第二章　解析函数

第二讲 复变初等函数

数学与统计学院
吴慧卓

（棚拍）

在实变函数中不管是一元还是多元，都是先介绍初等函数，再介绍其连续性和可导性。为什么复变中先处理完导数和解析性之后再介绍初等函数呢?同学们在学习中如果能带这问题来体会，就会明白为什么要这样。

定义复变初等函数是一个创造性的工作，什么叫复指数函数，什么叫做复对数函数？这里既要继承指数函数和对数函数中最本质的东西，又要把实变的东西在复变中加以推广，实现起来是需要一定的基础和技巧的。

因此，将实变函数中的初等函数推广到复变函数，应把实变函数的本质特性作为推广的基础, 这样使推广具有了目标和方向。

主要内容

1. 指数函数
2. 对数函数
3. 乘幂与幂函数
4. 三角函数和双曲函数
5. 反三角函数和反双曲函数

主要内容

1 指数函数

2 对数函数

3 乘幂与幂函数

4 三角函数和双曲函数

5 反三角函数和反双曲函数

指数函数的定义

当函数 $f(z)$ 在复平面内满足以下条件：

（1） $f(z)$ 在复平面内处处解析；　　(2) $f'(z) = f(z)$

(3) 当$\mathrm{Im}(z) = 0$时，$f(z) = e^{x}$，其中$x = \mathrm{Re}(z)$.

此函数称为复数 z 的指数函数，记为 $\exp z$ 或e^{z}

$$\boxed{\exp z = e^{x}\left(\cos y + i\sin y\right)}$$

注意： e^{z}没有乘幂的含义，只是 $\exp z$的一个记号.

$\boxed{\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)}$ 指数函数的定义等价于关系式：

$$\left.\begin{aligned} &|\exp z| = e^x \\ &\operatorname{Arg}(\exp z) = y + 2k\pi \end{aligned}\right\}\text{其中}k\text{为任意整数}$$

指数函数的性质

（1） $\exp z$是单值函数；且$\exp z \neq 0.$

（2） 加法定理 $\exp z_1 \cdot \exp z_2 = \exp(z_1 + z_2)$

$$(e^z)^n = e^{nz}, n \in Z^+$$

（3） 周期为 $2k\pi i, k \in Z$ $\quad e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z.$

例1 设 $z=x+iy$,求 (1) $\left|e^{i-2z}\right|$; (2) $\left|e^{z^2}\right|$; (3) $\operatorname{Re}\left(e^{\frac{1}{z}}\right)$.

解 (1) $e^{i-2z}=e^{i-2(x+iy)}=e^{-2x+i(1-2y)}$, $\quad\therefore \left|e^{i-2z}\right|=e^{-2x}$;

(2) $e^{z^2}=e^{(x+iy)^2}=e^{x^2-y^2+2xyi}$, $\quad\therefore \left|e^{z^2}\right|=e^{x^2-y^2}$;

(3) $e^{\frac{1}{z}}=e^{\frac{1}{x+iy}}=e^{\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}}$,

$$\therefore \operatorname{Re}(e^{\frac{1}{z}})=e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos\frac{y}{x^2+y^2}.$$

例2 求 $\exp(e^{z})$的实部与虚部.

解 $e^{z}=Z=X+iY \qquad X=e^{x}\cos y, Y=e^{x}\sin y$

$$\exp\left(e^{z}\right)=\exp\left(Z\right)=e^{X+iY}=e^{e^{x}\cos y+ie^{x}\sin y}$$

$$\therefore \operatorname{Re}\left(\exp\left(e^{z}\right)\right)=e^{e^{x}\cos y}\cos(e^{x}\sin y),$$

$$\operatorname{Im}\left(\exp\left(e^{z}\right)\right)=e^{e^{x}\cos y}\sin(e^{x}\sin y).$$

例3 求下列复数的辐角主值：

$(1)\ e^{2+i}$；　　$(2)\ e^{-3-4i}$.

解 $\because \operatorname{Arg} e^{z} = y + 2k\pi \quad (k \in Z)$

$(1)\ \operatorname{Arg} e^{2+i} = 1 + 2k\pi,\ \arg e^{2+i} = 1;$

$(2)\ \operatorname{Arg} e^{-3-4i} = -4 + 2k\pi, \quad \arg e^{-3-4i} = -4 + 2\pi;$

例4 求函数 $f(z)=e^{\frac{z}{5}}$ 的周期.

解 e^{z} 的周期是$2k\pi i$,

$$f(z)=e^{\frac{z}{5}}=e^{\frac{z}{5}+2k\pi i}=e^{\frac{z+10k\pi i}{5}}=f(z+10k\pi i),$$

故函数 $f(z)=e^{\frac{z}{5}}$ 的周期是 $10k\pi i$.

主要内容

1 指数函数

2 对数函数

3 乘幂与幂函数

4 三角函数和双曲函数

5 反三角函数和反双曲函数

对数函数的定义　　指数函数的反函数称为对数函数.

即把满足方程 $e^{w}=z\left(z\neq 0\right)$ 的函数 $w=f\left(z\right)$ 称为对数函数.

记作 $w=\mathrm{Ln}z.$

对数函数的多值性　　令 $w=u+iv,\ z=re^{i\theta},$

则由 $e^{w}=z\ (z\neq 0),$　　可以得到，$u=\ln|z|, v=\mathrm{Arg}z$

$$\boxed{w=\ln|z|+i\mathrm{Arg}z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)\quad \left(k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).}$$

$$w=\ln|z|+i\mathrm{Arg}z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)$$
$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

(1)$w=\mathrm{Ln}z$是多值函数（是由于指数函数的周期性引起的）

若辐角取主值，且记$\ln z=\ln|z|+i\arg z$ 称为 $\mathrm{Ln}z$ 的主值

$$\mathrm{Ln}z=\ln z+2ik\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

对于每个固定的k，上式确定一个单值函数，称为 $\mathrm{Ln}z$ 的一个分支.

（2）$z=x>0$ 时，$\mathrm{Ln}z$的主值$\mathrm{Ln}z=\ln x$就是实变对数函数.

例5 求 Ln2,Ln(-1) 以及与它们相应的主值.

解 $$\mathrm{Ln}2 = \ln 2 + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Ln2 的主值就是 ln2

$$\mathrm{Ln}(-1) = \ln 1 + i\mathrm{Arg}(-1) = (2k+1)\pi i \quad (k\text{为整数})$$

Ln(-1)的主值就是 πi.

注意: 在实变函数中，负数不存在对数；但在复变函数中，负数的对数是有意义的；复变中正实数的对数也是无穷多值的.

对数函数的运算性质

$$(1)\,\mathrm{Ln}(z_1 z_2)=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2;$$ 是集合意义下的相等

$$(2)\,\mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Ln}z_1-\mathrm{Ln}z_2\ \ (z_1,z_2\neq 0,z_1,z_2\neq\infty).$$

注意 $\mathrm{Ln}z^n\neq n\mathrm{Ln}z\left(n\in Z^{+},n>1\right)$

$$\mathrm{Ln}\sqrt[n]{z}\neq\frac{1}{n}\mathrm{Ln}z\left(n\in Z^{+},n>1\right)$$

如 $z=-1+i \qquad z^2=-2i$

$$\mathrm{Ln} z^2=\mathrm{Ln}(-2i)=\ln 2+i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right), k\in Z$$

$$2\mathrm{Ln} z=2\mathrm{Ln}(-1+i)=2[\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{3}{4}\pi+2m\pi\right)], m\in Z$$

$$=\ln 2+i\left(\frac{3}{2}\pi+4m\pi\right)=\ln 2+i\left(-\frac{\pi}{2}+2(2m+1)\pi\right)$$

$$\therefore \mathrm{Ln} z^2\neq 2\mathrm{Ln} z$$

对数函数的解析性质

Lnz的各个分支在除去原点与负实轴的复平面内处处连续、处处解析. 且

$$(\mathrm{Ln}z)' = \frac{1}{z}.$$

证明 设 $z = x + iy$, $\ln z = \ln|z| + i\arg z$

由第一章第二讲第三部分例7可知，$\arg z$ 在除去原点与负实轴的复平面内处处连续.

$z = e^w$在区域$-\pi < \arg z < \pi$内的反函数 $w = \ln z$ 是单值的,

$$\frac{d\ln z}{dz} = 1/\frac{de^w}{dw} = \frac{1}{z}.$$

对数函数的解析性质

Lnz的各个分支在除去原点与负实轴的复平面内处处连续、处处解析. 且

$$(\mathrm{Lnz})' = \frac{1}{z}.$$

证明 设 $z = x + iy$, $\ln z = \ln|z| + i\arg z$

$$\frac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z} = 1/\frac{\mathrm{d}e^{w}}{\mathrm{d}w} = \frac{1}{z}.$$

$$\mathrm{Lnz} = \ln z + 2ik\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

$$(\mathrm{Lnz})' = \frac{1}{z}.$$

例6 求 $\mathrm{Ln}\left[(-1-i)(1-i)\right]$ 的值.

解 $\mathrm{Ln}\left[(-1-i)(1-i)\right]=\mathrm{Ln}(-2)=\ln 2+i(\pi+2k\pi),$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

例7 解方程 $e^z-1-\sqrt{3}i=0.$

解 $e^z=1+\sqrt{3}i$

$$z=\mathrm{Ln}\left(1+\sqrt{3}i\right)$$

$$=\ln 2+i\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right),(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

主要内容

1 指数函数

2 对数函数

3 乘幂与幂函数

4 三角函数和双曲函数

5 反三角函数和反双曲函数

乘幂的定义

设a为非0复数，b为任意一个复数，乘幂 a^b 定义为 $e^{b\mathrm{Ln}a}$

$$a^b = e^{b\mathrm{Ln}a}$$

注意： 由于 $\mathrm{Ln}a = \ln|a| + i(\arg a + 2k\pi) \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$

是多值的，因而 a^b 也是多值的.

$$\boxed{a^b = e^{b\mathrm{Ln}a} = e^{\left[b\ln|a| + ib(\arg a + 2k\pi)\right]} \left(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots\right)}$$

（1）当b=n（n为正整数）时

$$a^n = e^{n\mathrm{Ln}a} = e^{\mathrm{Ln}a + \mathrm{Ln}a + \cdots \mathrm{Ln}a} = e^{\mathrm{Ln}a} \cdot e^{\mathrm{Ln}a} \cdots e^{\mathrm{Ln}a} = a \cdot a \cdots a$$

$$a^b = e^{b\mathrm{Ln}a} = e^{\left[b\ln|a| + ib(\arg a + 2k\pi)\right]} \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

（2）当b=1/n(n为正整数)时，$a^{\frac{1}{n}}$有n个不同的值.

$$a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\mathrm{Ln}a} = e^{\frac{1}{n}\ln|a|}\left[\cos\frac{\arg a + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg a + 2k\pi}{n}\right]$$

$$= |a|^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\arg a + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg a + 2k\pi}{n}\right] = \sqrt[n]{a},$$

其中 $k = 0, 1, 2, \cdots, (n-1)$.

$$\boxed{a^b = e^{b\text{Ln}a} = e^{\left[b\ln|a| + ib(\arg a + 2k\pi)\right]} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)}$$

(3) 当 $b = \dfrac{p}{q}$ (p与q为互质的整数, $q > 0$)时,

$$a^b = e^{\frac{p}{q}[\ln|a| + i(\arg a + 2k\pi)]} = e^{\frac{p}{q}\ln|a| + i\frac{p}{q}(\arg a + 2k\pi)}$$

$$= e^{\frac{p}{q}\ln|a|}\left[\cos\frac{p}{q}(\arg a + 2k\pi) + i\sin\frac{p}{q}(\arg a + 2k\pi)\right]$$

具有q个不同的值,即取 $k = 0, 1, 2, \cdots, (q-1)$时相应的值.

（4）当b为无理数或复数时, a^b 为无穷多值函数.

例8 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^{i} 的值.

解 $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\mathrm{Ln}1} = e^{\sqrt{2}(\ln 1 + 2k\pi i)}$

$= e^{2\sqrt{2}k\pi i} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

$i^{i} = e^{i\mathrm{Ln}i} = e^{i\left[\ln|i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right]}$

$= e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

在乘幂 a^b中，

如果$a=z(\neq 0)$,b为复变数，则称z^a为幂函数.

幂函数的解析性 $z^b = e^{b\mathrm{Ln}z}$

z^b在除去原点和负实轴的平面上处处解析.

$$\left(z^b\right)' = \left(e^{b\mathrm{Ln}z}\right)' = e^{b\mathrm{Ln}z}\frac{b}{z} = bz^{b-1}$$

一般的，z^b是多值函数.

主要内容

1 指数函数

2 对数函数

3 乘幂与幂函数

4 三角函数和双曲函数

5 反三角函数和反双曲函数

三角函数的定义

$$\left.\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \cos\theta &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$$

余弦函数 $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ 偶函数

正弦函数 $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ 奇函数

周期函数，周期为 2π

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

三角函数的性质

1）当$z=x$时，与实函数一致；

2）正弦函数和余弦函数在复平面内是**解析函数**，且

$$(\sin z)'=\cos z, \quad (\cos z)'=-\sin z$$

3）奇偶性、周期性与实函数一致

4）无界性 $\because \cos iy=\dfrac{e^{-y}+e^{y}}{2}, \therefore |\cos iy|\to\infty\,(y\to\infty)$

5）三角恒等式与实变函数一致

$$(1)\quad \begin{cases} \cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2, \\ \sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2, \\ \sin^2 z+\cos^2 z=1. \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \cos(x+yi)=\cos x\cos yi-\sin x\sin yi, \\ \sin(x+yi)=\sin x\cos yi+\cos x\sin yi. \end{cases}$$

其他复变数三角函数的定义(类似可讨论周期、奇偶、解析)

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}\qquad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z}\qquad \sec z=\frac{1}{\cos z}\qquad \csc z=\frac{1}{\sin z}$$

例9 求$\cos(1+i)$的值.

解 $$\cos(1+i)=\frac{e^{i(1+i)}+e^{-i(1+i)}}{2}=\frac{e^{-1+i}+e^{1-i}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}[e^{-1}(\cos 1+i\sin 1)+e(\cos 1-i\sin 1)]$$

$$=\frac{1}{2}(e^{-1}+e)\cos 1+\frac{1}{2}(e^{-1}-e)i\sin 1$$

$$=\cos 1\,\mathrm{ch}\,1-i\sin 1\,\mathrm{sh}\,1.$$

双曲函数的定义

$$\mathrm{sh}z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}\qquad \mathrm{ch}z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}\qquad \mathrm{th}z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}}$$

双曲函数的性质

1） 它们都是以 $2\pi i$为周期的周期函数.

2） $(\mathrm{sh}z)'=\mathrm{ch}z,\qquad (\mathrm{ch}z)'=\mathrm{sh}z.$

3） $\mathrm{ch}iy=\cos y$

主要内容

1 指数函数

2 对数函数

3 乘幂与幂函数

4 三角函数和双曲函数

5 反三角函数和反双曲函数

反三角函数的定义

设 $z=\cos w$, 那么称 w 为 z 的反余弦函数，记作

$$w=\operatorname{Arc}\cos z.$$

$$z=\cos w=\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}\Rightarrow e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0$$

$$\Rightarrow e^{iw}=z+\sqrt{z^2-1}$$

$$\Rightarrow w=-i\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$$

$$\operatorname{Arc}\cos z=-i\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$$

$$\operatorname{Arcsin}z=-i\operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$$

$$\operatorname{Arctan}z=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$$

例10 解方程$\sin(iz)=i$.

$$\boxed{\mathrm{Arcsin}z=-i\mathrm{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)}$$

解 $iz=\mathrm{Arcsin}\,i$

$$z=\frac{1}{i}\mathrm{Arcsin}\,i$$

$$=-\mathrm{Ln}\left(i\cdot i+\sqrt{1-i^2}\right)$$

$$=-\mathrm{Ln}\left(-1+\sqrt{2}\right)$$

$$=-\ln\left(-1+\sqrt{2}\right)-2k\pi i,\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

反双曲函数的定义

$$w=\mathrm{sh}z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}\Rightarrow\left(e^{z}\right)^{2}-2we^{z}-1=0$$

$$\Rightarrow e^{z}=w\pm\sqrt{1+w^{2}}$$

$$\Rightarrow z=\mathrm{Ln}(w+\sqrt{w^{2}+1})$$

$$\mathrm{Arsh}z=\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^{2}+1})$$

$$\mathrm{Arch}z=\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^{2}-1})$$

$$\mathrm{Arth}z=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z}$$

反三角函数和反双曲函数均是多值函数

复变*初等函数*是一元实变初等函数在复数范围内的自然推广，它既保持了实变初等函数的某些基本性质，　又有一些与实变初等函数不同的特性．如：

1. 指数函数具有周期性

2. 负数无对数的结论不再成立

3. 三角正弦与余弦不再具有有界性

4. 双曲正弦与双曲余弦都是周期函数