离散数学概论

习题课二 集合论

课程QQ号：**819392514**
金耀　软件工程系
fool1025@163.com
13857104418

集合知识点梳理

- 集合的基本概念—集合、相等、(真)包含、子集、空集、全集、幂集；
- 集合运算—交、并、(相对和绝对)补、对称差；
- 文氏图—有穷集计数问题 ；
- 集合的恒等式；
- 证明方法概述—直接、间接、归谬、分情况证明、构造、数学归纳法。

关系与函数知识点梳理

- 有序对与卡氏积 ；
- 二元关系（包括空关系，恒等关系，全域关系等）及其表示（关系矩阵，关系图）；
- 关系的五种性质（自反性，反自反性，对称性，反对称性，传递性）
- 二元关系的幂运算 ；
- 关系的三种闭包（自反闭包，对称闭包，传递闭包） ；
- 等价关系和划分（包括等价类，商集，划分块等） ；
- 偏序关系（包括哈斯图，最大元，最小元，极大元，极小元，上界，下界，最小上界，最大下界等） ；
- 函数的基本概念与性质（单射，满射，双射）。
- 函数的合成与反函数。

判断下列命题是否为真

(1) $\varnothing \subseteq \varnothing$

(2) $\varnothing \in \varnothing$

(3) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

(4) $\varnothing \in \{\varnothing\}$

(5) $\{ a, b \} \subseteq \{ a, b, c, \{a, b, c\}\}$

(6) $\{ a, b \} \in \{ a, b, c, \{a, b\}\}$

(7) $\{ a, b\} \subseteq \{ a, b, \{\{a, b\}\}\}$

(8) $\{ a, b\} \in \{ a, b, \{\{a,b\}\}\}$

解 (1)、(3)、(4)、(5)、(6)、(7)为真，其余为假.

集合的运算

设A,B为集合，试确定下列各式成立的充分必要条件：

- （1）$A-B=B$
- （2）$A-B=B-A$
- （3）$A\cap B=A\cup B$
- （4）$A\oplus B=A$

(1) $A=B=\Phi$

(2) $A=B$

(3) $A=B$

(4) $B=\Phi$

集合的证明

证明 $A \cup B = A \cup C \wedge A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$

解题思路

- **分析命题：含有3个命题：**

  $A \cup B = A \cup C$ ， $A \cap B = A \cap C$, $B = C$

  ① ② ③

- **证明要求**

  前提：命题①和②

  结论：命题③

- **证明方法：**

  恒等式代入、反证法

  利用已知等式通过运算得到新的等式

集合的证明(解答)

证明 $A \cup B = A \cup C \wedge A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$

方法一：恒等代入法

$$
\begin{aligned}
B &= B \cap (A \cup B) \\
&= B \cap (A \cup C) = (B \cap A) \cup (B \cap C) \\
&= (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \\
&= (A \cup C) \cap C = C
\end{aligned}
$$

方法二：反证法.

假设 $B \neq C$，则存在 x ($x \in B$ 且 $x \notin C$), 或存在 x ($x \in C$ 且 $x \notin B$).

不妨设为前者.

若 x 属于 A，则 x 属于 $A \cap B$ 但 x 不属于 $A \cap C$，与已知矛盾；

若 x 不属于 A，则 x 属于 $A \cup B$ 但 x 不属于 $A \cup C$，也与已知矛盾.

集合的证明(解答)

证明 $A \cup B = A \cup C \wedge A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$

方法三：利用已知等式通过运算得到新的等式.
由已知等式①和②可以得到

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup C) - (A \cap C)$$

即

$$A \oplus B = A \oplus C$$

从而有

$$A \oplus (A \oplus B) = A \oplus (A \oplus C)$$

根据结合律得

$$(A \oplus A) \oplus B = (A \oplus A) \oplus C$$

由于$A \oplus A = \varnothing$, 化简上式得$B = C$.

集合的计数

对60个学生参加课外活动的情况进行调查。结果发现，25人参加物理小组，26人参加化学小组，26人参加生物小组。9人既参加物理小组又参加生物小组，11人既参加物理小组又参加化学小组，8人既参加化学小组又参加生物小组。8人什么小组也没参加，回答下列各问题：

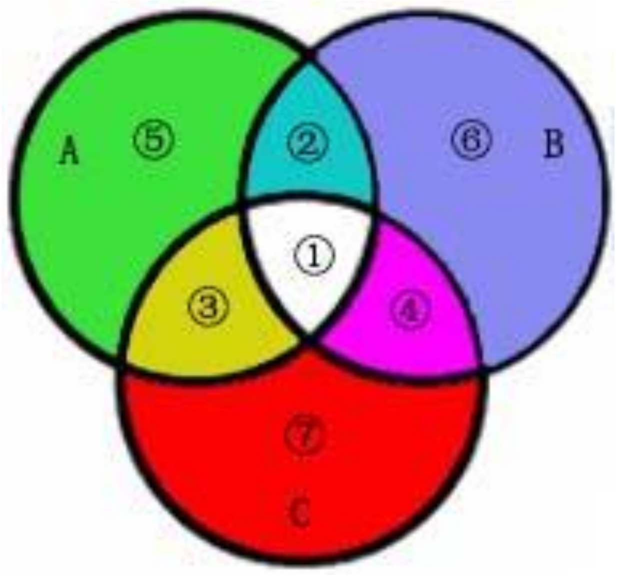
- （1）有多少人参加了3个小组？
- （2）只参加一个小组的有多少人？

解答

设 $A=\{x|x\text{参加物理小组}\},|A|=25$

$B=\{x|x\text{参加化学小组}\},|B|=26$

$C=\{x|x\text{参加生物小组}\},|C|=26$



- （1）有多少人参加了3个小组？ 3人
- （2）只参加一个小组的有多少人？ 30人

关系的运算

设$A=\{1,2,3\}$, $R=\{<x, y>|x, y\in A$且$x+3y<8\}$，$S=\{<2,3>,<4,2>\}$，

求下列各式：

- （1）R的集合表达式；
- （2）R^{-1}，$\sim R$；
- （3）domR，ranR，fldR；
- （4）$S\circ R$，R^3；
- （5）r(R)，s(R)，t(R)。

解答

（1） $R=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<3,1>\}$；

（2） $R^{-1}=\{<1,1>,<2,1>,<1,2>,<1,3>\}$,

$\sim R=\{<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>\}$；

（3） $domR=\{1,2,3\}$, $ranR=\{1,2\}$, $fldR=\{1,2,3\}$；

（4） $S \circ R=\{<1,3>\}$,

$R^3=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,<3,1>,<3,3>\}$；

（5） $r(R)=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,<3,1>,<3,3>\}$,

$s(R)=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<3,1>,<1,3>\}$,

$t(R)=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<3,1>,<2,2>,<3,2>\}$。

关系的性质

说明下列关系是否是自反的、对称的、传递的或反对称的。

- （1）在{1,2,3,4,5}上定义的关系，$\{<a, b> \mid a-b \text{是偶数}\}$
- （2）在{1,2,3,4,5}上定义的关系，$\{< a, b> \mid a+b \text{是偶数}\}$

（1）自反的、对称的、传递的，但不是反对称的；

（2）自反的、对称的、传递的，但不是反对称的；

等价关系及分类

设R是整数集合Z上的模n等价关系，即$x \sim y$当且仅当$x \equiv y (\mathrm{mod}\ n)$，试给出由$R$确定的Z的划分$\pi$。

根据题意，在同一等价类的整数除以n的余数相等。

设除以n余数为r (r =0,1, ..., n-1)的整数构成的等价类为[r]，则

$[r] = \{ kn+r | k \in Z \}, r = 0,1,\ldots, n-1$

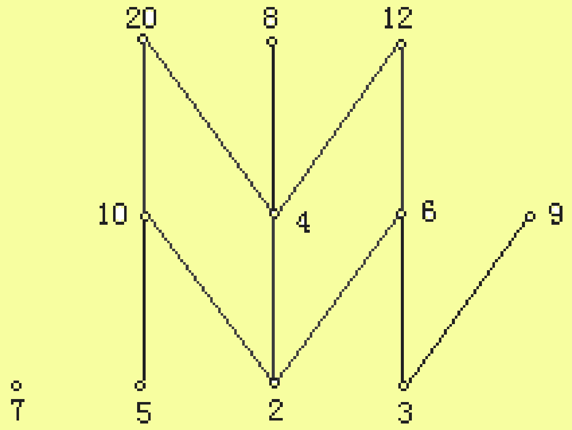
$\pi = \{ [r] | r = 0,1,\ldots, n-1 \}$

偏序的表示及特殊元素

设A={2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,20}，R为整除关系，求下列各题：

- （1）画出偏序集<A,R>的哈斯图；
- （2）求该偏序集的极大元和极小元。

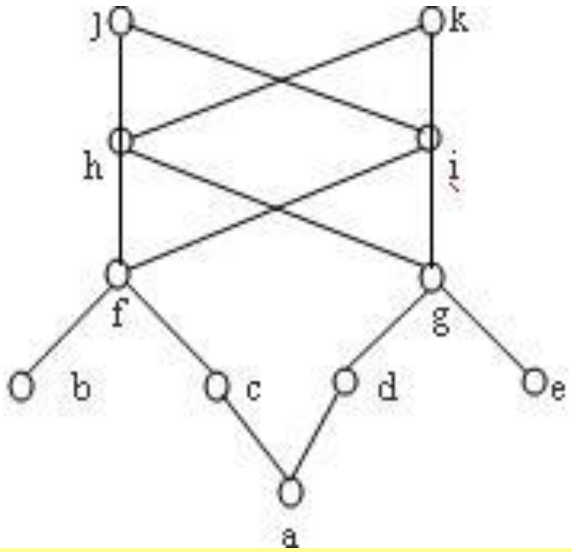
（1）哈斯图如下：



（2）极大元为7，8，9，12，20；极小元为2，3，5，7。

偏序的特殊元素

图中的哈斯图表示一偏序集。分别求集合$B_1=\{h, i\}$、$B_2=\{b,c,d,e\}$的上界、最小上界、下界和最大下界。



（1）$B_1=\{h, i\}$，它有上界j, k，但无最小上界；它有下界f, g, b, c, d, e, a，但没有最大下界。

(2) $B_2=\{b,c,d,e\}$，它有上界h, i, j, k，无最小上界；它没有下界和最大下界。

函数的概念

1. 若$A=\{a, b\}$，$B=\{1, 2\}$，求B^A

$\{\{<a,1>,<b,1>\}, \{<a,1>,<b,2>\}, \{<a,2>,<b,1>\}, \{<a,2>,<b,2>\}\}$

2. 用ε表示字母表$\Sigma=\{a, b\}$上的空串，定义f：$\Sigma^*\rightarrow\Sigma^*$如下：

$x\in\Sigma^*$，　$f(\mathrm{x})=axb$，　求 $f(\{\varepsilon, a, b\})$。

$\{ab, aab, abb\}$

函数的复合

$$X=\{1,2,3\},\ Y=\{p,q\},\ Z=\{a,b\}$$

$$f=\{<1,p>,<2,p>,<3,q>\}$$ 求 $g\circ f$

$$g=\{<p,b>,<q,b>\}$$

$$g\circ f(1)=g(f(1))=g(p)=b$$

$$g\circ f=\{<1,b>,<2,b>,<3,b>\}$$