离散数学

浙江理工大学期末试题汇编

（答案册）

学校：____________________

专业：____________________

班级：____________________

姓名：____________________

学号：____________________

（此试卷为 2022 年第二版 第 1 次发行）

目录

说明：

《离散数学 B》为计算机类专业学生所修科目，《离散数学》为理学院数学系专业所有科目。

创琦杂谈学习交流群里还有其他试卷，不方便整理到文档上，请大家自取。

更多信息

试卷整理人：张创琦　　　　　　微信公众号：创琦杂谈

试卷版次：2022 年 5 月 13 日 第二版 第 1 次发行

本人联系 QQ 号：1020238657（勘误请联系本人）

创琦杂谈学习交流群（QQ 群）群号：749060380

cq 数学物理学习群（QQ 群）群号：967276102

cq 计算机编程学习群（QQ 群）群号：653231806

送给大家一段文摘：

当欢笑淡成沉默，当信心变成失落，我走近梦想的脚步，是否依旧坚定执着；当笑颜流失在心的沙漠，当霜雪冰封了亲情承诺，我无奈的心中，是否依然碧绿鲜活。

有谁不渴望收获，有谁没有过苦涩，有谁不希望生命的枝头挂满丰硕，有谁愿意让希望变成梦中的花朵。现实和理想之间，不变的是跋涉，暗淡与辉煌之间，不变的是开拓。

甩掉世俗的羁绊，没谁愿意，让一生在碌碌无为中度过。整理你的行装，不同的起点，可以达到同样辉煌的终点。人生没有对错，成功永远属于奋斗者。

——汪曾祺《生活》

1 浙江理工大学 2012—2013 学年第 2 学期《离散数学 B》期末 A 卷

一 填空题

1. （2）（4）是命题；（2）是复合命题

2．1

3. （1）（4）是重言式，（2）（3）是矛盾式

4．$(F(a)\wedge F(b)\wedge F(c)\rightarrow(G(a)\wedge G(b)\wedge G(c))$

5．F，F

6．任意两数 x、y,如果 x 是偶数且能除尽 y，则 y 一定是偶数

7．$(\exists x)(\exists y)(\forall z)(P(x,y)\vee\neg Q(z)\vee R(x))$（答案不唯一）

8．21

9．为等价性的关系：R_2

10．2(x+1)

11．m^n 、n=m

12．6

13. $\{3\}$；　$\{\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

二．选择题

1．B　2．C　3．B　4．A　5．A　6.D　7.C　8.A

三．解答题

1. （6 分）证法一、左边$=A\cap((B\cup C)-(B\cap C))=A\cap(B\cup C)-A\cap B\cap C$；（3 分）

右边$=(A\cap B)\cup(A\cap C)-(A\cap B)\cap(A\cap C)=A\cap(B\cup C)-(A\cap B\cap C)$。（3 分）

证法二、左边$=A\cap((B-C)\cup(C-B))=(A\cap(B-C))\cup(A\cap(C-B))$

$$=((A\cap B)-(A\cap C))\cup((A\cap C)-(A\cap B))=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$$

2. （6 分） 设题中的公式为 G

$G=\neg(P\rightarrow Q)\vee(Q\wedge(\neg P\rightarrow R))$

$=\neg(\neg P\vee Q)\vee(Q\wedge(P\vee R))$

$=(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge(P\vee R))$

$=(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge P)\vee(Q\wedge R)$ （2 分）

$=(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$ （2 分）

$=(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

$=m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_6\vee m_7=\Sigma(3,4,5,6,7)$. （2 分）

3. （5 分） $G=(\forall xP(x)\vee\exists yQ(y))\rightarrow\forall xR(x)$

$=\neg(\forall xP(x)\vee\exists yQ(y))\vee\forall xR(x)$ （1 分）

$=(\neg\forall xP(x)\wedge\neg\exists yQ(y))\vee\forall xR(x)$ （1 分）

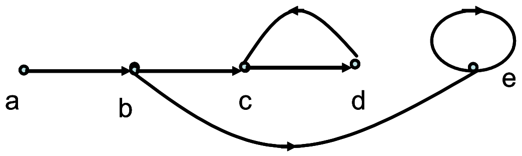
$= (\exists x\neg P(x)\wedge\forall y\neg Q(y))\vee\forall zR(z)$ （1 分）

$= \exists x\forall y\forall z((\neg P(x)\wedge\neg Q(y))\vee R(z))$ （2 分）

4.（1）关系矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

（2）关系图：



（3）自反闭包：

$$\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>,<e,e>,<a,b>,<b,c>,<c,d>,<d,c>,<b,e>\}$$

（4）对称闭包：

$$\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,b>,<c,d>,<d,c>,<b,e>,<e,b>,<e,e>\}$$

（5）传递闭包：

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$A^4=A^2, A^5=A^3,$$

故有

$$A_{t(R)}=A+A^2+A^3+A^4+A^5=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}。$$

也可以用 Warshall 算法或直接画传递闭包的关系矩阵来求解 (每小题 2 分)

5．(5 分) (1) 初级回路（圈）c1,c2, c1≌c2,当且仅当 c1 与 c2 长度相等。有 3 条初级回路非同构，长度分别为 1,2,3。

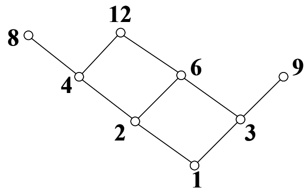
(2)非同构的简单回路非同构，除以上 3 条，还有 1 条，共 4 条。

(3) D 中 a 到 d 的短程线是唯一的，即为 aed,d<a,d> = 1。

(4) D 中 d 到 a 的短程线是唯一的，即为 deba,d<d,a> = 2。

(5) D 中存在经过每个顶点至少一次的通路，如 a e d b c，所以是单向连通图，但没有经过每个顶点至少一次的回路，所以 D 不是强连通图。(每小题 1 分)

6.（8 分） (1)



（4 分）

(2) B 无上界，也无最小上界。(1 分) 下界 1，3；最大下界是 3.（1 分）

(3) A 无最大元，最小元是 1，(1 分) 极大元 8，12，9；（1 分） 极小元是 1.（1 分）

7.（8 分）解：(1).设 F(x)：x 喜欢步行

G(x)：x 喜欢骑自行车

H(x): x 喜欢乘汽车

(2).前提:$\forall x(F(x)\rightarrow\neg G(x))$

$\forall x(G(x)\vee H(x))$

$\exists x\neg H(x)$

结论： $\exists x\neg F(x)$ （2 分）

(3).证明

1.$\exists x\neg H(x)$	前提引入	
2.$\neg H(c)$	1 EI 规则	（1 分）
3.$\forall x(G(x)\vee H(x))$	前提引入	
4.$G(c)\vee H(c)$	3 UI 规则	（1 分）
5.$G(c)$	2,4 析取范式	（1 分）
6.$\forall x(F(x)\rightarrow\neg G(x))$	前提引入	
7.$F(c)\rightarrow\neg G(c)$	6 UI 规则	（1 分）
8.$\neg F(c)$	5,7 据取式	（1 分）
9. $\exists x\neg F(x)$	8 EG 规则	（1 分）

2 浙江理工大学 2017—2018 学年第 2 学期《离散数学》期末 A 卷

一 选择题（每题 3 分，共 5 题，共 15 分）

1 C　　2 D　　3 B　　4 A　　5 C

二 判断题（正确打“√”，错误打“×”，每题 2 分，共 10 分）

1 ×　　2 ×　　3 √　　4 √　　5 √

三 填空题（每题 3 分，共 15 分）

11 重言式

12

$\neg\exists x(G(x)\wedge\forall y(F(y)\rightarrow H(x,y)))$ 或 $\forall x(G(x)\rightarrow\exists y(F(y)\wedge\neg H(x,y)))$

其中 $F(x)$：x 是火车，$G(y)$：y 是汽车，$H(x,y)$:x 比 y 块.

13

$a\cup b-a\cap b$ 或 $a\oplus b$

14　$\{a, b\}$　　　　　15　4

四 解答题（共 6 题，计 60 分）

16

解: 设 P：A 是第一；Q：B 是第二；R：C 是第二；S：D 是第四；E:A 是第二，根据题意有：

$$((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)) \wedge ((R \wedge \neg S) \vee (\neg R \wedge S)) \wedge ((E \wedge \neg S) \vee (\neg E \wedge S))$$

$$\Leftrightarrow ((\neg P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S)$$

$$\vee \underline{(P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge S)}$$

$$\vee \underline{(\neg \wedge Q \wedge R \wedge \neg S)}$$

$$\vee(\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S))$$

$$\wedge((E \wedge \neg S) \vee (\neg E \wedge S))$$

因为 $(P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge S)$ 与 $(\neg P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S)$ 不符题意，故可在式中删去，原式即为：

$$((P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S)) \wedge ((E \wedge \neg S) \vee (\neg E \wedge S))$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S \wedge E \wedge \neg S)$$

$$\vee(P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S \wedge \neg E \wedge S)$$

$$\vee(\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S \wedge E \wedge \neg S)$$

$$\vee(\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S \wedge \neg E \wedge S)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S \wedge E) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S \wedge \neg E)$$

因 R 与 E 矛盾，故 $\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S \wedge \neg E$ 为真。即 A 不是第一，B 为第二，C 不是第二，D 为第四，A 不是第二，于是得到：
C 为第一，B 为第二，A 为第三，D 位第四.

17

解：

设 $F(x)$:x 是人，$G(x)$:x 喜欢吃蔬菜，$H(x)$:x 喜欢吃鱼.

前提：$\forall x(F(x) \to G(x)), \neg\forall x(F(x) \to H(x))$

结论：$\exists x(F(x) \wedge G(x) \wedge \neg H(x))$.

证明: 用归谬法.

①	$\neg\exists x(F(x) \wedge G(x) \wedge \neg H(x))$	结论否定引入
②	$\forall x \neg(F(x) \wedge G(x) \wedge \neg H(x))$	①置换
③	$\neg(F(y) \wedge G(y) \wedge \neg H(y))$	② UI
④	$G(y) \to \neg F(y) \vee H(y))$	③置换
⑤	$\forall x(F(x) \to G(x)))$	前提引入
⑥	$F(y) \to G(y)$	⑤UI
⑦	$F(y) \to \neg F(y) \vee H(y)$	④⑥假言三段论
⑧	$F(y) \to H(y)$	⑦置换
⑨	$\forall y(F(y) \to H(y))$	⑧ UG
⑩	$\forall x(F(x) \to H(x)))$	⑨ 置换
⑪	$\neg\forall x(F(x) \to H(x))$	前提引入
⑫	$\forall x(F(x) \to H(x)) \wedge \neg\forall x((F(x) \to H(x)))$	⑩⑪ 合取
⑬	0	

18

证明：因为 f 是函数，所以 f^{-1} 是关系，则有：

$$\mathrm{dom} f^{-1} = \mathrm{ran} f = B, \mathrm{ran} f^{-1} = \mathrm{dom} f = A$$

对任意的 $y \in B$，假设有 x_1 和 $x_2 \in A$ 使得

$$y f^{-1} x_1 \wedge y f^{-1} x_2$$

成立，则由逆的定义有

$$x_1 f y \wedge x_2 f y$$

成立，由 f 的单射性可得 $x_1 = x_2$. 这说明对任意的 $y \in B$ 只有唯一的值与之对应。即 f^{-1} 是函数，且是从 B 到 A 的函数。又 $\mathrm{ran} f^{-1} = A$，所以 $f^{-1}: B \to A$ 是满射的。

对任意的 $y_1, y_2 \in B, y_1 \neq y_2$，假设存在 $x \in A$ 使得：

$$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$$

成立，那么必有：

$$f(x) = y_1 \wedge f(x) = y_2, y_1 \neq y_2,$$

与 f 是函数矛盾。所以 $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$. 即 f^{-1} $B \to A$ 是单射的。

19

解：

（1）$R_1=\{<3,3>,<3,1>,<3,5>\}$，$R_2=\{<3,3>,<3,1>,<3,5>\}$.

（2）$r(R)=\{<1,1>,<1,5>,<2,2>,<2,5>,<3,3>,<3,1>,<4,4>,<4,5>,<5,5>$
$,<6,6>\}$

$s(R)=\{<1,5>,<5,1>,<2,5>,<5,2>,<3,3>,<3,1>,<1,3>,<4,5>,<5,4>\}$

$t(R)=\{<1,5>,<2,5>,<3,3>,<3,1>,<3,5>,<4,5>\}$

20

解：

（1）无向图 G 的邻接矩阵以及各次幂如下：

$$\mathrm{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\2&0&0&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ \mathrm{A}^{(2)}=\begin{bmatrix}6&2&1&1\\2&4&2&0\\1&2&2&0\\1&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\mathrm{A}^{(3)}=\begin{bmatrix}11&12&7&1\\12&4&2&2\\7&2&1&2\\1&2&2&0\end{bmatrix},\ \mathrm{A}^{(4)}=\begin{bmatrix}42&22&12&7\\22&24&14&2\\12&14&9&1\\7&2&1&2\end{bmatrix}$$

（2）则 v_1 到 v_4 长度为 4 的通路数为：7 条；

（3）v_1 到 v_1 长度为 4 的回路数为：42 条；

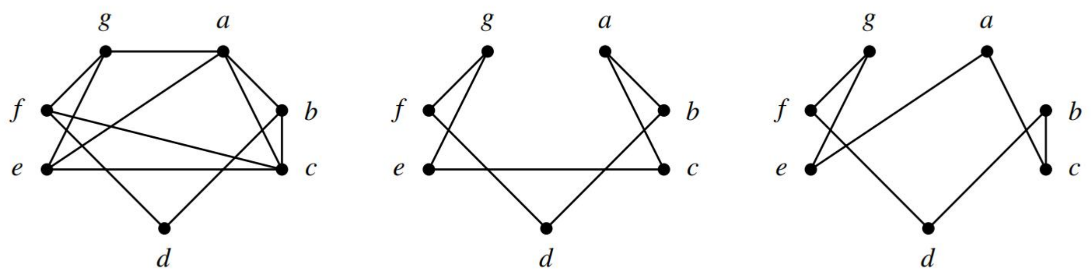
由于 $\mathrm{A}^{(1)}+\mathrm{A}^{(2)}+\mathrm{A}^{(3)}$ 的元素均大于 0，则 G 的可达矩阵为：

$$\mathrm{P}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

21

解：

作无向图 $G=<V,E>$，其中 $V=\{a,b,c,d,e,f,g\}$，$E=\{(u,v)|u,v\in V,u\neq v,且u与v会讲同一种语言\}$. 根据已知条件，可作出如下 G 的图形（左图）。易知该图是哈密顿图，右侧两图为哈密顿回路，因此可依此安排就坐.



3 安徽大学 2004—2005 学年第 2 学期《离散数学》期末 A 卷

一、单项选择

1．B; 2.D; 3.A; 4.C; 5.A; 6.C; 7.B; 8.D; 9.B; 10.C.

二、填空题

1 Φ，S，S； 2 c，b，b，a； 3 5，$\{3,7,11\}$，$\{4,8,0\}$； 4 交换群；

5 同构； 6 5； 7 9； 8 $k-1$。

三、求解题

1 解：子群有：$<\{0\},+_6>$，$<\{0,3\},+_6>$，$<\{0,2,4\},+_6>$。

$<\{0\},+_6>$的左陪集为：$\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{5\}$

$<\{0,3\},+_6>$的左陪集为：$\{0,3\}$，$\{1,4\}$，$\{2,5\}$

$<\{0,2,4\},+_6>$的左陪集为：$\{0,2,4\}$，$\{1,3,5\}$

2 答：（1）一个有向欧拉图一定是强连通图。因为G是欧拉图，存在欧拉回路C，G中的每个结点至少在C中出现一次。因而G中任意两点u，v都在C中，相互可达，故G是强连通的。（2）一个强连通图不一定是有向欧拉图。因为强连通图中每个结点的入度不一定等于其出度。

3 解：

（1）$A=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$ $A^2=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ $A^3=\begin{bmatrix}1&2&4&3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$

$A^4=\begin{bmatrix}1&2&6&4\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

（2）由A^4中$a_{14}^4=4$可知，v_1到v_4长度为4的路径有条（$e_1e_1e_4e_6$，$e_4e_6e_7e_6$，$e_1e_2e_5e_6$，$e_1e_3e_5e_6$）。

（3）由A^3中$a_{11}^3=1$可知，v_1到自身长度为3的回路有1条（$e_1e_1e_1$）。

（4）G是单向连通图。

四、证明题

1 证明：显然$\circ$是G上的二元运算（即满足封闭性），要证G是群，需证结合律成立，同时有单位元，每个元素有逆元。

$\forall a,b,c\in G$，有

$$(a\circ b)\circ c=(a*x*b)*x*c=a*x*(b*x*c)=a\circ(b\circ c)$$

运算是可结合的。

其次，x^{-1}是$<G,\circ>$的单位元。事实上，$\forall a\in G$，有

$$a\circ x^{-1}=a*x*x^{-1}=a\text{；}\ x^{-1}\circ a=x^{-1}*x*a=a$$

最后证明，$\forall a \in G$，$x^{-1} * a^{-1} * x^{-1}$ 是 a 在 $< G,\circ >$ 中的逆元。事实上，

$$a \circ (x^{-1} * a^{-1} * x^{-1}) = a * x * x^{-1} * a^{-1} * x^{-1} = x^{-1}$$

$$(x^{-1} * a^{-1} * x^{-1}) \circ a = x^{-1} * a^{-1} * x^{-1} * x * a = x^{-1}$$

由以上证明，$< G,\circ >$ 是群。

2 证明：（1）$(a * b) \oplus (c * d) \le ((a * b) \oplus c) * ((a * b) \oplus d)$ （公式(13)分配不等式）

又因为 $a * b \le a$，$a * b \le b$，所以 $(a * b) \oplus (c * d) \le (a \oplus c) * (b \oplus d)$。

（2）因为 $a \oplus a' = 1$，$1 * (b * c) = (b * c)$，所以有，

$$(a * c) \oplus (a' * b) \oplus (b * c) = (a * c) \oplus (a' * b) \oplus ((a \oplus a') * (b * c))$$

$$= (a * c) \oplus (a' * b) \oplus ((a * b * c) \oplus (a' * b * c))$$

$$= ((a * c) \oplus (a * c * b)) \oplus ((a' * b) \oplus (a' * b * c)) \quad \text{（吸收律）}$$

$$= (a * c) \oplus (a' * b)$$

即等式成立。

3 证明：（1）因图中结点数和边数分别为 $n = 6$，$m = 12$，根据欧拉公式 $n - m + k = 2$，得 $k = 8$。又 $\sum \deg(v_i) = 2m = 24$，而简单连通平面图的每个面至少由 3 条边围成，所以在 6 个结点 12 条边的连通平面简单图中，每个面由 3 条边围成。

（2）设 (n,m) 图为简单连通平面图，有 k 个面。（反证法）

若 $m = 7$，由欧拉公式知 $n + k = m + 2 = 9$，而每个面至少由 3 条边围成，有 $3k \le 2m$，则 $k \le \frac{2}{3}m = \frac{14}{3}$，且 k 是整数，所以 $k \le 4$；又对任结点 $v \in V$，$\deg(v) \ge 3$，有 $3n \le 2m$，故 $n \le \frac{2}{3}m = \frac{14}{3}$，且 n 是整数，所以 $n \le 4$。这样就有 $n + k \le 4 + 4 = 8$，与 $n + k = 9$ 矛盾，所以结论正确。

4 浙江理工大学 2019—2020 学年第 2 学期《离散数学》期末 A 卷

一、证明题（10 分）

1) $(\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R) \Leftrightarrow R$

证明: 左端 $\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee ((Q \vee P) \wedge R) \Leftrightarrow ((\neg P \wedge \neg Q) \wedge R)) \vee ((Q \vee P) \wedge R)$

$\Leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \wedge R) \vee ((Q \vee P) \wedge R) \Leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \vee (Q \vee P)) \wedge R$

$\Leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \vee (P \vee Q)) \wedge R \Leftrightarrow T \wedge R$(置换)$\Leftrightarrow R$

2) $\exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$

证明：$\exists x(A(x)\to B(x))\Leftrightarrow\exists x(\neg A(x)\lor B(x))\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)\lor\exists xB(x)\Leftrightarrow\neg\forall xA(x)\lor\exists xB(x)\Leftrightarrow\forall xA(x)\to\exists xB(x)$

二、求命题公式$(P\lor(Q\land R))\to(P\land Q\land R)$的主析取范式和主合取范式（10 分）

证明：$(P\lor(Q\land R))\to(P\land Q\land R)\Leftrightarrow\neg(P\lor(Q\land R))\lor(P\land Q\land R))$

$\Leftrightarrow$（$\neg P\land(\neg Q\lor\neg R)$）$\lor(P\land Q\land R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\land\neg Q)\lor(\neg P\land\neg R))\lor(P\land Q\land R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\land\neg Q\land R)\lor(\neg P\land\neg Q\land\neg R)\lor(\neg P\land Q\land\neg R))\lor(\neg P\land\neg Q\land\neg R))\lor(P\land Q\land R)$

$\Leftrightarrow m0\lor m1\lor m2\lor m7$

$\Leftrightarrow M3\lor M4\lor M5\lor M6$

三、推理证明题（10 分）

1）$C\lor D$, $(C\lor D)\to\neg E$, $\neg E\to(A\land\neg B)$, $(A\land\neg B)\to(R\lor S)\Rightarrow R\lor S$

证明：(1) $(C\lor D)\to\neg E$

(2) $\neg E\to(A\land\neg B)$

(3) $(C\lor D)\to(A\land\neg B)$

(4) $(A\land\neg B)\to(R\lor S)$

(5) $(C\lor D)\to(R\lor S)$

(6) $C\lor D$

(7) $R\lor S$

2) $\forall x(P(x)\to Q(y)\land R(x))$，$\exists xP(x)\Rightarrow Q(y)\land\exists x(P(x)\land R(x))$

证明（1）$\exists xP(x)$

(2)$P(a)$

(3)$\forall x(P(x)\to Q(y)\land R(x))$

(4)$P(a)\to Q(y)\land R(a)$

(5)$Q(y)\land R(a)$

(6)$Q(y)$

(7)$R(a)$

(8)$P(a)$

(9)$P(a)\land R(a)$

(10)$\exists x(P(x)\land R(x))$

(11)$Q(y)\land\exists x(P(x)\land R(x))$

四、设 m 是一个取定的正整数，证明：在任取 $m+1$ 个整数中，至少有两个整数，它们的差是 m 的整数倍

证明　设a_1，a_2，…，a_{m+1}为任取的 $m+1$ 个整数，用 m 去除它们所得余数只能是 0，1，…，$m-1$，由抽屉原理可知，a_1，a_2，…，a_{m+1}这 $m+1$ 个整数中至少存在两个数a_s和a_t，它们被 m 除所得余数相同，因此a_s和a_t的差是 m 的整数倍。

五、已知 A、B、C 是三个集合，证明 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ （15 分）

证明　∵$x\in A-(B\cup C)\Leftrightarrow x\in A\land x\notin(B\cup C)\Leftrightarrow x\in A\land(x\notin B\land x\notin C)\Leftrightarrow(x\in A\land x\notin B)\land(x\in A\land x\notin C)\Leftrightarrow x\in(A-B)\land x\in(A-C)\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)$ ∴$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

六、已知 R、S 是 N 上的关系，其定义如下：$R=\{<x,y>|\ x,y\in N\land y=x^2\}$，$S=\{<x,y>|\ x,y\in N\land y=x+1\}$。求 R^{-1}、$R*S$、$S*R$、$R\restriction\{1,2\}$、$S[\{1,2\}]$（10 分）

解：$R^{-1}=\{<y,x>|\ x,y\in N\land y=x^2\}$，$R*S=\{<x,y>|\ x,y\in N\land y=x^2+1\}$，$S*R=\{<x,y>|\ x,y\in N\land y=(x+1)^2\}$，

七、若 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$ 是双射，则$(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$（10 分）。

证明：因为 f、g 是双射，所以 $gf: A\to C$ 是双射，所以 gf 有逆函数$(gf)^{-1}: C\to A$。同理可推 $f^{-1}g^{-1}$:

C→A 是双射。

因为$<x,y>\in f^{-1}g^{-1}\Leftrightarrow$存在 z（$<x,z>\in g^{-1}\wedge<z,y>\in f^{-1}$）$\Leftrightarrow$存在 z（$<y,z>\in f\wedge<z,x>\in g$）$\Leftrightarrow<y,x>\in gf\Leftrightarrow<x,y>\in$（gf）$^{-1}$,所以（gf）$^{-1}=f^{-1}g^{-1}$。

$R\restriction\{1,2\}=\{<1,1>,<2,4>\}$，$S[\{1,2\}]=\{1,4\}$。

八、（15 分）设$<A，*>$是半群，对 A 中任意元 a 和 b，如 $a\neq b$ 必有 $a*b\neq b*a$，证明：

(1)对 A 中每个元 a，有 $a*a=a$。

(2)对 A 中任意元 a 和 b，有 $a*b*a=a$。

(3)对 A 中任意元 a、b 和 c，有 $a*b*c=a*c$。

证明　由题意可知，若 $a*b=b*a$，则必有 $a=b$。

(1)由$(a*a)*a=a*(a*a)$，所以 $a*a=a$。

(2)由 $a*(a*b*a)=(a*a)*(b*a)=a*b*(a*a)=(a*b*a)*a$，所以有 $a*b*a=a$。

(3)由$(a*c)*(a*b*c)=(a*c*a)*(b*c)=a*(b*c)=(a*b)*c=(a*b)*(c*a*c)=(a*b*c)*(a*c)$，所以有 $a*b*c=a*c$。

九、给定简单无向图 $G=<V，E>$，且$|V|=m$，$|E|=n$。试证：若 $n\geqslant C_{m-1}^{2}+2$，则 G 是哈密尔顿图

证明　若 $n\geqslant C_{m-1}^{2}+2$，则 $2n\geqslant m^2-3m+6$　（1）。

若存在两个不相邻结点 u、v 使得 $d(u)+d(v)<m$，则有 $2n=\sum_{w\in V}d(w)<m+(m-2)(m-3)+m=m^2-3m+6$，与（1）矛盾。所以，对于 G 中任意两个不相邻结点 u、v 都有 $d(u)+d(v)\geqslant m$，所以 G 是哈密尔顿图。

5 浙江理工大学 2019—2020 学年第 2 学期《离散数学》期末 B 卷

一、证明题（10 分）

1)$((P\vee Q)\wedge\neg(\neg P\wedge(\neg Q\vee\neg R)))\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg R)\Leftrightarrow T$

证明　左端$\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge(P\vee(Q\wedge R)))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))$(摩根律) $\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(P\vee R))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))$(分配律) $\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge(P\vee R))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))$ (等幂律) $\Leftrightarrow T$　　(代入)

2)$\forall x(P(x)\to Q(x))\wedge\forall xP(x)\Leftrightarrow\forall x(P(x)\wedge Q(x))$

证明　$\forall x(P(x)\to Q(x))\wedge\forall xP(x)\Leftrightarrow\forall x((P(x)\to Q(x)\wedge P(x))\Leftrightarrow\forall x((\neg P(x)\vee Q(x)\wedge P(x))\Leftrightarrow\forall x(P(x)\wedge Q(x))\Leftrightarrow\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)\Leftrightarrow\forall x(P(x)\wedge Q(x))$

二、求命题公式$(\neg P\to Q)\to(P\vee\neg Q)$ 的主析取范式和主合取范式（10 分）

解：$(\neg P\to Q)\to(P\vee\neg Q)\Leftrightarrow\neg(\neg P\to Q)\vee(P\vee\neg Q)\Leftrightarrow\neg(P\vee Q)\vee(P\vee\neg Q)\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\vee\neg Q)\Leftrightarrow(\neg P\vee P\vee\neg Q)\wedge(\neg Q\vee P\vee\neg Q)\Leftrightarrow(P\vee\neg Q)\Leftrightarrow M1\Leftrightarrow m0\vee m2\vee m3$

三、推理证明题（10 分）

1)$(P\to(Q\to S))\wedge(\neg R\vee P)\wedge Q\Rightarrow R\to S$

证明：（1）R　　　附加前提

(2)$\neg R\vee P$　　　P

(3)P　　　$T(1)(2),I$

(4)$P\to(Q\to S)$　　　P

(5)$Q\to S$　　　$T(3)(4),I$

(6)Q　　　P

(7)S　　　$T(5)(6),I$

(8)$R\to S$　　　CP

2) $\forall x(P(x)\vee Q(x))$，$\forall x\neg P(x)\Rightarrow\exists x\, Q(x)$

证明：(1)$\forall x\neg P(x)$　　　P

(2)$\neg P(c)$　　　T(1),US

(3)$\forall x(P(x)\vee Q(x))$　　　P

(4)$P(c)\vee Q(c)$　　　T(3),US

(5)$Q(c)$　　　T(2)(4),I

(6)$\exists x\, Q(x)$　　　T(5),EG

四、例 5 在边长为 1 的正方形内任意放置九个点，证明其中必存在三个点，使得由它们组成的三角形（可能是退化的）面积不超过 1/8（10 分）。

证明：把边长为 1 的正方形分成四个全等的小正方形，则至少有一个小正方形内有三个点，它们组成的三角形（可能是退化的）面积不超过小正方形的一半，即 1/8。

五、已知 A、B、C 是三个集合，证明 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ （10 分）

证明：∵$x\in A\cap(B\cup C)\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in(B\cup C)\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)\Leftrightarrow x\in(A\cap B)\vee x\in A\cap C\Leftrightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ∴$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

六、$\pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$是集合 A 的一个划分，定义 $R=\{<a,b>|a、b\in A_i,I=1,2,\cdots,n\}$，则 R 是 A 上的等价关系（15 分）。

证明：$\forall a\in A$ 必有 i 使得 $a\in A_i$，由定义知 aRa，故 R 自反。

$\forall a,b\in A$，若 aRb ，则 $a,b\in A_i$，即 $b,a\in A_i$，所以 bRa，故 R 对称。

$\forall a,b,c\in A$，若 aRb 且 bRc，则 $a,b\in A_i$ 及 $b,c\in A_j$。因为 $i\neq j$ 时 $A_i\cap A_j=\Phi$，故 i=j，即 $a,b,c\in A_i$，所以 aRc，故 R 传递。

总之 R 是 A 上的等价关系。

七、若 $f:A\to B$ 是双射，则 $f^{-1}:B\to A$ 是双射（15 分）。

证明：对任意的 $x\in A$，因为 f 是从 A 到 B 的函数，故存在 $y\in B$，使$<x,y>\in f$，$<y,x>\in f^{-1}$。

所以,f^{-1}是满射。

对任意的 $x\in A$，若存在 $y_1,y_2\in B$，使得 $\langle y_1,x\rangle\in f^{-1}$ 且 $\langle y_2,x\rangle\in f^{-1}$,则有 $\langle x,y_1\rangle\in f$ 且 $\langle x,y_2\rangle\in f$。因为 f 是函数，则 $y_1=y_2$。所以，f^{-1}是单射。 因此 f^{-1}是双射。

八、设 $\langle G,*\rangle$ 是群，$\langle A,*\rangle$ 和 $\langle B,*\rangle$ 是 $\langle G,*\rangle$ 的子群，证明：若 $A\cup B=G$，则 $A=G$ 或 $B=G$（10 分）。

证明 假设 $A\neq G$ 且 $B\neq G$，则存在 $a\in A$，$a\notin B$，且存在 $b\in B$，$b\notin A$（否则对任意的 $a\in A$，$a\in B$，从而 $A\subseteq B$，即 $A\cup B=B$，得 $B=G$，矛盾。）

对于元素 $a*b\in G$，若 $a*b\in A$，因 A 是子群，$a^{-1}\in A$，从而 $a^{-1}*(a*b)=b\in A$，所以矛盾，故 $a*b\notin A$。同理可证 $a*b\notin B$，综合有 $a*b\notin A\cup B=G$。

综上所述，假设不成立，得证 $A=G$ 或 $B=G$。

九、若无向图 G 是不连通的，证明 G 的补图 $\overline{G}$ 是连通的（10 分）。

证明 设无向图 G 是不连通的，其 k 个连通分支为 G_1、G_2、…、G_k。任取结点 u、$v\in G$，若 u 和 v 不在图 G 的同一个连通分支中，则$[u,v]$不是图 G 的边，因而$[u,v]$是图 $\overline{G}$ 的边；若 u 和 v 在图 G 的同一个连通分支中，不妨设其在连通分支 G_i（$1\leqslant i\leqslant k$）中，在不同于 G_i 的另一连通分支上取一结点 w，则$[u,w]$和$[w,v]$都不是图 G 的边,，因而$[u,w]$和$[w,v]$都是 $\overline{G}$ 的边。综上可知，不管那种情况，u 和 v 都是可达的。由 u 和 v 的任意性可知，$\overline{G}$ 是连通的。

6 浙江理工大学 2019—2020 学年第 2 学期《离散数学》期末练习卷

一 选择题

1 A:③ B: ③ C:③ D:① E:② 2.A:① B: ② C:②

3.A:③ B: ④ C:⑥ 4.A:① B: ③ C:⑧ D:⑩

二、证明题

1 证明 左边$\Leftrightarrow$（$(p\wedge q)\vee p$）$\wedge$（$(p\wedge q)\vee\neg q$)） （分配律）

$\Leftrightarrow p\wedge$（$(p\wedge q)\vee\neg q$)） (吸收律)

$\Leftrightarrow p\wedge$（$(p\vee\neg q)\ \wedge\ (q\vee\neg q)$） （分配律）

$\Leftrightarrow p\wedge$（$(p\vee\neg q)\wedge 1$） （排中律）

$\Leftrightarrow p\wedge\ (p\vee\neg q)$ （同一律）

$\Leftrightarrow p$ （吸收律）

2.解：p：今天是星期三。

q：我有一次英语测验。

r：我有一次数学测验。

s：数学老师有事。

前提：$p\to(q\vee r)$, $s\to\neg r$, $p\wedge s$

结论：q

证明：①p∧s　　前提引入

②p　　①化简

③p→(q∨r)　　前提引入

④q∨r　　②③假言推理

⑤s　　①化简

⑥s→¬r　　前提引入

⑦¬r　　⑤⑥假言推理

⑧q　　④⑦析取三段论

推理正确。

三、计算

1.

$$(\forall x)(\exists y)(P(x,y)\to Q(x))$$
$$\Leftrightarrow (\exists y)((P(1,y)\to Q(1))\wedge(P(2,y)\to Q(2)))$$
$$\Leftrightarrow ((P(1,1)\to Q(1))\wedge(P(2,1)\to Q(2)))\vee((P(1,2)\to Q(1))\wedge(P(2,2)\to Q(2)))$$

$$P(1,1)=1,P(1,2)=1,P(2,1)=0,P(2,2)=1,Q(1)=1,Q(2)=0$$
$$\therefore\Leftrightarrow((1\to1)\wedge(0\to0))\vee((1\to1)\wedge(1\to0))$$
$$\Leftrightarrow 1$$

该公式的真值是 1，真命题。

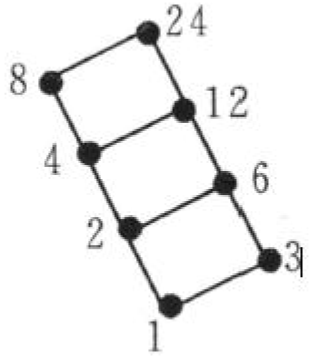
或者
$$(\forall x)(\exists y)(P(x,y)\to Q(x))\Leftrightarrow(\forall x)((P(x,1)\to Q(x))\vee(P(x,2)\to Q(x)))$$
$$\Leftrightarrow((P(1,1)\to Q(1))\vee(P(1,2)\to Q(1)))\wedge((P(2,1)\to Q(2))\vee(P(2,2)\to Q(2)))$$
$$\Leftrightarrow((T\to T)\vee(T\to T))\wedge((F\to F)\vee(T\to F))$$
$$\Leftrightarrow(T\vee T)\wedge(T\vee F)\Leftrightarrow T\wedge T\Leftrightarrow T$$

2、$r(R)=\{\langle1,1\rangle,\langle1,2\rangle,\langle2,1\rangle,\langle2,3\rangle,\langle3,4\rangle,\langle2,2\rangle,\langle3,3\rangle,\langle4,4\rangle\}$

$s(R)=\{\langle1,1\rangle,\langle1,2\rangle,\langle2,1\rangle,\langle2,3\rangle,\langle3,4\rangle,\langle3,2\rangle,\langle4,3\rangle\}$

$t(R)=\{\langle1,1\rangle,\langle1,2\rangle,\langle2,1\rangle,\langle2,3\rangle,\langle3,4\rangle,\langle1,3\rangle,\langle2,2\rangle,\langle2,4\rangle,\langle1,4\rangle\}$

3、（1）　R 是 A 上的偏序关系。



（2）极小元、最小元是1,极大元、 最大元是24。

四、

$$\begin{aligned}((p \to q) \to p) &\Leftrightarrow (\neg(\neg p \vee q) \vee p) \\ &\Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee p) \\ &\Leftrightarrow p \\ &\Leftrightarrow p \wedge (q \vee \neg q) \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \\ &\Leftrightarrow \sum (2,3)\end{aligned}$$

$\therefore$ 主合取范式 $\prod(0,1)$

$$\begin{aligned}((p \to q) \to p) &\Leftrightarrow (\neg(\neg p \vee q) \vee p) \\ &\Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee p) \\ &\Leftrightarrow p \\ &\Leftrightarrow p \wedge (q \vee \neg q) \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \\ &\Leftrightarrow \sum (2,3)\end{aligned}$$

$\therefore$ 主合取范式 $\prod(0,1)$