线性代数A

浙江理工大学期末试题汇编

（答案册 五套精装版）

学校：________________________

专业：________________________

班级：________________________

姓名：________________________

学号：________________________

（此试卷为2022年第二版 第1次发行）

目 录

2022 年所有试卷版本见**试卷册**的尾页。如需资料获取请添加下方的 QQ 群获取。

更多信息

试卷整理人：张创琦　　　　　　　　微信公众号：创琦杂谈
试卷版次：2022 年 5 月 8 日 第二版 第 1 次发行
本人联系 QQ 号：1020238657（勘误请联系本人）
创琦杂谈学习交流群（QQ 群）群号：749060380
cq 数学物理学习群（QQ 群）群号：967276102
cq 计算机编程学习群（QQ 群）群号：653231806

1 浙江理工大学 2019—2020 学年第 1 学期《线性代数 A》期末 A 卷

一、选择题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1. B　2. C　3. C　4. D　5. B　6. B

二、填空题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1. 20　2. $A-E$　3. 16　4. $(0,2,1)^T$　5. -1　6. 1

三、计算题 (共 42 分)

1. 解: $D_n=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$ (3分)

$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}$ (5分)

$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$ (6分)

2. 解: $|2A+B|=\begin{vmatrix}3x&2a_1+b_1&3u\\3y&2a_2+b_2&3v\\3z&2a_3+b_3&3w\end{vmatrix}$ 2分 (2分)

$=9(2|A|+|B|)$ 3分 (5分)

$=36$ (6分)

1分

3. 解: 由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\2&3&-1&5\\3&2&1&10\\3&6&-2&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&1&-3&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 2分 $\to\begin{pmatrix}1&0&5&0\\0&1&-2&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ (2分)

得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为向量组的一个极大线性无关组. 1分 (3分)

进一步初等行变换 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\to\begin{pmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&-2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 2分 (5分)

得 $\alpha_4=5\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3$. 1分 (6分)

其它情况请自行把握.

4. 解: $(A|\beta)=\left(\begin{array}{ccc:c}3&\lambda&2&10\\2&2\lambda+1&\lambda&5\\1&\lambda&\lambda&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&\lambda&\lambda&2\\0&1&-\lambda&1\\0&0&(1-2\lambda)(\lambda+2)&2(\lambda+2)\end{array}\right)$ 2分

(1) 方程组有唯一解 $\Longleftrightarrow R(A|\beta)=R(A)=3 \Longleftrightarrow (1-2\lambda)(\lambda+2)\neq 0$

$\Longleftrightarrow \lambda\neq\frac{1}{2}$ 且 $\lambda\neq -2$. (4分)

2分

(2) 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时, $(A|\beta)\rightarrow\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & 2\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 5\end{pmatrix}$.

因为 $R(A|\beta)\neq R(A)$, 所以方程组无解. 2分 (6分)

(3) 当 $\lambda=-2$ 时, $(A|\beta)\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & -2 & \vdots & 2\\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}$.

因为 $R(A|\beta)=R(A)=2<3$, 所以方程组有无穷多解. 2分 (8分)

此时, 进一步初等行变换 $(A|\beta)\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & \vdots & 4\\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}$,

得导出组的基础解系 $\xi=(-2,-2,1)^T$,

方程组的一个特解 $\eta^*=(4,1,0)^T$.

从而方程组的通解 $X=\eta^*+c\xi$, 其中 c 为任意常数. 4分 (12分)

5. 解: 二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. (1分)

由 A 的特征多项式

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^2(\lambda-2),$$

得 A 的特征值 $\lambda_{1,2}=-1,\lambda_3=2$. 2分 (3分)

当 $\lambda_{1,2}=-1$ 时, 解齐次线性方程组 $(A+E)X=0$,

得基础解系 $\xi_1=(-1,1,0)^T,\xi_2=(-1,0,1)^T$; 2分 (5分)

正交化得 $\beta_1=(-1,1,0)^T,\beta_2=\frac{1}{2}(-1,-1,2)^T$; 1分

单位化得 $\eta_1=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T,\eta_2=(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})^T$. (7分)

1分

当 $\lambda_3=2$ 时, 解齐次线性方程组 $(A-2E)X=0$,

得基础解系 $\xi_3=(1,1,1)^T$;

单位化得 $\eta_3=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$. 2分 (9分)

令正交矩阵 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$, 2分

于是由正交变换 $X=QY$,

$f=-y_1^2-y_2^2+2y_3^2$

得二次型的标准形 $f=-y_1^2-y_2^2+2y_3^2$. (12分)

四、证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

1. 证: 设 $R(A)=r_1$ 且 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_1}$ 是向量组 A 的一个极大无关组;

　　设 $R(B)=r_2$ 且 $\beta_{i1},\cdots,\beta_{ir_2}$ 是向量组 B 的一个极大无关组. (1分)

因为 $C=A\cup B$, 所以向量组 C 可由 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_1},\beta_{i1},\cdots,\beta_{ir_2}$ 线性表示. (3分)

从而 $R(C)\le R(\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_1},\beta_{i1},\cdots,\beta_{ir_2})\le r_1+r_2=R(A)+R(B)$. (5分)

2. 证: 反证法.

假设 $2\xi_1+3\xi_2$ 是 A 的特征向量, 则存在数 λ, 使得

$$A(2\xi_1+3\xi_2)=\lambda(2\xi_1+3\xi_2)=2\lambda\xi_1+3\lambda\xi_2.$$ 1分 (1分)

由题意, 得 $A(2\xi_1+3\xi_2)=2\lambda_1\xi_1+3\lambda_2\xi_2$.

进而 $2(\lambda_1-\lambda)\xi_1+3(\lambda_2-\lambda)\xi_2=0$. 2分 (3分)

因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 所以 ξ_1,ξ_2 线性无关.

于是 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, 矛盾.

所以 $2\xi_1+3\xi_2$ 不是 A 的特征向量. 2分 (5分)

2 浙江理工大学 2018—2019 学年第 1 学期《线性代数 A》期末 A 卷

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. A　2. C　3. D　4. D　5. B

二、填空题(每小题 4 分，共 20 分)

1、1　2、$14^{k-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$　3、-4；　$2,-4,-2$　4、$A-2E$　5、0

三、解答题（共 50 分）(解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

1. 解　$(2C-E)A=CB$，$A=(2C-E)^{-1}(CB)$ ………2分

$$A=\begin{pmatrix}1&-4&8\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&11\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$$ ………6分

1分

$(2C-E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&4&-8\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$

2. 解：(1) $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}$

设 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为 $\boldsymbol{X}$，则 $\boldsymbol{PX}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，………2分

$X=P^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

因为 $\begin{pmatrix}1&-1&3&1\\1&-2&4&1\\-1&2&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&0&1&2\\0&1&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&2\\0&0&1&2\end{pmatrix}$，所以

$\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为 $(-3,2,2)^T$. ………4分 3

(2) 设向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标都是 Y，则有 $\boldsymbol{PY}=\boldsymbol{Y}$，…6分 2

即 $(\boldsymbol{P}-E)\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$，由于

$$\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&-1&3\\1&-3&4\\-1&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}0&-1&3\\1&-3&4\\0&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}，R(\boldsymbol{P}-E)=3$$

所以 $(\boldsymbol{P}-E)\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，因此 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. ………8分 2

3. 解 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$ 有解.

$$\left[\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T \vdots \beta^T\right]=\begin{bmatrix}1&1&1&1&\vdots&1\\0&1&-1&2&\vdots&1\\2&3&a+2&4&\vdots&b+3\\3&5&1&a+8&\vdots&5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&1&1&1&\vdots&1\\0&1&-1&2&\vdots&1\\0&0&a+1&0&\vdots&b\\0&0&0&a+1&\vdots&0\end{bmatrix}.$$ ……3分

(1)当 $a=-1,b\neq 0$ 时,线性方程组无解, β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示; ……~~3~~ 2.5分

(2)当 $a\neq -1$ 时,线性方程组有惟一解, β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 惟一地线性表示.此时

$$\left[\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T \vdots \beta^T\right]\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&0&0&0&\vdots&-\dfrac{2b}{a+1}\\0&1&0&0&\vdots&\dfrac{a+b+1}{a+1}\\0&0&1&0&\vdots&\dfrac{b}{a+1}\\0&0&0&1&\vdots&0\end{bmatrix}.$$ ……3分

则 $x_1=-\dfrac{2b}{a+1},x_2=\dfrac{a+b+1}{a+1},x_3=\dfrac{b}{a+1},x_4=0$,所以

$$\beta=-\frac{2b}{a+1}\alpha_1+\frac{a+b+1}{a+1}\alpha_2+\frac{b}{a+1}\alpha_3+0\alpha_4.$$

~~而 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)=2$, 所以 $a=2, b=5$.~~ ……~~10~~ 2.5分

4. 解:增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&\lambda&4\\-1&\lambda&\lambda&\lambda^2\\1&-\lambda&2&-4\end{pmatrix}$ 1分……………………………1分

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&\lambda&4\\0&\lambda+1&2\lambda&\lambda^2+4\\0&-\lambda-1&2-\lambda&-8\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&\lambda&4\\0&\lambda+1&2\lambda&\lambda^2+4\\0&0&2+\lambda&\lambda^2-4\end{pmatrix}$$ 2分 …………2分

当 $\lambda+1\neq 0$ 且 $\lambda+2\neq 0$ 时, $R(A)=R(B)=3$, 方程组有唯一解; …………2分

当$\lambda=-1$时，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$，

因为$R(A)=2, R(B)=3$，所以方程组无解； …………………………2分

2分

当$\lambda=-2$时，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

因为$R(A)=R(B)=2<3$，所以方程组有无穷多个解，且通解为 ………2分

3分

$X=(12,-8,0)^T+c(6,-4,1)^T$，$c$为任意常数. ………3分

5. **解** (1)写出二次型的矩阵：$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$. 2分. …………….2分

5分

(2)求A的特征值：$|A-\lambda E|=\lambda^2(9-\lambda) \Rightarrow A$的特征值为$\lambda_{1,2}=0, \lambda_3=9$ ………3分

(3)求A的两两正交且单位化的特征向量：对应于特征值$\lambda_{1,2}=0$的线性无关的特征向量为$\xi_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\xi_2=\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，正交化得$\eta_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\eta_2=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$，单位化得

$$p_1=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}, p_2=\begin{bmatrix} -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

2分 ……~~7~~分

对应于特征值~~$\lambda_{1,2}=0$~~的线性无关的特征向量为$\xi_3=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$，单位化得$p_3=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$. ~~9分~~ 2分

$\lambda_3=9$

(4)构造正交变换:令正交矩阵 $P=[p_1,p_2,p_3]=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & -\frac{2}{3\sqrt5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{4}{3\sqrt5} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt5} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$,则所求正交变换为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & -\frac{2}{3\sqrt5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{4}{3\sqrt5} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt5} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

3分 ……12 分

(5)写出二次型的标准形:二次型的标准形为 $f=9y_3^2$. 2分 ……14 分

四、证明题。(本题 10 分，每题 5 分)

.1、证明，设有数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1(2\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+5\alpha_3)+k_3(2\alpha_3+3\alpha_1)=0$$ ……1 分

整理得

$$(2k_1+3k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(5k_2+2k_3)\alpha_3=0$$ ……1 分

由于向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，必有 $\begin{cases} 2k_1+3k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ 5k_2+2k_3=0 \end{cases}$， ……1 分

而 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}=19\neq 0$， ……1 分

从而 $k_1=k_2=k_3=0$。 ……1 分

2、证明 由于 $\mathbf{A}$ 是正交矩阵，故 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{E}$，从而由 $|\mathbf{A}^T|=|\mathbf{A}|\Rightarrow|\mathbf{A}|^2=|\mathbf{A}^T\mathbf{A}|=1$，因此 $|\mathbf{A}|=\pm1$，故 $\mathbf{A}$ 可逆，由于可逆矩阵的特征值不能为零，所以 $\lambda\neq0$。 ……2 分

因 $\mathbf{A}$ 是正交矩阵，则 $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}^{-1}$，所以，当 λ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值时，$\frac{1}{\lambda}$ 就是 $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^T$ 的一个特征值，但 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}^T$ 有相同的特征值，故 $\frac{1}{\lambda}$ 也是 $\mathbf{A}$ 的特征值。……3 分

3 浙江理工大学 2014—2015 学年第 1 学期《线性代数 A》期末 A 卷

一、选择题（每小题 4 分，共 24 分）

1. B　　2. C　　3. B　　4. B　　5. D　　6. D

二、填空题（每空格 4 分，共 24 分）

1. $a^n+(-1)^{n+1}b^n$；　2. -3　3. $\begin{pmatrix}0 & 21\\4 & 22\end{pmatrix}$；4. $0<t<2$；5. 1；

6. $(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)(\lambda_3-1)(\lambda_4-1)$

三、**解答题**（12+10+10+12=44 分）

1. 解：线性方程组的系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1\\-1 & \lambda & -1\\-1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2,$$ ………………………4 分

（1）当 $|A|\neq 0$，即 $\lambda\neq 2$ 且 $\lambda\neq -1$ 时，方程组有惟一解；………………………6 分

（2）当 $\lambda=2$ 时，$R(A)=2\neq R(A|b)=3$，方程组无解；………………………8 分

（3）当 $\lambda=-1$ 时，

$$\overline{A}=(A|\ b)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1 & 1\\-1 & -1 & -1 & 1\\-1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因为 $R(A)=R(\overline{A})=1<3$，所以方程组有无穷多解，且通解为

$$x=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix},$$ k_1,k_2 为任意实数.　……………………12 分

2. 解：由 $X=AX+B$，得

$$(E-A)X=B$$

$$X=(E-A)^{-1}B,$$ ……………….....................2 分

为此对矩阵 $(E-A,B)$ 施行初等行变换化为行最简形矩阵，

$$(E-A,B)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & -1\\1 & 0 & -1 & 2 & 0\\1 & 0 & 2 & 5 & -3\end{pmatrix}$$ …………….....................4 分

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-1&2&0\\0&-1&1&-1&-1\\0&0&1&1&-1\end{pmatrix}$$ ……..……....................6 分

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&3&-1\\0&1&0&2&0\\0&0&1&1&-1\end{pmatrix}$$ ……..…. ....7 分

所以 $X=(E-A)^{-1}B=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\\1&-1\end{pmatrix}$. ……… ....10 分

3. 解：$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\right)=\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}$ ……………………2 分

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ ……………………4 分

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$ ……………………6 分

所以 $R\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\right)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个最大无关组，并且

$\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_5=-\alpha_2+\alpha_3$ ……...…………10 分

4. 解：（1）设对应于 2 的一个特征向量为 $p=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$，则 p 与 ξ_1 正交，即 $c_1+c_2+c_3=0$，

其基础解系为 $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，这是对应于 2 的两个线性无关的特征向量. …..4 分

（2）令 $p_1=\dfrac{1}{\|\xi_1\|}\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$，$p_2=\dfrac{1}{\|\xi_2\|}\xi_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix}$，$p_3=\dfrac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$，

令 $P=(p_1,p_2,p_3)$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$ ……………………..9 分

所以， $A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{5}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{5}{3}\end{pmatrix}$. ……………………………12 分

四、证明题（每小题 4 分，共 8 分）

1. 证：根据伴随矩阵的性质有

$$AA^*=|A|E$$

又 $A^2=|A|E$，所以 $AA^*=A^2$，再由于 A 可逆，便有 $A^*=A$.

2. 证：假设 P_1+P_2 是 A 的对应于 λ 的特征向量，则 $A(P_1+P_2)=\lambda(P_1+P_2)$

因为 $AP_1=\lambda_1P_1$， $AP_2=\lambda_2P_2$， 所以 $(\lambda_1-\lambda)P_1+(\lambda_2-\lambda)P_2=0$， 由于 P_1,P_2 是对应于不同特征值的特征向量，所以它们线性无关，从而

$$\lambda_1-\lambda=\lambda_2-\lambda=0,\quad \lambda_1=\lambda_2$$，矛盾！

4 2013—2014 学年第 2 学期《线性代数 A》12 级期末 A 卷

一选择题（每小题 4 分共 24 分）

1-6 题 A，C，B，B，C，B

二填空题（每小题 4 分共 24 分）

1、$-\frac{5}{2}$；2、-46000；3、$x=-1$；3、$a=\frac{1}{3}$；5、2；6、$-\frac{4}{5}<a<0$.

三、计算题(共 40 分)

1.（6 分）解 $A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=0$；……………………………………… (2 分)

$$M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}=A_{11}-A_{12}+A_{13}-A_{14}=\begin{vmatrix}1&-1&1&-1\\1&1&2&5\\-3&1&3&3\\5&1&1&1\end{vmatrix}$$ ………. (4 分)

$$=\begin{vmatrix}0&-1&0&0\\2&1&3&4\\-2&1&4&2\\6&1&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&4\\-2&4&2\\6&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&-5&0\\-2&4&2\\6&2&0\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}6&-5\\6&2\end{vmatrix}=-84$$ ……… (6 分)

2、（6 分）解 由 $X=AX+B$，得 $(E-A)X=B$．又

$$E-A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\1&0&2\end{pmatrix},|E-A|=3\neq 0,$$

则 $E-A$ 可逆，且 $X=(E-A)^{-1}B$．…………………………………… (2 分)

经计算，得

$$(E-A)^{-1}=\frac{1}{|E-A|}(E-A)^*=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&2&1\\-3&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$ ……………………………… (4 分)

所以 $X=(E-A)^{-1}B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&2&1\\-3&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ……………………………… (6 分)

3.（8 分）解 设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$．……………………………… (1 分)

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\,|\,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&\vdots&1\\1&1&-1&-1&\vdots&2\\1&-1&1&-1&\vdots&1\\1&-1&-1&1&\vdots&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&0&\vdots&\frac{5}{4}\\0&1&0&0&\vdots&\frac{1}{4}\\0&0&1&0&\vdots&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&\vdots&-\frac{1}{4}\end{pmatrix},$$ …… (4 分)

得 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\,|\,\beta)=4$，所以 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示，……………………………… (6 分)

且 $x_1=\frac{5}{4},x_2=\frac{1}{4},x_3=-\frac{1}{4},x_4=-\frac{1}{4}$，得表达式 $\beta=\frac{1}{4}(5\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)$．……… (8 分)

4.（10 分）解 设$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$. .... (2 分)

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\,|\,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&2&3&\vdots&3&5&1\\2&3&7&\vdots&1&2&1\\1&3&1&\vdots&4&1&-6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&-27&-71&-41\\0&1&0&\vdots&9&20&9\\0&0&1&\vdots&4&12&8\end{pmatrix}=(E\,|\,P), \text{ .... (6 分)}$$

得（1）由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵$P=\begin{pmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{pmatrix}$. .... (8 分)

（2）γ在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为$X=PY=\begin{pmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-139\\38\\24\end{pmatrix}$ ..... (10 分)

5.**（10 分）解** 设对应$\lambda_{2,3}=1$的特征向量为$(x_1,x_2,x_3)^T$，有$x_2+x_3=0$. .... (2 分)

所以属于特征值$\lambda_{2,3}=1$的线性无关的特征向量为$\alpha_2=(1,0,0)^T,\alpha_3=(0,1,-1)^T$. .... (4 分)

令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$，$P^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ .... (6 分)

则$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$. .... (8 分)

所以$A=P\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ .... (10 分)

四、证明题（共 12 分）

1.（6 分）证 必要性：A与B相似，则存在可逆阵P，使得$P^{-1}AP=B$. 有

$$|B-\lambda E|=|P^{-1}AP-\lambda E|=|P^{-1}(A-\lambda E)P|=|P^{-1}|\cdot|A-\lambda E|\cdot|P|=|A-\lambda E|,$$

所以A与B有相同的特征多项式，即有相同的特征值. .... (3 分)

充分性：若实对称矩阵A与B有相同的特征值，设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$为它们的特征值. 令

$$\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

则 A 与 Λ 相似，B 与 Λ 相似，所以 A 与 B 相似．. . . . . (6 分)

2.（6 分）证 设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$，（1 式）. . . . . (1 分)

（1 式）式两边左乘以 A，得 $-x_1\alpha_1+(x_2+x_3)\alpha_2+x_3\alpha_3=0$．（2 式）. . . . . . (2 分)

（1 式）-（2 式），得 $2x_1\alpha_1-x_3\alpha_2=0$．显然 α_1,α_2 线性无关，则 $x_1=0,x_3=0$．. . . . (4 分)

5　2013—2014 学年第 1 学期《线性代数 A》12 级期末 A 卷

一．选择题

1 D　2 B　3　B　4 C　5 B

二．填空题

1. $\left[a+(n-1)b\right](a-b)^{n-1}$

2. $X=\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$

3. $x=$___0__，$y=$_____1_。

4. $k=0$

三．计算题

1、解:设**齐次线性方程组为** $Ax=0,$ 有 $A\xi_1=0,A\xi_2=0$

有 $A(\xi_1,\xi_2)=0,\Rightarrow\ (\xi_1,\xi_2)^T A^T=0,\ A^T$ 的列向量是 $(\xi_1,\xi_2)^T y=0,$ 的解

解得 $(\xi_1,\xi_2)^T y=0,$ 基础解系为 $y_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, y_2=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$

得一个方程组为: $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1-\dfrac{1}{2}x_2+x_4=0 \end{cases}$ --------------------------------------8 分

2、解．$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\-1&3&0&1&-1\\2&1&7&5&2\\4&2&14&6&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&3&0&-1\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，

所以$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$为一个极大无关组，且

$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_5=-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4$．----------------------------------8 分

3、

解　方程组的系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_3+r_2}{=}\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\0&1-\kappa&1-\lambda\end{vmatrix}=-(10-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

当$|A|\neq 0$，即$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq 10$时，方程组有唯一解.

当$\lambda=10$时，

$$B=\begin{pmatrix}A&\beta\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc:c}-8&2&-2&1\\2&-5&-4&2\\-2&-4&-5&-11\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:c}2&-5&-4&2\\0&1&1&1\\0&0&0&1\end{array}\right).$$

因为$R(A)=2\neq R(B)=3$，所以方程组无解.

当$\lambda=1$时，

$$B=\begin{pmatrix}A&\beta\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&-2&1\\2&4&-4&2\\-2&-4&4&-2\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

因为$R(A)=R(B)=1<3$，所以方程组有无穷多解．-------------------------8 分

特解$x_0=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}^T$,,

对应齐次线性方程组的基础解系$\zeta_1=\begin{bmatrix}-2&1&0\end{bmatrix}^T$,, $\zeta_2=\begin{bmatrix}2&0&1\end{bmatrix}^T$,,

通解．$x=x_0+k_1\zeta_1+k_2\zeta_2$--12 分

4、**解**　二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$．$A$的特征多项式

$$|A-\lambda E|=-(3+\lambda)(3-\lambda)^2,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_{1,2}=3,\lambda_3=-3$．--4 分

属于 $\lambda_{1,2}=3$ 的线性无关的特征向量 $\alpha_1=(-1,1,0)^T,\alpha_2=(-1,0,1)^T$；正交化，得

$$\beta_1=(-1,1,0)^T,\beta_2=\frac{1}{2}(-1,-1,2)^T;$$

单位化，得 $\gamma_1=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)^T,\gamma_2=(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})^T$．

属于 $\lambda_3=-3$ 的线性无关的特征向量 $\alpha_3=(1,1,1)^T$；单位化，得 $\gamma_3=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$．

令正交矩阵 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，得正交变换 $X=QY$，二次型的标准形为

$f=3y_1^2+3y_2^2-3y_2^2$．----------------------------------12 分

四． 证明题

1. 证：分两种情况：

（1） $A=0$，则 $R(A)=0$，此时有 $R(A)+R(B)=R(B)\le n$

（2） $A\ne 0$， 有已知 $AB=0$ 可知：

矩阵 B 的列向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 中每一个向量均为方程组 $AX=0$ 的解向量。………3 分

若 $R(A)=n$，则方程组 $AX=0$ 仅有零解，即 $\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_n=0$，

也就是说 $B=0$，此时 $R(A)+R(B)=n$

若 $R(A)<n$，令方程组 $AX=0$ 的基础解系为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$，这里 $r=n-R(A)$

此时向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 可由向量组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性表示。

则 $R(B)\le r=n-R(A)$，因此有 $R(A)+R(B)\le n$ ………6 分

2 **证** 先证 $R(A+B)\le R(A|B)$．显然 $A+B$ 的列向量组可由 A 的列向量组和 B 的列向量组线性表示，则 $R(A+B)\le R(A|B)$．------------------------3 分

此证 $R(A|B)\le R(A)+R(B)$．设 $R(A)=r,R(B)=s$， $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 分别为 A 与 B 的列向量组的一个极大无关组，则 $(A|B)$ 的列向量组可由 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 线性表示，有

$$R(A|B)\le r+s=R(A)+R(B),$$

即 $R(A|B)\le R(A)+R(B)$．----------------------7 分

3 证：设有 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=0\Rightarrow$

$(k_1+k_s)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+\cdots+(k_{s-1}+k_s)\alpha_s=0\Rightarrow$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关得

$$\begin{array}{l} k_1+k_s=0 \\ k_1+k_2=0 \\ \cdots \\ k_{s-1}+k_s=0 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \\ k_s \end{pmatrix}=0\Rightarrow Ak=0 \because |A|=1+(-1)^{S-1}$$

$\therefore s$为奇数时$|A|=2\Rightarrow \mathrm{k}=0,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的线性无关.

$\therefore s$为偶数时$|A|=0\Rightarrow A\mathrm{k}=0$有非零解$,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的线性相关. ----------7 分