54

浙江理工大学

2009 / 2010 学年第 二 学期《高等数学B》期中试卷

班级 会计09(3)　学号 D09500402　考生姓名 冯时彩

题号	一	二	三							总分	阅卷人
			(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)		
得分	25	20	8	8	8	9	6	3	6	9[illegible]	

一、选择题（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）

(1) 下列方程中线性的是（B）

(A) $y' = x\sin y + e^x$　(B) $y' = y\sin x + e^x$

(C) $y' = x\sin y + e^y$　(D) $y' = y\sin x + e^y$

(2) $y'' = e^{-x}$ 的通解为（B）

(A) $y = e^{-x}$　(B) $y = e^{-x} + c_1 x + c_2 x$

(C) $y = -e^{-x}$　(D) $y = -e^{-x} + c_1 x + c_2 x$

(3) 二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x,y) 偏导数都存在是其在该点连续的（D）

(A) 充分条件　(B) 必要条件

(C) 充要条件　(D) 既非充分又非必要条件

(4) 设函数 $u(x, y) = \phi(x+y) + \phi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t)dt$，其中函数 ϕ 具有二阶导数，ψ 具有一阶导数，则（B）

$\int_0^{x+y}\psi(t)dt + \int_{x-y}^0 \psi(t)dt$

$-\int_0^{x-y}\psi(t)dt$

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　(B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(5) 设 $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$，则在原点 (0,0) 处 f(x,y)（A）

$f_x(0,0)=0$　$f_y(0,0)=0$

$\Delta z = (\Delta x^2 + \Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}$

$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$

$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y}{\rho} = 0$

(A) 偏导数不存在　(B) 不可导

(C) 有连续偏导数　(D) 可微

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$

$= \frac{\partial}{\partial x}[\phi(x+y) + \phi(x-y) + \psi(x+y) - \psi(x-y)]$

$= \phi'(x+y) + \phi'(x-y) + \psi(x+y) - \psi(x-y)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}$

$= \frac{\partial}{\partial y}[\phi(x+y) - \phi(x-y) + \psi(x+y) + \psi(x-y)]$

$= \phi''(x+y) + \phi''(x-y) + \psi'(x+y) - \psi'(x-y)$

无穷小量　有界

$(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}$

$\lim_{\rho\to 0}$

二、填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

(1) 微分方程 $y' = \frac{x^2+y}{x}$ 的通解是 $y = x^2 + Cx$（C为任意常数）

(2) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1$ 的解是 $y =$ $\frac{1}{x}$

(3) 设 $z = f(2x-y) + g(x, y)$，其中 f 具有连续的偏导数，$dz =$ $[2f'(2x-y) + g'_x(x,y)]dx + [-f'(2x-y) + g'_y(x,y)]dy$

$dz = 2f'(2x-y)dx - f'(2x-y)dy + g'_x(x,y)dx + g'_y(x,y)dy$

(4) 设 $z = f(x, y) = \sin(xy^2)$，则 $f''_{yx}(\frac{\pi}{2}, 1) =$ $-\pi$

(5) 设 $f(x, y)$，$z = f(x^y, y^x)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ $f'_1 y\cdot x^{y-1} + f'_2 y^x \ln y$

三、解答题（55 分）

(1) 设 $z = (2x^2+3y)^{y^2}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.（8 分）

解：令 $u = 2x^2+3y$　$v = y^2$，则

$z = u^v$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = y^2(2x^2+3y)^{y^2-1}\cdot 4x + (2x^2+3y)^{y^2}\ln(2x^2+3y)\cdot 0$

$= 4xy^2(2x^2+3y)^{y^2-1}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = y^2(2x^2+3y)^{y^2-1}\cdot 3 + (2x^2+3y)^{y^2}\ln(2x^2+3y)\cdot 2y = y(2x^2+3y)^{y^2}[\frac{3}{2}$

(2) 设 $F(x, xy, x+xy+z) = 0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.（8 分）

解：$F_x = f'_1 + y f'_2 + (1+y) f'_3$

$F_y = x f'_2 + x f'_3$

$F_z = f'_3$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{f'_1 + y f'_2 + (1+y)f'_3}{f'_3} = -\frac{f'_1 + y f'_2}{f'_3} - (1+y)$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{x f'_2 + x f'_3}{f'_3} = -\frac{x f'_2}{f'_3} - x$

(3) 求 $(x - y\cos\frac{y}{x})dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$ 的通解。（8 分）

解：化简可得：$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\cos\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

令 $\frac{y}{x} = t$，则 $y = tx$

$\frac{dy}{dx} = x\cdot\frac{dt}{dx} + t$

$\therefore x\frac{dt}{dx} + t = -\frac{1}{\cos t} + t$

$\therefore -\cos t\, dt = \frac{1}{x}dx$

两边积分可得：$-\sin t = \ln x + \ln C$

$\therefore e^{-\sin t} = Cx$

$f'_1 + xy f''_{11} + \cdots$

(4) 求 $y''+2y'-3y=e^{2x}$ 的通解。(9 分)

解：特征方程为 $\lambda^2+2\lambda-3=0$．特征根为 $\lambda_1=-3$．$\lambda_2=1$

$\therefore \bar{y}=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$.

又 $\lambda=2$ 不是特征根

$\therefore$ 设特解为 $y^*=e^{2x}(ax+b)$

$y''=4e^{2x}(ax+b)+4ae^{2x}$

$y'=2e^{2x}(ax+b)+a\cdot e^{2x}$

代入原方程可得：$4e^{2x}(ax+b)+4ae^{2x}+2[2e^{2x}(ax+b)+ae^{2x}]-3e^{2x}(ax+b)=e^{2x}$

解得：$a=0$．$b=\frac{1}{5}$

$\therefore$ 特解为 $y^*=\frac{1}{5}e^{2x}$

$\therefore$ 原方程的通解为：$y=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}+\frac{1}{5}e^{2x}$ （C_1、C_2为任意实数）

+9

(5) 求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在直线 $x+y=6$，x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的最大值与最小值。(8 分)

解：$z=f(x,y)=4x^2y-x^3y-x^2y^2$

~~令 $\begin{cases} f''_{xx}=8y-6xy-4xy^2=0 \\ f''_{yy}=-2x^2=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$~~

令 $\begin{cases} f'_x=8xy-3x^2y-2xy^2=0 \\ f'_y=4x^2-x^3-2x^2y=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

在驻点 $(2,1)$ 处．$B^2-AC=(-4)^2-(-6)(-8)=-32<0$

此时 $C=-4<0$

$\therefore$ 在点 $(2,1)$ 处取得极大值．

$z_{极大值}=f(2,1)=4$

在边界处时 当在直线 $x+y=6$ 上时．$y=6-x$．

$z=2x^3-12x^2$

令 $z'=6x^2-24x=0$ 与 $x\neq 0$ 或 $x=4$

+6

$F(u,x,y)=u-\phi(u)-\int_y^x p(t)dt$

$F'_u=1-\phi'(u)$

$F'_x=-p(x)$

$F'_y=p(y)$

$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_u}=\frac{p(x)}{1-\phi'(u)}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_u}=-\frac{p(y)}{1-\phi(u)}$ $\therefore p(y)\frac{\partial}{\partial}$

(6) 已知 $z=z(u)$，且 $u=\phi(u)+\int_y^x p(t)dt$，其中 $z(u)$ 可微，$\phi'(u)$ 连续，且 $\phi'(u)\neq 1$，$p(t)$ 连续，试求 $p(y)\frac{\partial z}{\partial x}+p(x)\frac{\partial z}{\partial y}$.(8 分)

解：$u=\phi(u)+\int_y^x p(t)dt=\phi(u)+\int_y^0 p(t)dt+\int_0^x p(t)dt$

$=\phi(u)-\int_0^y p(t)dt+\int_0^x p(t)dt$

$z-u<$,

$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot[\phi(u)\cdot\frac{\partial\phi(u)}{\partial x}+p(x)]$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}[\phi'(u)\cdot\frac{\partial\phi(u)}{\partial y}-p(y)]$

-2

$\therefore p(y)\frac{\partial z}{\partial x}+p(x)\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}[p(y)\cdot\phi'(u)\cdot\frac{\partial\phi(u)}{\partial x}+p(x)\cdot p(y)]+\frac{\partial z}{\partial u}[p(x)\cdot\phi'(u)\cdot\frac{\partial\phi(u)}{\partial y}-p(x)\cdot$

$=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\phi'(u)\cdot[p(y)\cdot\frac{\partial\phi(u)}{\partial x}+p(x)\cdot\frac{\partial\phi(u)}{\partial y}]$

(7) 已知 $(axy^3-y^2\cos x)dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)dy$ 为某一函数 $f(x,y)$ 的全微分，则 a 和 b 的值分别为多少？(6 分)

解：由题意可知：

$f'_x=axy^3-y^2\cos x$

$f'_y=1+by\sin x+3x^2y^2$

两式积分可得：$\begin{cases} f(x,y)=\frac{1}{2}ax^2y^3-y^2\sin x+C_1 \\ f(x,y)=y+\frac{1}{2}by^2\sin x+x^2y^3+C_2 \end{cases}$

$\therefore \frac{1}{2}ax^2y^3-y^2\sin x+C_1=y+\frac{1}{2}by^2\sin x+x^2y^3+C_2$

$\therefore \begin{cases} \frac{1}{2}a=1 \\ \frac{1}{2}b=-1 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$

+6

$\therefore$ a 的值为 2

b 的值为 -2

32

浙江理工大学2010—2011学年第二学期《高等数学B》期中试卷

任课教师 [redacted] 班级 [redacted]班 学号 [redacted] 姓名 [redacted]

题号	一	二	三				四	五	六	七	总分
			1	2	3	4					
得分											100
签名											

+24

一、单择题（每小题4分，满分24分）

1、下列方程中可分离变量的是（ B ）

(A) $\sin(xy)dx+e^y dy=0$ X　　(B) $x\sin y dx+y^2dy=0$

(C) $(1+xy)dx+y^2dy=0$ X　　(D) $\sin(x+y)dx+e^{xy}dy=0$

2、微分方程 $y''+y=x\cos x$ 的特解形式是（ ~~A~~ D ）

(A) $y^*=ax\cos x$　　(B) $y^*=x(a\sin x+b\cos x)$

(C) $y^*=a\sin x+bx\cos x$ X　　(D) $y^*=x[(ax+b)\sin x+(cx+d)\cos x]$

3、下列等式是差分方程的是（ B ）

(A) $-3\Delta y_t=3y_t+a^t$ X　　(B) $2\Delta y_t=y_t+t$

(C) $\Delta^2 y_t=y_{t+2}-2y_{t+1}+y_t$ X　　(D) $\Delta y_t=y_{t+1}+t^2$ X

A. $-3(y_{t+1}-y_t)=3y_t+a^t$
$\longrightarrow 3y_{t+1}+a^t=0$

C. $\Delta^2 y_t=y_{t+2}-2y_{t+1}+y_t$
$y_{t+2}-2y_{t+1}+y_t=y_{t+2}-2y_{t+1}+y_t$

D. $y_{t+1}-y_t=y_{t+1}+t^2$
$y_t+t^2=0$

4、区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4, y\le x+1\}$ 是（ A ）

(A)有界闭区域　(B)无界闭区域　(C)有界开区域　(D)无界开区域

5、考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质：(1) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续；(2) $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续；(3) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微分；(4) $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$ 存在。则下列四个选项中正确的是（ ~~C~~ A ）

(A) (2)⇒(3)⇒(1)　　(B) (3)⇒(2)⇒(1) X

(C) (3)⇒(4)⇒(1)　　(D) (3)⇒(1)⇒(4)

6、对函数 $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-6y$，点 $(0,3)$（ C ）

(A)不是驻点　(B)是驻点但非极值点　(C)是极小值点　(D)是极大值点

+24

二、填空题（每小题4分，满分24分）

1、微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$ 的通解是 $\sin\frac{y}{x}=Cx$

$\int\frac{1}{\tan u}du=\int\frac{\cos u}{\sin u}du=\int\frac{d\sin u}{\sin u}=\ln\sin u$

prob

2、以 $y_1(x)=e^{2x}$，$y_2(x)=xe^{2x}$ 为特解的二阶常系数线性齐次微分方程为 $y''-4y'+4y=0$!!!

3、函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$，则 $dz|_{(1,2)}=\frac{1}{3}dx+\frac{2}{3}dy$。 $dz=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$

4、设 $z=xyf\left(\frac{y}{x}\right)$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2xyf(\frac{y}{x})$。 $z=$

隐函数

5、设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+2y^2+3z^2-2x+4y-z+3=0$ 确定，则函数 z 的驻点是 $(1,-1)$。

6、设积分区域 D 为 $x^2+y^2\le 1$，在 $I_1=\iint_D\sqrt{1+x^2+y^2}d\sigma$ 与 $I_2=\iint_D\sqrt{1+x^4+y^4}d\sigma$ 中比较大的值是 I_1。

三、计算题（每小题6分，满分24分）

1、求微分方程 $y'=\frac{x^3+y}{x}$ 的通解。

解: $y'=\frac{x^3+y}{x}=x^2+\frac{1}{x}y$

$y'-\frac{1}{x}y=x^2$

$\therefore P(x)=-\frac{1}{x}$　$Q(x)=x^2$

根据公式 $y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]$ 可得

$y=e^{-\int-\frac{1}{x}dx}[\int x^2e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx+C]=\frac{1}{2}x^3+Cx$

2、求微分方程 $y''+\frac{1}{1-y}(y')^2=0$ 的通解。

解: 设 $p=y'$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$，所以原式可化为:

$p\frac{dp}{dy}+\frac{1}{1-y}p^2$

$=p(\frac{dp}{dy}+\frac{1}{1-y}p)=0$

$\therefore p=0$ 或 $\frac{dp}{dy}+\frac{1}{1-y}p=0$

$\because$ 当 $p=0$ 时 $y=C$ 不是 $y''+\frac{1}{1-y}(y')^2=0$ 的通解

$\therefore p=0$ 即 $y=C$ 舍去

$\frac{dp}{dy}+\frac{1}{1-y}p=0$

$\frac{dp}{p}=\frac{1}{y-1}dy \Rightarrow \ln|p|=\ln|y-1|+\ln C_1'$

$y'=p=C_1(y-1)$

$\frac{dy}{y-1}=C_1dx$

$\ln|y-1|=C_1x+\ln C_1'$

$y-1=C_2e^{C_1x}$

$y=C_2e^{C_1x}+1$

3、设 $z=f\left(xy,\frac{y}{x}\right)$，且 f 具有连续二阶偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：令 $u=xy$，$v=\frac{y}{x}$，则 $z=f(u,v)$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$

$=f_1'(u,v)\,y+f_2'(u,v)\cdot y(-1)\frac{1}{x^2}$

$=y f_1'(xy,\frac{y}{x})-\frac{y}{x^2}f_2'(xy,\frac{y}{x})$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[y f_1'(u,v)-\frac{y}{x^2}f_2'(u,v)\right]$

$=f_1'(u,v)+y\left[f_{11}''(u,v)x+f_{12}''(u,v)\frac{1}{x}\right]-\frac{1}{x^2}f_2'(u,v)-\frac{y}{x^2}\left[f_{21}''(u,v)x+f_{22}''(u,v)\frac{1}{x}\right]$

$=f_1'(xy,\frac{y}{x})-\frac{1}{x^2}f_2'(xy,\frac{y}{x})+xyf_{11}''(xy,\frac{y}{x})+\frac{y}{x}f_{12}''(xy,\frac{y}{x})-$

$\frac{y}{x}f_{21}''(xy,\frac{y}{x})-\frac{y}{x^3}f_{22}''(xy,\frac{y}{x})$

4、设 $u+e^u=xy$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$。

解：令 $F(x,y,u)=u+e^u-xy$

$F_x'=-y \quad F_y'=-x \quad F_u'=1+e^u$

$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_u'}=\frac{y}{1+e^u}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_u'}=\frac{x}{1+e^u}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{1+e^u}\right)=\frac{1+e^u-y\cdot e^u\frac{\partial u}{\partial y}}{(1+e^u)^2}=\frac{1+e^u-y\cdot e^u\frac{x}{1+e^u}}{(1+e^u)^2}=\frac{(1+e^u)^2-xye^u}{(1+e^u)^3}$

四、（本题 8 分）设函数 $y=y(x)$ 满足 $y''-y'-2y=3e^{-x}$，求在原点 $(0,0)$ 处与直线 $y=x$ 相切的那一条积分曲线。

解：$r^2-r-2=0$

$(r-2)(r+1)=0$

$r_1=2,\ r_2=-1$

$\therefore \bar{y}(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$

$f(x)=3e^{-x}$ 形式为 $e^{\lambda x}P_m(x)$

$\therefore P_m(x)=3 \quad \lambda=-1=r_2$

$\therefore$ 设 $y^*(x)=axe^{-x}$

$[y^*(x)]'=ae^{-x}-axe^{-x}$

$[y^*(x)]''=-ae^{-x}-(ae^{-x}-axe^{-x})$

$=-2ae^{-x}+axe^{-x}$

$\therefore y''-y'-2y$

$=-2ae^{-x}+axe^{-x}-ae^{-x}+axe^{-x}-2axe^{-x}$

$=-3ae^{-x}=3e^{-x}$

$\therefore -3a=3 \Rightarrow a=-1$

$\therefore y=\bar{y}(x)+y^*(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-xe^{-x}$

根据题意知：$\begin{cases} y(0)=C_1+C_2=0 \\ y'(0)=2C_1e^{2x}-C_2e^{-x}-(e^{-x}-xe^{-x}) \\ \quad =2C_1-C_2-1=1 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} C_1=\frac{2}{3} \\ C_2=-\frac{2}{3} \end{cases} \therefore y=\frac{2}{3}e^{2x}-\frac{2}{3}e^{-x}-xe^{-x}$

五、（本题 8 分）已知 $f(x,y,z)=e^xyz^2$，$x+y+z-xyz=0$，设 $z=z(x,y)$ 是由第二个方程所确定的隐函数，求 $f_x'(0,1,-1)$。

解：$f_x'(x,y,z)=e^xyz^2+2yze^x\frac{\partial z}{\partial x}$

令 $F(x,y,z)=x+y+z-xyz$

$F_x'=1-yz \quad F_z'=1-xy$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{1-yz}{1-xy}$

$f_x'(0,1,-1)=e^xyz^2-2yze^x\frac{1-yz}{1-xy}$

$=1+4=5$

六、（本题 8 分）某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售，售价分别为 p_1 和 p_2，销售量分别为 q_1 和 q_2，需求函数分别为：$q_1=24-0.2p_1$，$q_2=10-0.05p_2$，总成本函数为：$C=35+40(q_1+q_2)$。试问：厂家如何确定两个市场的售价，能使其获得的总利润最大？最大利润为多少？

$y=p_1q_1+p_2q_2-C$

$=p_1(24-0.2p_1)+p_2(10-0.05p_2)-35-40(q_1+q_2)$

$=24p_1-0.2p_1^2+10p_2-0.05p_2^2-35-1360+8p_1+2p_2$

$=-0.2p_1^2+32p_1-0.05p_2^2+12p_2-1395$

$\begin{cases} y_{p_1}'=-0.4p_1+32=0 \Rightarrow p_1=80 \\ y_{p_2}'=-0.1p_2+12=0 \Rightarrow p_2=120 \end{cases}$

$\because$ 此问题为实际问题 $\therefore$ $p_1=80$，$p_2=120$ 的驻点即为最大值点 $\therefore$ 总利润最大 $y(80,120)=605$ $\therefore$ 最大利润为605元

七、（本题 4 分）设 $z=f(u)$，而方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)dt$ 确定了 u 是 x,y 的函数，其中 $f(u),\varphi(u)$ 连续且可微，$\varphi'(u)\neq 1$，求证：$p(y)\frac{\partial z}{\partial x}+p(x)\frac{\partial z}{\partial y}=0$。

解：$u=\varphi(u)-\int_0^y p(t)dt+\int_0^x p(t)dt$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+p(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}-p(y)$

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{+p(x)}{1-\varphi'(u)} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-p(y)}{1-\varphi'(u)}$

$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f'(u)p(x)}{1-\varphi'(u)} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-f'(u)p(y)}{1-\varphi'(u)}$

$\therefore p(y)\frac{\partial z}{\partial x}+p(x)\frac{\partial z}{\partial y}$

$=\frac{f'(u)p(x)p(y)}{1-\varphi'(x)}+\frac{-f'(u)p(x)p(y)}{1-\varphi'(u)}=0$

浙江理工大学 2011 —2012 学年第二学期

《高等数学 B2》期中试卷

座号：19

一.选择题：（4 分/题）

1. 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量为 $\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，且当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是 Δx 的高阶无穷小，$y(0)=\pi$，则 $y(1)=$（ D ）。

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y}{1+x^2}+\frac{\alpha}{\Delta x}$ 又∵ α是Δx的高阶无穷小 $\therefore \frac{\alpha}{\Delta x}\to 0$ $\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y}{1+x^2}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{1+x^2}$ $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{1+x^2}$ $\ln y=\arctan x+C$ $\Rightarrow y=C\cdot e^{\arctan x}$ ∵ $y(0)=\pi$ ∴ $C=\pi$ ∴ $y=\pi\cdot e^{\arctan x}$ ∴ $y(1)=\pi\cdot e^{\frac{\pi}{4}}$

A. 2π B. π C. $e^{\frac{\pi}{4}}$ D. $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

2. 设非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x)$，$y_2(x)$，C 为任意常数，则该方程的通解为（ B ）。

A. $C[y_1(x)-y_2(x)]$ B. $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$

C. $C[y_1(x)+y_2(x)]$ D. $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$

3. 函数 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+xe^x$ 满足的一个微分方程是（ C ）。

A. $y''-y'-2y=3xe^x$ B. $y''-y'-2y=3e^x$

C. $y''+y'-2y=3e^x$ D. $y''+y'-2y=3xe^x$

4. 差分方程 $\Delta^3 y_t-y_{t+3}+y_t+1=0$ 的阶为（ A ）阶。

A. 一 B. 二 C. 三 D. 四

5. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数存在，是 $f(x,y)$ 在该点处（ D ）

可微 → 可导.

A. 连续的充分条件 B. 连续的必要条件

C. 可微的充分条件 D. 可微的必要条件

6. 函数 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极小值点是（ C ）。

A. $(1,2)$ B. $(-3,0)$ C. $(1,0)$ D. $(-3,2)$

二、填空题：（4 分/题，共 24 分）

1. 微分方程 $x^2y'+xy=y^2$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的特解为 ~~$y=x$~~。$y=\frac{2x}{1+x^2}$

2. 设 $y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$（$C_1,C_2$ 为任意常数）为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解，则该方程为 $y''-2y'+2y=0$。

3. 微分方程 $y''+2y'-3y=3\sin x$ 的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}-\frac{3}{10}\cos x-\frac{3}{5}\sin x$（$C_1$，$C_2$为任意常数）

4. 设 $f(x,y)=e^{\arctan\frac{y}{x}}\cdot\ln(x^2+y^2)$，则 $f_x'(1,0)=$ 2。

5. 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分

$dz=-dx+\sqrt{2}dy$。 $dx-\sqrt{2}dy$.

6. 设函数 $z=f(\frac{\sin x}{y},\frac{y}{\ln x})$，其中 f 是可微函数，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\cos x}{y}f_1'-\frac{y}{x\ln^2 x}f_2'$。

三、计算题（6 分/题，共 30 分）

1. 求方程 $x(\ln x-\ln y)dy-ydx=0$ 的通解。由原式⇒ $x\cdot\ln\frac{x}{y}dy-y\,dx=0$

解：由原式可得：$\frac{dx}{dy}=\frac{x(\ln x-\ln y)}{y}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}\cdot\ln\frac{x}{y}\Rightarrow\frac{du}{u(1-\ln u)}=\frac{dy}{y}$

设 $\frac{x}{y}=u$，则 $x=uy$，$\frac{dx}{dy}=y\frac{du}{dy}+u$ 令 $\frac{x}{y}=u$，$x=uy$ $\ln(1-\ln u)=\ln y+\ln C$

$\therefore y\frac{du}{dy}+u=u[\ln uy-\ln y]$ $\therefore \frac{dx}{dy}=y\frac{du}{dy}+u$ $Cy=\frac{1}{1-\ln u}$

$=u\ln u+u\ln y-u\ln y$ $\therefore y\frac{du}{dy}+u=u\ln u$ $Cy=\frac{1}{1-\ln\frac{x}{y}}$ （C为任

$=u\ln u$

2. 设函数 $y=y(x)$ 满足条件 $\begin{cases}y''+4y'+4y=0\\ y(0)=2,y'(0)=-4\end{cases}$，求反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$。

解：∵ $y''+4y'+4y=0$ ∴ $2=C_1\cdot1$ $C_2-2C_1\cdot1=-4$ ∴ $\int_0^{+\infty}y(x)dx$

∴ $r^2+4r+4=0$ $\Rightarrow C_1=2$，$C_2=0$ $=\int_0^{+\infty}2e^{-2x}dx$

$(r+2)^2=0$ ∴ $y(x)=2e^{-2x}$

即 $r=-2$

∴ 函数 $y=y(x)$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)\cdot e^{-2x}$

又∵ $y(0)=2$，$y'(0)=-4$. $y'=C_2e^{-2x}+(C_1+C_2x)\cdot(-2)\cdot e^{-2x}$

3. 已知 $f(x,y)=x^2\arctan\frac{y}{x}-y^2\arctan\frac{x}{y}$，求 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$。

解：$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\arctan\frac{y}{x}+x^2\cdot\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot(-\frac{y}{x^2})-[y^2\cdot\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot\frac{1}{y}]=2x\arctan\frac{y}{x}-\frac{x^2y+y^3}{x^2+y^2}$

$\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial y}(2x\arctan\frac{y}{x}-\frac{x^2y+y^3}{x^2+y^2})=2x\cdot\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{(x^2+3y^2)(x^2+y^2)-}{(x^2+y^2)^2}$

$=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

4. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 确定，求 $3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$。

解：$\because z=e^{2x-3z}+2y$

$\therefore z-e^{2x-3z}-2y=0$

设 $F(x,y,z)=z-e^{2x-3z}-2y$

$\therefore F_x'=-2e^{2x-3z}$

$F_y'=-2$

$F_z'=1+3e^{2x-3z}$

$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}$

$\therefore 3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{6e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}+\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}$

$=2$

6

5. 设 $z=x^3 f(xy,\frac{y}{x})$，f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3\cdot(f_1'\cdot x+f_2'\cdot\frac{1}{x})=x^4f_1'+x^2f_2'$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}[x^3\cdot(f_1'\cdot x+f_2'\cdot\frac{1}{x})]=x^4\frac{\partial f_1'}{\partial y}+x^2\frac{\partial f_2'}{\partial y}$

$=x^4\cdot(f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot\frac{1}{x})+x^2\cdot(f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot\frac{1}{x})$

$=x^5f_{11}''+2x^3f_{12}''+xf_{22}''$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial}{\partial x}(x^4f_1'+x^2f_2')=\cancel{\cdots}\ 4x^3f_1'+x^4\frac{\partial f_1'}{\partial x}+2xf_2'+x^2\frac{\partial f_2'}{\partial x}$

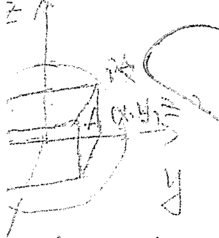
$=4x^3f_1'+x^4[f_{11}''y+f_{12}''(-\frac{y}{x^2})]+2xf_2'+x^2[f_{21}''y+f_{22}''(-\frac{y}{x^2})]$

$=4x^3f_1'+2xf_2'+x^4yf_{11}''-yf_{22}''$

6

椭球面建坐标！

三个



四.（8分）在已给的椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 内一切内接的长方体（各边分别平行于坐标轴）中，求其体积最大者。解：设该长方体的长、宽、高分别为 x,y,z，体积为 V.

则 $V=xyz$　又 $\because \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$　$\therefore \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$

设 $F(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$

则 $V=8xyz$

$=8xyz$

$\therefore F_x'=yz+\frac{2\lambda x}{a^2}$

$F_y'=xz+\frac{2\lambda y}{b^2}$

$F_z'=xy+\frac{2\lambda z}{c^2}$

$F_\lambda'=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$

令 $F_x'=0, F_y'=0, F_z'=0, F_\lambda'=0$

$\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}a, y=\frac{\sqrt{3}}{3}b, z=\frac{\sqrt{3}}{3}c$

此时 $V=V_{max}=\frac{\sqrt{3}}{9}abc$

$\therefore$ 体积最大为 $\frac{\sqrt{3}}{9}abc$.

3

2

$\frac{8\sqrt{3}}{9}abc$

五.（8分）设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，$y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 分别由方程 $e^{xy}-y=0$ 和 $e^z-xz=0$ 所确定，求 $\frac{du}{dx}$。

解：$\because e^{xy}-y=0$

$\therefore y=e^{xy}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=y\cdot e^{xy}=y^2$

又 $\because e^z-xz=0$

$\therefore z=\frac{e^z}{x}$

$\therefore \frac{dz}{dx}=-\frac{e^z}{x^2}=-\frac{z}{x}$

$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot1+f_2'\cdot\frac{dy}{dx}+f_3'\cdot\frac{dz}{dx}$

$=f_1'+ye^{xy}f_2'-\frac{e^z}{x^2}\cdot f_3'$

$\frac{du}{dx}=f_1'\cdot1+f_2'\cdot\frac{dy}{dx}+f_3'\cdot\frac{dz}{dx}$

$=f_1'+f_2'\cdot\frac{ye^{xy}}{1-xe^{xy}}+f_3'\cdot\frac{z}{e^z-x}$

$\therefore du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$

$=(f_1'+y^2f_2'-\frac{z}{x}f_3')dx+f_2'dy+f_3'dz$

$\therefore \frac{du}{dx}=f_1'+y^2f_2'-\frac{z}{x}f_3'+f_2'\cdot y^2-\frac{z}{x}f_3'$

$=f_1'+2y^2f_2'-2\frac{z}{x}f_3'$

六.（6分）设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，$f(1)=\frac{5}{2}$，且对于所有的 x，$t\in(0,+\infty)$，满足条件 $\int_1^{xt}f(u)du=t\int_1^x f(u)du+x\int_1^t f(u)du$，求 $f(x)$。

解：等式两边同时对 u 求导，得：$f(xt)-f(1)=t[f(x)-f(1)]+x[f(t)-f(1)]$ ①

①式对 x 求导，得：$tf'(xt)=tf'(x)+f(t)-f(1)$

①式对 t 求导，得：$xf'(xt)=f(x)-f(1)+xf'(t)$

①. 两边同时对 x 求导.

$tf(xt)=tf(x)+\int_1^t f(u)du$

②. 令 $x=1$，得

$tf(t)=tf(1)+\int_1^t f(u)du$

$=\frac{5}{2}t+\int_1^t f(u)du$

③. 两边同时对 t 求导，得

$f(t)+tf'(t)=\frac{5}{2}+f(t)$

令 $f(t)=y$.

4

55

86

浙江理工大学

2012 / 2013 学年第 二 学期《高等数学 B》期中试卷

班级 轻汽(8)3班 学号 2012333501227 考生姓名 吴育豪

题号	一	二	三								总分	阅卷人
			(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)		
得分												

25

一. 选择题（本题共 5 小题, 每小题 5 分，满分 25 分）

(1) 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t+\ln 2$，则 $f(x)=$ (B)

(A) $e^x\ln 2$ (B) $e^{2x}\ln 2$ (C) $e^x+\ln 2$ (D) $e^{2x}+\ln 2$

(2) $y''=e^{-x}$ 的通解为 (D)

(A) $y=-e^{-x}$ (B) $y=-e^{-x}+c_1x+c_2$

(C) $y=e^{-x}$ (D) $y=e^{-x}+c_1x+c_2$

$y'=-e^{-x}+C_1$

$y=e^{-x}+C_1x+C_2$

(3) 二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 偏导数都存在是其在该点可微的 (B)

$\Rightarrow$ 錯 ×

$\Leftarrow$ 对 √

(A) 充分条件 (B) 必要条件

(C) 充要条件 (D) 既非充分又非必要条件

(4) 设非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 有两个特解 $y_1(x),y_2(x)$，C 为任意常数，则该方程通解是 (D)

$y_1'(x)+p(x)y_1(x)=q(x)$

$y_2'(x)+p(x)y_2(x)=q(x)$

(A) $C[y_1(x)+y_2(x)]$ (B) $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$

(C) $C[y_1(x)-y_2(x)]$ (D) $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$ 通解(齐次)

(5) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，则在原点 (0,0) 处 f(x,y) (B)

令 $y=x$. $\frac{1}{2}$.

(A) 连续且偏导数存在 (B) 偏导数存在但不连续

(C) 连续但偏导数不存在 (D) 偏导数不存在且不连续

16

二. 填空题（本题共 5 小题, 每小题 4 分，满分 20 分）

(1) 微分方程 $F(x,y^4,y',(y'')^2)=0$ 的通解中所含任意常数的个数是 2个

(2) 微分方程 $yy''-(y')^2=0$ 的通解是 $y=$ ~~$C_1e^{x}+C_2$~~ $C_2e^{C_1x}$

(3) 设 $z=(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$，则 $dz=$ $(2x+y)e^{-\arctan\frac{y}{x}}dx+(2y-x)e^{-\arctan\frac{y}{x}}dy$

(4) 设 $z=f(x,y)=\sin(xy^2)$，则 $f''_{yx}(\frac{\pi}{2},1)=$ $-\pi$

(5) 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 (0,1) 处的切线方程为 $y=x+1$

令 $y'=u(y)$.

$y''=\frac{d}{dx}(u(y))=\frac{dy}{dx}y'=u\frac{du}{dy}$

$y\cdot u\frac{du}{dy}=u^2$

① $u=0$.

② $\frac{du}{u}=\frac{dy}{y}$

$\ln|u|=\ln|y|+C_1$

$u=C_1y$.

$\frac{dy}{dx}=C_1y$

$\frac{dy}{y}=C_1dx$

$\ln y=C_1x+C_2$

$y=e^{C_1x+C_2}$

$=C_2e^{C_1x}$

$f'_y=2xy\cos(xy^2)$

$f''_{yx}=2y\cos(xy^2)-2xy^3\sin(xy^2)$

$=2\cdot\cos\frac{\pi}{2}-\pi\sin\frac{\pi}{2}$

$=0-\pi=-\pi$

三. 解答题（55 分） 45

(1) 设 $u=f(x-y,y-z,t-z)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}$。(6 分)

$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-f_1'+f_2'$

$\frac{\partial u}{\partial z}=-f_2'-f_3'$

$\frac{\partial u}{\partial t}=f_3'$

$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}$

$=f_1'-f_1'+f_2'-f_2'-f_3'+f_3'$

$=0$

(2) 设 $F(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$。(7 分) 两边对x求偏导

隐函数求导!!!

$0=F_1'(1+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x})+F_2'\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x-z}{x^2}=0$

$0=F_1'+F_1'\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{z}{x^2}F_2'+\frac{1}{x}F_2'\frac{\partial z}{\partial x}$

$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1'-\frac{z}{x^2}F_2'}{1-F_1'\frac{1}{y}-\frac{1}{x}F_2'}=\frac{x^2yF_1'-yzF_2'}{x^2y-x^2F_1'-xyF_2'}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{z}{x^2}F_2'-F_1'}{F_1'\frac{1}{y}+\frac{1}{x}F_2'}$

$0=F_1'\frac{\frac{\partial z}{\partial y}\cdot y-z}{y^2}+F_2'(1+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y})=0$

$0=\frac{1}{y}F_1'\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{y^2}F_1'+F_2'+\frac{1}{x}F_2'\frac{\partial z}{\partial y}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{z}{y^2}F_1'-F_2'}{\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2'}$

$\therefore \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_2-\frac{z}{y^2}F_1'}{1-\frac{1}{y}F_1'-\frac{1}{x}F_2'}=\frac{xy^2F_2-xzF_1'}{xy^2-xyF_1'-y^2F_2'}$

$F_x'=F_1'-F_2'\frac{z}{x^2}$

$F_y'=-\frac{z}{y^2}F_1'+F_2'$

$F_z'=\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2'$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{F_2'\frac{z}{x^2}-F_1'}{\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2'}=\frac{yzF_2'-yx^2F_1'}{x^2F_1'+yxF_2'}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{\frac{z}{y^2}F_1'-F_2'}{\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2'}=\frac{zxF_1'-y^2xF_2'}{xyF_1'+y^2F_2'}$

(3) 求 $(x-y\cos\frac{y}{x})dx+x\cos\frac{y}{x}dy=0$ 的通解。(7 分)

$(y\cos\frac{y}{x}-x)dx=x\cos\frac{y}{x}dy$.

$\frac{y\cos\frac{y}{x}-x}{x\cos\frac{y}{x}}=\frac{dy}{dx}$

$\frac{y}{x}-\frac{1}{\cos\frac{y}{x}}=\frac{dy}{dx}$

令 $\frac{y}{x}=u$. $y=ux$.

$y'=u+xu'$

$\therefore u-\frac{1}{\cos u}=u+xu'$

$-\frac{1}{\cos u}=x\frac{du}{dx}$.

$\cos u\,du=\frac{-dx}{x}$

$\sin u=-\ln|x|+C$.

$\sin u=-\ln Cx$.

$\therefore \sin\frac{y}{x}=-\ln Cx$ (C为任意常数).

55 经济(8)班 2012333501227 吴彗青

(4) 求 $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$ 的通解。(8 分)

$r^2+4r+4=0$

$(r+2)^2=0$

$r_1=r_2=-2$.

$\therefore \bar{y}=(C_1+C_2x)e^{-2x}$

$\because \lambda=2$ 不是特征方程的根.

$\therefore$ 令 $y^*=(ax+b)e^{2x}$ ①

$y^{*\prime}=(a+2ax+2b)e^{2x}$. ②

$y^{*\prime\prime}=(4a+4ax+4b)e^{2x}$ ③

将 ① ② ③ 代入原方程.

$(4a+4ax+4b+4a+8ax+8b+4ax+4b)\cancel{e^{2x}}=x\cancel{e^{2x}}$

$16ax+8a+16b=x$.

$\begin{cases}16a=1.\\ 8a+16b=0.\end{cases}$

$\therefore$ $a=\frac{1}{16}$, $b=-\frac{1}{32}$.

$\therefore y^*=(\frac{1}{16}x-\frac{1}{32})e^{2x}$.

$\therefore$ 通解 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+(\frac{1}{16}x-\frac{1}{32})e^{2x}$

(C_1、C_2 为任意常数)

(5) 要造一个容积等于定数 K 的长方体无盖水池，应如何选取水池的尺寸，方可使表面积最小。(9 分)

设长方体的长宽高分别为 x, y, z，表面积为 S。

$K=xyz$.

$S=xy+2xz+2yz$.

令 $F(x,y,z,\lambda)=xy+2xz+2yz+\lambda(K-xyz)$

$F'_x=y+2z-\lambda yz$. ①

$F'_y=x+2z-\lambda xz$. ②

$F'_z=2x+2y-\lambda xy$ ③

$F'_\lambda=K-xyz$.

① $\times x$. ② $\times y$. ③ $\cdot z$ $\therefore$

$xy+2xz=\lambda xyz$

$xy+2yz=\lambda xyz$.

$2xz+2yz=\lambda xyz$.

令 $F'_x=0$ $F'_y=0$ $F'_z=0$ $F'_\lambda=0$.

$y=x=2z$. $z=\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}y$.

$K-\frac{1}{2}x^3=0$.

$\frac{1}{2}x^3=K$. $x^3=2K$.

$\cancel{x=\frac{1}{\sqrt[3]{2K}}K}$. $x=\sqrt[3]{2K}$.

$\cancel{y=\frac{1}{\sqrt[3]{2K}}K}$. $y=\sqrt[3]{2K}$.

$\cancel{z=\frac{1}{2\sqrt[3]{2K}}K}$. $z=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2K}$

$\therefore$ 当水池的长、宽、高分别

$\cancel{\frac{1}{\sqrt[3]{2K}}K,\ \frac{1}{\sqrt[3]{2K}}K,\ \frac{1}{2\sqrt[3]{2K}}K}$ 时

方可使表面积最小.

① 直接求导.

② 令 $F(x,y,z)=0$ 对隐函数求导.

(6) 已知 $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$，求 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$。(6 分)

令 $F(x,y,z)=z-\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$

$F'_x=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=-\frac{1}{2x+2\sqrt{xy}}$

$F'_y=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=-\frac{1}{2\sqrt{xy}+2y}$.

$F'_z=1$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{1}{2x+2\sqrt{xy}}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{1}{2\sqrt{xy}+2y}$.

$\therefore x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$

$=\frac{x}{2x+2\sqrt{xy}}+\frac{y}{2\sqrt{xy}+2y}$

$=\frac{1}{2}$.

$\frac{2x\sqrt{xy}+2xy+2xy+2y\sqrt{xy}}{(2x+2\sqrt{xy})(2\sqrt{xy}+2y)}=\frac{2x\sqrt{xy}+4xy+2y\sqrt{xy}}{4x\sqrt{xy}+4xy+4xy+2y\sqrt{xy}}=\frac{1}{2}$.

-1 缺 Tt 间

(7) 设 $u = f(t)$, $t = \varphi(xy, x^2 + y^2)$，其中 f, φ 具有连续的二阶导数及偏导数，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$。(6 分)

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}$.

$\frac{\partial f}{\partial t}=f'$

$\frac{\partial t}{\partial x}=\varphi'_1y+\varphi'_2\cdot 2x$.

$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=f'(\varphi'_1y+2\varphi'_2x)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}[f'(\varphi'_1y+2\varphi'_2x)]$

$=\frac{\partial f'}{\partial x}(\varphi'_1y+2\varphi'_2x)+f'\frac{\partial(\varphi'_1y+2\varphi'_2x)}{\partial x}$.

$\frac{\partial f'}{\partial x}=\frac{\partial f'}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=f''(\varphi'_1y+\varphi'_2\cdot 2x)$.

$\frac{\partial(\varphi'_1y+2\varphi'_2x)}{x}=y(\varphi''_{11}y+\varphi''_{12}\cdot 2x)+2\varphi'_2+2x(\varphi''_{21}y+\varphi''_{22}\cdot 2x)$.

$=y^2\varphi''_{11}+4xy\varphi''_{12}+2\varphi'_2+4x^2\varphi''_{22}$

$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(\varphi'_1y+2\varphi'_2x)^2+f'(y^2\varphi''_{11}+4xy\varphi''_{12}+2\varphi'_2+4x^2\varphi''_{22})$

(8) 当轮船前进速度为 v_0 时，推进器停止工作，已知受水的阻力与船速的平方成正比 (其中比例系数为 mk, 其中 $k > 0$ 为常数，而 m 为船的质量)。问经过多长时间，船的速度减为原速度的一半? (6 分)

设阻力为 F，加速度为 a，船速为 $V(t)$，x 为船开的时间.

$F=mkV^2_{(t)}$ $a=\frac{F}{m}=kV^2_{(t)}$. $V(0)=V_0$.

$V(x)=V_0-\int_0^x kV^2_{(t)}\,dt$.

两边对 x 求导.

$-ma=F=kmv^2$.

$\frac{dv}{dt}=mv^2$.

$\frac{dv}{v^2}=m\,dt$.

$-\frac{1}{v}=mt+C$.

$v=\frac{-1}{mt+C}$.

$C=-\frac{1}{v_0}$

$v=\frac{v_0}{v_0mt+v_0}$.

$V'(x)=-kV^2(x)$.

$\frac{dv}{dx}=-kv^2$

$\frac{dv}{v^2}=-k\,dx$.

$-\frac{1}{v}=-kx+C$.

$\frac{1}{v}=kx+C$.

$v=\frac{1}{kx+C}$

$\therefore \frac{1}{C}=V_0$

$C=\frac{1}{V_0}$.

$V(x)=\frac{1}{kx+\frac{1}{V_0}}=\frac{V_0}{V_0kx+1}$.

当 $V(x)=\frac{1}{2}V_0$ 时.

$\frac{V_0}{V_0kx+1}=\frac{1}{2}V_0$

$V_0kx=1$.

$x=\frac{1}{kV_0}$

$\therefore$ 经过 $\frac{1}{kV_0}$ 时间, 船的速度减为原速度的一半.