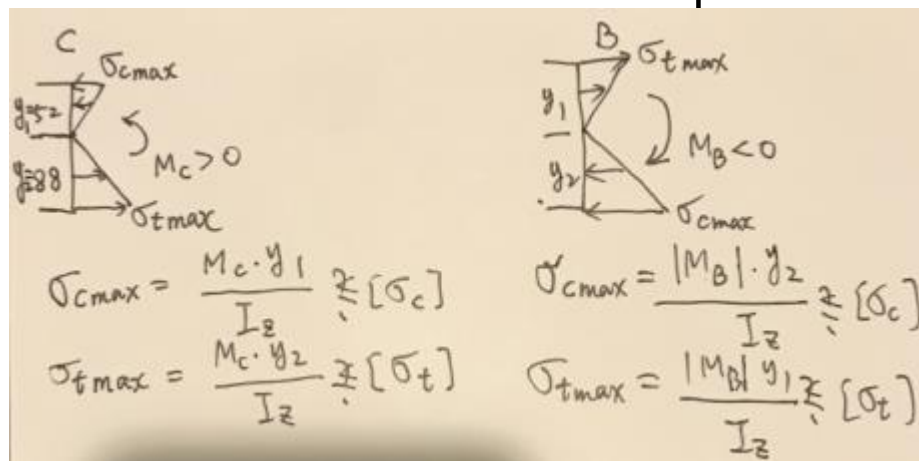
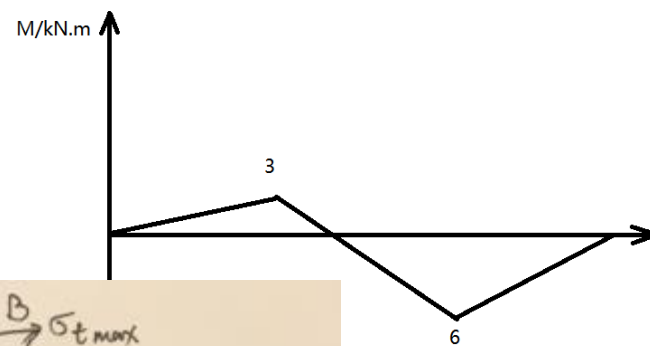
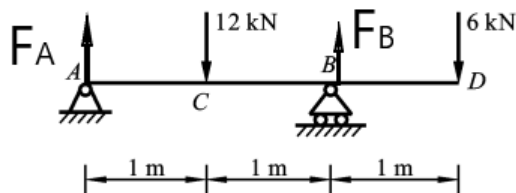


题 5-14 图

$$\sum M_A = 0, F_B \times 2 - 12 \times 1 - 6 \times 3 = 0$$

$$\sum F_y = 0, \therefore F_A + F_B - 12 - 6 = 0$$

$$\therefore F_B = 15 \text{ kN} \quad \therefore F_A = 3 \text{ kN}$$



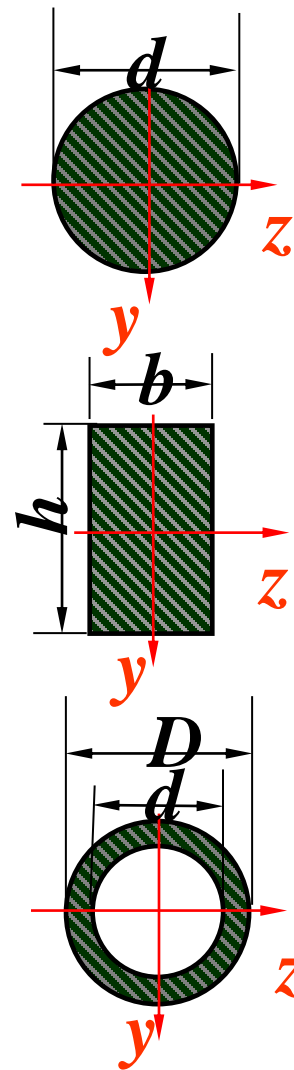
(1) 当中性轴为对称轴时

实心圆截面 $W = \frac{I_z}{d/2} = \frac{\pi d^4 / 64}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32}$

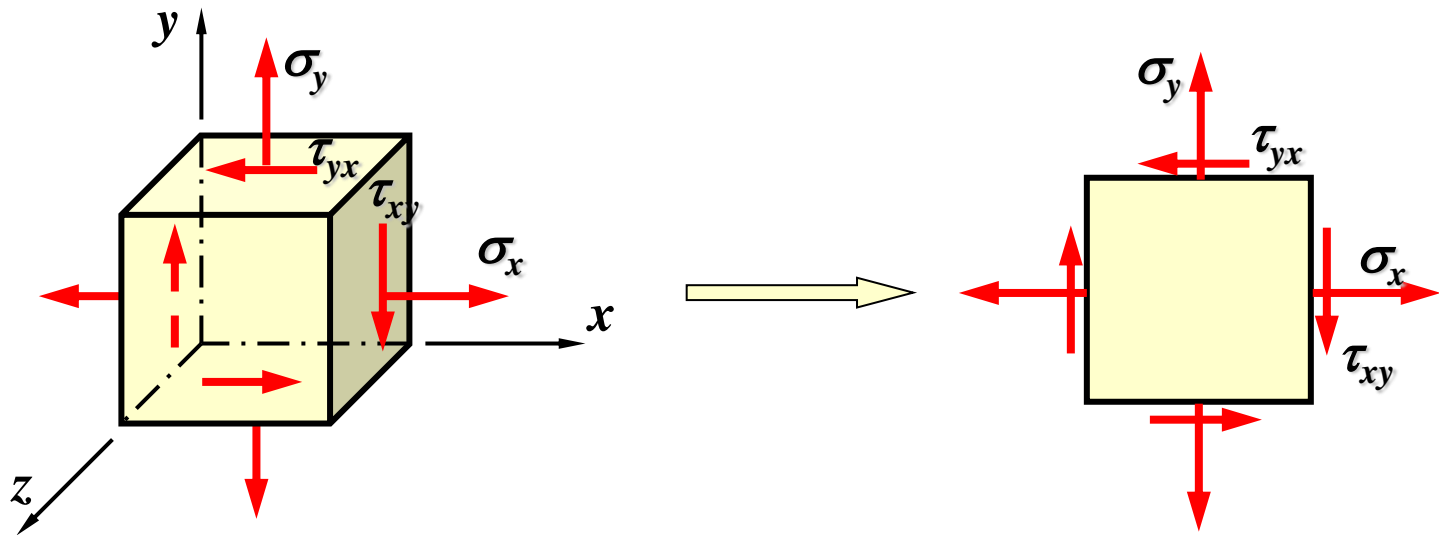
矩形截面 $W = \frac{I_z}{h/2} = \frac{bh^3 / 12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$

空心圆截面 $W = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4)$

$$\alpha = \frac{d}{D}$$



§ 6-2 平面应力状态分析-解析法 (Analysis of plane stress-state)



平面应力状态的普遍形式如图所示.单元体上有 σ_x, τ_{xy} 和 σ_y, τ_{yx}

二、最大正应力及方位

(Maximum normal stress and it's direction)

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

1. 最大正应力的方位 (The direction of maximum normal stress)

$$\text{令 } \frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -2 \left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \right] = 0$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \longrightarrow \begin{cases} \alpha_0 \\ \alpha_0 + 90^\circ \end{cases}$$

α_0 和 $\alpha_0 + 90^\circ$ 确定两个互相垂直的平面, 一个是最大正应力所在的平面, 另一个是最小正应力所在的平面.

2. 最大正应力 (Maximum normal stress)

将 α_0 和 α_0+90° 代入公式

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

得到 σ_{\max} 和 σ_{\min} (主应力)

$$\begin{cases} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{cases} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

下面还必须进一步判断 α_0 是 σ_x 与哪一个主应力间的夹角

若约定 $|\alpha_0| < 45^\circ$ 即 α_0 取值在 $\pm 45^\circ$ 范围内

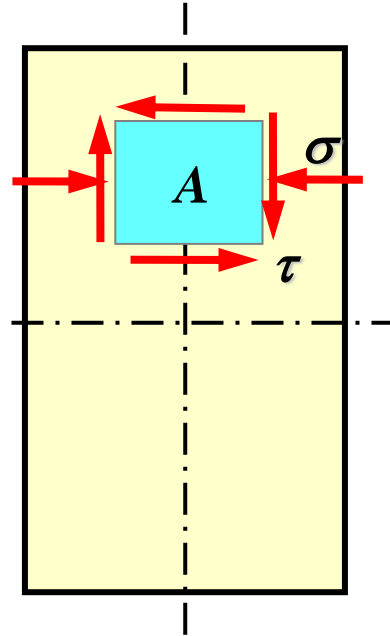
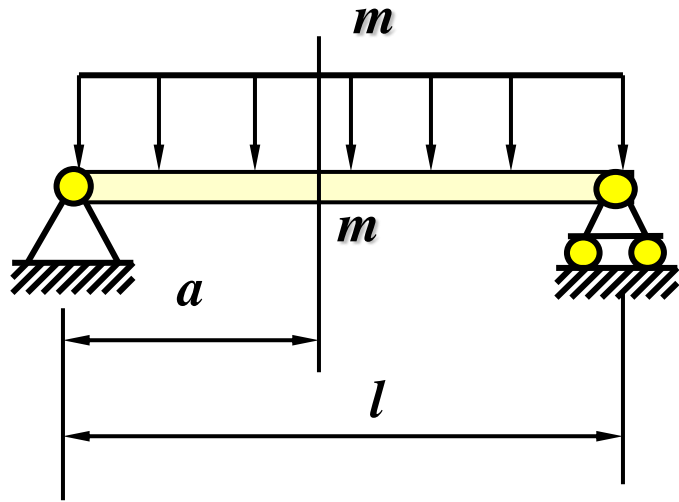
则确定主应力方向的具体规则如下

(1) 当 $\sigma_x > \sigma_y$ 时, α_0 是 σ_x 与 σ_{\max} 之间的夹角

(2) 当 $\sigma_x < \sigma_y$ 时, α_0 是 σ_x 与 σ_{\min} 之间的夹角

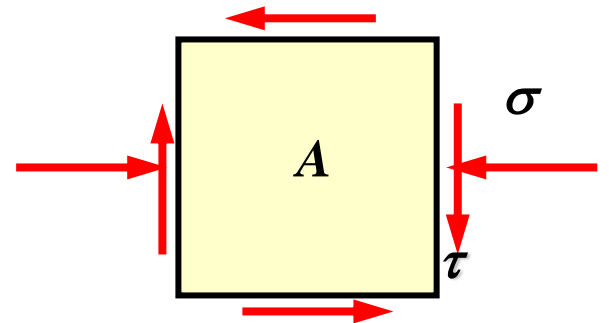
(3) 当 $\sigma_x = \sigma_y$ 时, $\alpha_0 = 45^\circ$, 主应力的方向可由单元体上切应力情况直观判断出来 大对大; 小对小; 相等看着找。

例题4 简支梁如图所示. 已知 $m-m$ 截面上A点的弯曲正应力和切应力分别为 $\sigma = -70\text{MPa}$, $\tau = 50\text{MPa}$. 确定A点的主应力及主平面的方位.



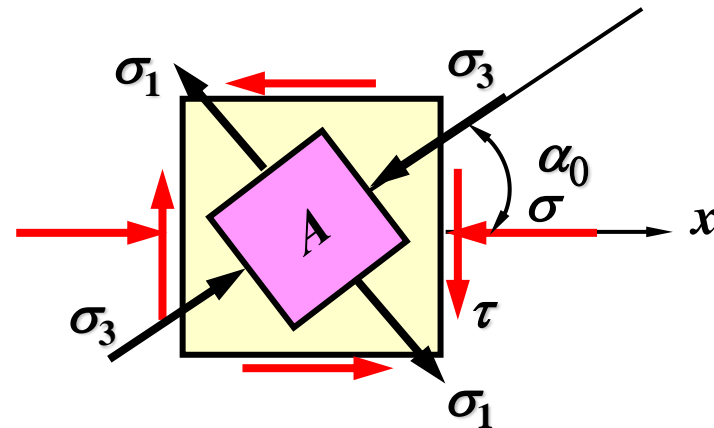
解: 把从A点处截取的单元体放大如图

$$\sigma_x = -70, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 50$$



$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times 50}{(-70) - 0} = 1.429$$

$$\alpha_0 = \begin{matrix} 27.5^\circ \\ -62.5^\circ \end{matrix}$$



因为 $\sigma_x < \sigma_y$, 所以 $\alpha_0 = 27.5^\circ$ 与 σ_{\min} 对应

$$\begin{cases} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{cases} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{cases} 26\text{MPa} \\ -96\text{MPa} \end{cases}$$

$$\sigma_1 = 26\text{MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -96\text{MPa}$$

§ 6-3 平面应力状态分析-图解法 (Analysis of plane stress-state with graphical means)

一、莫尔圆 (Mohr's circle)

将斜截面应力计算公式改写为

$$\sigma_{\alpha} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$
$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

把上面两式等号两边平方,然后相加便可消去 α ,得

$$(\sigma_{\alpha} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2})^2 + \tau_{\alpha}^2 = (\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2$$

因为 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 皆为已知量,所以上式是一个以 $\sigma_{\alpha}, \tau_{\alpha}$ 为变量的圆周方程.当斜截面随方位角 α 变化时,其上的应力 $\sigma_{\alpha}, \tau_{\alpha}$ 在 σ - τ 直角坐标系内的轨迹是一个圆.

1.圆心的坐标

(Coordinate of circle center)

$$C(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0)$$

2.圆的半径 (Radius of circle)

$$R = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$$

此圆习惯上称为 **应力圆** (plane stress circle), 或称为 **莫尔圆** (Mohr's circle)

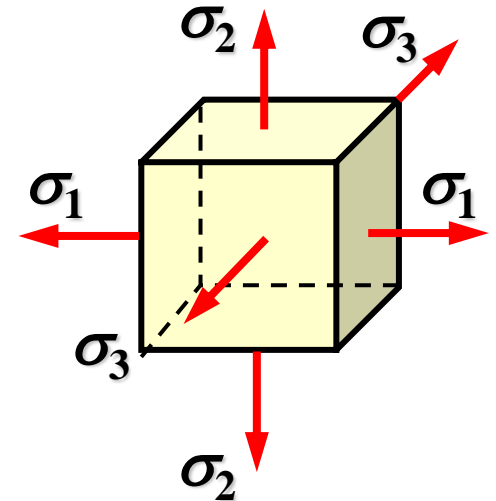
§ 6-5 三向应力状态分析

(analysis of three-dimensional stress-state)

一、 空间应力状态下的最大正应力和最大切应力
(the maximum normal stress and shear stress in three-dimensional stress-state)

已知受力物体内某一点处三个主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

利用应力圆确定该点的最大正应力和最大切应力.

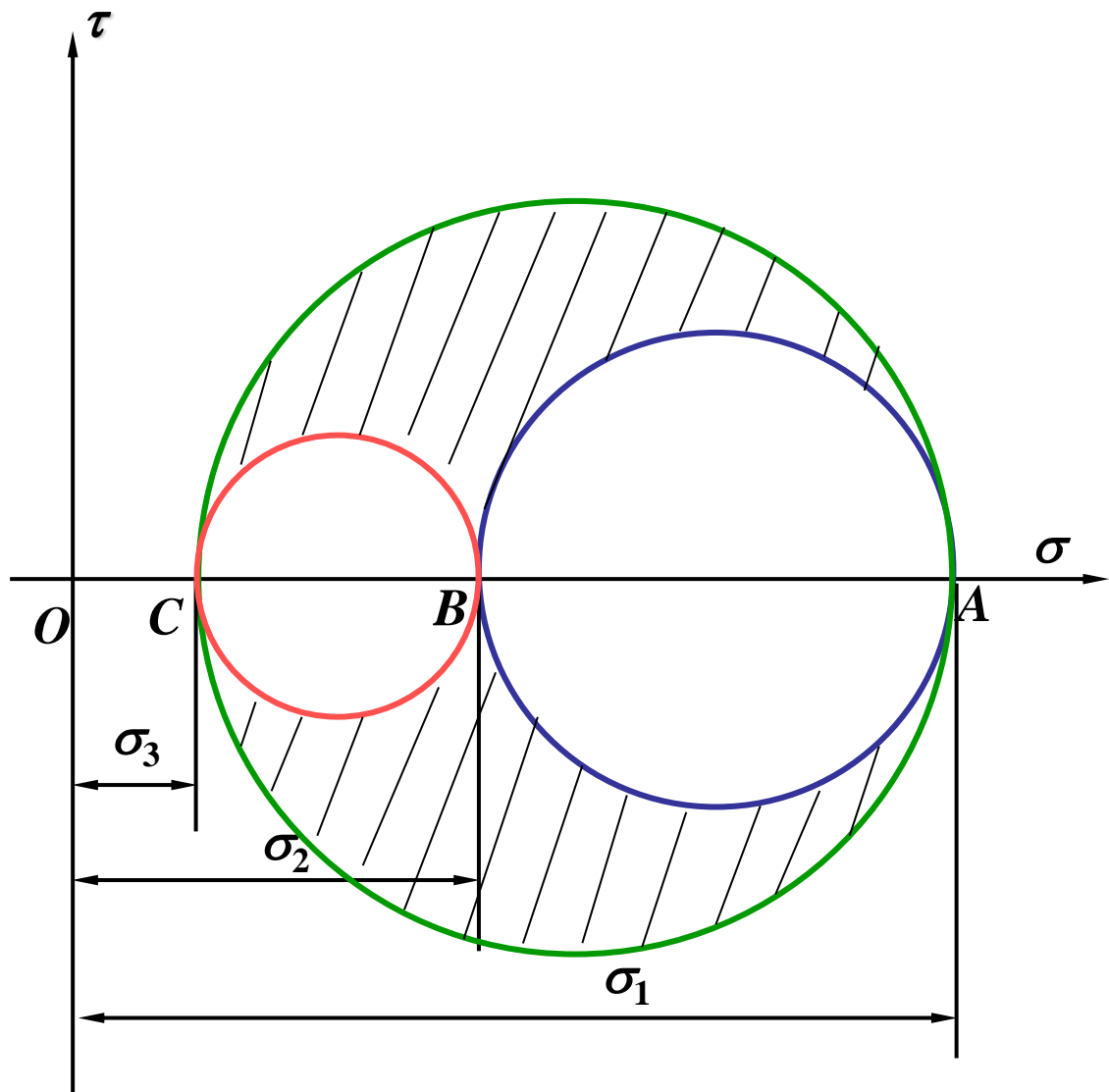


结论

三个应力圆圆周上的点及由它们围成的阴影部分上的点的坐标代表了空间应力状态下所有截面上的应力

该点处的最大正应力（指代数值）应等于最大应力圆上A点的横坐标 σ_1

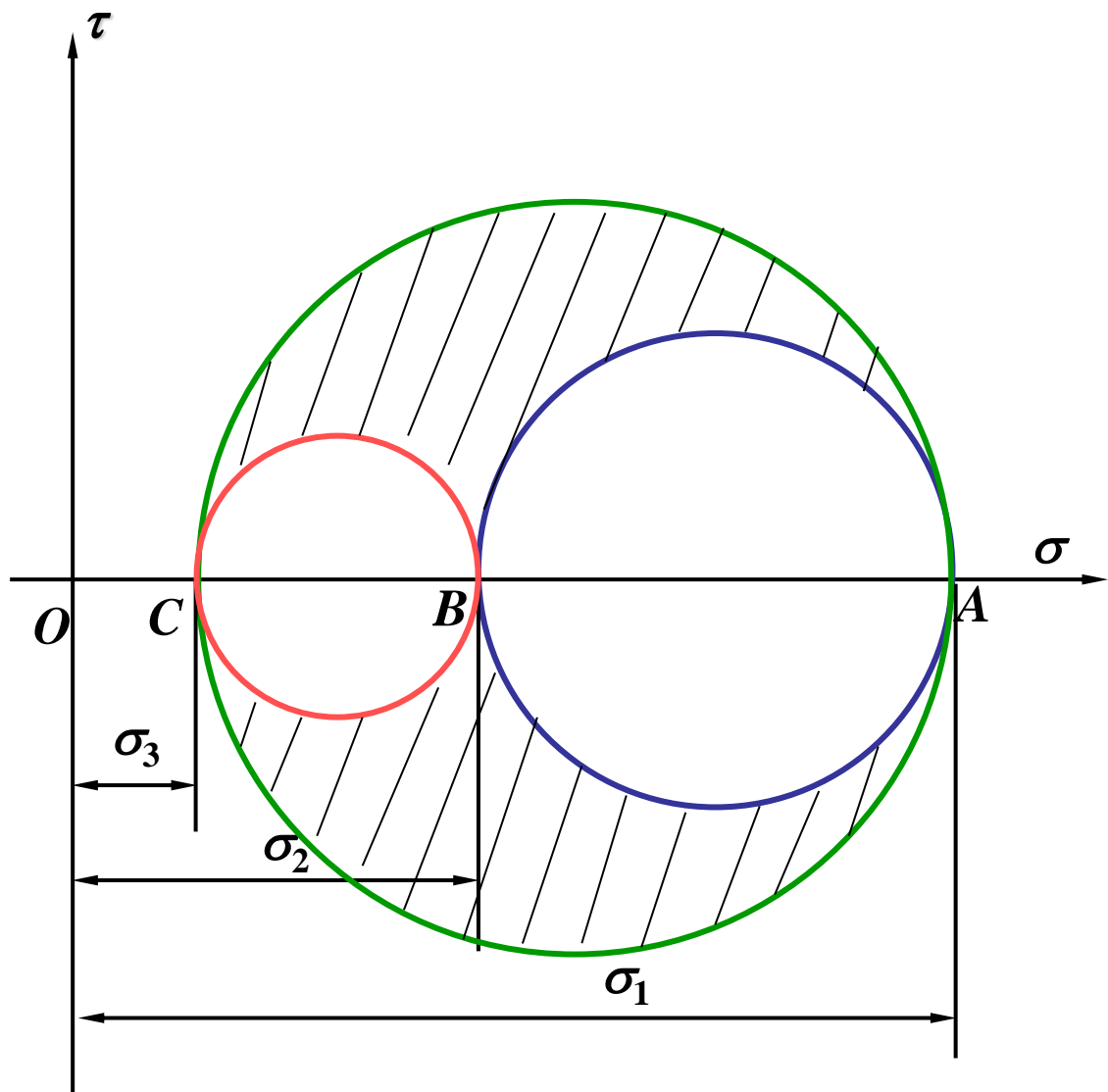
$$\sigma_{\max} = \sigma_1$$



最大切应力则等于最大的应力圆的半径

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

最大切应力所在的截面与 σ_2 所在的主平面垂直, 并与 σ_1 和 σ_3 所在的主平面成 45° 角.



§ 6-7 强度理论(The failure criteria)

一、强度理论的概念 (Concepts of failure criteria)

1. 引言 (introduction)

正应力强度条件

(strength condition for normal stress)

轴向拉压 $\sigma_{\max} = \frac{F_{N\max}}{A} \leq [\sigma]$

弯曲 $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$

剪切 $\tau = \frac{F_S}{A} \leq [\tau]$

切应力强度条件

(strength condition for shear stress)

扭转 $\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} \leq [\tau]$

弯曲 $\tau_{\max} = \frac{F_{S\max} \cdot S_{z\max}^*}{I_z b} \leq [\tau]$

六、相当应力 (Equivalent stress)

把各种强度理论的强度条件写成统一形式 $\sigma_r \leq [\sigma]$

σ_r 称为复杂应力状态的相当应力.

$$\sigma_{r1} = \sigma_1$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$



二、莫尔强度理论 (Mohr's failure criterion)

任意一点的应力圆若与极限曲线相接触,则材料即将屈服或剪断.

公式推导

$$\overline{O_1N} = \frac{[\sigma_t]}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$\overline{O_2F} = \frac{[\sigma_c]}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$\overline{O_3O_1} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{[\sigma_t]}{2}$$

$$\overline{O_3O_2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{[\sigma_c]}{2}$$

代入 $\frac{\overline{O_1N}}{\overline{O_2F}} = \frac{\overline{O_3O_1}}{\overline{O_3O_2}}$

强度条件 $\sigma_1 - \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]} \sigma_3 \leq [\sigma_t]$

