第五章　留数及其应用

第一讲 孤立奇点

数学与统计学院
易媛

主要内容

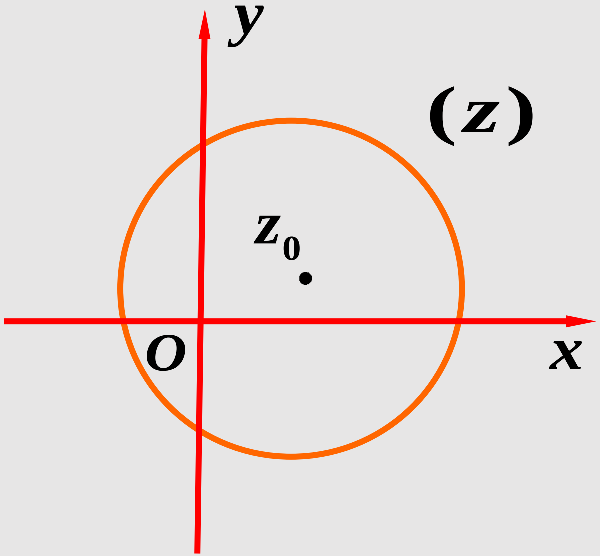
1. 孤立奇点的定义
2. 孤立奇点的分类
3. 函数的极点与零点的关系
4. 函数在无穷远点的性态

主要内容

1. 孤立奇点的定义
2. 孤立奇点的分类
3. 函数的极点与零点的关系
4. 函数在无穷远点的性态

1 孤立奇点的定义

如果函数 $f(z)$ 在 z_0不可导，但在 z_0的某一去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内处处解析，则称 z_0为函数 $f(z)$的一个孤立奇点.



例1： $z=0$ 是 $e^{\frac{1}{z}}$ 和 $\dfrac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点.

例2： $z=-1$ 是 $\dfrac{1}{z+1}$ 的孤立奇点.

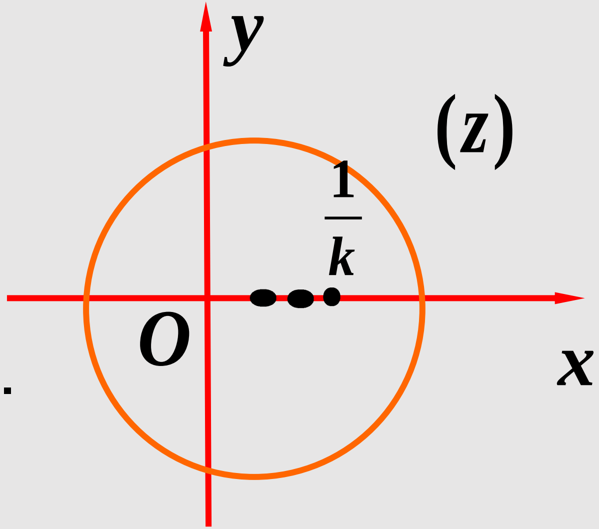
例3： 指出函数 $f(z)=\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{z}}$ 在 $z=0$ 的奇点特性.

解： 令 $\sin\dfrac{\pi}{z}=0$，得 $\dfrac{\pi}{z}=k\pi$，$z=\dfrac{1}{k}, k=1,2,\cdots$

且 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k}=0$，所以 $\forall\delta>0$，在

$0<|z|<\delta$ 内有无穷多个奇点，

即 $z=0$ 不是函数 $\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{z}}$ 的孤立奇点.



注：若 z_0 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点，则由定义可知在去心领域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内，函数 $f(z)$ 可展成洛朗级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

因此，可根据洛朗级数中是否有负幂项来给孤立奇点进行分类。事实上，洛朗级数中所含 $(z-z_0)$ 负幂项部分反映了函数 $f(z)$ 在 z_0 点的奇异性质。

主要内容

1 孤立奇点的定义

2 孤立奇点的分类

3 函数的极点与零点的关系

4 函数在无穷远点的性态

2 孤立奇点的分类

（1）可去奇点： 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 处的洛朗级数中不含 $z-z_0$ 的负幂项，即当 $n=-1,-2,-3,\cdots$ 时 $c_n=0$，

则称孤立奇点 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点.

$$f(z)=\boxed{c_0+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots}.$$

这个幂级数的收敛半径至少为 $\delta>0$, 和函数 $S(z)$ 在 z_0 处解析.

无论 $f(z)$ 在 z_0 是否有定义, 都可定义:

$$f(z_0) \triangleq c_0 = \lim_{z \to z_0} f(z) = S(z_0),$$

则在 $|z - z_0| < \delta$ 内解析, 且 $f(z) \equiv S(z)$.

反之, 若 $f(z)$ 在 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析, 且极限

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 存在, 则取 $0 < \rho < \delta, C_\rho : |z - z_0| = \rho$ 由 $|f(z)| \leq M$

因此 $|c_n| = \left| \dfrac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \dfrac{1}{2\pi} \cdot \dfrac{M}{\rho^{n+1}} \cdot 2\pi\rho = \dfrac{M}{\rho^n} \to 0 (\rho \to 0, n < 0)$

则 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点.

定理1 设 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内解析， 则 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0$, 其中 c_0 是有限复常数.

判别可去奇点的方法:

- **定义判断:**

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots.$$

- **极限判断:**

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=c_0.$$

例4： 设 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$， 由于 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$， 或者在 $z=0$ 的

去心邻域内有：$\dfrac{\sin z}{z}=\dfrac{1}{z}\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}+\cdots\right)$ 不含 z 的负幂项，

则 $z=0$ 为 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ 的可去奇点.

如果补充 $\dfrac{\sin z}{z}$ 在 $z=0$ 的定义为1，则函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$

在复平面上处处解析.

例5： 设 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z}$，证明它在全平面解析.

解： 因为 $f(z)=1+\dfrac{1}{2!}z^1+\dfrac{1}{3!}z^2+\cdots$，所以 $z=0$ 为可去奇点. 如果补充 $\dfrac{e^z-1}{z}$ 在 $z=0$ 的定义为1，则函数 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z}$ 在复平面上处处解析. 事实上：

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=(e^z)'|_{z=0}=1.$$

（2）极点： 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 处的洛朗级数中含有限个 $z-z_0$ 的负幂项，即只有有限个(至少一个)整数 $m>0$, 使得 $c_{-m}\neq 0$, 则称孤立奇点 z_0 为 $f(z)$ 的极点.

如果存在正整数 m, 使得 $c_{-m}\neq 0$, 而对于整数 $n<-m$, 有 $c_n=0$, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点.

进一步洛朗级数为：

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots$$

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\left[c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+c_{-m+2}(z-z_0)^2+\cdots\right],$$

令 $g(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+c_n(z-z_n)^{n+m}+\cdots,$

则 $g(z)$ 在 $|z-z_0|<\delta$ 内解析，且 $g(z_0)=c_{-m}\neq 0,$

即

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z).$$

由此，可以建立利用极限判定孤立奇点是否为极点方法.

定理2 设 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内解析，则 z_0 是

$f(z)$ 的极点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty.$

证明： 必要性显然，只需证明充分性．如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$,

则对 $\forall M>0, \exists \rho_0<\delta$, 满足 $0<|z-z_0|<\delta$ 时, $|f(z)|>M$.

令 $F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$, 则 $\lim\limits_{z\to z_0} F(z)=0$，因此 z_0 要么为其可去

奇点，要么为解析点，所以

$$F(z)=c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots,$$

由$F(z)\neq 0$, 不妨设 $c_1=c_2=\cdots=c_{m-1}=0,\ c_m\neq 0$

因此 $F(z)=(z-z_0)^m[c_m+c_{m+1}(z-z_0)+\cdots+c_{n-m}(z-z_0)^{n-m}+\cdots]$

令 $\varphi(z)=c_m+c_{m+1}(z-z_0)+\cdots+c_{n-m}(z-z_0)^{n-m}+\cdots,$

则 $\varphi(z)$ 在 $|z-z_0|<\rho_0$ 内解析，且 $\varphi(z_0)=c_m\neq 0,$

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\psi(z),\ \psi(z)=\frac{1}{\varphi(z)}}$$

由此 $\psi(z)$ 在 $|z-z_0|<\rho_0$ 内解析，且 $\psi(z_0)=\dfrac{1}{c_m}\neq 0.$

判别函数极点的方法：

- **定义判别：** $f(z)$ 的洛朗展式中含有 $z-z_0$ 的有限项负幂项.

- **等价形式判别：** 在点 z_0 的某去心邻域内有

$$f(z)=(z-z_0)^{-m}g(z)\ (m\geq 1),$$

其中 $g(z)$ 在 z_0 的邻域内解析，且 $g(z_0)\neq 0.$

- **极限判别：**

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty.$$

例6： 函数 $f(z)=\dfrac{z-2}{(z^2+1)(z-1)^3}$，求出奇点，并判别类型.

解： $z=\pm i$ 和 $z=1$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点.

$$f(z)=(z-1)^{-3}(z-i)^{-1}(z+i)^{-1}(z-2),$$

所以，$z=\pm i$ 是 $f(z)$ 的 1 级极点，

$z=1$ 是 $f(z)$ 的 3 级极点.

(3）本性奇点： 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 处的洛朗级数中含有无穷多个系数非零的 $z-z_0$ 负幂项，即存在无限个整数 $n<0$，使得 $c_n\neq 0$，则称孤立奇点 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点.

$$f(z)=\cdots+\frac{c_{-m}}{z^m}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z}+c_0+c_1 z+\cdots \quad \left(0<|z|<\delta\right),$$ 无穷多负幂项

$$f(z)=\cdots+\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots \quad \left(0<|z-z_0|<\delta\right).$$

定理3 设 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内解析，则 z_0 是

$f(z)$ 的本性奇点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在有限或无穷的极限.

Weierstrass得到了如下重要结论：

设 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内解析，如果 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点，则对任何有限或无穷的复数 A 都存在点列 $\{z_n\}$，使得 $z_n\to z_0$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=A$.

注： 在本性奇点的无论怎样小的去心邻域内，函数可以取以任意接近于预先给定的任何数值（有限的或无穷的）.

例7： 证明 $z=0$ 是 $e^{\frac{1}{z}}$ 和 $\sin\frac{1}{z}$ 的本性奇点.

解：

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots\quad\left(0<|z|<+\infty\right),$$

$$\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\cdots\quad\left(0<|z|<+\infty\right).$$

无穷多负幂项

或 $e^{\frac{1}{z}}=1=e^{0+2k\pi i}$, $\frac{1}{z_k}=2k\pi i$, $z_k=\frac{1}{2k\pi i}$, $\lim\limits_{k\to\infty}e^{\frac{1}{z_k}}=1$

$e^{\frac{1}{z}}=-1=e^{\pi i+2m\pi i}$, $z_m=\frac{1}{2m\pi i+\pi i}$, $\lim\limits_{m\to\infty}e^{\frac{1}{z_m}}=-1$

综上所述:

孤立奇点	Laurent级数的特点	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$
可去奇点	无负幂项	存在且为有限值
M 级极点	含有有限个负幂项 关于$(z-z_0)^{-1}$的最高幂为 $(z-z_0)^{-m}$	∞
本性奇点	含无穷多个负幂项	不存在且不为 ∞

主要内容

1 孤立奇点的定义

2 孤立奇点的分类

3 函数的极点与零点的关系

4 函数在无穷远点的性态

3 函数的极点与零点的关系

引入：如果 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点，则

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z),$$

其中 $g(z)$解析且$g(z_0)\neq 0$.因此可补充 z_0 定义，有

$$\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\frac{1}{g(z)},$$

z_0 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的零点，为此只需要讨论函数零点与极点

的关系，为判断函数的极点提供一个较为简便的方法。

.

m 级零点： 不恒为零的解析函数 $f(z)$，如果可以表示为

$f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, 其中 $g(z)$ 在 z_0 解析，并且 $g(z_0)\neq 0$

m 为正整数，则称 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点.

定理4(零点判定定理)

若 $f(z)$ 在 z_0 解析，则 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点

$$\Leftrightarrow f^{(n)}(z_0)=0, f^{(m)}(z_0)\neq 0, n=0,1,2,\cdots,m-1$$

注： 利用解析函数的定义及泰勒定理，很容易验证定理的结论.

例8： 证明 $z=0$ 是函数 $f(z)=z-\sin z$ 的三级零点

证： 由于 $f'(z)|_{z=0}=(1-\cos z)|_{z=0}=0,$

$$f''(z)|_{z=0}=\sin z|_{z=0}=0,\ f'''(z)|_{z=0}=\cos z|_{z=0}=1.$$

零点孤立性定理： 一个不恒等于零的解析函数的零点是孤立的.

证明： 设 z_0 为函数 $f(z)$ 的 m 级零点，由定义可知

$f(z)=(z-z_0)^m g(z)$，其中 $g(z)$ 在 z_0 解析，因此在 z_0 连续，

并且 $g(z_0)\neq 0$，则由极限的保号性可知，存在 z_0 的一个邻域，使得在该领域内 $f(z)\neq 0$.

定理5（零点与极点的关系）

z_0是解析函数$f(z)$的m级极点$\Leftrightarrow z_0$是$\dfrac{1}{f(z)}$的m级零点.

注: 定理5将判定解析函数$f(z)$的极点问题转化为判定解析函数$\dfrac{1}{f(z)}$的零点问题，为判定函数极点提供了一个简洁的方法.

例9: 求函数$f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$的所有孤立奇点，如果是极点，指出其级数.

解: $\sin z=0 \Rightarrow z=k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 并且$(\sin z)'|_{z=k\pi}=(-1)^k \neq 0$

故$z=k\pi$ 是 $\sin z$ 的一级零点，即为$\dfrac{1}{\sin z}$的一级极点.

例10： 求 $f(z)=\dfrac{1}{e^z+1}$ 的孤立奇点，并指出奇点的类型.

解： $z_k=(2k+1)\pi i\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是 e^z+1 的零点，

但是 $(e^z+1)'=e^z$， $e^{(2k+1)\pi i}=-1\neq 0$,

故 $z_k\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是 e^z+1 的1级零点.

因此，$z_k\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是 $f(z)$ 的1级极点.

例11： 考虑函数 $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^5}$.

不是5级极点

推论： 设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$,

若 z_0 是 $P(z)$ 的 m 级零点, 是 $Q(z)$ 的 n 级零点,

则当 $n>m$ 时, z_0 是 $f(z)$ 的 $n-m$ 级极点;

而当 $n<m$ 时, z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点.

例12： 考虑函数 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^2}$.

$z=0$ 是 e^z-1 的 1 级零点, 是 z^2 的 2 级零点,

因此 $z=0$ 是 $f(z)$ 的 1 级极点.

主要内容

1 孤立奇点的定义

2 孤立奇点的分类

3 函数的极点与零点的关系

4 函数在无穷远点的性态

4 函数在无穷远点的性态

讨论函数 $f(z)$ 在扩充复平面 C^* 上无穷远点的性态，由于函数在无穷远点 ∞ 是没有定义的，所以点 ∞ 总是函数 $f(z)$ 的一个奇点.

（1）孤立奇点：如果函数 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的去心邻域

$$\overset{\circ}{U}(\infty)=\{z \mid 0<R<|z|<\infty\}$$

内解析，则称 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点。

注： 如果函数 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点，作变换

$z=\dfrac{1}{t}$，则 $\varphi(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ 在去心邻域 $0<|t|<\dfrac{1}{R}$

（或当 $R=0$ 时，$0<|t|<+\infty$）内解析，即 $t=0$

是 $\varphi(t)$ 的孤立奇点.

类似地可以定义 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点、

极点或本性奇点.

设 $f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 内解析，且其 Laurent级数

展开式为 $$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

如果展开式中不含有z 的正幂项，则称 $z=\infty$是 $f(z)$

的可去奇点；　如果展开式中含有 z 的有限个正幂项

(至少含有一项)，且最高次幂为m，则称 $z=\infty$是 $f(z)$的

m 级极点；　如果展开式中含有 z 的无穷多个正幂项，

则称 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点.

例13： $f(z)=\dfrac{z}{1+z}$ 在 $\mathring{U}(\infty)=\{z \mid 1<|z|<\infty\}$

内解析，故 Laurent级数展开式为：

$$f(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{z^n}+\cdots$$

则 $z=\infty$是$f(z)$的可去奇点。

$f(z)=z+\dfrac{1}{z}$，则 $z=\infty$是 $f(z)$的一级极点。

$$f(z)=\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots$$

则 $z=\infty$是$f(z)$的本性奇点.

（2）极限判别方法：

设 $f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 内解析，则

（i） $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点充分必要条件是存在极限 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=c_0$，其中$c_0$是有限复常数.

（ii） $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的极点充分必要条件是

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty,$$

（iii） $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点充分必要条件是

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 不存在有限与无穷的极限.

例14： 函数 $f(z)=\dfrac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$ 在扩充复平面内有些什么类型的奇点？如果是极点，指出其级数.

解： 函数除 $z=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 外，处处解析（$|z|<\infty$）

由于 $(\sin\pi z)'=\pi\cos\pi z$ 在 $z=0,\pm1,\cdots$ 处不为零

则 $z=0,\pm1,\cdots$ 是 $\sin\pi z$ 的一级零点极点，故除 $1,-1,2$ 外，这些点是 $f(z)$ 的3级极点.

又由于 $z^2-1=(z+1)(z-1)$, 则 1，-1是 $f(z)$ 的2级极点.

当 $z=2$ 时，$\lim\limits_{z\to 2} f(z)=\dfrac{3}{\pi^3}$，则2是可去奇点.

当 $z=\infty$时，由于

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{(1-t)^2(1-2t)^3}{t^5\sin^3(\pi/t)}$$

则 $t_n=\dfrac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$，$t=0$ 不是孤立奇点.

因此 $z=\infty$ 不是 $f(z)$ 的孤立奇点.