离散数学概论

第六章 特殊的图（一）

课程QQ号： **819392514**
金耀 软件工程系
fool1025@163.com
13857104418

第六章 特殊的图

1.1 **树**

1.2 欧拉图

1.3 哈密尔顿图

1.4 二部图

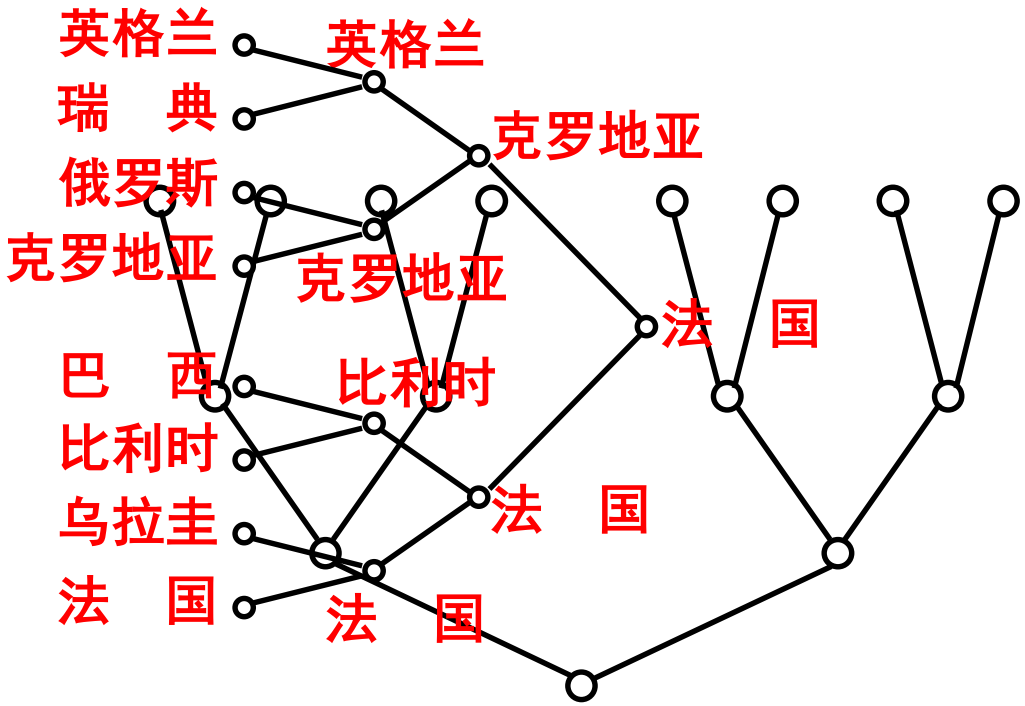
1.5 平面图

引言

- 树是图论中的一个非常重要的概念，有着非常广泛的应用，例如现代计算机操作系统均采用树形结构来组织文件和文件夹，本节介绍树的基本知识和应用。
- 在本节中，所谈到的图都假定是简单图；所谈到的回路均指简单回路或基本（初级）回路。并且同一个图形表示的回路(简单的或基本的)，可能有不同的交替序列表示方法，但规定它们表示的是同一条回路。

树的基本概念及性质

例 2018年俄罗斯世界杯8强的比赛结果图，最后胜利的队捧得大力神杯。



定义

- 连通而不含回路的无向图称为无向树(Undirected Tree)，简称树(Tree)，常用T表示树。
- 树中度数为1的结点称为叶(Leaf)；度数大于1的结点称为分支点(Branch Point)或内部结点(Interior Point)。
- 每个连通分支都是树的无向图称为森林(Forest)。
- 平凡图称为平

➢ 树中没有环和

➢ 在任何非平凡

解题小贴士——无向图G是树的判断

（1）图G是连通的。

（2）图G中不存在回路。

不含回路的无向图称为森林

10.2.2

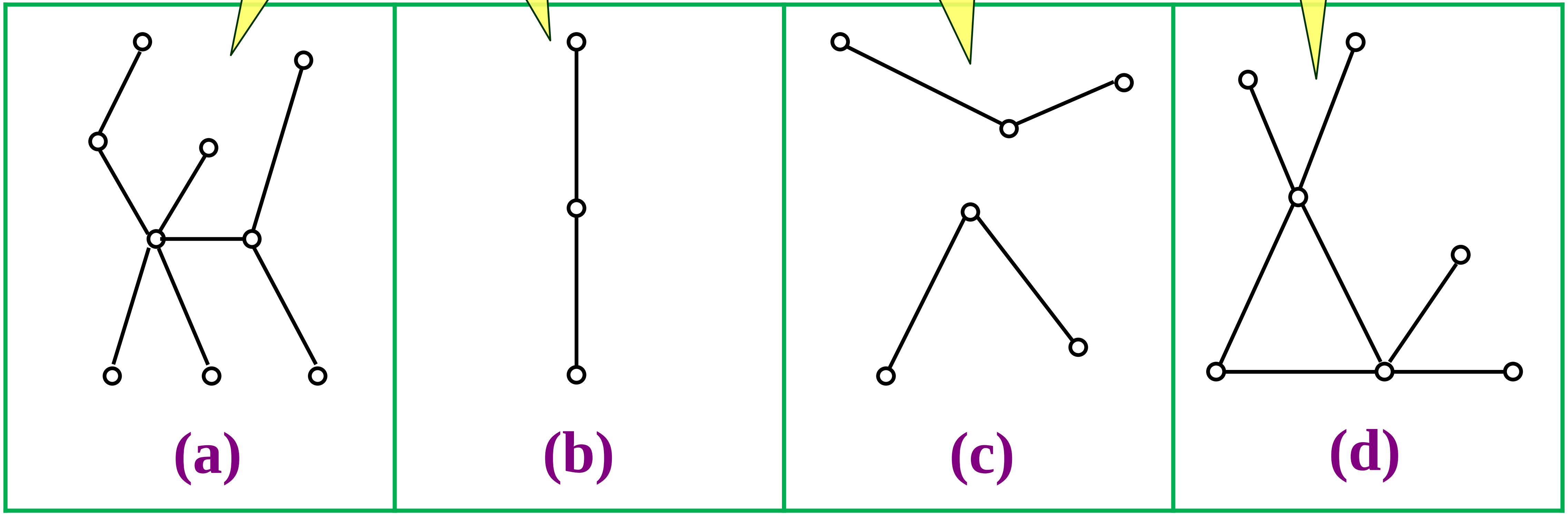
判断下图中的图哪些是树？为什么？

连通，无回路

连通，无回路

不连通 ，无回路

有回路



树

树

不是树

森林

不是树

不是森林

树的性质

定理 设无向图$G = <V,E>$，$|V| = n$，$|E| = m$，下列各命题是等价的：

① G连通而不含回路(即G是树)

② G中无回路，且m = n-1

③ G是连通的，且m = n-1

④ G中无回路，但在G中任二结点之间增加一条新边，就得到唯一的一条基本（初级）回路

⑤ G是连通的，但删除G中任一条边后，便不连通(n≥2)

⑥ G中每一对结点之间有唯一一条基本（初级）通路(n≥2)

树的特点

在结点给定的无向图中，

树是边数最多的无回路图

树是边数最少的连通图

由此可知，在无向图$G = (n, m)$中，

若$m < n-1$，则G是不连通的

若$m > n-1$，则G必含回路

由定理：

G中无回路，但在G中任二结点之间增加一条新边，就得到唯一的一条基本回路。

由定理：

G是连通的，但删除G中任一条边后，便不连通。

定理

任意非平凡树$T=(n,m)$都至少有两片叶。

证明 因非平凡树T是连通的，从而T中各结点的度数均大于等于1。

设T中有k个度数为1的结点(即k片叶)，其余的结点度数均大于等于2。

由握手定理得

$$2m=\sum_{v\in V}\deg(v)\ge k+2(n-k)=2n-k$$

由于树中有$m=n-1$，于是$2(n-1)\ge 2n-k$，

因此可得$k\ge 2$，这说明T中至少有两片叶。

平凡树有多少片叶

0

生成树及算法

定义 给定图$G = \langle V, E \rangle$，若G的某个**生成子图**是**树**，则称之为G的**生成树**(Spanning Tree)，记为T_G。

- 生成树T_G中的边称为**树枝**(Branch)
- G中不在T_G中的边称为**弦**(Chord)
- T_G的所有弦的集合称为生成树的**补**(Complement)

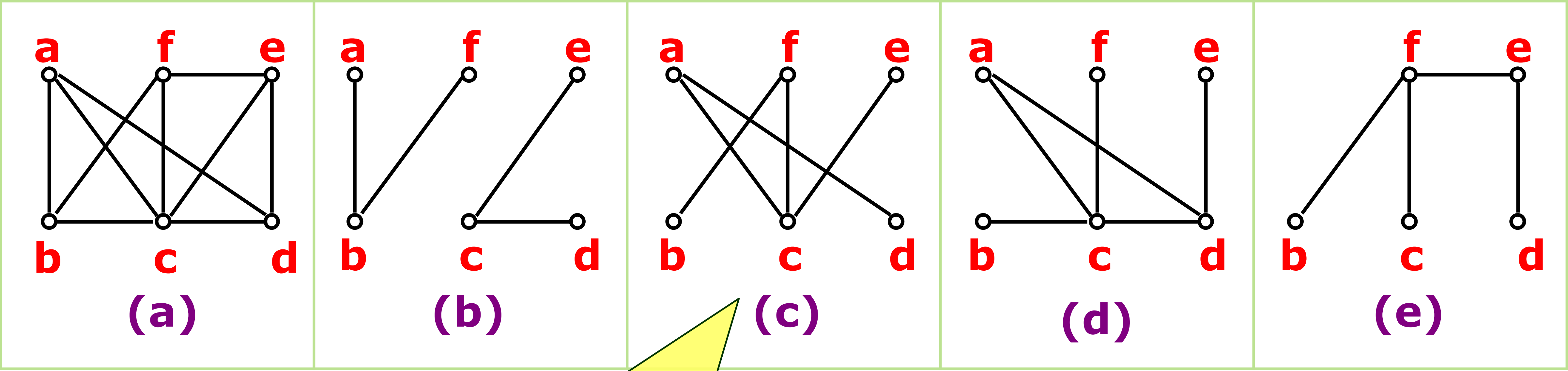
解题小贴士——图G'是图G的生成树的判断

（1）图G'是图G的生成子图。

（2）图G'是树。

例

判断下图中的图(b)、(c)、(d)、(e)是否是图(a)的生成树。



不是　　是　　不是　　不是

树枝：(a, c)、(a, d)、(b, f)、(c, f)、(c, e)

弦：(a, b)、(b, c)、(c, d)、(d, e)、(e, f)

说明

- 一个无向连通图G，如果G是树，则它的生成树是唯一的，就是G本身。
- 如果G不是树，那么它的生成树就不唯一了。
- 求连通图G＝(n, m)的生成树的一种算法，称为“破圈法”，算法的关键是判断G中是否有回路。若有回路，则删除回路中的一条边，直到剩下的图中无回路为止，由定理知，共删除m-n+1条边。
- 连通图G＝(n, m)一定存在生成树，且其有n个结点，n-1条树枝，m-n+1条弦，因此选择G中不构成任何回路的n-1条边，就得到G的生成树，这种方法称为“避圈法”。

破圈法与避圈法

■ 算法

解题小贴士——求连通图G＝(n, m)的生成树

◆ 使用破圈法：找出一条回路，并删除该回路中的一条边，直到图中没有回路为止，删除的边的总数为m-n+1。

◆ 使用避圈法：选取一条边，验证该边与已选取的边不构成回路，选取的边的总数为n-1。

■ 算法

每次

选取

由于删除回路上的边和选择不构成任何回路的边有多种选法，所以产生的生成树不是唯一的。

根树的定义与分类

定义 一个有向图，若略去所有有向边的方向所得到的无向图是一棵树，则这个有向图称为有向树(Directed Tree)。

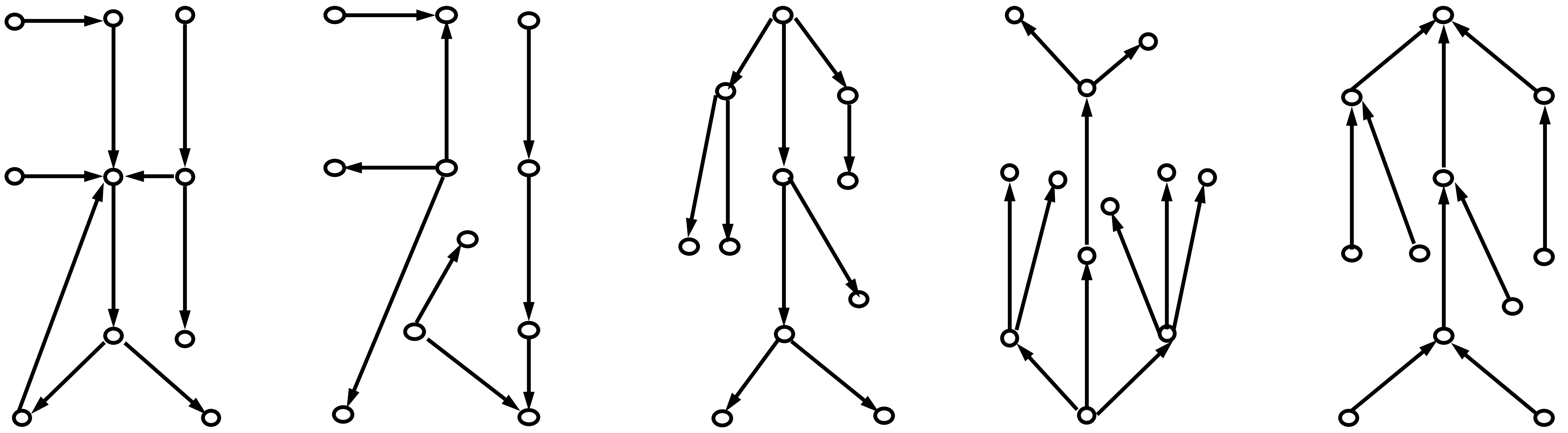
解题小贴士——有向树的判断

(1) 将所有有向边都略去方向变为无向边，得到一个无向图。

(2) 判断该无向图是否是树。

例

判断下图中的图哪些是有向树？为什么 ？



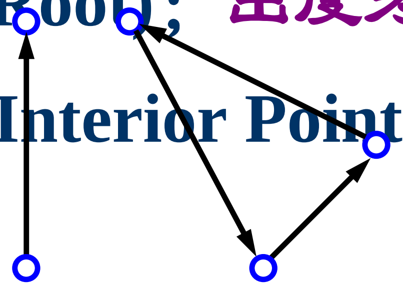
(a) (b) (c) (d) (e)

不是有向树　不是有向树　有向树　有向树　有向树

定义

一棵非平凡的有向树，如果恰有一个结点的入度为0，其余所有结点的入度均为1，则称之为根树(Root Tree)或外向树(Outward Tree)。

入度为0的结点称为根(Root)；出度为0的结点称为叶(Leaf)；入度为1，出度大于0的结点称为内点(Interior Point)；又将内点和根统称为分支点(Branch Point)。



在根树中 … 层数(Layer Number)；称 … 最大的称为根树的高(He…

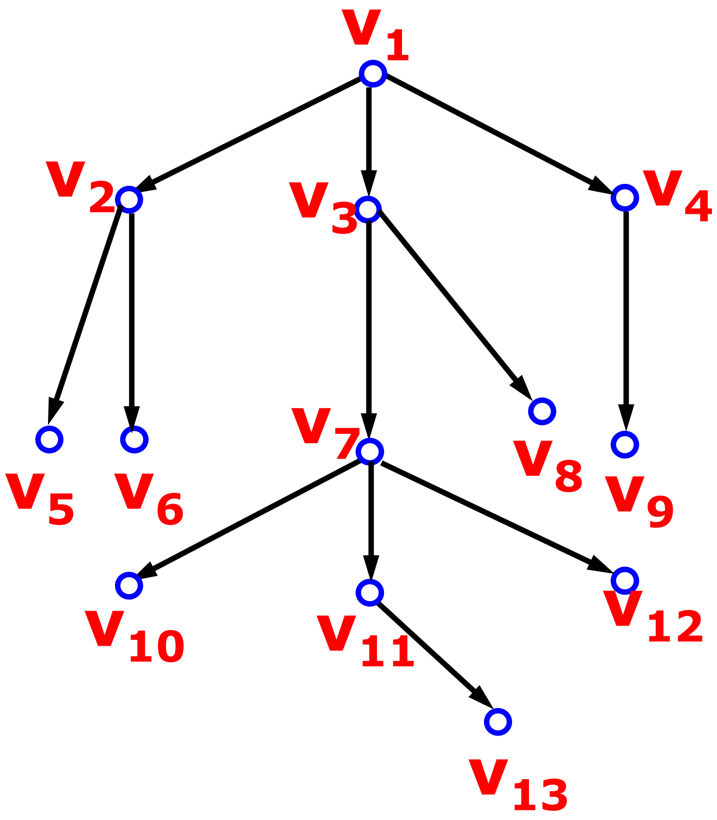
解题小贴士——根树的判断

(1) 判断是否为有向树。

(2) 计算所有结点的度数，看是否恰有一个结点的入度为0，其余所有结点的入度均为1。

例

判断下图所示的图是否是根树？若是根树，给出其根、叶和内点，计算所有结点所在的层数和高。



倒置法

- 是根树
- 根：v_1
- 叶：v_5, v_6, v_8, v_9, v_{10}, v_{12}, v_{13}
- 内点：v_2, v_3, v_4, v_7, v_{11}

- v_1处在第零层，层数为0
- v_2,v_3,v_4同处在第一层，层数为1
- v_5,v_6,v_7,v_8,v_9同处在第二层，层数为2
- v_{10},v_{11},v_{12}同处在第三层，层数为3
- v_{13}处在第四层，层数为4
- 这棵树的高为4

1.1 树

1.2 <u>欧拉图</u>

1.3 哈密尔顿图

1.4 二部图

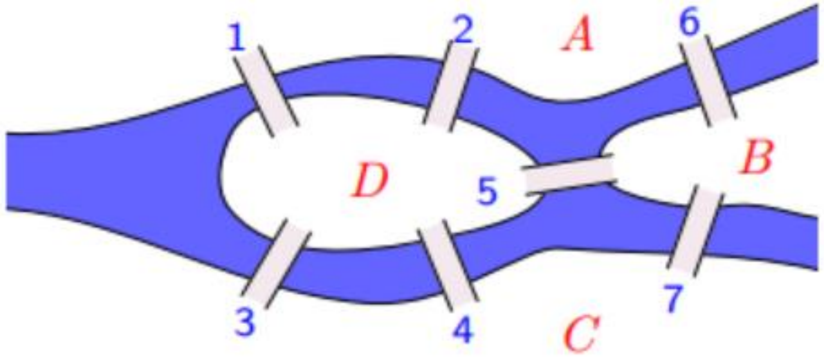
1.5 平面图

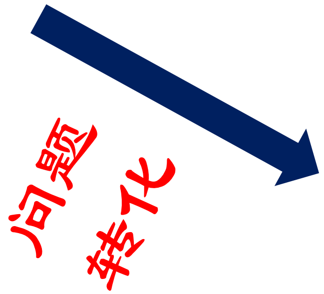
§1 欧拉图

一、基本概念

二、判定

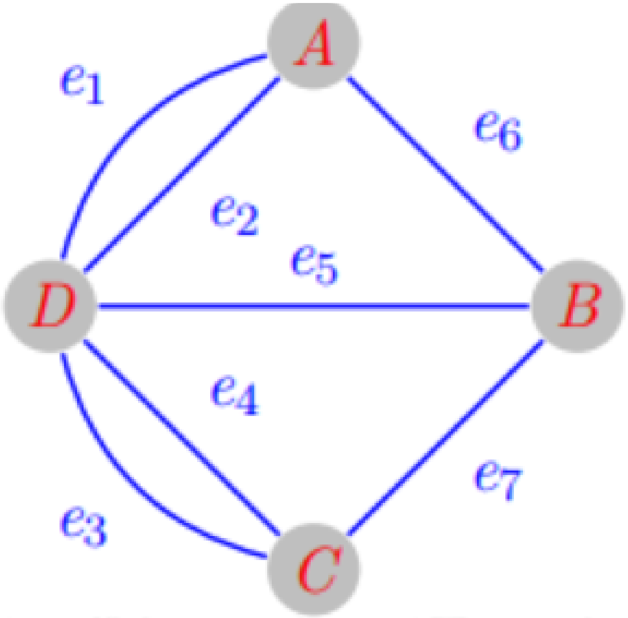
哥尼斯堡七桥问题与欧拉图





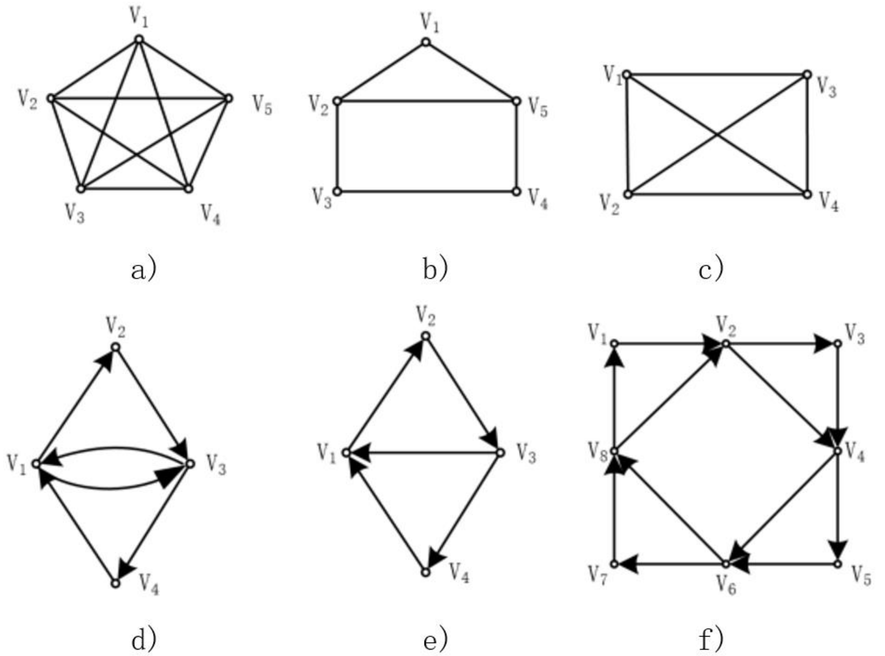
等价问题（欧拉）：

能不能用一笔就把这个图形画出来.



一. 基本概念

- 设G是一个无孤立结点的图，经过图中每边一次且仅一次的道路（回路/链）称为**欧拉道路**（回路/链），具有欧拉回路的图称为**欧拉图**。
- 我们规定平凡图为欧拉图，且每个欧拉图必然是连通图。



图a)、图d)和图f)是欧拉图；
图b)和图e)不是欧拉图，但存在欧拉通路；
图c)不存在欧拉通路。

一. 基本概念

【定义】

(1) 欧拉通路: 经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的通路.

(2) 欧拉回路: 经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的回路.

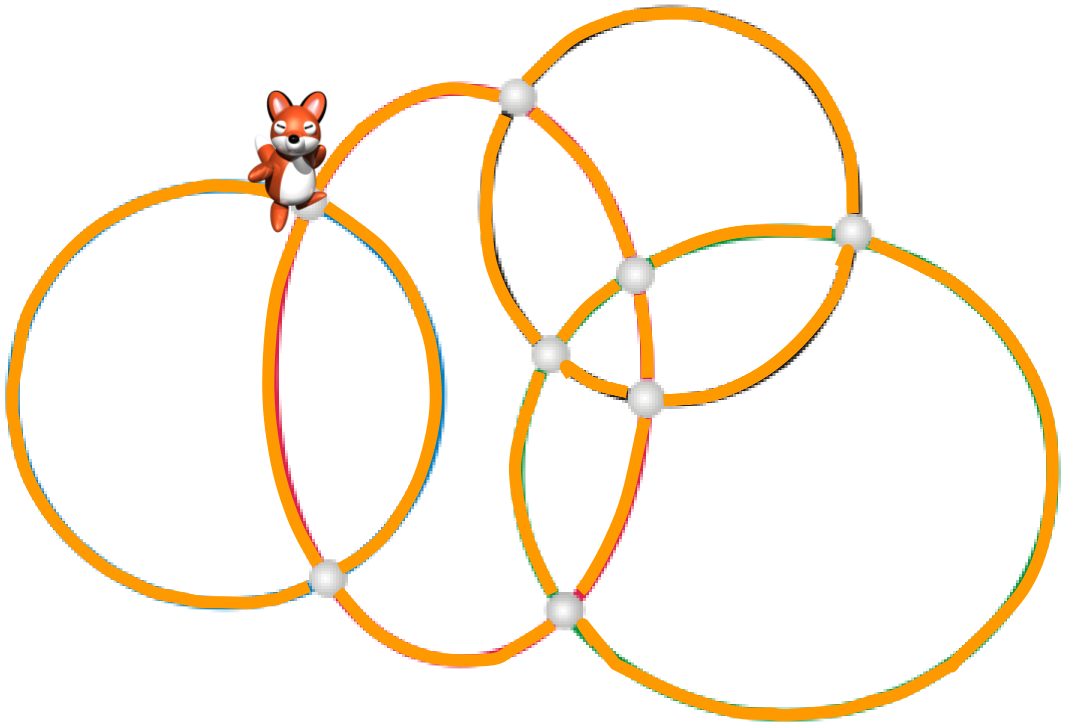
(3) 欧拉图: 具有欧拉回路的图.

(4) 半欧拉图:具有欧拉通路而无欧拉回路的图.

说明 :

- 规定平凡图为欧拉图.
- 欧拉通路是生成的简单通路, 欧拉回路是生成的简单回路.
- 环不影响图的欧拉性.

欧拉图是若干个边不重的圈之并，见示意图.



PLAY

一. 基本概念

【定理6-1】无向连通图$G=\langle V, E\rangle$是欧拉图当且仅当G的所有结点的度数都为偶数.

【推论6-1】非平凡连通图$G=\langle V, E\rangle$含有欧拉道路当且仅当G仅有零个或者两个奇数度结点.

【定理6-2】给定连通无向图$G=\langle V, E\rangle$, $u, v\in V$且$u\neq v$, u与v间存在欧拉通路等价于G中仅有u和v为奇度结点.

一. 基本概念

【定理6-3】给定弱连通有向图G, G有欧拉回路等价于G中的每个结点的入度等于出度.

【定理6-4】给定弱连通有向图$G=<V, E>$, $u, v \in V$且$u \neq v$, u与v存在欧拉通路等价于G中唯有u和v的入度不等于出度, 且u的入度比其出度大于1和v的出度比其入度小于1(或者反之).

欧拉通路与欧拉回路判别准则

- 对任意给定的无向连通图，只需通过对图中各结点度数的计算，就可知它是否存在欧拉通路及欧拉回路，从而知道它是否为欧拉图；
- 对任意给定的有向连通图，只需通过对图中各结点出度与入度的计算，就可知它是否存在欧拉通路及欧拉回路，从而知道它是否为欧拉图。

利用这项准则，很容易判断出哥尼斯堡七桥问题是无解的，因为它所对应的图中所有4个结点的度数均为奇数。

解题小贴士——欧拉图的判断2

❖ **连通图的无向图**

（1）计算所有结点的度数。

（2）存在0个奇度数结点则有欧拉回路，是欧拉图；存在2个奇度数结点则有欧拉通路。

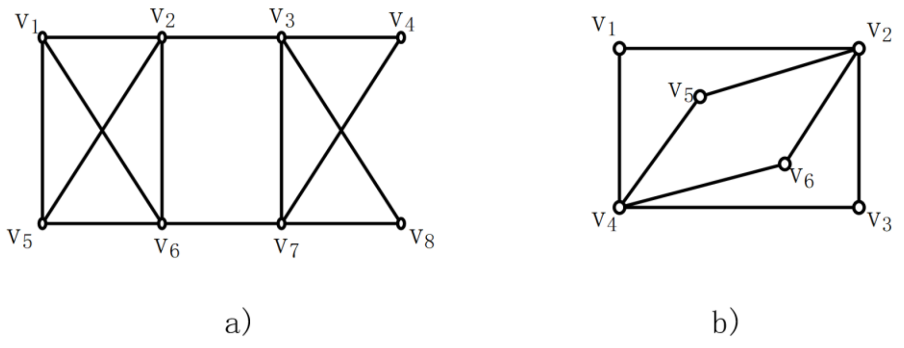
❖ **连通图的有向图**

（1）计算所有结点的出度和入度。

（2）所有结点的入度等于出度则有欧拉回路，是欧拉图；两个结点以外，其余结点的入度等于出度，而这两个例外的结点中，一个结点的入度比出度大1，另一个结点的出度比入度大1，则有欧拉通路。

例题

例： 求下图的欧拉路径或欧拉回路。



解： 图a)的欧拉路径为

$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_5, v_3, v_6, v_7, v_2, v_8, v_7, v_1, v_8)$。

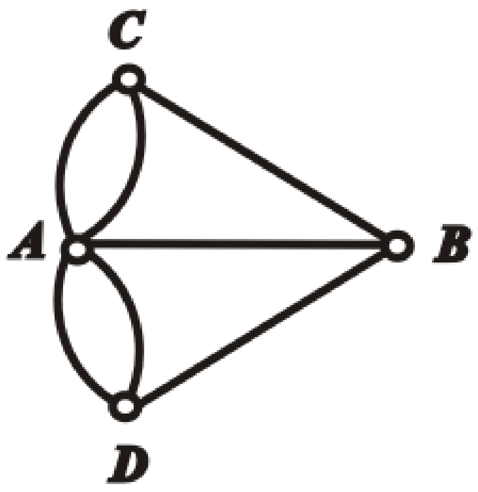
图b)的欧拉回路为

$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_2, v_6, v_4, v_1)$。

实例

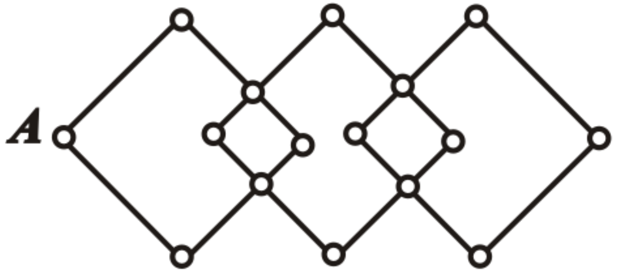
例1 哥尼斯堡七桥问题

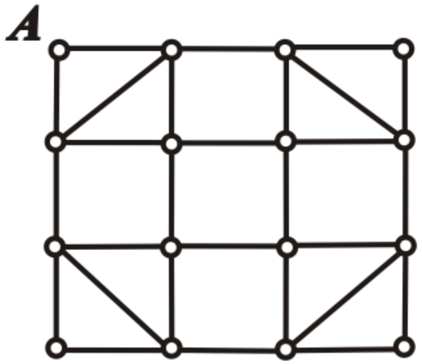
4个奇度顶点, 不存在欧拉通路, 更不存在欧拉回路,



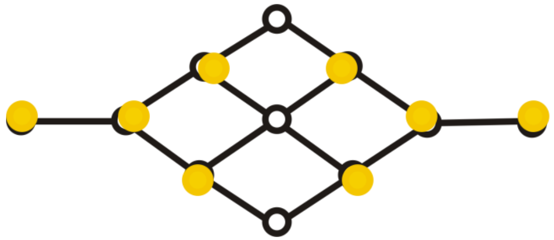
例2 下面两个图都是欧拉图.

从A点出发, 如何一次成功地走出一条欧拉回路来？

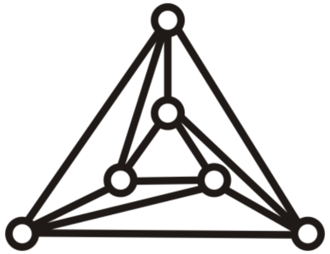




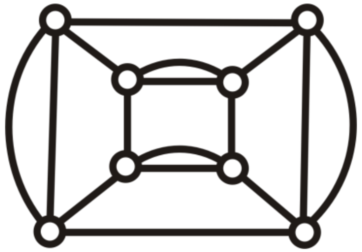
实例:判断下图是否存在欧拉通（回）路



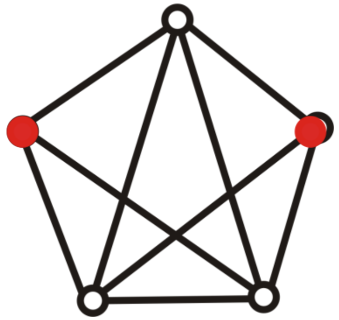
无欧拉通路



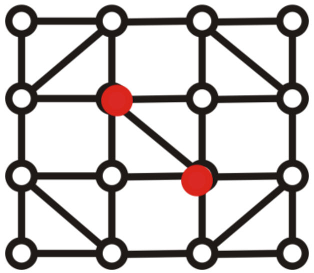
欧拉图



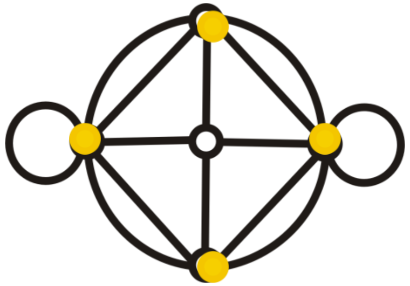
欧拉图



有欧拉通路
非欧拉图



有欧拉通路
非欧拉图

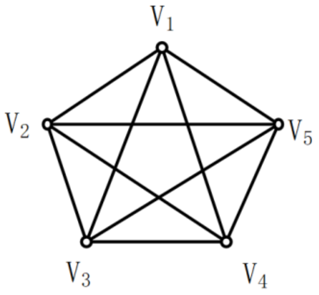


无欧拉通路

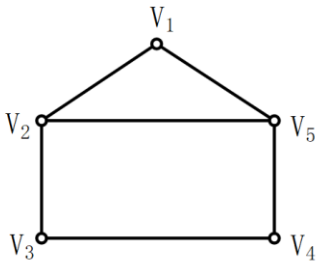
二. 判定

判断无向欧拉通路的方法： 无向图$G=<V，E>$具有一条欧拉通路当且仅当G是连通的，且仅有零个或者两个奇度数结点。若有两个奇度数结点，则它们是G中每条欧拉通路的端点。

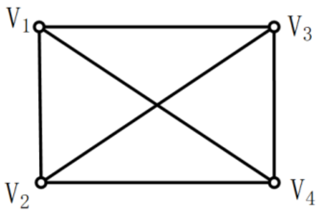
判断无向欧拉图的方法： 无向图$G=<V，E>$是欧拉图当且仅当G是连通的，且G的所有结点的度数都为偶数。



a)



b)



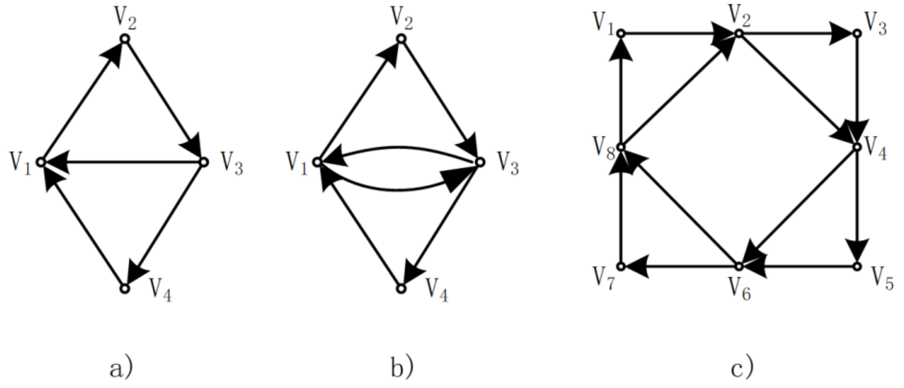
c)

图a)是欧拉图；图b)不是欧拉图，但存在欧拉通路；图c)既不是欧拉图，也不存在欧拉通路。

二. 判定

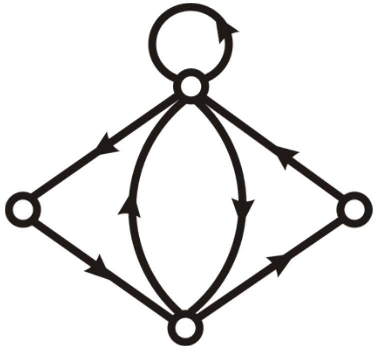
判断有向欧拉通路的方法： 有向图G具有一条欧拉通路，当且仅当G是连通的，且除了两个结点以外，其余结点的入度等于出度，而这两个例外的结点中，一个结点的入度比出度大1，另一个结点的出度比入度大1。

判断有向欧拉图的方法： 有向图G具有一条欧拉回路，当且仅当G是连通的，且所有结点的入度等于出度。

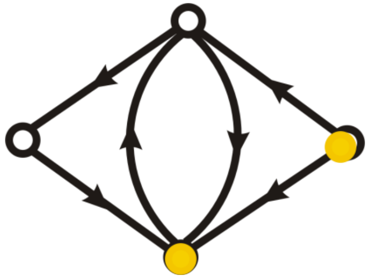


图a)存在一条的欧拉通路：$v_3v_1v_2v_3v_4v_1$；
图b)中存在欧拉回路$v_1v_2v_3v_4v_1v_3v_1$，因而b)是欧拉图；
图c)中有欧拉回路$v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_2v_4v_6v_8v_1$，因而$c$)是欧拉图。

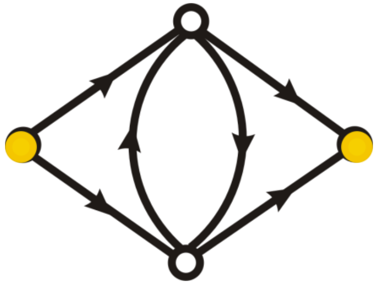
实例



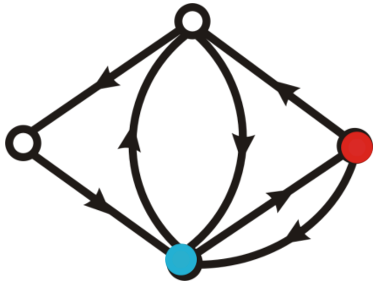
欧拉图



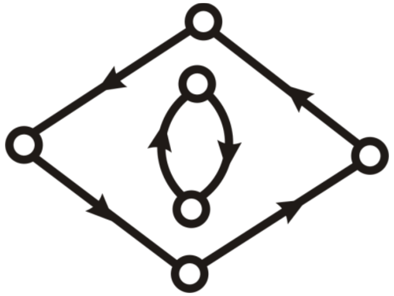
无欧拉通路



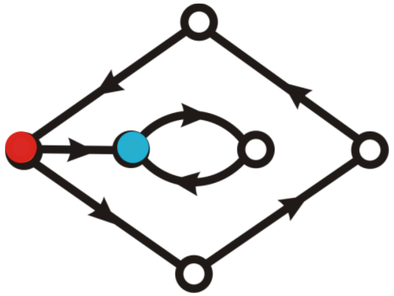
无欧拉通路



有欧拉通路
无欧拉回路



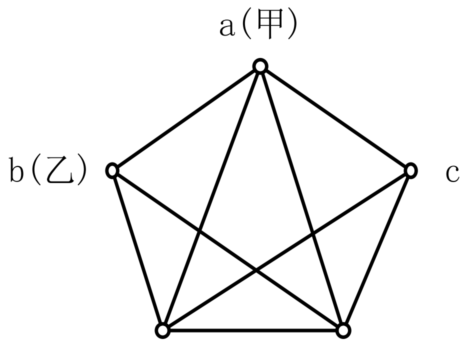
无欧拉通路



有欧拉通路
无欧拉回路

二. 判定

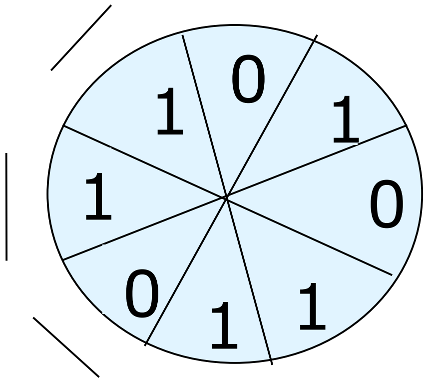
例：如下图所示，甲、乙两只蚂蚁分别位于图中的结点a，b处，并设图中的边长度是相等的。甲、乙进行比赛：从它们所在的结点出发走过图中的所有边最后到达结点c处。如果它们的速度相同，问谁先到达目的地？



解：在图中，仅有两个度数为奇数的结点b，c，因而存在从b到c的欧拉通路，蚂蚁乙走到c只要走一条欧拉通路，边数为9条。而蚂蚁甲要想走完所有的边到达c，至少要先走一条边到达b，再走一条欧拉通路，因而它至少要走10条边才能到达c，所以乙必胜。

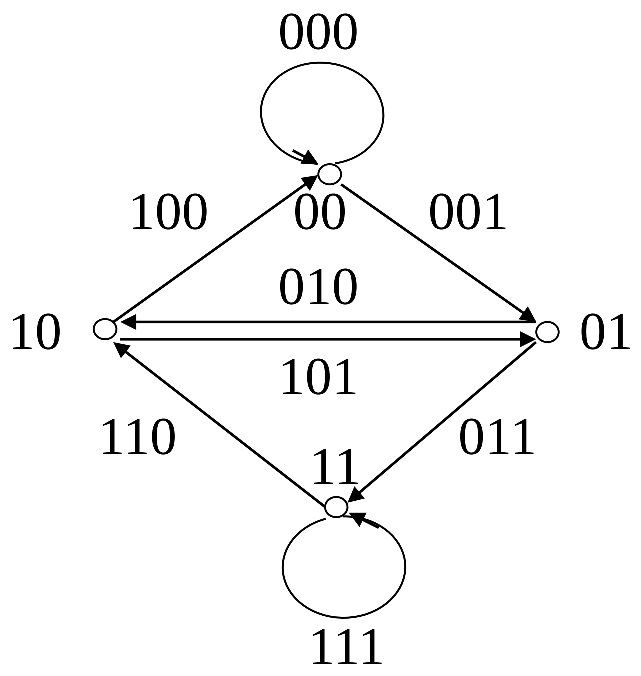
应用实例

例 设旋转磁鼓分成8个扇区，每个扇区标记一个0或1，有3个探测器能够读出连续的3个扇区的标记．如何赋给扇区标记，使得能够根据探测器的读数确定磁鼓的位置．为了能够根据读数确定磁鼓的位置，必须构造一个由8个0和1组成的圆环，使得圆环上连续3个数字的序列都不相同．



应用实例(续)

构造一个4阶有向图，8条边的标记是不同的，图中存在一条欧拉回路:000, 001, 011, 111, 110, 101, 010, 100. 在这条回路上连续3条边的标记的第一位恰好与第一条边的标记相同. 顺着这条回路取每一条边标记的第一位得到00011101, 按照这个顺序标记磁鼓的扇区.



1.1 树

1.2 欧拉图

1.3 哈密尔顿图

1.4 二部图

1.5 平面图

§2 哈密尔顿图

一、基本概念

二、判定

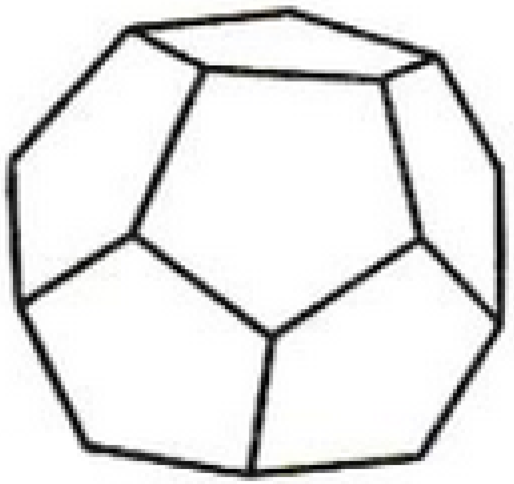
三、例题

哈密顿的引入与定义

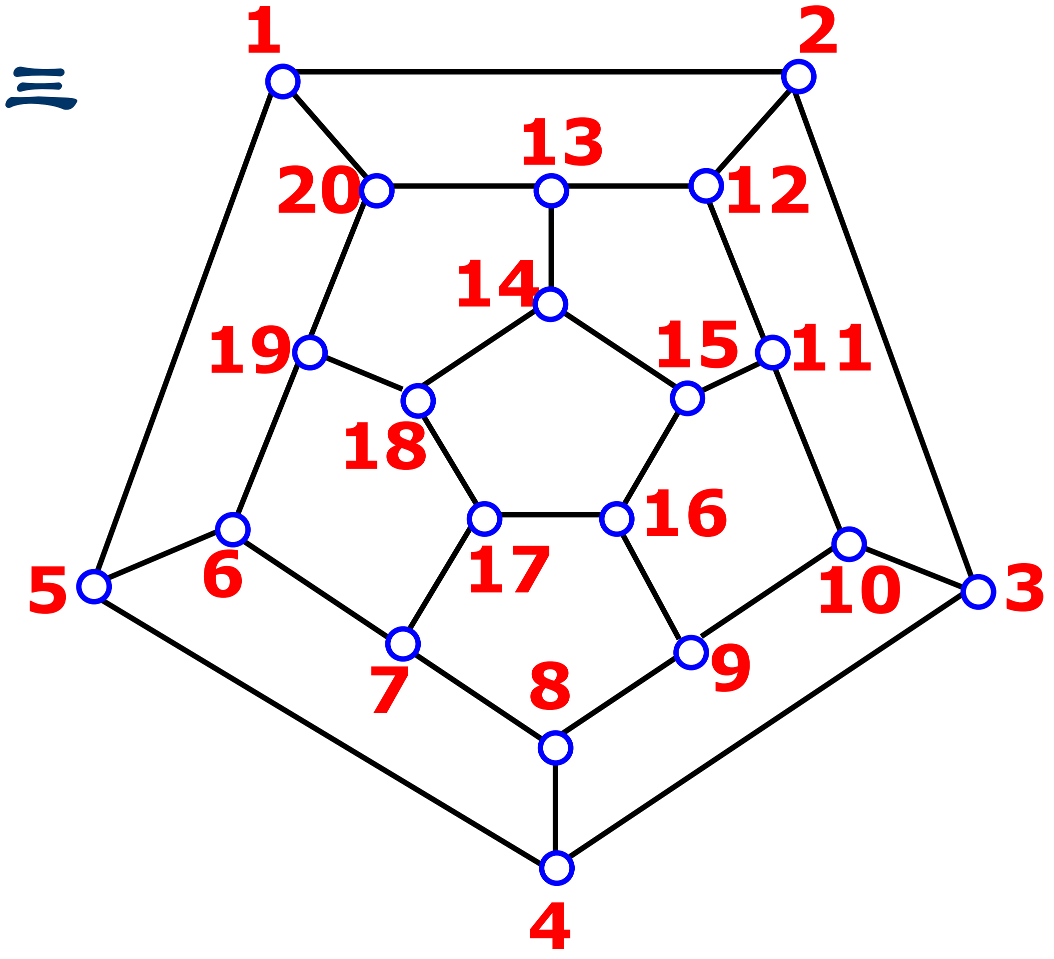
1859年，威廉.哈密顿爵士

正十二面体:每个面都是正五边形，三面交于一角

20个顶点、30条边和12个面



平面展开



哈密顿

威廉●哈密顿

爱尔兰数学家、物理学家、力学家

- 自幼聪明，被称为**神童**。
- **3岁**能读英语，会算术；**5岁**能译拉丁语、希腊语和希伯来语，并能背诵荷马史诗；**9岁**便熟悉了波斯语、阿拉伯语和印地语。他自幼喜欢算术，计算很快。
- **1818年**遇到美国“计算神童”Z．**科耳本**（Colburn）后对数学产生了更深厚的兴趣。
- 到**1820年**已阅读了**牛顿**的《自然哲学的数学原理》，并对天文学有强烈爱好，常用自己的望远镜观测天体。

哈密顿

威廉·哈密顿

爱尔兰数学家、物理学家、力学家

- 1820年开始读P．S．拉普拉斯（Laplace）的著作《天体力学》，1822年指出了此书中的一个错误；同年他开始进行科学研究工作，对曲线和曲面的性质进行了系列研究，并用于几何光学。
- 爱尔兰科学院院士R．J．布林克莱（Brinkley）称他是“这个年龄（17岁）的第一数学家”。
- 首先建立了光学的数学理论，并把这种理论移植到动力学中去，提出了著名的“哈密顿最小作用原理”，即用一个变分式推出各种动力学定律。
- 还把广义坐标和广义动量作为典型变量来建立动力学方程——哈密顿典型方程。

哈密顿

威廉·哈密顿

爱尔兰数学家、物理学家、力学家

- 还建立了与系统的总能量有关的**哈密顿函数**，这些工作推动了变分法和微分方程理论的进一步研究。
- **哈密顿方程**是一个经典力学方程。
- **哈密顿函数**既是经典物理学中的一个函数，也是量子物理学中的一个算子。
- **哈密顿图**是图论中的一个术语。
- 他也喜欢文学，成为数学大师后，仍不断赋诗填词，一直认为文学与数学是近似的学科——都是抽象思维的文字与符号。他曾写道：“诗与数学是近亲。”

一. 基本概念

【定义】

(1) 哈密顿通路：经过图中所有顶点一次仅一次的通路.

(2) 哈密顿圈：经过图中所有顶点一次仅一次的回路.

(3) 哈密顿图：具有哈密顿回路的图.

(4) 半哈密顿图：具有哈密顿通路且无哈密顿回路的图.

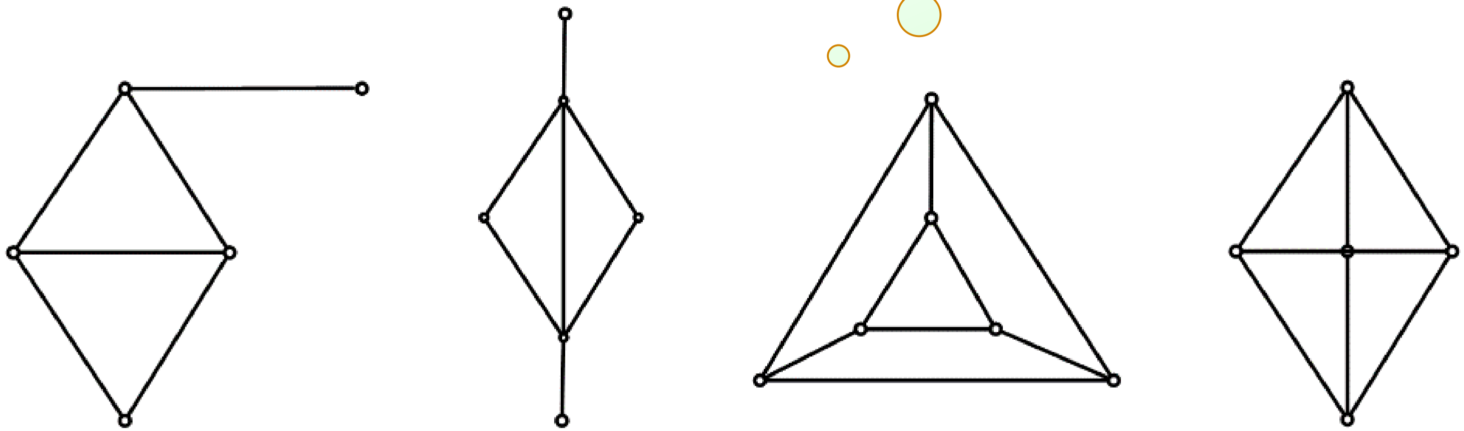
几点说明：

- 平凡图是哈密顿图.
- 完全图必是哈密顿图.
- 哈密顿通路是初级通路，哈密顿回路是初级回路.
- 环与平行边不影响哈密顿性.
- 哈密顿图的实质是能将图中的所有顶点排在同一个圈上.

一. 基本概念

实例

图a) 中有哈密尔顿道路,
图b) 中没有哈密尔顿道路,
图c) 和d) 都有哈密尔顿圈.



a)　　b)　　c)　　d)

哈密顿通路和哈密顿回路的特征

- 哈密顿通路是经过图中所有结点的通路中**长度最短**的通路，即为通过图中所有结点的**基本**通路
- 哈密顿回路是经过图中所有结点的回路中**长度最短**的回路，即为通过图中所有结点的**基本**回路
- 如果我们仅用结点来描述的话
  - 哈
  - 哈 …的

  —

从定 … 知

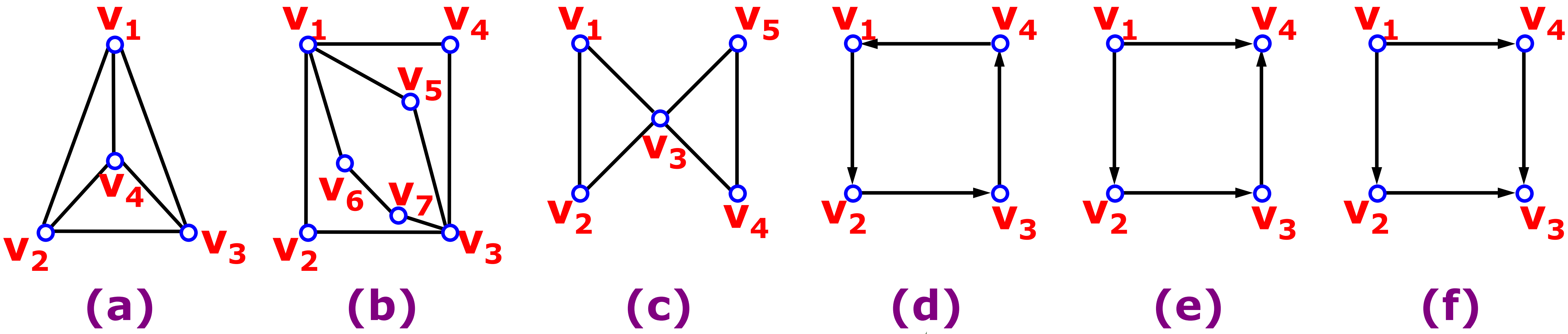
解题小贴士——哈密顿图的判断1

找到一条经过图中每个结点一次且仅一次的通路（回路），则该图存在哈密顿通路（回路）。有哈密顿回路的图则为哈密顿图。

平行边与环存在与否不影响图中是否存在哈密顿通路（回路），约定以后讨论均为连通的简单图。

例题

判断下面6个图中，是否是哈密顿图？是否存在哈密顿通路？



(a) 哈密顿图

(b) 不存在哈密顿通路

(c) 不是哈密顿图，但存在哈密顿通路

(d) 哈密顿图

(e) 不是哈密顿图，但存在哈密顿通路

(f) 不存在哈密顿通路

二. 判定

- **定理：（必要条件）** 设无向连通图$G = <V,E>$是哈密尔顿图，S是V的任意非空真子集，则$p(G-S) \leq |S|$，其中$p(G-S)$是从G中删除S后所得到图的连通分支数。

(注意：此定理只是哈密尔顿图的必要条件，而不是充分条件。可以利用其逆否命题来判断某些图是否不是哈密尔顿图，即下述定理)

- **定理：（充分条件）** 设$G=<V,E>$是具有n个顶点的简单无向图，若在G中每一对**不相邻**顶点的度数之和大于等于n-1，则在G中存在一条哈密尔顿路径。

推论

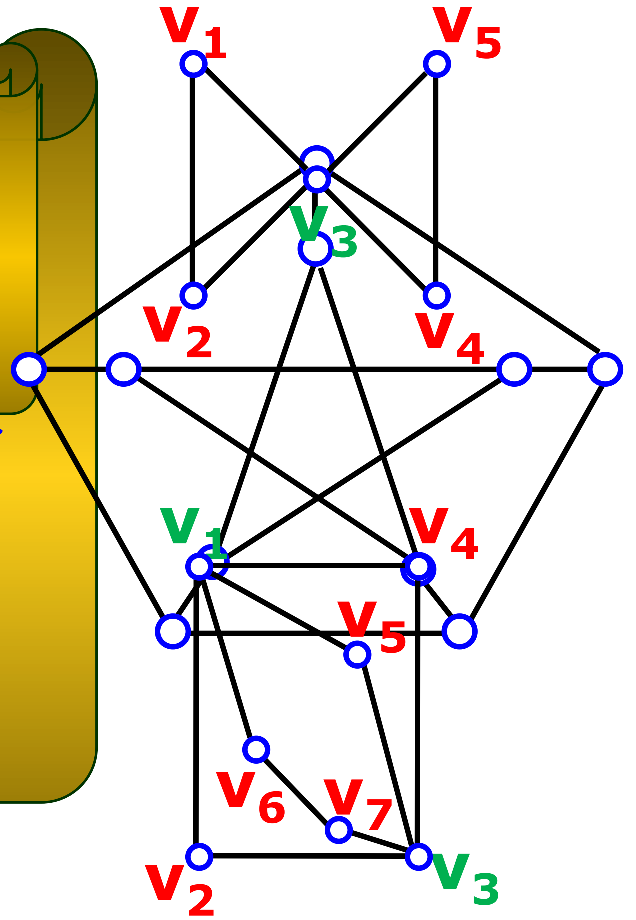
设无向图$G=\langle V,E\rangle$中存在哈密顿通路，则对V的任意非空子集V_1，都有

注意：

定理在应用中它本身用处不大，但它的逆否命题却非常有用。我们经常利用该定理的逆否命题来判断某些图不是哈密顿图，即：若存在V的某个非空子集V_1使得

定理 给出的是哈密顿图的必要条件，而不是充分条件。

$p(G-V_1)>|V_1|$，则G不是哈密顿图。

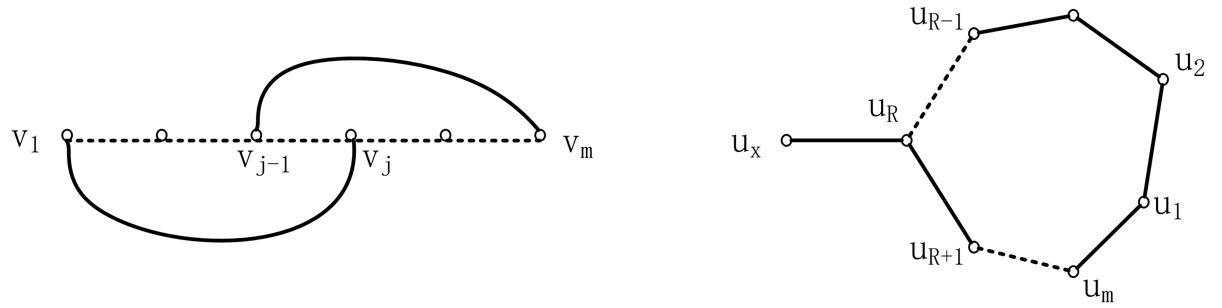


二. 判定

充分条件证明： G中任意两点之间有路径，设$P=v_1v_2\ldots v_m$是G中最长的一条路径(长度为m-1)，可证明它就是一条哈密尔顿路径，即$n=m$。

假若不然，若$m<n$，可以按以下方法构造一条长m路径，如下图$a)$所示，在$m<n$时，由P的最长性可知，v_1,v_m只能与P中的点邻接，分两种情况讨论：

(1) 若v_1 v_m 相邻，则$v_1v_2\ldots v_mv_1$是一个m长的圈；



a) 哈密尔顿路径　　b) 哈密尔顿圈

二. 判定

（2）若v_1v_m不相邻，设v_1只与v_{i1}, v_{i2} ,… v_{ik}邻接，其中$2≤i_j≤m$-1

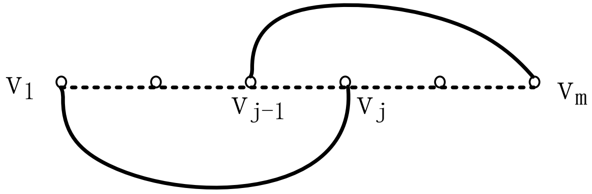
那么v_m必与v_{i1-1}, v_{i2-1} ,… v_{ik-1}之一，如v_{j-1}邻接，否则与v_m邻接的顶点不超过m-1-k个，即$\deg(v_1)+\deg(v_m) \le k+m-1-k < n-1$ 矛盾。

现在已构造得到一个m长的圈，如下图$b)$所示，重新标记图的顶点使这个圈为$u_1u_2…u_mu_1$。

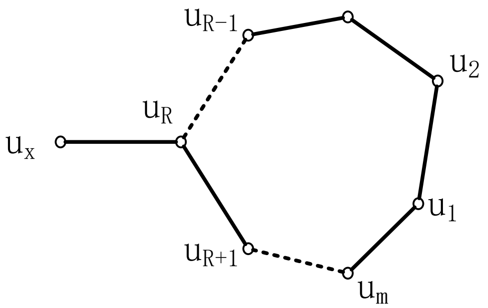
因为G连通，且前面假设$m<n$，所以G中必有一个不属于该圈的顶点u_x与该圈的某一个顶点邻接。

于是G有一条m长路径

$u_xu_Ru_{R+1}…u_mu_1u_2…u_{R-1}$，与$P$是最长路矛盾。



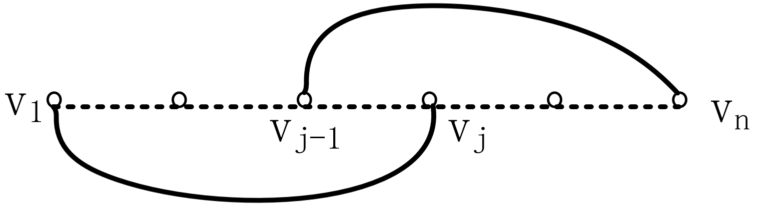
a) 哈密尔顿路径



b) 哈密尔顿圈

二. 判定

- **定理：（充分条件）** 设$G=<V,E>$是具有n个顶点的简单无向图,若在G中每一对**不相邻**顶点的度数之和大于等于n,则在G中存在一条哈密尔顿回路。
- **证明：** 已证明下图这样的图中有哈密尔顿路径$P=v_1v_2\ldots v_n$。



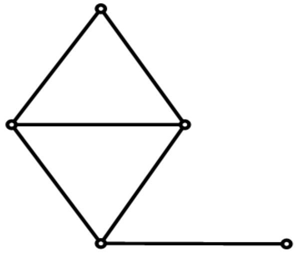
（1）若v_1v_n 相邻，则$v_1v_2\ldots v_nv_1$是一个哈密尔顿圈；

（2）若v_1v_n不相邻，设v_1只与v_{i1}，v_{i2} ,… v_{ik}邻接，其中$2\leq i_j\leq n-1$；那么v_n必与v_{i1-1}，v_{i2-1} ,… v_{ik-1}之一，如v_{j-1}邻接，否则与v_n邻接的顶点不超过$n-1-k$个，即$\deg(v_1)+\deg(v_n)\leq k+n-1-k<n$。

在这种情况下$v_1v_2\ldots v_{j-1}v_n v_{n-1}\ldots v_jv_1$是一个哈密尔顿圈。

二. 判定

- **定理：（充分条件）** 设$G=\langle V,E\rangle$是具有$n\geq3$个顶点的简单无向图，若在G中每一个顶点的度数大于等于$n/2$，则在G中存在一条哈密尔顿回路。
- 注意，以上定理的条件都是充分非必要的。



a)　　b)　　c)

图$a)$和图$c)$不是哈密尔顿图，图$b)$为哈密尔顿图。

实例

例 设G为n阶无向连通简单图，若G中有割点或桥，则G不是哈密顿图.

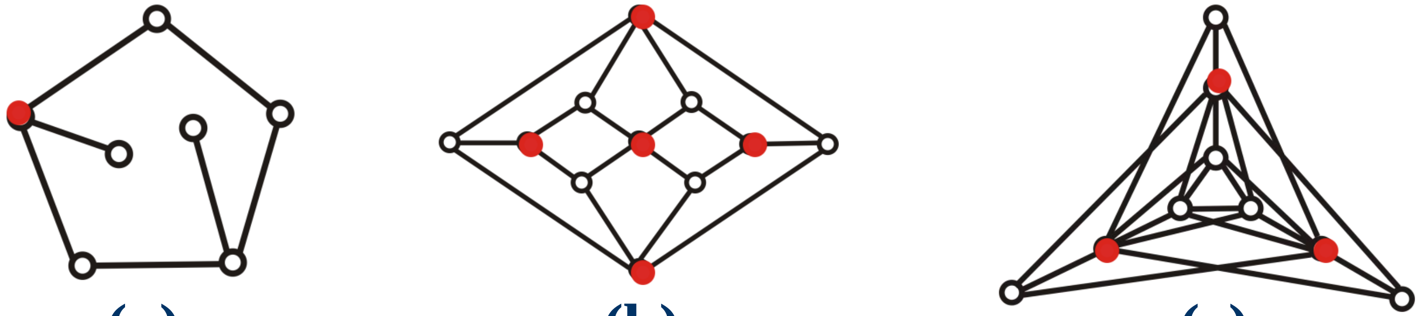
证：

(1) 设v为割点，则$p(G-v) \geq 2>|\{v\}|=1$. 根据定理，G不是哈密顿图.

(2) 若G是K_2(K_2有桥)，它显然不是哈密顿图. 除K_2外，其他的有桥连通图均有割点. 由(1)，得证G不是哈密顿图.

实例

例 **证明下述各图不是哈密顿图：**



(a) (b) (c)

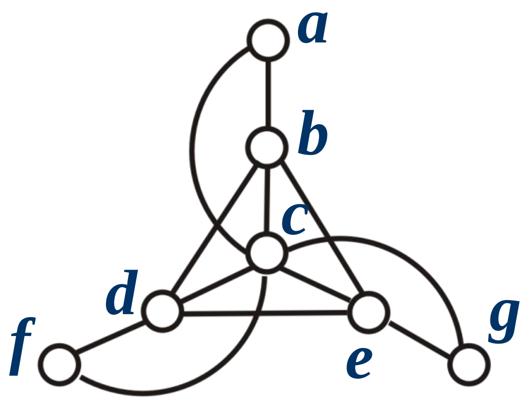
(c) 中存在哈密顿通路

实例

例 证明右图不是哈密顿图

证 假设存在一条哈密顿回路, a,f,g是2度顶点, 边(a,c), (f,c)和(g,c)必在这条哈密顿回路上,

从而点c出现3次, 矛盾.

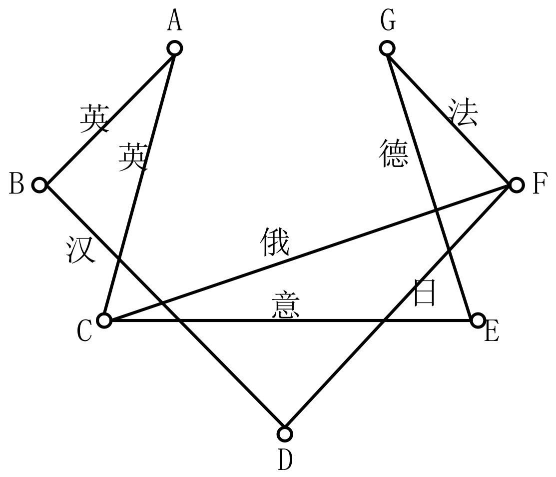


此外, 该图满足前述定理的条件, 这表明此条件是必要、而不充分的. 又该图有哈密顿通路.

三. 例题

例：已知关于a, b, c, d, e, f和g的下述事实：a讲英语；b讲英语和汉语；c讲英语、意大利语和俄语；d讲日语和汉语；e讲德国和意大利语；f讲法语、日语和俄语；g讲法语和德语。试问这七个人应如何排座位，才能使每个人都能和他身边的人交谈？

解：结点为客人，会共同语言的2结点相邻接。则问题归结为求下图的一条哈密尔顿回路。



例题

例：考虑7天内安排7门课程的考试，使得同一位教师所任的两门课程考试不安排在接连的两天中，试证明如果没有教师担任多于4门课程，则符合上述要求的考试安排总是可能的。

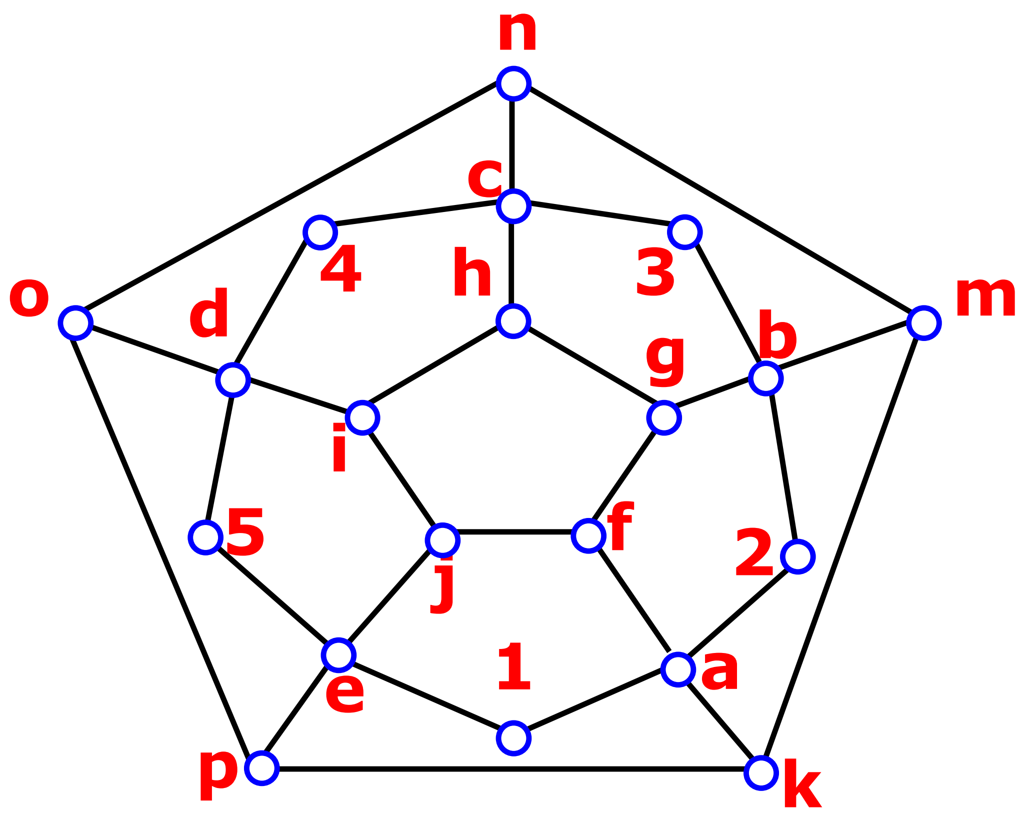
证明：设G是具有7个结点的图，每个结点对应于一门课程考试，如果这两个结点对应的课程考试是由不同教师担任的，那么这两个结点之间有一条边，因为每个教师所任课程数不会超过4，所以每个结点的度数至少为3，则任两个结点的度数之和至少是6，所以G总是包含一条哈密尔顿路径，它对应于一个7门考试课程的一个合理安排。

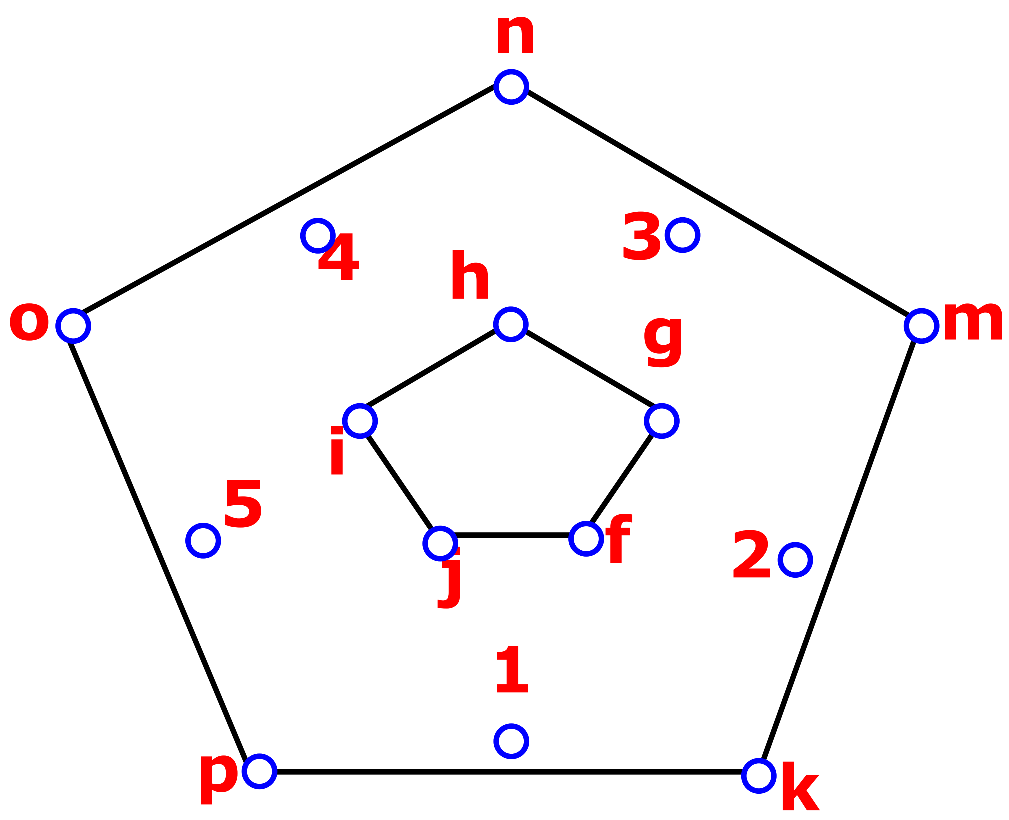
例题

某地有5个风景点，若每个风景点均有2条道路与其它景点相通。问游人可否经过每个风景点恰好一次而游完这5处？

解 看成是有5个结点的无向图，两风景点间的道路看成是无向图的边，因此每个结点的度数均为2，从而任意两个不相邻的结点的度数之和等于4，正好为总结点数减1。故此图中存在一条哈密顿通路，因此游人可以经过每个风景点恰好一次而游完这5处。

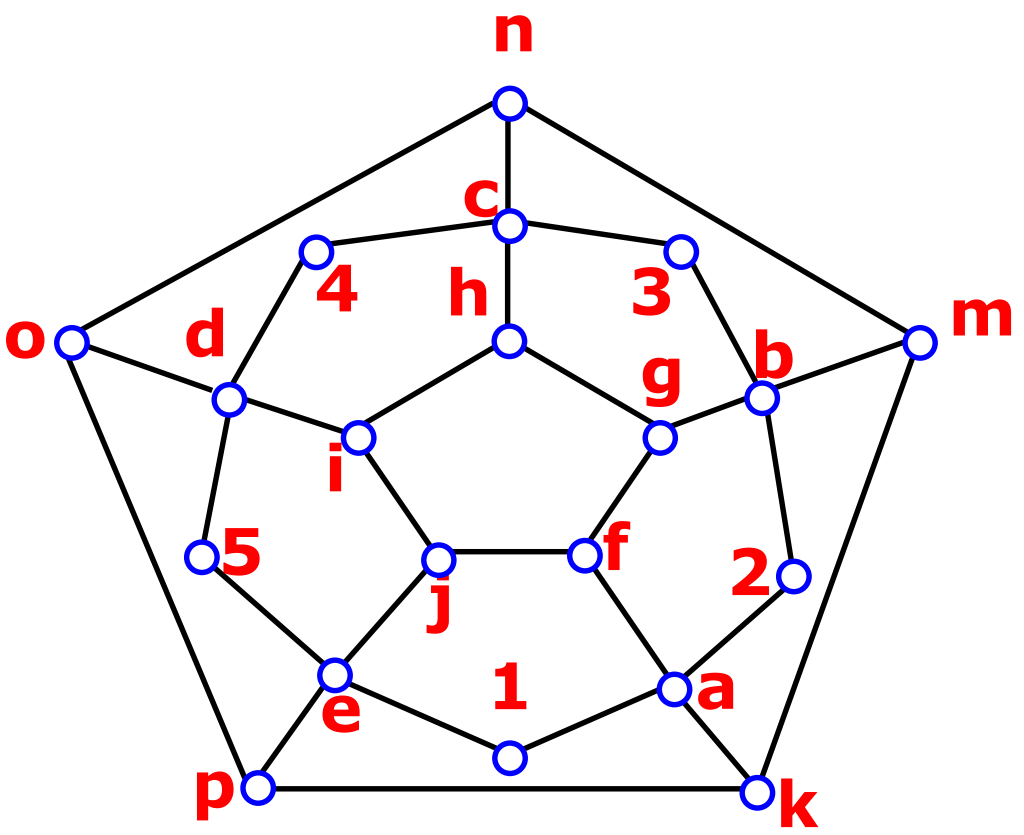
判断是否存在哈密顿回路





方法一：删除结点子集{a, b, c, d, e}，得到的图有7个连通分支，该图不是哈密顿图，故不存在哈密顿回路。

判断是否存在哈密顿回路



方法二：若图中存在哈密顿回路，则该回路组成的图中任何结点的度数均为2。

因而结点1、2、3、4、5所关联的边均在回路中，于是在结点a、b、c、d、e处均应将不与1、2、3、4、5关联的边删除，而要删除与结点a、b、c、d、e关联的其它边，得到右图。

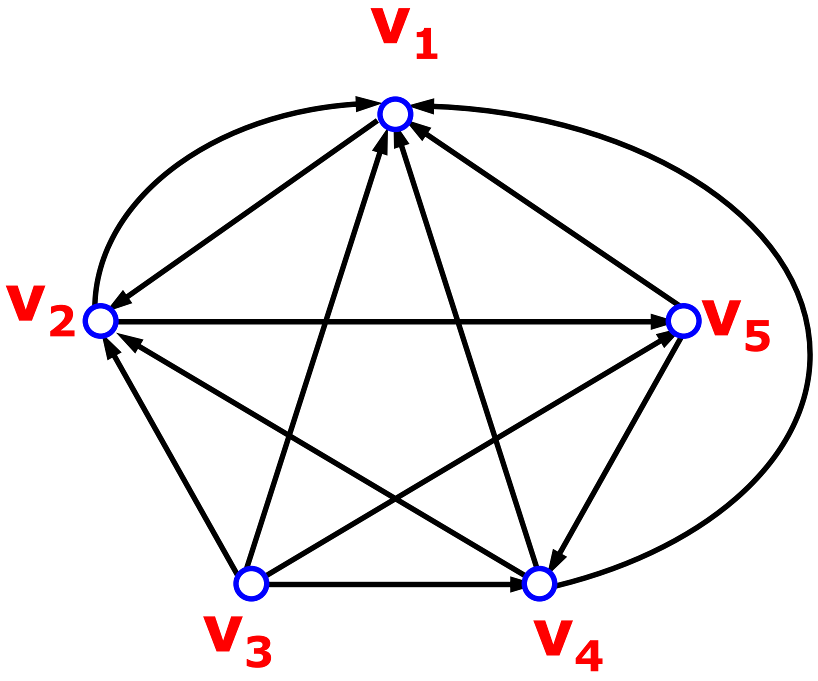
它不是连通图，因而图中不存在哈密顿回路。

定理

设$G = \langle V, E\rangle$是有 n $(n \geq 2)$个结点的一些简单有向图。如果忽略G中边的方向所得的无向图中含生成子图K_n，则有向图G中存在哈密顿通路。

在右图中，它所对应的无向图中含完全图K_5，由定理知，图中含有哈密顿通路。

事实上，通路$v_3v_5v_4v_2v_1$为一条哈密顿通路。

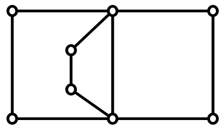


三. 例题

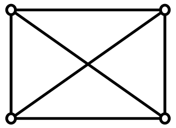
例：(a) 画一个图，使它有一条欧拉回路和一条哈密尔顿回路。
(b) 画一个图，使它有一条欧拉回路，但没有一条哈密尔顿回路。
(c) 画一个图，使它没有一条欧拉回路，但有一条哈密尔顿回路。
(d) 画一个图，使它既没有一条欧拉回路，也没有一条哈密尔顿回路。

解：求解如下图(a)(b)(c)(d)所示。

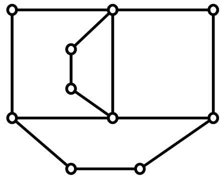
(a)



(b)



(c)



(d)

习题

- 第6章：5,6,7,12
- 第7章：3,5

一、简答题

1. 6.10 画一个无向图，使它：　(40)

（1）既是欧拉图，又是哈密顿图；

（2）是欧拉图，而不是哈密顿图；

（3）是哈密顿图，而不是欧拉图；

（4）既不是欧拉图，也不是哈密顿图。

2. 6.7 图6-1所示个途中哪些是欧拉图?　(30)

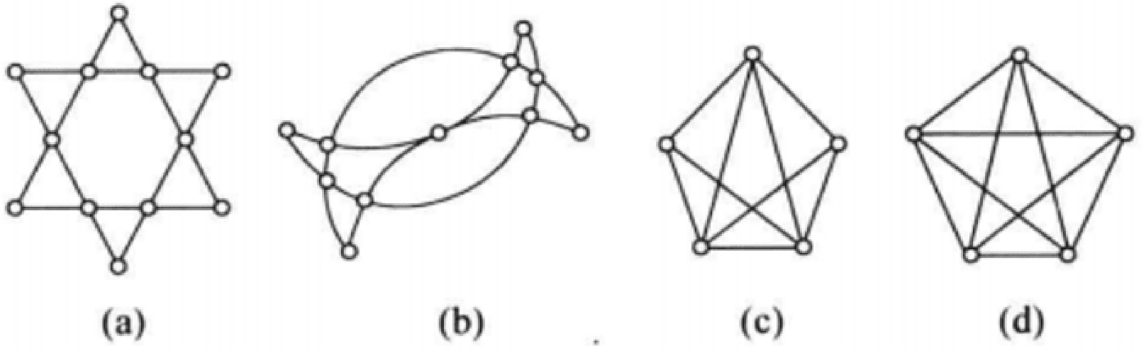


图　6-1

3. 6.14 有割点的无向图G不可能为哈密顿图，G也一定不是欧拉图吗?　(30)