线性代数 B

浙江理工大学期末试题汇编

（答案册 五套精装版）

学校：______________________

专业：______________________

班级：______________________

姓名：______________________

学号：______________________

（此试卷为 2022 年第二版 第 1 次发行）

目录

2022 年所有试卷版本见**试卷版**的尾页。如需资料获取请添加下方的 QQ 群获取。

更多信息

试卷整理人：张创琦　　　　　　　　　微信公众号：创琦杂谈
试卷版次：2022 年 4 月 30 日 第二版 第 1 次发行
本人联系 QQ 号：1020238657（勘误请联系本人）
创琦杂谈学习交流群（QQ 群）群号：749060380
cq 数学物理学习群（QQ 群）群号：967276102
cq 计算机编程学习群（QQ 群）群号：653231806

1 浙江理工大学 2015—2016 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 A 卷

一 选择题（每小题 4 分，共 24 分）

D C A C B B

二 填空题（本题共 6 题，每小题 4 分，共 24 分）

1. E　　2. 3　　3. -17，-12　　4. 3　　5. $-\dfrac{16}{27}$　　6. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

三 计算题

1 解：

$$D_4=\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=x\cdot(-1)^{\frac{4\times 3}{2}}x\cdot x\cdot x= x^4 .$$ ....（7 分）

2 解：由 $AB=A+2B$ 得，$(A-2E)B=A$。因为

$$\begin{pmatrix} A-2E & A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

所以，$B=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$。 ....（8 分）

3 解：(1)由向量 α_1，α_2 的对应分量不成比例知 α_1，α_2 线性无关。 ....（2 分）

$$(2)\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 14 & 6 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故包含 α_1，α_2 的一个极大线性无关组为 α_1，α_2，α_5。 ....（6 分）

(3) 继续作初等行变换，

$$\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\0&1&1&1&0\\0&0&0&-4&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&3&1&0\\0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以，$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_5$。 ....（9 分）

4 解：系数行列式为 $\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-10)$。

(1) 因此，当 $\lambda\neq1$，$\lambda\neq10$ 时，方程组有唯一解。 ....（4 分）

(2) 当 $\lambda=10$ 时，对增广矩阵作初等行变换，

$$\begin{pmatrix}-8&2&-2&1\\2&-5&-4&2\\-2&-4&-5&-11\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&\frac{5}{2}&\frac{11}{2}\\0&-9&-9&-9\\0&0&0&27\end{pmatrix},$$

所以，方程组无解。 ....（6 分）

(3) 当 $\lambda=1$ 时，对增广矩阵作初等行变换，

$$\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\2&4&-4&2\\-2&-4&4&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

则其齐次线性方程组的基础解系为 $\xi_1=(-2,1,0)^T$，$\xi_2=(2,0,1)^T$。

而非齐次方程组的一个特解是 $\eta=(1,0,0)^T$，所以，通解为

$X=\eta+c_1\xi_1+c_2\xi_2$，其中，c_1，c_2 为任意常数。 ....（10 分）

5 解：矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2&-2&-2\\-2&\lambda-1&-4\\-2&-4&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+3)^2(\lambda-6),$$

所以，A 的特征值为 $\lambda_1=-3$，$\lambda_2=6$。

对于 $\lambda_1=-3$，解齐次线性方程组 $(-3E-A)x=0$，得其基础解系

$\alpha_1=(-2,1,0)^T$，$\alpha_2=(-2,0,1)^T$。

对于 $\lambda_2=6$，解齐次线性方程组 $(6E-A)x=0$，得其基础解系

$\alpha_3=(1,2,2)^T$。 ....（7 分）

把向量组α_1,α_2正交化，有$\beta_1=(-2,1,0)^T$，$\beta_2=\left(-\frac{2}{5},-\frac{4}{5},1\right)^T$。

再将β_1,β_2,α_3单位化，得

$$\gamma_1=\left(-\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5},0\right)^T,\quad \gamma_2=\left(-\frac{2}{3\sqrt5},-\frac{4}{3\sqrt5},\frac{5}{3\sqrt5}\right)^T,\quad \gamma_3=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)^T。$$

令矩阵$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5} & -\frac{2}{3\sqrt5} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{4}{3\sqrt5} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{3\sqrt5} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$，则$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\0&0&6\end{pmatrix}$

.......（10 分）

四 **证明题**（每小题 4 分，共 8 分）

1 证明：由$A^2-5A+6E=(A-2E)(A-3E)=0$，得

$$R(A-2E)+R(A-3E)\le 0。$$ ....（2 分）

另一方面，

$$\begin{aligned}R(A-2E)+R(A-3E)&=R(A-2E)+R(3E-A)\\&\ge R((A-2E)+(3E-A))\\&\ge R(-E)=n\end{aligned}$$

所以，$R(A-2E)+R(A-3E)=n$。 ....（4 分）

2 证明：因为$A^TA=E$，$|A|=|A^T|=-1$，所以

$$|-E-A|=|-A^TA-A|=|(-A^T-E)A|=|(-A-E)^T|\cdot|A|=-|-E-A|。$$

从而可得，$|-E-A|=0$，故-1 是A的一个特征值。 ....（4 分）

2 浙江理工大学 2013—2014 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 A 卷

一 选择题：每小题 4 分，共 20 分。

1、D 2、C 3、A 4、D 5、B

二 填空题：每小题 5 分，共 25 分。

1. $\begin{bmatrix} a_{21}+a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11}+a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$； 2. 2; 3. －8; 4. $3^{n-1}\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 3 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}$ 5. 3

三 计算题：每小题 7 分，共 21 分。

1.

$$D=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} n+a & n+a & \cdots & n+a \\ 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{vmatrix}=(n+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{vmatrix}$$

$$=(n+a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}=(n+a)a^{n-1} \quad (7\text{ 分})$$

2．解：$(A-E)B=(A-E)(A+E)$，（2 分） $|A-E|\neq 0$ 所以 $A-E$ 可逆，(3 分)

所以 $B=A+E=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (3 分)

3. 将方程两边转置，得 $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -5 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}X^T=\begin{pmatrix} -8 & -5 & -2 \\ 3 & 9 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 由

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -5 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & X^T \end{pmatrix},$$

得 $X=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. (7 分)

四．解：$[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (4 分)

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是它的一个极大线性无关组, (3 分) $\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$ (2 分)

五．解：$\overline{A}=\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\4&2&-2&1&2\\2&1&-1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}7&0&-1&-1&6\\0&7&-5&9&-5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ (3 分)

$$\begin{cases}7x_1 \qquad = x_3+x_4+6\\ \qquad 7x_2 = 5x_3-9x_4-5\end{cases}$$

令 $x_3=x_4=0$，则 $\eta=\frac{1}{7}(6,-5,0,0)^T$ (3 分)

$$\begin{cases}7x_1 \qquad = x_3+x_4\\ \qquad 7x_2 = 5x_3-9x_4\end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}$ $\xi_1=\frac{1}{7}(1,5,1,0)^T$ $\xi_2=\frac{1}{7}(1,-9,0,1)^T$ (3 分)

通解：$x=\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2$ (1 分)

六．解：由矩阵的特征值之和等于矩阵的迹，所以另一个特征值为 0。(2 分)

$\begin{vmatrix}-1&1&2\\-2&2&x\\-2&1&2\end{vmatrix}=0$ 所以 $x=4$ (2 分)

$(A-E)X=\begin{bmatrix}-2&1&2\\-2&1&4\\-2&1&1\end{bmatrix}X=0$，所以 1 的对应特征向量为 $\xi_1=\begin{bmatrix}1&2&0\end{bmatrix}^T$，

全部特征向量为 $k\xi_1, k\neq 0$ (2 分)。

$(A-2E)X=\begin{bmatrix}-3&1&2\\-2&0&4\\-2&1&0\end{bmatrix}X=0$，所以 2 的特征向量为 $\xi_2=\begin{bmatrix}2&4&1\end{bmatrix}^T$，

全部特征向量为 $k\xi_2, k\neq 0$ (2 分)

$(A-0E)X=\begin{bmatrix}-1&1&2\\-2&2&4\\-2&1&2\end{bmatrix}X=0$，所以 0 的对应特征向量为 $\xi_3=\begin{bmatrix}0&-2&1\end{bmatrix}^T$，

全部特征向量为 $k\xi_3, k\neq 0$ (2 分)

七、证明：由 $A^2=A$，$(A+E)\left[-\frac{1}{2}(A-2E)\right]=\left[-\frac{1}{2}(A-2E)\right](A+E)=E$ (4 分)

所以 $A+E$ 可逆，$\left(A+E\right)^{-1}=-\dfrac{1}{2}\left(A-2E\right)$。（1 分 ）

3 浙江理工大学 2012—2013 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 A1 卷

一 选择题（每小题 4 分，共 24 分）。

1、(B) ；2、(D) ；3、$\left(A\right)$；4、$\left(C\right)$；5、(D) ；6、(D) ；

二 填空题（每小题 4 分，共 24 分）。

1、$\begin{pmatrix} 13 & 10 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ ；　2、$k=2$；　3、1045；　4、 1；　5、$3^{99}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$；

6、$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

三、计算题

1. 解：$\begin{vmatrix} a+b & b & b & b \\ -b & a-b & -b & -b \\ b & b & a+b & b \\ -b & -b & -b & a-b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+b & b & b & b \\ a & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4.\cdots\cdots\cdots 6'$

2. 解：由 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}$，得 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}, \qquad \cdots\cdots\cdots 2'$$

为此对矩阵 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 施行初等行变换化为行最简形矩阵，

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. ………6′

3、**解** $(3A)^{-1}-2A^{*}=\frac{1}{3}A^{-1}-2\left|A\right|A^{-1}=-\frac{2}{3}A^{-1}$, ………3′

所以

$$\left|(3A)^{-1}-2A^{*}\right|=\left|-\frac{2}{3}A^{-1}\right|=(-\frac{2}{3})^{3}\left|A^{-1}\right|=-\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{\left|A\right|}=-\frac{16}{27}.$$

………6′

或 $(3A)^{-1}-2A^{*}=\frac{1}{3}A^{-1}-2A^{*}=\frac{1}{3}\cdot\frac{A^{*}}{\left|A\right|}-2A^{*}=-\frac{4}{3}A^{*}$ ………3′

则 $\left|(3A)^{-1}-2A^{*}\right|=\left|-\frac{4}{3}A^{*}\right|=(-\frac{4}{3})^{3}\left|A^{*}\right|=-\frac{64}{27}\cdot\left|A\right|^{3-1}=-\frac{16}{27}$. ………6′

4、解：对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换变成行最简形，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1\\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$ ………4′

所以 $R(\boldsymbol{A})=3$, ………6′

$\boldsymbol{A}$ 的前三列 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的最大无关组， ………8′

且 $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$， $\boldsymbol{\alpha}_5=-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$. ………10′

5、解：3×3齐次线性方程组有非零解，则系数行列式为0，即

$$\begin{vmatrix}2 & a & 1\\ a+2 & -2 & 2\\ 4 & a-1 & 2\end{vmatrix}=-(a-2)(a+1)=0,$$

得$a=2$或-1. ………2′

若$a=2$，则$\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{X}_2$，与$\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$是$\boldsymbol{A}$的属于不同特征值的特征向量矛盾！故$a=-1$. ………4′

当 $a=-1$ 时，

$\boldsymbol{X}_1=[1,-2,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}_2=[-2,1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}_3=[1,0,1]^{\mathrm{T}}$，显然 $\boldsymbol{X}_2$，$\boldsymbol{X}_3$ 线性无关，

从而 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$，$\boldsymbol{X}_3$ 线性无关.令 $\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{X}_1,\ \boldsymbol{X}_2,\ \boldsymbol{X}_3]$， ·········6′

则 $\boldsymbol{S}$ 可逆，且 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\mathrm{diag}(-4,2,2)$， ·········8′

因此

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}\,\mathrm{diag}(-4,2,2)\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{bmatrix}3&2&-1\\-2&-2&2\\3&6&-1\end{bmatrix}.$$

·········12′

四、证明题（每题 6 分，共 12 分）。

1、证明: 设 A 的特征值为 λ,α 是的对应于特征值 λ 的特征向量

$\because A^2=A\quad\therefore A^2\alpha=A\alpha\Rightarrow\lambda^2\alpha=\lambda\alpha$ ·········3′

$\because\alpha$ 为非零向量

$\therefore\lambda^2=\lambda\Rightarrow\lambda=0$或$\lambda=1$ ·········6′

2、 证：因为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 互异，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关； ·········1′

又因为 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，所以

$$\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{A\alpha}_1+\boldsymbol{A\alpha}_2+\boldsymbol{A\alpha}_3=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3,$$

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_3=\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^2\boldsymbol{\alpha}_3,$$

于是有

$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{T},$$ ·········4′

而 $|\boldsymbol{T}|=(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)\neq0$，因此

$$r(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3,$$

所以 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关. ·········6′

4 浙江理工大学 2012—2013 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 A2 卷

一 选择题（每小题 4 分，共 24 分）。

1、(C)；2、(C)；3、(D)；4、(D)；5、(B)；6、(C)；

二 填空题（每小题 4 分，共 24 分）。

1、$2^{2011}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$； 2、25； 3、0； 4、$c\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$； 5、2；

6、$A-2E$.

三 计算题（共 42 分）

1. 解：$D_4=\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & x & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & a \\ a & 1 & x-a & a \\ a & a & 0 & a \\ a & a & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$=(1+3a)(1-a)^3-a(x-a)(1-a)^2$ **.** ………$6'$

2、解 $(2C-E)A=CB$，$A=(2C-E)^{-1}(CB)$ ………$2'$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ………$6'$

3、解：

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_4,\ \boldsymbol{\alpha}_5]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ………$4'$

则 $R(A)=3$， ………$6'$

且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3$ 为一个极大无关组， ………$8'$

且 $\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_5=-8\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+6\boldsymbol{\alpha}_3$. ………$10'$

4、解：方程组的系数行列式为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 2 & 2\\ 2 & \lambda+1 & 2\\ 2 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+5)(\lambda-1)^2.$$

当$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，即$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -5$时，方程组有唯一解. ………3′

当$\lambda=-5$时，三个方程相加得$0=-9$，因此方程组无解. ………6′

当$\lambda=1$时，方程组同解于$2x_1+2x_2+2x_3=1$，因此方程组有无穷多解，………9′

且通解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1/2\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$其中k_1，k_2为任意常数. ………12′

5. 解：根据题目假设，有$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$，两边左乘$\boldsymbol{A}$，得$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$，即$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$，所以

$$\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha},$$

由此可得$\begin{cases}\lambda_0(-a+1+c)=1,\\ \lambda_0(-5-b+3)=1,\\ \lambda_0(-1+c-a)=-1,\end{cases}$ 解之得$\lambda_0=1$，$b=-3$，$a=c$， ………6′

再由$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a & -1 & c\\ 5 & b & 3\\ 1-c & 0 & -a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & -1 & a\\ 5 & -3 & 3\\ 1-a & 0 & -a\end{vmatrix}=a-3=-1$，得$a=c=2$，即有

$a=2$，$b=-3$，$c=2$，$\lambda_0=1$. ………8′

四、证明题（每题 5 分，共 10 分）

1、**证:** $A\neq E \Rightarrow A-E\neq O \Rightarrow R(A-E)\geq 1$.题设$R(A+E)+R(A-E)=n$,故

$R(A+E)<n$,$|A+E|=|A-(-1)E|=0$,$\lambda=-1$是A的一个特征值. ………5′

2. 证：因为$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，所以$\boldsymbol{A}$可逆，从而有 $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{BA})$，即

$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}$，所以$\boldsymbol{AB}$与$\boldsymbol{BA}$相似. ………5′

5 浙江理工大学 2011—2012 学年第 1 学期《线性代数 B》期末 A1 卷

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、D;　2、C;　3、C;　4、C;　5、B

二、填空题

1、$-\dfrac{1}{5}\mathbf{A}+\dfrac{2}{5}\mathbf{E}$；　2、1；　3、$\begin{pmatrix} 10 & -10 \\ -20 & 30 \end{pmatrix}$；　4、$-24$；　5、3．

三、解答题（共 50 分）

1、$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ ——————————5 分

$$=10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=10\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=10\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -8 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}=10\times(-1)\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}=160$$

——————————10 分

2、解：$A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A^4=E$，$B^4=(P^{-1}AP)^4=P^{-1}A^4P=E$。 ———4 分

故 $B^{2012}-2A^2=E-2A^2=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 。 ——————————8 分

3 、解：设 $\boldsymbol{a}_1=(a,3,1)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(2,b,3)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(1,2,1)^T$, $\boldsymbol{a}_4=(2,3,1)^T$.

$(\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & 3 & 3 & b \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & b-6 \end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-a & b-5 \end{pmatrix}$, —4 分

而 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)=2$, 所以 $a=2$, $b=5$. ——————————8 分

4.解：对增广矩阵 B 作初等行变换，

$B=(A\vdots b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ -1 & k & 1 & k^2 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ ——————————1 分

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ 0 & k+1 & k+1 & k^2+4 \\ 0 & -2 & 2-k & -8 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 4 \\ 0 & 2 & k-2 & 8 \\ 0 & k+1 & k+1 & k^2+4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & k & 4\\ 0 & 2 & k-2 & 8\\ 0 & 0 & \frac{(k+1)(4-k)}{2} & k(k+4)\end{pmatrix}$$ ——————————3 分

讨论：(1)当$k\neq-1$且$k\neq4$时，$R(A)=R(B)=3,$ 故方程组有唯一解；　————5 分

(2)当$k=-1$时，$R(A)=2,\ R(B)=3,\ R(A)\neq R(B),$ 故方程组无解；　—————7 分

(3)当$k=4$时，$B\quad\begin{pmatrix}1 & 1 & 4 & 4\\ 0 & 2 & 2 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

由于$R(A)=R(B)=2<3,$ 故方程组有无穷多解，　—————9 分

取同解方程租$\begin{cases}x_1= & -3x_3,\\ x_2=4 & -x_3,\\ x_3= & \quad x_3.\end{cases}$ 令$x_3=k,$ 并写成向量形式，即得方程组的通解

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 4\\ 0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-3\\ -1\\ 1\end{pmatrix},\quad k\in R.$$ ——————————12 分

5.解：A 的特征方程为：

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 2\\ -2 & \lambda-4 & -4\\ 2 & -4 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-36).$$

故 A 的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=6,\lambda_3=-6.$　——————————3 分

对于$\lambda_1=1,$ 对应的齐次线性方程租为：$(E-A)x=0,$

即，$\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -3 & -4\\ 2 & -4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0.$ 其基础解系为：$\alpha_1=\left(2,0,-1\right)^T,$

从而对应于特征值$\lambda_1=1$的特征向量为$\alpha_1=\left(2,0,-1\right)^T.$　————————5 分

类似可求得：

对应于特征值$\lambda_2=6$的特征向量为$\alpha_2=\left(1,5,2\right)^T.$　——————7 分

对应于特征值$\lambda_3=-6$的特征向量为$\alpha_3=\left(1,-1,2\right)^T.$　———————9 分

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&5&-1\\-1&2&2\end{pmatrix}$

则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&6&\\&&-6\end{pmatrix}$ 为对角矩阵。 ————————12 分

四、

1. **证明** 设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，由于它们都是实对称矩阵，故存在可逆矩阵 $\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2$，使得 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 相似于同一个对角矩阵:

$$\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}.$$ ————————2 分

因此，由 $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}_2$ 得 $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2^{-1}=\mathbf{B}$. 令 $\mathbf{Q}=\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2^{-1}$，则因 $\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2$ 均可逆，故 $\mathbf{Q}$ 可逆，且 $\mathbf{Q}^{-1}=(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2^{-1})^{-1}=\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1^{-1}$，从而

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{B}$$

即 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似. ————————5 分

2．**证明** 由于 $\mathbf{A}$ 是正交矩阵，故 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{E}$，从而由 $|\mathbf{A}^T|=|\mathbf{A}|\Rightarrow|\mathbf{A}|^2=|\mathbf{A}^T\mathbf{A}|=1$，因此 $|\mathbf{A}|=\pm1$，故 $\mathbf{A}$ 可逆，由于可逆矩阵的特征值不能为零，所以 $\lambda\neq0$。

————2 分

因 $\mathbf{A}$ 是正交矩阵，则 $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}^{-1}$，所以，当 λ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值时，$\dfrac{1}{\lambda}$ 就是 $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^T$ 的一个特征值，但 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}^T$ 有相同的特征值，故 $\dfrac{1}{\lambda}$ 也是 $\mathbf{A}$ 的特征值。————5 分