

离散数学概论

第二章 一阶逻辑 · 基本概念

课程QQ号： 819392514

金耀 数字媒体技术系

fool1025@163.com

13857104418

苏格拉底三段论

❖ 判断下面推理的正确性

- 凡人都是要死的。
- 苏格拉底是人。
- 所以苏格拉底是要死的。

原因缺少命题内在的联系反映。

用 p, q, r 表示三个命题,
则 $(p \wedge q) \rightarrow r$ 并不是重言式.



第二章 一阶逻辑

2.1 一阶逻辑基本概念

2.2 一阶逻辑公式分类及解释

2.3 一阶逻辑等值式和前束范式

2.4 逻辑推理理论



§ 1 一阶逻辑基本概念

本讲主要内容

- 基本概念
- 一阶逻辑中命题符号化



一、基本概念

简单的命题被分解成个体词与谓词。

- 6是合数；
- 王宏是程序员；
- 小李比小赵高2厘米。

1.个体词相关的基本概念

- ❖ 个体词:是可以独立存在的客体.
- ❖ 个体常项:用小写的英文字母: a, b, c, d, \dots
- ❖ 个体变项:用小写的英文字母: x, y, z, \dots
- ❖ 个体域:个体的取值范围.
- ❖ 有限个体域:如 $\{a, b, c\}, \{1, 2\}$
- ❖ 无限个体域:如 N, Z, Q, R, C, \dots
- ❖ 全总个体域:指宇宙中的一切事物.

2.谓词的相关概念

谓词：表示个体词性质或相互之间关系的词

谓词常项： $F(a)$ ： a 是人

谓词变项： $F(x)$ ： x 具有性质 F

一元谓词：表示事物的性质

多元谓词(n 元谓词, $n \geq 2$): 表示事物之间的关系

如 $L(x, y)$ ： x 与 y 有关系 L , $L(x, y)$ ： $x \geq y$, ...

0元谓词：不含个体变项的谓词, 即命题

二、一阶逻辑中命题符号化

例1 用0元谓词将命题符号化

(1) 墨西哥位于南美洲

- $F(x)$: x 位于南美洲
- a : 墨西哥
- $F(a)$



“元”与“阶”

❖ **元**：表示个体变项个数。

❖ **阶**：表示层次数。

一阶谓词： $\forall x F(x), \exists x F(x)$

二阶谓词： $\exists F F(x), \forall F \exists x (F(x) \rightarrow \forall x F(x))$

.....

N阶谓词

联系我们已经学过的数学概念！

二、一阶逻辑中命题符号化

(2) 2是素数且是偶数.

- $F(x)$: x 是素数;
- $G(x)$: x 是偶数;
- $a:2$
- 符号化为 $F(a) \wedge G(a)$

(3) 如果2大于3,则2大于4.

- $L(x, y)$: x 大于 y .
- $a:2; b:3; c:4$
- 符号化为 $L(a, b) \rightarrow L(a, c)$

3. 量 词

量词: 表示数量的词

全称量词 \forall : 表示任意的, 所有的, 一切的, 不存在一个...不...

如 $\forall x$ 表示对个体域中所有的 x

$\forall x F(x)$ 表示个体域中的所有个体具有属性 F 。

存在量词 \exists : 表示存在, 有的, 至少有一个

如 $\exists x$ 表示在个体域中存在 x

$\exists x F(x)$ 表示存在个体域中的个体具有属性 F 。

谓词逻辑符号化的两条规则

❖ 统一一个体域为**全总个体域**，而对每一个句子中个体变量的变化范围用一元**特性谓词**刻划之。这种特性谓词在加入到命题函数中时必定遵循如下原则：

- (1) 对于**全称量词**($\forall x$)，刻划其对应个体域的特性谓词作为**蕴涵式之前件**加入。
- (2) 对于**存在量词**($\exists x$)，刻划其对应个体域的特性谓词作为**合取式之合取项**加入。

明确个体域

例2. (1) 凡人都要死的。 (2) 有人活百岁以上

❖ 考虑个体域 D 为**人类集合**

■ $F(x)$: x 是要死的。 $\forall x F(x)$

■ $G(x)$: x 活百岁以上。 $\exists x G(x)$

个体域不同,
符号化不同

❖ 考虑个体域为**全总个体域**

■ 对于所有个体而言, 如果它是人, 则它是要死的。

引入特性谓词 $M(x)$: x 是人。

$$\forall x(M(x) \rightarrow F(x))$$

■ 存在着个体, 它是人并且活百岁以上。

$$\exists x(M(x) \wedge G(x))$$

\rightarrow 与 \wedge 是否
可以交换?

一阶逻辑中命题符号化(续)

例3 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 正数都大于负数

(2) 有的无理数大于有的有理数

解 注意: 题目中没给个体域, 一律用全总个体域

(1) 令 $F(x)$: x 为正数, $G(y)$: y 为负数, $L(x, y)$: $x > y$

$\forall x(F(x) \rightarrow \forall y(G(y) \rightarrow L(x, y)))$ 或

$\forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow L(x, y))$ 两者等值

(2) 令 $F(x)$: x 是无理数, $G(y)$: y 是有理数,

$L(x, y)$: $x > y$

$\exists x(F(x) \wedge \exists y(G(y) \wedge L(x, y)))$

或 $\exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge L(x, y))$ 两者等值

用量词时的注意点

- ❖ 在不同的个体域中，命题符号化的形式可能不一样；
- ❖ 如果事先没有给出个体域，都应以全总个体域为个体域；
- ❖ 个体域和谓词的含义确定之后， n 元谓词要转化为命题至少需要 n 个量词（此点以后再讨论）；
- ❖ 当个体域为有限集时，如果 $D=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ，由量词的意义可以看出，对于任意的谓词 $A(x)$ ，都有：
 - $\forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)$ ；
 - $\exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n)$.

嵌套量词

❖ 多个量词同时出现时，**不能随意颠倒他们的顺序。**

❖ 例：对任意的 x ，存在着 y ，使得 $x+y=5$.

- $H(x, y)$ 表示： $x + y = 5$
- 可符号化成： $\forall x \exists y H(x, y)$
- 不可符号化成： $\exists y \forall x H(x, y)$

例题

❖ 没有不犯错误的人。

命题的意思是：①存在不犯错误的人是不可能的。②只要是人，必然犯错误。

设 $M(x)$: x 是人, $F(x)$: x 犯错误

命题符号化为 ① $\neg \exists x(M(x) \wedge \neg F(x))$

② $\forall x(M(x) \rightarrow F(x))$

❖ 不管黑猫白猫，抓住老鼠就是好猫

需要考虑问题：①只是限制黑猫白猫，还是包含其它颜色的猫？

②是指至少抓住一只就可以，还是抓住所有的？

因此在描述命题时，总是将这些模糊概念做某种确切理解。

设 $C(x)$: x 是猫, $W(x)$: x 是白的, $B(x)$: x 是黑的

$G(x)$: x 是好的, $M(x)$: x 是老鼠, $K(x, y)$: x 抓住 y

命题符号化为: $\forall x \forall y ((C(x) \wedge M(y) \wedge (B(x) \vee W(x)) \wedge K(x, y)) \rightarrow G(x))$

思考

❖ 如何形式化描述 “函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的点 x_0 处连续” ？

$$\forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta (\delta > 0 \wedge \forall x (|x - x_0| < \delta \rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)))$$

第二章 一阶逻辑

2.1 一阶逻辑基本概念

2.2 一阶逻辑公式分类及解释

2.3 一阶逻辑等值式和前束范式

2.4 一阶逻辑推理理论



2.2 一阶逻辑公式及解释

本讲主要内容

- 谓词公式解释
- 谓词公式分类



一. 谓词公式

❖ **定义：一阶逻辑公式**是由量词、 n 元谓词和命题逻辑联结词而组成的有限长度符号串，也称为**谓词公式**。

例如： $\forall x(F(x, y) \rightarrow G(x, z))$

二、个体变项的自由出现与约束出现

定义 在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中，称 x 为**指导变元**， A 为相应量词的**辖域**。在 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的**辖域**中， x 的所有出现都称为**约束出现**， A 中不是约束出现的其他变项均称为是**自由出现的**。

例如，在公式 $\forall x(F(x, y) \rightarrow G(x, z))$ 中，
 $A=(F(x, y) \rightarrow G(x, z))$ 为 $\forall x$ 的辖域，

x 为指导变元，
 A 中 x 的两次出现均为约束出现，
 y 与 z 均为自由出现。

封闭的谓词公式

闭式： 不含自由出现的个体变项的公式.

- $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)), \exists x \forall y(F(x) \vee G(x, y))$

是闭式。

- $\forall x(F(x) \rightarrow G(x, y)), \exists z \forall y L(x, y, z)$

不是闭式。

- $\forall x F(x) \vee G(x)$

不是闭式。

约束变元换名规则

❖ 换名规则：将量词辖域中出现的某个约束出现的个体变项及对应的指导变项，改成另一个辖域中未曾出现的个体变项符号，公式其余部分不变。

❖ 如：在 $\exists x F(x) \wedge G(x, y)$ 中，将约束出现的 x 改成 z ，得到的公式为：

$$\exists z F(z) \wedge G(x, y)$$

自由变元代入规则

❖ **代入规则**: 对某自由出现的个体变项用与原公式中所有个体变项符号不同的变项符号去代替, 且处处代替.

❖ 如: 在 $\exists x F(x) \wedge G(x, y)$ 中, 利用代替规则, 将自由出现的 x 用 z 代替, 得: $\exists x F(x) \wedge G(z, y)$

例

例 公式 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x,y)) \wedge \exists yR(x,y)$ 中 x , y 既是约束变元又是自由变元, 试指出下面对变元的改名或者替换是否正确, 并说明理由。

(1) $\forall y(P(y) \rightarrow Q(y,y)) \wedge \exists yR(x,y)$ 。---不正确, 违背了规则1中的第(2)条。

(2) $\forall z(P(z) \rightarrow Q(z,y)) \wedge \exists sR(x,s)$ 。-----正确。

(3) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x,z)) \wedge \exists yR(y,y)$ 。---不正确, 违背了规则2中的第(2)条。

(4) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x,z)) \wedge \exists yR(s,y)$ 。-----正确。

改名规则和代入规则的关系

共同点：二者都没有改变原有的约束关系；

不同点：

(1) **施行的对象不同：**改名规则是对约束变元施行，代入规则是对自由变元施行；

(2) **施行的范围不同：**改名规则可以只对公式中的一个量词及其辖域内施行；而代入规则

必须对某个自由变元在整个公式中的每一处出现都要施行；

(3) **施行后的结果不同：**改名规则不改变原有的约束关系，改名后公式含义不变；使用代入规则时，可用另一个个体变元去代入，也可以用个体常量去代入，当用个体常量代入时，公式的含义就会发生改变。

解释 I

定义 一个**解释** I 由下面4部分组成:

- 非空个体域 D ;
- D 中一部分特定元素;
- D 上一些特定的函数;
- D 上一些特定的谓词;

在使用一个解释 I 解释一个公式 A 时, 将 A 中的个体常项用 I 中特定常项代替, 函数和谓词用 I 中的特定函数和谓词代替.

解释 I 如下:

- $D_1 = \{2, 3\}$;
- D_1 中特定元素 $a = 2$;
- 函数 $f(x)$ 为 $f(2) = 3, f(3) = 2$;
- 谓词 $F(x)$ 为 $F(2) = 0, F(3) = 1$;
 $G(x, y)$ 为 $G(i, j) = 1, i, j = 2, 3$;
 $L(x, y)$ 为 $L(2, 2) = L(3, 3) = 1$;
 $L(2, 3) = L(3, 2) = 0$

在解释 I 下, 求下列各式的真值.

$$(1) \forall x (F(x) \wedge G(x, a))$$

$$(2) \exists x (F(f(x)) \wedge G(x, f(x)))$$

$$(3) \forall x \exists y L(x, y)$$

2. 解 (1), (2), (3) 中公式分别为 A, B, C , 则

$$\begin{aligned} \text{▪ } A &= (F(2) \wedge G(2, 2)) \wedge (F(3) \wedge G(3, 2)) \\ &\Leftrightarrow (0 \wedge 1) \wedge (1 \wedge 1) \Leftrightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{▪ } B &= (F(f(2)) \wedge G(2, f(2))) \\ &\quad \vee (F(f(3)) \wedge G(3, f(3))) \\ &\Leftrightarrow (F(3) \wedge G(2, 3)) \vee (F(2) \wedge G(3, 2)) \\ &\Leftrightarrow (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \Leftrightarrow 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{▪ } C &= (L(2, 2) \vee L(2, 3)) \wedge (L(3, 2) \vee L(3, 3)) \\ &\Leftrightarrow 1 \wedge 1 \Leftrightarrow 1 \end{aligned}$$

例题 解释 N

❖ 解释 N

- 个体域为自然数集合 D_n ;
- D_n 中特定元素 $a=0$;
- D_n 上特定函数 $f(x, y)=x+y$, $g(x, y)=x \cdot y$;
- D_n 上特定谓词 $F(x, y)$ 为 $x=y$.

在解释 N 下,下面那些公式为真?那些公式为假?

- (1) $\forall x F(g(x, a), x)$;
- (2) $\forall x \forall y (F(f(x, a), y) \rightarrow F(f(y, a), x))$;
- (3) $F(f(x, y), f(y, z))$

❖ 解:在解释 N 下,公式分别化为:

❖ $\forall x(x \cdot 0=x)$

假命题;

(2) $\forall x \forall y (F(f(x, 0), y) \rightarrow F(f(y, 0), x))$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y (x+0=y \rightarrow y+0=x)$

真命题;

(3) $x+y=y+z$

真值不确定,不是命题.

例

例 试判断下面给定的解释是否为公式 $\forall xP(x,a) \rightarrow \exists yP(f(a),f(y))$ 的一个解释。

- (1) 个体域 $D=\{a,b\}$, $f(a)=b$, $f(b)=a$, $P(b,a)=0$, $P(b,b)=1$ 。
- (2) 个体域 $D=\{a,b\}$, $f(b)=a$, $P(a,a)=1$, $P(a,b)=0$, $P(b,a)=0$, $P(b,b)=1$ 。
- (3) 个体域 $D=\{a,b\}$, $f(a)=b$, $f(b)=a$, $P(a,a)=1$, $P(b,a)=0$, $P(b,b)=1$ 。

解 (1) 不是给定公式的解释, 因为没有给出 $P(a,a)$ 的值。

(2) 不是给定公式的解释, 因为没有给出 $f(a)$ 的值。

(3) 是给定公式的解释。

解题小贴士

解题小贴士 一给定解释下计算谓词公式真值的方法

(1) 用个体域中每个值取代个体变量，如果是 \forall ，则用“ \wedge ”连接得到的所有项并取代该量词及其辖域内的谓词；如果是 \exists ，则用“ \vee ”连接得到的所有项并取代该量词及其辖域内的谓词。

(2) 根据公式中的命题联结词，按对应的真值规定计算即得结果。

公式的分类

设 A 为一公式(谓词公式)

如果 A 在任何解释下都是真的, 称 A 为逻辑有效式(或永真式);

如果 A 在任何解释下都是假的, 称 A 为矛盾式(或永假式);

若至少存在一个解释使 A 为真, 则称 A 是可满足式(协调式).

代换实例

设 A_0 是含命题变项 p_1, p_2, \dots, p_n 的命题公式, A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个谓词公式, 用 $A_i (1 \leq i \leq n)$ 处处代替 p_i , 所得公式 A 称为 A_0 的代换实例.

$F(x) \rightarrow G(x), \forall x F(x) \rightarrow \exists x G(x)$ 都是 $p \rightarrow q$ 的代替实例.

例题2.9

判断哪些是永真式,哪些是矛盾式?

- $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$
- $\forall xF(x) \rightarrow (\forall x \exists y G(x, y) \rightarrow \forall xF(x))$

解: 设 I 为任意的解释,其个体域为 D 。

若存在 $x_0 \in D$,使得 $F(x_0)$ 为假, $\forall xF(x)$ 为假,所以 $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$ 为真.

对于任意 $x \in D$, $F(x)$ 为真,则 $\forall xF(x)$, $\exists xF(x)$ 同时为真.

所以 $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$ 是永真式.

- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ 的代替实例,由 $p \rightarrow (q \vee p)$ 是重言式可知,

$\forall xF(x) \rightarrow (\forall x \exists y G(x, y) \rightarrow \forall xF(x))$ 是重言式

第二章 一阶逻辑

2.1 一阶逻辑基本概念

2.2 一阶逻辑合式公式及解释

2.3 一阶逻辑等值式及前束范式

2.4 一阶逻辑推理理论



2.3 一阶逻辑等值式

本讲主要内容

- 等值式，基本等值式
- 量词否定等值式
- 量词辖域收缩与扩张等值式
- 量词分配等值式
- 前束范式



一、等值式与基本等值式

定义2.10

设 A, B 是一阶逻辑中任意的两公式,若 $A \leftrightarrow B$ 为逻辑有效式,则称 A 与 B 是等值的,记作 $A \Leftrightarrow B$,称 $A \Leftrightarrow B$ 为**等值式**.

- $p \Leftrightarrow p \wedge p$

代换实例: $\forall x A(x) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x A(x)$

- $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

$$\forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x) \Leftrightarrow (\neg \forall x A(x)) \vee \exists x B(x)$$

消去量词等值式

基本等值式:

命题逻辑中16组基本等值式的代换实例

如, $\forall xF(x) \rightarrow \exists yG(y) \Leftrightarrow \neg \forall xF(x) \vee \exists yG(y)$

$\neg(\forall xF(x) \vee \exists yG(y)) \Leftrightarrow \neg \forall xF(x) \wedge \neg \exists yG(y)$

消去量词等值式

设 $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)$

$\exists xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n)$

量词否定公式

$A(x)$ 表示 x 是优等生，个体域是某班级的学生集合。

- $(\forall x)A(x)$ 表示：所有人都是优等生。
- $(\exists x)A(x)$ 表示：有些人是优等生。
- $\neg(\forall x)A(x)$ 表示：不是所有人都是优等生。
- $(\exists x)\neg A(x)$ 表示：有些人不是优等生。
- $\neg(\exists x)A(x)$ 表示：不存在有人是优等生。
- $(\forall x)\neg A(x)$ 表示：所有人都不是优等生。

从这个例子可以看出

- “不是所有人都是优等生”与“有些人不是优等生”是等价的。
- “不存在有人是优等生”与“所有人都不是优等生”是等价的。

量词否定等值式

❖ 定理2.1 量词否定等值式

- $\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$
- $\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

❖ 证明: 设 $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

- $\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \neg (A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n))$
 $\Leftrightarrow \neg A(a_1) \vee \neg A(a_2) \vee \dots \vee \neg A(a_n)$
 $\Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$
- $\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \neg (A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n))$
 $\Leftrightarrow \neg A(a_1) \wedge \neg A(a_2) \wedge \dots \wedge \neg A(a_n)$
 $\Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

例

例 将下面命题用两种形式符号化

(1) 没有不犯错误的人

(2) 不是所有的人都爱看电影

解 (1) 令 $F(x)$: x 是人, $G(x)$: x 犯错误.

$$\neg \exists x (F(x) \wedge \neg G(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \neg (F(x) \wedge \neg G(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (F(x) \rightarrow G(x))$$

(2) 令 $F(x)$: x 是人, $G(x)$: 爱看电影.

$$\neg \forall x (F(x) \rightarrow G(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg (F(x) \rightarrow G(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x (F(x) \wedge \neg G(x))$$

量词辖域收缩与扩张等值式

设 $A(x)$ 是含 x 自由出现的公式， B 中不含 x 的出现

关于全称量词的：

$$\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \vee B$$

$$\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge B$$

$$\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \rightarrow B$$

$$\forall x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall xA(x)$$

关于存在量词的：

$$\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee B$$

$$\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \wedge B$$

$$\exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \rightarrow B$$

$$\exists x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists xA(x)$$

证明: 设 $D=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$$(1) \quad \forall x(A(x) \vee B)$$

$$\Leftrightarrow (A(a_1) \vee B) \wedge (A(a_2) \vee B) \wedge \dots \wedge (A(a_n) \vee B)$$

$$\Leftrightarrow (A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)) \vee B$$

$$\Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$$

$$(2) \quad \forall x(A(x) \rightarrow B)$$

$$\Leftrightarrow \forall x(\neg A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x) \vee B$$

$$\Leftrightarrow \neg \exists x A(x) \vee B \Leftrightarrow (\exists x A(x) \rightarrow B)$$

量词分配等值式

$$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$$

$$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$$

$$\forall x(A(x) \vee B(x)) \not\Leftrightarrow \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$$

$$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \not\Leftrightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$$

$$(\forall x)(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow (\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)$$

$$(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$$

注意： \forall 对 \vee 无分配律， \exists 对 \wedge 无分配律。

实例

$$(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)$$

解释：个体域是party中的人。

$A(x)$ ：x唱歌， $B(x)$ ：x跳舞

则 $(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$ 表示：

□ party里的所有人既唱歌又跳舞；

$(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)$ 表示：

□ party里的所有人唱歌且party里的所有人都跳舞。

两者意义是相同的。即有： $(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)$

实例

$$(\exists x)(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)$$

解释：个体域是party中的人。

$A(x)$ ：x唱歌， $B(x)$ ：x跳舞

则 $(\exists x)(A(x) \vee B(x))$ 表示：

□ Party中有些人唱歌或跳舞；

$(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$ 表示：

□ Party中有些人唱歌或party中有些人跳舞。

两者意义是相同的。所以：

$$(\exists x)(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)$$

实例

$$(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$$

解释：个体域是party中的人。

$A(x)$ ：x唱歌， $B(x)$ ：x跳舞

□ $(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$ ：

■ **Party中有人唱歌，且有人跳舞；**

□ $(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$ ：

■ **Party中有人既唱歌又跳舞。**

$$(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$$

$$(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x) \not\Rightarrow (\exists x)(A(x) \wedge B(x))$$

例如：证明 $\forall x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$

取 $F(x), G(x)$ 代替 $A(x), B(x)$, 只要证明

$\forall x(F(x) \vee G(x)) \leftrightarrow \forall xF(x) \vee \forall xG(x)$ 不是逻辑有效式.

解释 I : D 为自然数集合; $F(x)$: x 是奇数; $G(x)$: x 是偶数,

$\forall x(F(x) \vee G(x))$ 为真, 但 $\forall xF(x) \vee \forall xG(x)$ 是假,

故, $\forall x(F(x) \vee G(x)) \leftrightarrow \forall xF(x) \vee \forall xG(x)$ 不是逻辑有效式.

(交换量词)等值式

❖ 定理2.4

- $\forall x \forall y A(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x, y)$
- $\exists x \exists y A(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x, y)$



注意量词相同时
可互换指导变元.

基本的等值式(续)

例 将下面命题用两种形式符号化

(1) 没有不犯错误的人

(2) 不是所有的人都爱看电影

解 (1) 令 $F(x)$: x 是人, $G(x)$: x 犯错误.

$$\neg \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$

(2) 令 $F(x)$: x 是人, $G(x)$: 爱看电影.

$$\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$$

换名规则(*)

换名规则：将量词辖域中出现的某个**约束出现**的个体变项及对应的指导变项，改成其他辖域中未曾出现过的个体变项符号，公式中其余部分不变，则所得公式与原来的公式等值。

例

消去公式中既约束出现、又自由出现的个体变项

$$(1) \forall xF(x, y, z) \rightarrow \exists yG(x, y, z)$$

$$\Leftrightarrow \forall uF(u, y, z) \rightarrow \exists yG(x, y, z)$$

换名规则

$$\Leftrightarrow \forall uF(u, y, z) \rightarrow \exists vG(x, v, z)$$

换名规则

$$(2) \forall xF(x, y) \rightarrow \exists yG(x, y, z)$$

$$\Leftrightarrow \forall xF(x, y) \rightarrow \exists tG(x, t, z)$$

换名规则

$$\Leftrightarrow \forall sF(s, y) \rightarrow \exists tG(x, t, z)$$

换名规则

例

设个体域 $D=\{a, b, c\}$, 消去下面公式中的量词:

$$(1) \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$

$$\Leftrightarrow (F(a) \rightarrow G(a)) \wedge (F(b) \rightarrow G(b)) \wedge (F(c) \rightarrow G(c))$$

$$(2) \forall x(F(x) \vee \exists y G(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \vee \exists y G(y)$$

量词辖域收缩

$$\Leftrightarrow (F(a) \wedge F(b) \wedge F(c)) \vee (G(a) \vee G(b) \vee G(c))$$

$$(3) \exists x \forall y F(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (F(x, a) \wedge F(x, b) \wedge F(x, c))$$

$$\Leftrightarrow (F(a, a) \wedge F(a, b) \wedge F(a, c)) \vee (F(b, a) \wedge F(b, b) \wedge F(b, c)) \vee (F(c, a) \wedge F(c, b) \wedge F(c, c))$$

例

给定解释 I : (a) $D=\{2,3\}$, (b) $\bar{f} : \bar{f}(2) = 3, \bar{f}(3) = 2$,
(c) $\bar{F}(x) : x$ 是奇数, $\bar{G}(x, y) : x=2 \vee y=2$, $\bar{L}(x, y) : x=y$.

在 I 下求下列各式的真值:

$$(1) \exists x (F(f(x)) \wedge G(x, f(x)))$$

$$\text{解 } (F(f(2)) \wedge G(2, f(2))) \vee (F(f(3)) \wedge G(3, f(3)))$$

$$\Leftrightarrow (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \Leftrightarrow 1$$

$$(2) \exists x \forall y L(x, y)$$

$$\text{解 } \forall y L(2, y) \vee \forall y L(3, y)$$

$$\Leftrightarrow (L(2, 2) \wedge L(2, 3)) \vee (L(3, 2) \wedge L(3, 3))$$

$$\Leftrightarrow (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \Leftrightarrow 0$$

例

证明下列等值式：

$$\neg \exists x(M(x) \wedge F(x)) \Leftrightarrow \forall x(M(x) \rightarrow \neg F(x))$$

证 左边 $\Leftrightarrow \forall x \neg(M(x) \wedge F(x))$ 量词否定等值式

$$\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x) \vee \neg F(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x(M(x) \rightarrow \neg F(x))$$

作业

❖ 课后作业: 6, 7, 9

❖ 答题派作业: 如截图

1. 2.3 在一阶逻辑中, 将下面命题符号化。

(25)

- (1) 每个大学生不是文科生就是理科生。
- (2) 有些人喜欢所有的花。
- (3) 没有不犯错误的人。
- (4) 在北京工作的人未必都是北京人。
- (5) 任何金属都可以溶解在某种液体中。
- (6) 凡对顶角都相等。

2. 2.4 将下列各式翻译成自然语言, 然后在不同个体域中确定它们的真值。

(25)

- (1) $\forall x \exists y (x \cdot y = 0)$.
- (2) $\exists x \forall y (x \cdot y = 0)$.
- (3) $\forall x \exists y (x \cdot y = 1)$.
- (4) $\exists x \forall y (x \cdot y = 1)$.
- (5) $\forall x \exists y (x \cdot y = x)$.
- (6) $\exists x \forall y (x \cdot y = x)$.
- (7) $\forall x \forall y \exists z (x - y = z)$.

个体域分别为

- (a) 实数集合 \mathbb{R} .
- (b) 整数集合 \mathbb{Z} .
- (c) 正整数集合 \mathbb{Z}^+ .
- (d) $\mathbb{R} - \{0\}$ (非零实数集合)。

3. 2.6 设解释 \mathcal{R} 和赋值 σ 如下: $D_{\mathcal{R}}$ 是实数集, $a = 0$, 函数 $f(x, y) = x - y$, 谓词 $F(x, y)$ 为 $x < y$, $\sigma(x) = 0, \sigma(y) = 1, \sigma(z) = 2$. 在解释 \mathcal{R} 和赋值 σ 下, 下列哪些公式为真? 哪些为假?

(25)

- (1) $\forall x F(f(a, x), a)$.
- (2) $\forall x F(f(x, y), x) \rightarrow \exists y \neg F(x, f(y, z))$.
- (3) $\forall x (F(x, y) \rightarrow \forall y (F(y, z) \rightarrow \forall z F(x, z)))$.
- (4) $\forall x \exists y F(x, f(f(x, y), y))$.

4. 2.7 给出解释 \mathcal{I} , 使下面两个公式在解释 \mathcal{I} 下均为假, 从而说明这两个公式都不是逻辑有效式。

(25)

- (1) $\forall x (F(x) \vee G(x)) \rightarrow (\forall x F(x) \vee \forall x G(x))$.
- (2) $(\exists x F(x) \wedge \exists x G(x)) \rightarrow \exists x (F(x) \wedge G(x))$.