



概率论与数理统计 A

浙江理工大学期末试题汇编

(答案册 五套精装版)

学校: \_\_\_\_\_

专业: \_\_\_\_\_

班级: \_\_\_\_\_

姓名: \_\_\_\_\_

学号: \_\_\_\_\_

(此试卷为 2022 年第二版 第 1 次发行)

# 目录

1	2021—2022 学年第 1 学期《概率论与数理统计 A》期末 A 卷 .....	1
2	2020—2021 学年第 2 学期《概率论与数理统计 A》期末 A 卷 .....	3
3	2020—2021 学年第 1 学期《概率论与数理统计 A》期末 A 卷 .....	7
4	2019—2020 学年第 2 学期《概率论与数理统计 A》期末 A 卷 .....	9
5	2018—2019 学年第 2 学期《概率论与数理统计 A》期末 A 卷 .....	12

2022 年所有试卷版本见**试卷版**的尾页。如需资料获取请添加下方的 QQ 群获取。

## 更多信息

试卷整理人：张创琦

微信公众号：创琦杂谈

试卷版次：2022 年 5 月 13 日 第二版 第 1 次发行

本人联系 QQ 号：1020238657（勘误请联系本人）

创琦杂谈学习交流群（QQ 群）群号：749060380

cq 数学物理学习群（QQ 群）群号：967276102

cq 计算机编程学习群（QQ 群）群号：653231806

---

送给大家一段文摘：

当欢笑淡成沉默，当信心变成失落，我走近梦想的脚步，是否依旧坚定执着；当笑颜流失在心的沙漠，当霜雪冰封了亲情承诺，我无奈的心中，是否依然碧绿鲜活。

有谁不渴望收获，有谁没有过苦涩，有谁不希望生命的枝头挂满丰硕，有谁愿意让希望变成梦中的花朵。现实和理想之间，不变的是跋涉，暗淡与辉煌之间，不变的是开拓。

甩掉世俗的羁绊，没谁愿意，让一生在碌碌无为中度过。整理你的行装，不同的起点，可以达到同样辉煌的终点。人生没有对错，成功永远属于奋斗者。

——汪曾祺《生活》

# 1 2021—2022 学年第 1 学期《概率论与数理统计 A》期末 A 卷

## 一、填空题 (共 24 分, 每题 4 分)

1. 0.8    2. 0.875    3. 0.5    4. 0.9    5. 7/16    6.  $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$

## 二、单项选择题 (共 20 分, 每题 4 分)

1. B    2. A    3. C    4. A    5. D

## 三、解答题 (共 56 分)

1. 解 设  $A_1, A_2, A_3$  分别表示 “甲不及格”、“乙不及格”、“丙不及格”三事件由题意知

$A_1, A_2, A_3$  相互独立, 令  $A$  表示“恰有 2 位不及格”, 则

$$A = A_1 A_2 \bar{A}_3 \cup A_1 \bar{A}_2 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2 A_3 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} (1) P(A) &= P(A_1 A_2 \bar{A}_3) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2 A_3) \\ &= 0.4 \times 0.3 \times 0.5 + 0.4 \times 0.7 \times 0.5 + 0.6 \times 0.3 \times 0.5 \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分} \\ &= 0.29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) P(A_1 A_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2 A_3 | A) &= \frac{P(A_1 A_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 A_2 A_3)}{P(A)} \\ &= \frac{0.4 \times 0.3 \times 0.5 + 0.6 \times 0.3 \times 0.5}{0.29} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分} \\ &= \frac{15}{29} \end{aligned}$$

2. 解: (1)

Y	0	1	2
X			
-1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{6}$	0	0
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	0

..... 4 分

(2)

X	-1	0	2
p	5/12	1/6	5/12

..... 2 分

Y	0	1	2
p	5/12	1/4	1/3

..... 2 分

(3) 由  $E(X) = 5/12, E(Y) = 11/12, E(XY) = -5/12$  ..... 2 分

知  $\text{Cov}(X, Y) = \frac{-5}{12} - \frac{5}{12} \times \frac{11}{12} = \frac{115}{144}$  ..... 2 分

3. (1) 由  $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x A y(1-x) dx dy$  ..... 3 分

得  $A = 24$  ..... 1 分

(2) 由  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$  ..... 2 分 得  $f_X(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$  ..... 1 分

由  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$  得  $f_Y(y) = \begin{cases} 12y(1-y)^2, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$  ..... 2 分

(3) 由  $f(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y)$ , 故  $X$  与  $Y$  不独立 ..... 3 分

4. 解: 由题意  $P(X \leq 1095) = 1 - e^{-0.0365} \approx 0.04$  ..... 1 分

记  $\begin{cases} N = \text{"1000件产品中寿命小于1095的产品件数"} \\ Y = \text{"保险公司的利润"} \end{cases}$

则  $N \sim B(1000, 0.04)$ ,  $Y = 1000 \times P_0 - 2000 N$  ..... 1 分

由中心极限定理知,  $N \overset{\text{近似}}{\sim} N(40, 6.2^2)$  ..... 2 分

于是

(1) 若保费  $P_0 = 100$  元/件, 则"保险公司亏本"  $= \{Y \leq 0\} = \{N \geq 50\}$

$P\{\text{保险公司亏本}\} = P\{Y \leq 0\} = P\{N \geq 50\} = P\{\frac{N-40}{6.2} \geq \frac{10}{6.2}\} \approx 1 - \Phi(1.61) = 0.054$  ..... 2 分

(2) 若保费为  $P_0$ , 则"保险公司亏本"  $= \{Y \leq 0\} = \{N \geq 0.5P_0\}$

$P\{\text{保险公司亏本}\} = P\{N \geq 0.5P_0\} = P\{\frac{N-40}{6.2} \geq \frac{0.5P_0-40}{6.2}\} \approx 1 - \Phi(\frac{0.5P_0-40}{6.2}) \leq 0.01$  ..... 2 分

故  $\Phi(\frac{0.5P_0-40}{6.2}) \geq 0.99 \Rightarrow \frac{0.5P_0-40}{6.2} \geq 2.33$  ..... 1 分  
 $\Rightarrow P_0 \geq 2 \times (40 + 6.2 \times 2.33) = 108.89(\text{元})$

5. 解 由于  $\bar{X} \sim N(72, \frac{100}{n})$  ..... 2 分

故若  $P(\bar{X} > 70) = P(\frac{\bar{X}-72}{10/\sqrt{n}} > \frac{70-72}{10/\sqrt{n}}) = 1 - P(\frac{\bar{X}-72}{10/\sqrt{n}} \leq \frac{70-72}{10/\sqrt{n}})$

$= 1 - \Phi(-\frac{\sqrt{n}}{5}) = \Phi(\frac{\sqrt{n}}{5}) \geq 0.9$  ..... 4 分

则  $\frac{\sqrt{n}}{5} \geq 1.28$ , 得  $n \geq 40.96$ , 取  $n = 41$  ..... 1 分

6. 解 由题意  $E(X) = 1 \times \theta^2 + 2 \times 2\theta(1-\theta) + 3 \times (1-\theta)^2 = 3 - 2\theta$  ..... 1 分

由矩估计法令  $3 - 2\theta = \frac{10}{6}$ , ..... 2 分

得  $\theta$  的矩估计值为  $\hat{\theta} = \frac{2}{3}$  ..... 1 分

作似然函数

$$L(\theta) = [P(X=1)]^3 [P(X=2)]^2 P(X=3) = \theta^6 \times [2\theta(1-\theta)]^2 \times (1-\theta)^2 = 4\theta^8(1-\theta)^4$$

..... 2 分

取对数  $\ln L(\theta) = \ln 4 + 8 \ln \theta + 4 \ln(1-\theta)$

令 
$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{8}{\theta} - \frac{4}{1-\theta} = 0$$

得  $\theta$  的最大似然估计值为  $\hat{\theta} = \frac{2}{3}$  ..... 2 分

## 2 2020—2021 学年第 2 学期《概率论与数理统计 A》期末 A 卷

### 一 单项选择题（每题 3 分，共 18 分）

1. B    2. C    3. B    4. A    5. C    6. D

评分标准说明： 每题 3 分，错则扣全分

### 二 填空题（每空 3 分，共 24 分）

1.  $\frac{3}{5}$ .                      2.  $\frac{20}{27}$ .                      3.  $\frac{7}{9}$ .                      4.  $N(15, 44)$ .  
5.  $e^{-1} - e^{-4}$ .                      6. 0.                      7.  $t(4)$ ,  $F(5, 4)$ .

评分标准说明： 每空 3 分，错则扣全分。

### 三 计算题（本大题共 6 小题，满分 58 分）

1 解： 令  $A, B, C$  分别表示已售出 2 件产品为 2 件正品、一正一次，2 件次品。

$D$  表示从剩下的 10 件产品中任取一件为正品。 ----- 2 分

1.  $P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C)$

$$= \frac{C_8^2}{C_{12}^2} \times \frac{6}{10} + \frac{C_8^1 C_4^1}{C_{12}^2} \times \frac{7}{10} + \frac{C_4^2}{C_{12}^2} \times \frac{8}{10} = \frac{2}{3} \quad \text{-----} \quad 4 \text{ 分}$$

$$2. \quad P(A|D) = \frac{P(A)P(D|A)}{P(D)} = \frac{21}{55} \quad \text{-----} \quad 4 \text{ 分}$$

**评分标准说明：** 全概率公式，贝叶斯公式写正确给 4 分。

$$2 \text{ 解：} (1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^0 (a+x)dx + \int_0^1 (b-x)dx = 1,$$

$$E(X) = \int_{-1}^0 x(a+x)dx + \int_0^1 x(b-x)dx = 0$$

$$\text{得：} \quad a=1, \quad b=1 \quad \text{-----} \quad 4 \text{ 分}$$

$$(2) \quad P(|X| \leq \frac{1}{3}) = \int_{-1/3}^0 (1+x)dx + \int_0^{1/3} (1-x)dx = \frac{5}{9} \quad \text{-----} \quad 3 \text{ 分}$$

$$(3) \quad E(X^2) = \int_{-1}^0 x^2(1+x)dx + \int_0^1 x^2(1-x)dx = \frac{1}{6}$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{6} \quad \text{-----} \quad 3 \text{ 分}$$

**评分标准说明：** 公式写正确，计算错误给一半分。

$$3 \text{ 解：} (1) \quad a + 0.2 + 0.1 + b + 0.1 + 0.2 + c = 1$$

$$\text{得：} \quad a + b + c = 0.4$$

$$\text{由：} \quad P(XY \neq 0) = a + 0.2 + c = 0.4 \quad \text{得：} \quad b = 0.2$$

$$P(Y \leq 0|X \leq 0) = \frac{P(X \leq 0, Y \leq 0)}{P(X \leq 0)} = \frac{a + b + 0.1}{a + b + 0.3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{得：} \quad a + b = 0.3 \quad \text{推得：} \quad a = 0.1, \text{ 进而有：} \quad c = 0.1 \quad \text{-----} \quad 4 \text{ 分}$$

(2)

X	-1	0	1
p	0.2	0.4	0.4

Y	-1	0	1
p	0.3	0.4	0.3

----- 4 分

(3)

X+Y	-2	-1	0	1	2
p	0.1	0.1	0.4	0.3	0.1

----- 2 分

**评分标准说明：** a, b, c 数值解错，后面的解题方法正确，给一半分。

4 解:  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$

当  $x \leq 0$  , 或  $x \geq 1$  时,  $f_X(x) = 0$

当  $0 < x < 1$  时,  $f_X(x) = \int_{-x}^{+x} 1 dy = 2x$

故:  $f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$  ----- 3 分

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$

当  $y \leq -1$  , 或  $y \geq 1$  时,  $f_Y(y) = 0$

当  $-1 < y < 0$  时,  $f_Y(y) = \int_{-y}^1 1 dx = 1 + y$

当  $0 \leq y < 1$  时,  $f_Y(y) = \int_y^1 1 dx = 1 - y$

故:  $f_Y(y) = \begin{cases} 1 + y, & -1 < y < 0 \\ 1 - y, & 0 \leq y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$  ----- 3 分

当  $0 < x < 1, -x < y < x$  时,  $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$

所以,  $X$  与  $Y$  不独立。 ----- 1 分

因为:  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x) dx = \int_{-1}^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$

$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y) dy = \int_{-1}^0 y(1+y) dy + \int_0^1 y(1-y) dy = 0$

$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dx dy = \int_0^1 x dx \int_{-x}^x y dy = 0$

所以,  $E(XY) = E(X)E(Y)$ , 故  $X$  与  $Y$  不相关。 ----- 3 分

(或者,  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y) dx dy = \int_0^1 x dx \int_{-x}^x 1 dy = \frac{2}{3}$

$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yf(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^x y dy = 0$  )

**评分标准说明:** 公式写正确, 计算错误给一半分。

5 解: 设至少在阅览室设座位数为  $N$ ; 设某段时间内去阅览室自修的同学人数为  $X$ , 则  $X \sim B(1000, 0.05)$ ; ----- 2 分

$E(X) = 1000 \times 0.05 = 50$ ,  $D(X) = 1000 \times 0.05 \times 0.95 = 47.5$

依题意有:  $P(X \leq N) \geq 0.95$ ,

由中心极限定理知:  $X$  近似服从  $N(50, 47.5)$  ----- 2 分

$$P(X \leq N) \approx \Phi\left(\frac{N-50}{\sqrt{47.5}}\right) \geq 0.95 = \Phi(1.65), \quad \frac{N-50}{\sqrt{47.5}} \geq 1.65$$

$$N \geq 50 + 1.65 \times \sqrt{47.5} \approx 61.37, \text{ 取 } N = 62 \quad \text{----- 4 分}$$

**评分标准说明:** 最后的整数  $N$  进位错扣 1 分; 也可用独立同 “0-1” 分布方法做。

6 解: (1)  $L(\theta) = \frac{x_1}{\theta^2} e^{-\frac{x_1}{\theta}} \times \cdots \times \frac{x_n}{\theta^2} e^{-\frac{x_n}{\theta}} = \frac{x_1 \cdots x_n}{\theta^{2n}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta}}$

$$\ln L = \sum_{i=1}^n x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta} - 2n \ln \theta$$

$$\frac{d \ln L}{d \theta} = 0 + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta^2} - 2n \frac{1}{\theta} = 0$$

得:  $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{2}$  ----- 5 分

$$(2) E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x; \theta) dx = \int_0^{+\infty} x \frac{x}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = 2\theta$$

$$E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{\bar{X}}{2}\right) = \frac{1}{2} E(\bar{X}) = \frac{1}{2} E(X) = \frac{1}{2} \times 2\theta = \theta$$

所以,  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的无偏估计。 ----- 2 分

$$(3) E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x; \theta) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{x}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = 6\theta^2$$

$$D(X) = 6\theta^2 - (2\theta)^2 = 2\theta^2$$

$$D(\hat{\theta}) = D\left(\frac{\bar{X}}{2}\right) = \frac{1}{4} D(\bar{X}) = \frac{1}{2n} D(X) = \frac{1}{2n} \times 6\theta^2 = \frac{\theta^2}{2n} \quad \text{----- 3 分}$$

**评分标准说明:** 解题方法和计算公式正确, 运算错误给一半分。



### 3 2020—2021 学年第 1 学期《概率论与数理统计 A》期末 A 卷

#### 一、填空题（每小题 4 分，满分 20 分）

1.  $1-(1-p)^{1/n}$     2.  $1/6, 5/6$     3. 217    4.  $N(0, 1)$     5.  $(-0.2535, 1.2535)$

#### 二、选择题（每小题 4 分，满分 20 分）

1. B    2. B    3. C    4. A    5. D

#### 三、解答题(满分 60 分)

1. (共 8 分) 设  $A =$  ‘任取两件，两件都为合格品’， $B =$  ‘任取两件，有一件为不合格品’  
 $C =$  ‘任取两件，两件都为不合格品’

则 (1)  $P(A) = 1 - \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{3}$  ..... (3 分)

(2)  $P(C|B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{C_4^2 / C_{10}^2}{C_4^1 C_6^1 / C_{10}^2 + C_4^2 / C_{10}^2} = \frac{1}{5}$  ..... (8 分)

2. (共 10 分) (1)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 axdx + \int_1^2 (2-x)dx = 1$ ,     $a = 1$  ..... (2 分)

(2) 当  $x < 0$  时,  $F(x) = 0$ , 当  $x > 2$  时,  $F(x) = 1$  ..... (3 分)

当  $0 \leq x < 1$  时,  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_0^x tdt = \frac{x^2}{2}$  ..... (5 分)

当  $1 \leq x < 2$  时,  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_0^1 tdt + \int_1^x (2-t)dt = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1$  ..... (7 分)

综上  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ -\frac{x^2}{2} + 2x - 1, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$  ..... (8 分)

(3)  $P(1/2 \leq x \leq 2) = F(2) - F(1/2) = 1 - 1/8 = 7/8$  ..... (10 分)

#### 3.(共 12 分)

(1)

$Z_1$	-2	-1	0	1	2	3
P	4/20	3/20	4/20	6/20	2/20	1/20

..... (3 分)

(2)

$Z_2$	-2	-1	0	1	2
P	6/20	4/20	3/20	6/20	1/20

..... (6 分)

(3)

$Z_3$	-1	0	1	2
P	4/20	3/20	6/20	7/20

..... (9 分)

(4)

$Z_4$	-1	0	1
P	17/20	0	3/20

..... (12 分)

4. (共 8 分)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$\text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } f_X(x) = \int_x^1 12x^2 dy = 12x^2(1-x)$$

$$\text{当 } x \geq 1 \text{ 或 } x \leq 0 \text{ 时, } f_X(x) = 0$$

$$\text{综上 } f_X(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \text{..... (3 分)}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

$$\text{当 } 0 < y < 1 \text{ 时, } f_Y(y) = \int_0^y 12x^2 dx = 4y^3$$

$$\text{当 } y \geq 1 \text{ 或 } y \leq 0 \text{ 时, } f_Y(y) = 0$$

$$\text{综上 } f_Y(y) = \begin{cases} 4y^3, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \text{..... (6 分)}$$

由于当  $0 < x < 1, 0 < y < 1$  时,  $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ , 则 X 与 Y 不独立 ... (8 分)

5、(共 12 分)

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y) dx dy = 2 \int_0^1 x \left[ \int_0^{1-x} dy \right] dx = 2 \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{1}{3} \quad \dots (3 \text{ 分})$$

$$EY = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yf(x, y) dx dy = 2 \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} y dy \right] dx = 2 \int_0^1 (1-x)^2 / 2 dx = \frac{1}{3} \quad \dots (6 \text{ 分})$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dx dy = 2 \int_0^1 x \left[ \int_0^{1-x} y dy \right] dx = 2 \int_0^1 (x^3 / 2 - x^2 + x/2) dx = \frac{1}{12} \quad \dots (9 \text{ 分})$$

由于  $E(XY) \neq E(X)E(Y)$ , 所以 X 与 Y 相关 ... (12 分)

6、(共 10 分)

$$\text{X 的密度函数为: } f(x, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x > 1 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}, \dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{由于 } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, \beta)dx = \frac{\beta}{\beta-1}$$

$$\text{令 } E(X) = \frac{\beta}{\beta-1}, \text{ 得 } \beta \text{ 的矩估计量为 } \hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{\bar{x}-1} \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

$$\text{似然函数为 } L(\beta) = \begin{cases} \frac{\beta^n}{x_1 x_2 \dots x_n}, & x_i > 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \dots\dots\dots(7 \text{ 分})$$

$$\text{取对数求导后求解得 } \hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} \dots\dots\dots(10 \text{ 分})$$

#### 4 2019—2020 学年第 2 学期《概率论与数理统计 A》期末 A 卷

##### 一. 单项选择题

1. D    2. B    3. A    4. B    5. C

**评分标准说明：** 每题 4 分，错则扣全分

##### 二、填空题

1.  $\frac{2}{15}, \frac{4}{15}$ .                      2.  $-\frac{6}{5}, \frac{8}{5}$ .                      3. 0.8, 4.8.  
4.  $1, \frac{1}{2}$ .                      5.  $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}), \chi^2(n-1)$ .                      6.  $\hat{\mu}_1$  和  $\hat{\mu}_2, \hat{\mu}_1$ .

**评分标准说明：** 每空 2 分，每小题 4 分，错则扣全分。

##### 三、计算题（本大题共 6 小题，满分 56 分）

**1 解：** 设  $A =$  ‘任取一产品，经检验认为是合格品’

$B =$  ‘任取一产品确是合格品’                      ----- 2 分

$$\begin{aligned} \text{则 (1) } P(A) &= P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}) \\ &= 0.9 \times 0.95 + 0.1 \times 0.02 = 0.857. \end{aligned} \quad \text{----- 4 分}$$

$$(2) \quad P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.9 \times 0.95}{0.857} = 0.9977 \quad \text{----- 4 分}$$

**评分标准说明：** 全概率公式，贝叶斯公式写正确给 4 分。

2 解：(1) 当  $y \leq 0$  时,  $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = 0$ ,

$$f(y) = 0 \quad \text{-----} \quad 1 \text{ 分}$$

当  $y > 0$  时, 则 Y 的分布函数为:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(0 < e^X \leq y) \\ &= P(X \leq \ln y) = \Phi(\ln y); \quad \text{-----} \quad 2 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\text{则 } f(y) = \frac{d}{dy} F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \ln^2 y} \frac{1}{y} \quad \text{-----} \quad 2 \text{ 分}$$

(2) 当  $y \leq 1$  时,  $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(2X^2 + 1 \leq y) = 0$ ,

$$f(y) = 0 \quad \text{-----} \quad 1 \text{ 分}$$

当  $y > 1$  时, 则 Y 的分布函数为:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(2X^2 + 1 \leq y) \\ &= P\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}} \leq X \leq \sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) \\ &= \Phi\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) - \Phi\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) = 2\Phi\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) - 1 \quad \text{-----} \quad 2 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\text{则 } f(y) = \frac{d}{dy} \left[ 2\Phi\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) - 1 \right] = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}} e^{-(y-1)/4} \quad \text{-----} \quad 2 \text{ 分}$$

**评分标准说明：**以上密度函数计算时，第(1)小题，如果  $y=0$  对应函数值不正确则扣 1 分；第(2)小题，如果  $y=1$  对应函数值不正确也扣 1 分。

3 解：(1)  $0.1 + a + 0.12 + 0.15 + 0.25 + b = 1$

$$P(X = 1) = 0.1 + a + 0.12 = 0.35$$

$$\text{解方程组得： } a = 0.13, \quad b = 0.25 \quad \text{-----} \quad 4 \text{ 分}$$

(2)

X	1	2
p	0.35	0.65

Y	0	1	2
p	0.25	0.38	0.37

----- 4 分

(3)  $F(2,1) = P(X \leq 2, Y \leq 1) = 0.63$  ----- 2 分

**评分标准说明：** a, b 数值解错，后面的解题方法正确，给一半分。

4 解： 设食堂应设的座位数为  $N$ ， 设每餐去该食堂就餐的学生人数为  $X$

则  $X \sim B(20000, 0.8)$ ； ----- 2 分

$$E(X) = 20000 \times 0.8 = 16000, \quad D(X) = 20000 \times 0.8 \times 0.2 = 3200$$

依题意有：  $P(X \leq N) = 0.99$ ，

由中心极限定理知：  $X$  近似服从  $N(16000, 3200)$  ----- 2 分

$$P(X \leq N) \approx \Phi\left(\frac{N - 16000}{\sqrt{3200}}\right) = 0.99 = \Phi(2.33)$$

计算得：  $N = 16132$  ----- 4 分

**评分标准说明：** 最后的整数  $N$  进位错扣 1 分；也可用独立同“0-1”分布方法做。

5 解： 选取统计量：  $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$  ----- 2 分

通过计算得：  $\bar{x} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i = 75$  ----- 2 分

所求置信区间为：

$$\left(\bar{x} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (69.773, 80.227) \quad \text{----- 4 分}$$

**评分标准说明：**  $\bar{x}$  计算错，置信区间公式写对给一半分。

6 解： (1)  $D(Y_i) = D\left[(1 - \frac{1}{n})X_i - \frac{1}{n} \sum_{k \neq i} X_k\right] = (1 - \frac{1}{n})^2 D(X_i) + \frac{1}{n^2} \sum_{k \neq i} D(X_k)$   
 $= (1 - \frac{1}{n})^2 + \frac{n-1}{n^2} = \frac{n-1}{n^2} \quad i = 1, 2, \dots, n$  ----- 4 分

(2)  $\because E(Y_1) = E(Y_n) = E(\bar{X}) = 0, \quad E(X_1^2) = E(X_n^2) = 1, \quad E(\bar{X}^2) = \frac{1}{n},$

$$E(X_i X_j) = E(X_i)E(X_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

$$\therefore \text{Cov}(Y_1, Y_n) = E(Y_1 Y_n) - E(Y_1)E(Y_n) = E[(X_1 - \bar{X})(X_n - \bar{X})]$$

$$= E(X_1 X_n) + E(\bar{X}^2) - E(X_1 \bar{X}) - E(X_n \bar{X})$$

$$= -\frac{1}{n} \quad \text{-----} \quad 4 \text{ 分}$$

(3)  $Y_1 + Y_n = \frac{n-2}{n} X_1 - \frac{2}{n} \sum_{i=2}^{n-1} X_i + \frac{n-2}{n} X_n$ , 为相互独立的正态随机变量的

线性组合, 故  $Y_1 + Y_n$  服从正态分布, 又  $E(Y_1 + Y_n) = 0$ , 得  $P(Y_1 + Y_n \leq 0) = \frac{1}{2}$ 。  
----- 2 分

**评分标准说明:** 解题方法和计算公式正确, 运算错误给一半分。

## 5 2018—2019 学年第 2 学期《概率论与数理统计 A》期末 A 卷

### 一 填空题

1. 0.6;    2. 0.9, 0.25;;    3. 0.5, 1.1;    4.  $\frac{3}{2}, \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$ ;    5. 0.15;    6.  $\frac{n-m}{n}$ ;

7 (161.08, 168.92)。

### 二 选择题

1 D;    2 A;    3 B;    4 C;    5 D;    6 B。

三 解: 设  $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次考试及格}\} (i=1, 2)$ ,  $B = \{\text{取得某种资格}\}$ 。

1.  $B = A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (\bar{A}_1 A_2)$ , 且  $A_1 \cap (\bar{A}_1 A_2) = \emptyset$  (2 分)

$$P(B) = P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) = p + P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)$$

$$= p + (1-p) \times 0.5p = 1.5p - 0.5p^2 \quad (6 \text{ 分})$$

$$2. P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_2)} = \frac{p \times p}{p \times p + (1-p) \times 0.5p} = \frac{2p}{1+p} \quad (10 \text{ 分})$$

四 解: 令  $X$  表示某天来到该商场的顾客人数, 则  $X \sim \pi(1)$

$$P(X=n) = \frac{1^n}{n!} e^{-1} = \frac{1}{n!} e^{-1}, \quad (n=1, 2, \dots) \quad (2 \text{ 分})$$

设  $Y$  表示这一天在该商场消费的人数，则：

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$$

$$\text{而：} \quad P(Y = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n)P(Y = 0|X = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{-1} \times C_n^0 p^0 (1-p)^n = e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-p)^n}{n!} = e^{-1} \times e^{1-p} = e^{-p} \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{故：} \quad P(Y \geq 1) = 1 - e^{-p} \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{五 解：} \quad 1. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-1}^0 (a+x) dx + \int_0^1 (b-x) dx = 1,$$

$$E(X) = \int_{-1}^0 x(a+x) dx + \int_0^1 x(b-x) dx = 0$$

$$\text{得：} \quad a = 1, \quad b = 1 \quad (3 \text{ 分})$$

$$2. \quad P(|X| \leq \frac{1}{3}) = \int_{-1/3}^0 (1+x) dx + \int_0^{1/3} (1-x) dx = \frac{5}{9} \quad (5 \text{ 分})$$

$$3. \quad E(X^2) = \int_{-1}^0 x^2(1+x) dx + \int_0^1 x^2(1-x) dx = \frac{1}{6}$$

$$E(X^2 + 1) = E(X^2) + 1 = \frac{7}{6} \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{六、解：} \quad 1. \quad 0.2 + 0.1 + a + 0.1 + b + 0.1 = 1$$

$$E(XY) = 1 \times 3 \times 0.2 + 1 \times 4 \times 0.1 + 1 \times 5 \times a + 2 \times 3 \times 0.1 + 2 \times 4 \times b + 2 \times 5 \times 0.1 = 6$$

$$\text{解方程组得：} \quad a = 0.2, \quad b = 0.3 \quad (3 \text{ 分})$$

2.

X	1	2
p	0.5	0.5

Y	3	4	5
p	0.3	0.4	0.3

(5 分)

$$3. \quad E(X) = 1 \times 0.5 + 2 \times 0.5 = 1.5, \quad E(Y) = 3 \times 0.3 + 4 \times 0.4 + 5 \times 0.3 = 4$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 6 - 1.5 \times 4 = 0 \quad (8 \text{ 分})$$

七. 解: 设  $X$  表示不合格的电子元件数, 则  $X \sim B(10000, 0.1)$

$$E(X) = 1000, \quad D(X) = 900 \quad (2 \text{ 分})$$

由中心极限定理知:  $X$  近似服从  $N(1000, 900)$  (5 分)

则

$$P(X < 970) = \Phi\left(\frac{970 - 1000}{\sqrt{900}}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587 \quad (8 \text{ 分})$$

八. 解: 建立原假设  $H_0: \mu = 8$  和备择假设  $H_1: \mu \neq 8$  (1 分)

$$\text{检验统计量} \quad T = \frac{\bar{X} - 8}{S / \sqrt{n}}$$

$$n = 16, \text{ 在 } H_0 \text{ 成立下, } T = \frac{\bar{X} - 8}{S / \sqrt{n}} \sim t(15) \quad (3 \text{ 分})$$

由显著性水平  $\alpha = 0.05$  知,  $H_0$  的拒绝域为

$$R = \{|T| > t_{\alpha/2}(n-1)\} = \{|T| > t_{0.025}(15)\} = \{|T| > 2.1314\} \quad (5 \text{ 分})$$

$$\text{计算统计量 } T \text{ 的观测值为 } t = \frac{\bar{x} - 8}{s / \sqrt{n}} = \frac{8.2 - 8}{0.4 / \sqrt{16}} = 2 \notin R \quad (7 \text{ 分})$$

所以, 接受原假设, 即可以认为该玻璃厚度符合规定。(8 分)

$$\text{九. 解: 1. } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{\theta} \frac{6x^2}{\theta^3}(\theta - x)dx = \frac{\theta}{2}, \quad \text{令 } \bar{X} = E(X) = \frac{\theta}{2},$$

$$\text{得: } \theta \text{ 的矩估计量为 } \hat{\theta} = 2\bar{X} \quad (4 \text{ 分})$$

$$2. \text{ 是无偏估计. 因为: } E(\hat{\theta}) = E(2\bar{X}) = 2E(\bar{X}) = 2E(X) = 2 \times \frac{\theta}{2} = \theta \quad (8 \text{ 分})$$

$$3. \quad E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\theta} \frac{6x^3}{\theta^3}(\theta - x)dx = \frac{3}{10}\theta^2$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3}{10}\theta^2 - \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{\theta^2}{20}$$

$$\text{所以: } D(\hat{\theta}) = D(2\bar{X}) = 4D(\bar{X}) = \frac{4}{n}D(X) = \frac{4}{n} \times \frac{\theta^2}{20} = \frac{\theta^2}{5n} \quad (12 \text{ 分})$$