高等数学 A1

浙江理工大学期末试题 题型汇编

（答案册）

学校：____________________

专业：____________________

班级：____________________

姓名：____________________

学号：____________________

（此试卷为 2022 级第一版）

目 录

说明：本资料收录的真题从 2003 年开始，到 2021 年结束。2022 年及以后的真题请见另一个文件。
如果本资料出现题目答案忘记录入、答案错误、没有解析、解析错误等情况，可以在小猿搜题 APP 或者火星搜题 APP 等进行搜索题目。
本人 B 站帐号配有部分视频解析（B 站账号名为“张创琦”，头像是一朵白莲花）。

第一部分　极限　答案

知识点 1：极限性质

1．D　　2．D　　3．A　　4．A　　5．D
6．B　　7．D　　8．B　　9．D　　10．D

知识点 2：无穷大、无穷小、常见等价无穷小

1．A　　2．A　　3．e^{-6}　　4．A
5．2　　6．C　　7．C　　8．D
9．C　　10．A　　11．B　　12．$\ln 2$　　13．B

14．解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arctan x-\ln\left(1+x\right)+\ln\left(1-x\right)}{x^{p}}$

$$\overset{L'}{=}\frac{2}{p}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x^{2}}-\dfrac{1}{1-x^{2}}}{x^{p-1}}=-\frac{4}{p}\lim_{x\to 0}\frac{x^{3-p}}{1-x^{4}}=c\neq 0\Rightarrow p=3\Rightarrow c=-\frac{4}{3}$$

15．0　　16．D　　17．$-\frac{3}{2}$

知识点 3：函数的连续性和间断点

1．-3　　2．D　　3．e^{-2}　　4．A　　5．± 1　　6．A
8．1　　9．B　　11．D　　13．A　　14．$x=-2$
15．D
16．0，1

7．解：$f(\mathrm{x})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}1+x & -1<x<1\\ \dfrac{1+x}{2} & x=1,-1\\ 0 & x>1,x<-1\end{cases}$　----------------------4 分

因而，该函数的间断点为只可能在函数的分段点处取得。

当 $x=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to -1^{+}}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^{-}}f(x)=f(-1)=0$，因此在 $x=-1$ 处是连续的;-----6 分

当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{x\to 1^{+}}f(x)=0,\lim\limits_{x\to 1^{-}}f(x)=2,f(1)=1$，因此在 $x=1$ 处是间断的，为第一类、跳跃间断点--9 分

10．解：　$f\left(x\right)=\begin{cases}x^{3},x\geq 0\\ x,x<0\end{cases}$--3分

当 $x>0$ 时，$f(x)$连续；当 $x<0$ 时，$f(x)$连续；---4 分

当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0^{-}}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}f\left(x\right)=f\left(0\right)=0$，$f(x)$在 $x=0$ 处连续。

所以 $f(x)$处处连续。---6 分

12．**解：** $f(x)$ 的间断点为：$x_1=0,x_2=2,x_3=-2$ ---------------------------1 分

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x^2-2x}{|x|(x^2-4)}=\lim_{x\to0^-}\frac{(x-2)x}{-x(x^2-4)}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-2x}{|x|(x^2-4)}=\lim_{x\to0^+}\frac{(x-2)x}{x(x^2-4)}=\frac{1}{2}$$

$\therefore x=0$ 是第一类跳跃间断点；-----3 分

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x}{|x|(x^2-4)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)x}{x(x^2-4)}=\frac{1}{4}$$ $\therefore x=2$ 是第一类可去间断点-------------5 分

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-2x}{|x|(x^2-4)}=\lim_{x\to-2}\frac{(x-2)x}{-x(x^2-4)}=\infty$$ $\therefore x=-2$ 是第二类无穷间断点------------6 分

知识点 4：求极限

1．0　　2．$\frac{\pi}{2}$　　3．C

4．法一（泰勒公式展开）：

$$原式=\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]$$

------------ 3 分

$$=\lim_{x\to\infty}\left[x-x+\frac{1}{2}+\frac{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\right]=\frac{1}{2}.$$

------------ 3 分

法二（变换后利用洛必达法则）：令 $u=\frac{1}{x}$,

$$原式=\lim_{u\to0}\left[\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\ln(1+u)\right]=\lim_{u\to0}\left[\frac{u-\ln(1+u)}{u^2}\right]$$

------------ 2 分

$$=\lim_{u\to0}\left[\frac{1-\frac{1}{1+u}}{2u}\right]$$

------------ 2 分

$$=\lim_{u\to0}\left[\frac{1}{2(1+u)}\right]=\frac{1}{2}.$$

------------ 2 分

5．提示：等价代换。答案为$-\frac{3}{2}$

6．洛必达法则，答案为$-\frac{1}{8}$

7．原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^{x^3}\cdot 3x^2}$（洛必达法则）$=0$.（无穷比无穷）

8．原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$

9．解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$ -----------------1 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$ ------------------3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}$ ---------------------5 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x(1+x)}=\dfrac{1}{2}$ ---------------6 分

10．原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}+\dfrac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\dfrac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\times\dfrac{1}{n}=\int_0^1\dfrac{1}{1+x}dx=\left[\ln(1+x)\right]_0^1=\ln 2$

11．原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}$ （3 分）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{\frac{x^2}{2}}$ （2 分）

=2 （1 分）

12．原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x\,\frac{1}{3}x^2}$ ……………………………….2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{x^2}$ …………………………………………..4 分

=1 ………………………………………………….6 分

13．原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-cosx}$ 2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{sinx}$ 3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{cosx}$ 4 分

=2 5 分

14．原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots\left(\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}\right)\right]$ 3 分

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{(n+1)!}\right]$　　　　4 分

$=1$　　　　5 分

15． $a=-2,b=1$　　　　16． $\dfrac{1}{2}$　　　　17．2

18．

$$\lim_{x\to1}\left[\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right]\overset{x-1=t}{=}\lim_{t\to0}\left[\frac{(1+t)\ln(1+t)-t}{t\ln(1+t)}\right]$$ ------------------2分

$$=\lim_{t\to0}\left[\frac{(1+t)\ln(1+t)-t}{t\cdot t}\right]=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)+1-1}{2t}$$ ------------------4分

$$=\frac{1}{2}$$ ------------------5分

19． $a=3,b=0$

20．解：

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\ln(\sin x)^{\tan x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\tan x\ln(\sin x)}$$ ------------------2分

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x\ln(\sin x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\cot x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-\csc^2 x}=0$$ ------------------4分

$\therefore$ 原式$=e^0=1$ ------------------5分

21．解：

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+2n}=\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\le\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\le\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+1}$$

------------------2 分

$$\because\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}$$ ------------------4 分

由夹逼准则知所求极限为 $\dfrac{1}{2}$ ------------------5 分

22． $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{\sin 2x}=2\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\frac{x}{4}}-1}{\sin 2x}=2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(\frac{x}{4})}{2x}=\frac{1}{8}$$

23.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x+\ln(1-x)-1}{x-\arctan x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-\frac{1}{1-x}}{1-\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{(1-x)e^x-1}{x^2}\frac{1+x^2}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-x)e^x-1}{x^2}\lim_{x\to0}\frac{1+x^2}{1-x}=\lim_{x\to0}\frac{-xe^x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

24．250000　　25．$\frac{1}{4}$　　26．$-\frac{1}{4}$　　27．1　　28．D　　29．e^2

30．解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+e^x\right)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{x+e^x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{e^x}+1}{\frac{x}{e^x}+1}}=e$

31．解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f\left(x\right)\sin x}-1}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{f\left(x\right)\sin x}{2}}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f\left(x\right)}{6}=2\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)=12$

32．由 $\frac{n(3n+1)}{2(n^2+n)}\le x_n\le\frac{n(3n+1)}{2(n^2+1)}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(3n+1)}{2(n^2+n)}=\frac{3}{2}$ 和 $\lim\limits_{n\leftarrow\infty}\frac{n(3n+1)}{2(n^2+1)}=\frac{3}{2}$，得：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}\right)=\frac{3}{2}$$

33．$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\cos x-1}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\cos x-e^x\sin x}{2\cos 2x}=\frac{1}{2}$

34．不存在（左右极限不相等的）　35．D　　36．$(\frac{\pi}{2}-1)^{-\infty}=\infty$，　$(\frac{\pi}{2}-1)^{+\infty}=0$.

37．解：因为 $n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$　　所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$

38．原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x\cdot x}=\frac{1}{2}$

39．$\frac{1}{4}$　　40．0　　41．$\frac{1}{e}$　　42．$e^{-\frac{1}{2}}$　　43．12

44．$\frac{1}{2}$　　45．π

46．原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}=\dfrac{1}{2}$。

47．原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}}=e^2$ 或原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^x=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x}{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x}=\dfrac{e}{e^{-1}}=e^2$

48．原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{\cos x\cdot x^3}=\dfrac{1}{2}$

49．原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec^2x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sec^2x\cdot tgx}{6x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\sec^2x=\dfrac{1}{3}$

50．2　　51．$\dfrac{1}{2}$　　52．$(abc)^{\frac{1}{3}}$

第二部分　导数　答案

知识点 1：切线、导数的定义和几何意义、连续和可导的关系

1．B　2．B　3．-1　-1　4．B　5．2

6．$(0,1)$　7．B　8．C　9．D　10．1　-1

11．-1　-1　12．B　13．2　-1　14．A　15．-1

16．C　17．D　18．D　19．B　20．A　（无 21）

22．D　23．B　24．D　25．D　26．C

27．A　28．0　1　29．D　30．A　31．$\dfrac{1}{3}$

32．A　33．C　34．D　35．0　36．D

37．$\dfrac{5}{2}$　38．$3A$　39．C　40．（1）$n>0$；（2）$n>1$；（3）$n>2$

知识点 2：求导法则、复合函数求导、分段函数求导

1．$\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx}$　2．$\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$　3．$-x\cdot(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$　4．$3e^x(\cos x-\sin x)dx$

5．$3x^2\cdot g(x^3)$　6．$(1+2t)e^{2t}$　7．D　8．A

9．D　10．-1　11．$n!$　12．B

13．

5.解：$y'=\dfrac{-1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)'$ ………………………….. 2 分

$=\dfrac{-(x+1)^2}{(x+1)^2+(x-1)^2}\cdot\dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}=\dfrac{-1}{1+x^2}$ ………………………….. 4 分

$dy = y'dx = \frac{-1}{1+x^2}dx$ ……………………….. 5 分

14. $\begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ 1 & x=0 \\ (\sin x + x\cos x)e^x & x>0 \end{cases}$

15.

解:(1) 当 $x \neq 0$ 时,有

$$f'(x) = \frac{x[g'(x)+e^{-x}]-g(x)+e^{-x}}{x^2} = \frac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2};$$

当 $x=0$ 时,由导数定义有

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-e^{-x}}{x^2} \xlongequal{\frac{0}{0}} \lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+e^{-x}}{2x} \xlongequal{\frac{0}{0}} \lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2} = \frac{g''(0)-1}{2}.$$

$$\text{所以 } f'(x) = \begin{cases} \frac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}, & x\neq 0, \\ \frac{g''(0)-1}{2}, & x=0. \end{cases}$$

(2) 因为在 $x=0$ 处,有

$$\lim_{x\to 0}f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+xg''(x)-g'(x)+e^{-x}-(x+1)e^{-x}}{2x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2} = \frac{g''(0)-1}{2} = f'(0),$$

而 $f'(x)$ 在 $x\neq 0$ 处是连续函数,所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为连续函数.

16. $\frac{1}{2}$　　17. $(-1)^{n-1}(n-1)!$　　18. 3　　19. $2xdx$

20. $(\sin x + x\cos x)f'(x\sin x)dx$　　21. D　　22. $\frac{dy}{dx} = f'(x\sin x)(\sin x + x\cos x)$

23. $\frac{1}{x(\ln y+1)}$　　24. 3π　　25. $\frac{1}{x}$

知识点 3:参数方程求导

1. $\sqrt{3}$　　2. C　　3. $\frac{1}{8}$

4. (参数方程求导法,几何应用)

解:$\frac{dy}{dt} = a\sin t$, $\frac{dx}{dt} = a(1-\cos t)$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$

$k_{切} = \frac{dy}{dt}|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1-0} = 1$, 切点:$(a(\frac{\pi}{2}-1), a)$

$\therefore L_{切}$:$y - a = 1\cdot[x - a(\frac{\pi}{2}-1)]$

5. (弧长)

解：$\frac{dx}{dt}=a(-\sin t+\sin t+t\cos t)=at\cos t$

$\frac{dy}{dt}=a(\cos t-\cos t+t\sin t)=at\sin t$

$ds=\sqrt{{x'_t}^2+{y'_t}^2}dt=\sqrt{a^2t^2\cos^2t+a^2t^2\sin^2t}dt=a|t|dt$

$\therefore s=\int_0^\pi ds=\int_0^\pi atdt=\frac{a}{2}t^2\Big|_0^\pi=\frac{a}{2}\pi^2$

6．解：$\dfrac{dx}{dt}=2$， --------------------1 分

$te^y+y+1=0\Rightarrow e^y+te^y\cdot\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{dy}{dt}=0\Rightarrow\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{e^y}{1+te^y}$， -------------3 分

$t=0$，$x=-1$，$y=-1$， ---------------------4 分

$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}\Big|_{t=0}=-\dfrac{e^y}{2(1+te^y)}\Bigg|_{\substack{t=0\\y=-1}}=-\dfrac{1}{2e}$ ---------------------5 分

因此切线方程为 $y+1=-\dfrac{1}{2e}(x+1)$ 即 $x+2ey+2e+1=0$ ---------------6 分

7．解：$\dfrac{dy}{dt}=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t$， ----------1 分

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-\sin t}{\cos t}$， -----------2 分

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=-t\cos t$ -----------3 分

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(-t\cos t\right)/dt}{dx/dt}$ -----------5 分

$=\dfrac{-\cos t+t\sin t}{-\tan t}=\dfrac{\cos t-t\sin t}{\tan t}$ ----------6 分

8．解：利用参数方程求导公式：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}$ -----------------1 分

由第一个方程易得：$x'_t=-2t\sin\left(t^2\right)$ -----------------2 分

由第二个方程两边对 t 求导后，得 $y'_t=\cos\left(t^2\right)+2t^2\sin\left(t^2\right)-\cos\left(t^2\right)=2t^2\sin\left(t^2\right)$---------3 分

故 $\dfrac{dy}{dx}=-t$ -------------------4 分

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\Big/dt}{dx/dt}=\dfrac{\csc\left(t^2\right)}{2t}$ -----------------6 分

9．解：利用参数方程求导公式：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y_t'}{x_t'}$ -----------------1 分

由第一个方程易得：$x_t'=\dfrac{1}{1+t^2}$ -----------------3 分

由第二个方程两边对 t 求导后，得 $y_t'=1+e^{ty}\left(y+ty_t'\right)\Rightarrow y_t'=\dfrac{1+ye^{ty}}{1-te^{ty}}$ ----------------5 分

故 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\left.\dfrac{1+ye^{ty}}{1-te^{ty}}\cdot\left(1+t^2\right)\right|_{t=0}=2$ ------------------6 分

10．解：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{f''(t)}.$$

知识点 4：反函数求导

1．$\dfrac{1}{8}$

知识点 5：求高阶导

1．B　　2．C　　3．$\left(x^2+20x+90\right)e^x$　　4．$(-1)^n 2\cdot n!\left(1+x\right)^{-(n+1)}$

5．$\boxed{-2^n\left(n-1\right)!}$　　6．$\left(x^2+40x+380\right)e^x$　　7．$e^x[x^2+2(n+1)x+2(n+1)^2]$

8．$-\sin x\cdot x^2+100x\cdot\cos x+4900\sin x$

知识点 6：隐函数求导

1．$\dfrac{y-e^{x+y}}{e^{x+y}-x}$　　2．**解：** 令 $x=0$，则 $y=1$，

两端关于 x 求导得 $e^y y'+y+xy'=0$， ------------- 2 分

再关于 x 求导得 $e^y y'^2+(e^y+x)y''+2y'=0$ ------------- 2 分

求导代入 $x=0, y=1$ 得 $y'(0)=-\dfrac{1}{e}$，$y''(0)=\dfrac{1}{e^2}$ ------------- 2 分

4.解：方程两边取对数可得$ylnx=xlny$，两边对 x 求导数 ……………..2 分

$y'lnx+\frac{y}{x}=lny+\frac{xy'}{y}$ ……………………….. 4 分

整理后可求得$y'=\frac{xylny-y^2}{xylnx-x^2}$ ……………………..5 分

3．

4．提示：隐函数求导+微分。答案：$dy=-\dfrac{y}{e^{y}+x}dx$

5．解：方程两边对 x 求导得 $y'=\ln y+x\cdot\dfrac{1}{y}\cdot y'$--1 分

解得 $y'=\dfrac{y\ln y}{y-x}$---------------------------------2 分

故曲线在点$\left(\dfrac{e^{2}}{2},e^{2}\right)$处的切线斜率为 $y'\Big|_{\left(\frac{e^{2}}{2},e^{2}\right)}=4$ ---------------------4 分

因此，经过此点的切线方程为 $y=4x-e^{2}$--------------------5 分

法线方程为 $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{9}{8}e^{2}$--------------------6 分

6．解：（对数求导法）$=(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x})\cdot x^{\sin x}$

7．解：两边同时求导得：$\cos(xy)(y+xy')-e^{x+y}(1+y')=0\cdots\cdots3'$

所以：$y'=-\dfrac{e^{x+y}-y\cos(xy)}{e^{x+y}-x\cos(xy)}\cdots\cdots6'$

8．$\dfrac{1}{\sqrt{x^{2}+a^{2}}}$ 9．$3^{x}\ln3+3x^{2}+x^{x}(1+\ln x)$

第三部分 中值定理和函数性质 答案

知识点 1：费马引理、罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理

考点 1：微分中值定理的基本考察

1．A 2．$f'(\xi)e^{f(\xi)}(b-a)$ 3．C 4．C

知识点 2：函数的拐点、驻点、单调性、极值、最值、凹凸性、渐近线

考点 1：函数的渐近线

1．$3x-9y-1=0$ 2．$x=0,y=1$ 3．2 4．$x=1$ 5．$x=0$

考点 2：函数的拐点、驻点、单调性、极值、最值、凹凸性

1. C　　2. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$或者$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.　　3. $\frac{1}{e}$　　4. $(-1,0)$

5. 2　　6. B　　7. 2　　8. A　　9. 3　　3　　10. $(\frac{1}{e})^{\frac{2}{e}}$

11. B　　12. $(-1,0]$　　13. D　　14. 2　　15. B　　16. C

17. （同第 10 题）　　18. B　　19. C　　20. $(e,1)$　　21. x^2-3　　22. 1

23. -1　　24. D

25. 同课堂例题。

单增区间：$\boxed{(-\infty,1),[3,+\infty)}$　单减区间：$\boxed{(1,3]}$；极小值：$\boxed{\frac{27}{4}}$，无极大值；凸区间：$\boxed{(-\infty,0]}$　凹区间：$\boxed{[0,1),(1,+\infty]}$；拐点：$\boxed{(0,0)}$；渐近线：$\boxed{x=1,y=x+2}$，无水平渐近线

26. 切线方程：$21x-y-18=0.$，法线方程：$x+21y-64=0$。

27. （最值应用题）

解：设 $AD=x.$

运费 $y=5\cdot\sqrt{400+x^2}+3\cdot(100-x),\ (0<x<100)$　　$y'=\frac{5x}{\sqrt{400+x^2}}-3,$

令$y'=0,$　解得$x=15$，此为唯一驻点，即为题目所求。

28. $\frac{dy}{dx}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3}$，另 $\frac{d^2y}{dx^2}<0$，得$t<0$，因此$x<1$。

29. 定义域$x\neq\pm1$，函数为奇函数，$y'=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2},y''=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$，

令 $y'=0,y''=0$，得 $x=0,x=\pm\sqrt{3}$

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y’	+	0	-		-	0	-		-	0	+
y’’	-		-		+		-		+		+
y	增，凸	极大 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	减，凸		减，凹	拐点	减，凸		减，凹	极小 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	增，凹

无水平渐近线，$x=\pm1$ 为铅直渐近线，$y=x$ 为斜渐近线（图略）

30. 解：若 k=0 时，则 y=0，它是一条直线，没有拐点，因此 $k\neq0$；

$$f'(x)=4k(x^3-3x),\ f''(x)=12k(x^2-1)\ ,\text{…………………………1 分}$$

令 $f''(x)=0,$ 得 $x=\pm1$…………………………………………………………2 分

当 x<-1 时，$ky''>0$；当-1<x<1 时，$ky''<0$；当 x>1 时，$ky''>0$。所以

(±1，4k)为拐点……………………………………………………………………….3 分

所以在点(1, 4k)处的法线方程：$y-4k=\frac{1}{8k}(x-1)$，

在点(-1, 4k)处的法线方程：$y-4k=\frac{1}{-8k}(x+1)$ ……………………………….4 分

如果它们通过原点，得 $-4k=\frac{1}{-8k}\Rightarrow k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$ ……………………………...…..6 分

31．法一：令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则--2 分

$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}, x=e$ 是可导区间内的唯一驻点--3 分

$x<e$时，$f'(x)>0; x>e$时，$f'(x)<0\Rightarrow f_{\max}=f(e)=\frac{1}{e}$------------------------------------4 分

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ --5 分

$\therefore$当$0<a<\frac{1}{e}$时，有2个实根；当$a=\frac{1}{e}$时，有1个实根；当$a>\frac{1}{e}$时，有0个实根。--6 分

法二：令 $f(x)=\ln x-ax(x>0)$，则--2 分

$f'(x)=\frac{1}{x}-a, x=\frac{1}{a}$ 是可导区间内的唯一驻点---3 分

$0<x<\frac{1}{a}$时，$f'(x)>0; x>\frac{1}{a}$时，$f'(x)<0\Rightarrow f_{\max}=f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1$ ------------------4 分

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ --5 分

$\therefore$当$\ln\frac{1}{a}-1>0$时，即$0<a<\frac{1}{e}$时，有2个实根；---6 分

当$\ln\frac{1}{a}-1=0$时，即$a=\frac{1}{e}$时，有1个实根；

当$\ln\frac{1}{a}-1<0$时，即$a>\frac{1}{e}$时，有0个实根。

知识点 3：曲线的弧微分与曲率

考点 1：曲线的弧微分与曲率

1．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　2．顶点　　3．$\sqrt{1+4x^2}dx$　　2　　4．$ds=\sqrt{1+y'^2}dx$，$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$

第四部分　不定积分　答案

知识点 1：基本性质

考点 1：原函数、函数、导函数三者的关系

1．B　2．A　3．B　4．D　5．A　6．D

7．C　8．A（a、b、c、e 是正确的）　9．AC　10．C

考点 2：复合函数求不定积分

1．A　2．$\boxed{xe^x+C}$　3．C　4．$x\ln x+C$　5．C　6．D

7．$\sin x - x\cos x + C$　8．C　9．$-\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$　10．$\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

11．$-\dfrac{1}{2}\left(1-x^2\right)^2+C$　12．A　13．$\dfrac{e^{x^2}}{2}+C$

考点 3：大题计算不定积分

1．解：令 $u=\sqrt[3]{x}$，则 $x=u^3, \mathrm{d}x=3u^2\mathrm{d}u$ --------------- 1 分

$$原式=3\int u^2e^u\mathrm{d}u=3\int u^2\mathrm{d}e^u$$

$$=3(u^2e^u-\int e^u\mathrm{d}u^2)=3u^2e^u-6\int ue^u\mathrm{d}u$$ --------------- 2 分

$$=3u^2e^u-6\int u\mathrm{d}e^u=3u^2e^u-6(ue^u-\int e^u\mathrm{d}u)$$ --------------- 2 分

$$=3e^u(u^2-2u+2)+C=3e^{\sqrt[3]{x}}(x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+2)+C.$$ ------------- 1 分

评分标准说明：没写“C”扣 1 分。

2．

2.解：$原式=\int x^{\frac{1}{2}}\ln x dx=\frac{2}{3}\int \ln x\, dx^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\ln x-\int x^{\frac{3}{2}}d\ln x\right]$　3 分

$=\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\ln x-\int x^{\frac{1}{2}}dx\right]$ ………………………….. 4 分

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x-\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}+C$ ……………………..　5 分

3．提示：三角代换。

答案$\boxed{=-\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{4x}+C}$

4．提示：变量代换。

答案：$\sqrt{x}e^{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2}e^{2\sqrt{x}}+C$

5．解：$\int xe^x dx = \int x de^x$ --------------------------2 分

$= xe^x - \int e^x dx$--------------------4 分

$= xe^x - e^x + C$------------6 分

6．令 $\sqrt{x} = t$（分部积分法）$= 2e^t(t-1)+C$；

7．答案 $= \int \frac{d\ln x}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin(\ln x)+C$

8．解：令 $x=\sin t$，则 $dx=\cos t$ 于是 ---------------------1 分

$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t dt}{(1+\sin t)\cos t} = \int \frac{dt}{1+\sin t}$ --------------------2 分

$= \int \frac{(1-\sin t)dt}{\cos^2 t}$ --------------------3 分

$= \int \sec^2 t dt + \int \frac{1}{\cos^2 t} d\cos t$ ------------------------4 分

$= \tan t - \frac{1}{\cos t} + C$ ------------------------5 分

$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C$ ------------------------6 分

9．解：原式 $= \int x(\sec^2 x - 1)dx$ --------------------1 分

$= \int xd\tan x - \int xdx$ --------------------2 分

$= x\tan x - \int \tan x dx - \frac{x^2}{2}$ --------------------4 分

$= x\tan x - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x| + C$ ------------------6 分

10．解：原式 $= \int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-1}dx = \frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\int \frac{d\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-1}$

$\overset{\left(\frac{3}{2}\right)^x=t}{=} \frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2\ln\frac{3}{2}}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C\ \frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right| + C$

11．解：$\int x\sec^2 xdx=\int xd\tan x=x\tan x-\int\tan xdx\cdots\cdots3'$

$$=x\tan x+\ln|\cos x|+C\cdots\cdots6'$$

12．解：$\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\int\ln xd\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$

13．解：原式$=\frac{1}{2}\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx^2$　　-----------------2 分

$=-\int\arcsin xd\sqrt{1-x^2}$　　-----------------4 分

$=-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x+x+C$　　-----------------6 分

14．解：原式$=\int\frac{\sec^4 x}{\tan x}dx$　　-----------------2 分

$=\int\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}d\tan x$　　-----------------4 分

$=\ln|\tan x|+\frac{\tan^2 x}{2}+C$　　-----------------6 分

15．解：

【详解】方法 1：第二类换元法. 由于被积函数中含有根号$\sqrt{1+x^2}$，作积分变量变换

$x=\tan t(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})$，那么$(1+x^2)^{3/2}=\sec^3 t$，$dx=\sec^2 tdt$，则

$$\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\int\frac{e^t\tan t}{(1+\tan^2 t)^{3/2}}\sec^2 tdt=\int\frac{e^t\tan t}{\sec^3 t}\sec^2 tdt$$　　三角变换公式

$$=\int e^t\frac{\tan t}{\sec t}dt=\int e^t\sin tdt.$$

又$\int e^t\sin tdt=-\int e^t d\cos t=-(e^t\cos t-\int e^t\cos tdt)$　　分部积分

$=-(e^t\cos t-\int e^t d(\sin t))=-(e^t\cos t-e^t\sin t+\int e^t\sin tdt)$　　分部积分

$=-e^t\cos t+e^t\sin t-\int e^t\sin tdt$，

故$\int e^t\sin tdt=\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+C.$

由 $x=\tan t(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})$ 得 $t=\arctan x$，因此

$$\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\frac{1}{2}e^{\arctan x}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})+C=\frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C.$$

法 2：分部积分法

$$\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}de^{\arctan x} \qquad d(e^{\arctan x})=e^{\arctan x}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx \qquad \text{分部积分}$$

$$=\frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}de^{\arctan x} \qquad d(e^{\arctan x})=e^{\arctan x}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\left(\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int e^{\arctan x}\frac{-\frac{1}{2}\cdot 2x}{(1+x^2)^{3/2}}dx\right) \qquad \text{分部积分}$$

$$=\frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx,$$

移项整理得：

$$\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C.$$

16. $-\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}+C$

17. 解：

解： $\int x\arctan x\mathrm{d}x=\int\arctan x\mathrm{d}\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{x^2}{2}\mathrm{d}\arctan x$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int 1-\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+C$$

第五部分　定积分　答案

知识点 1：定积分的性质

考点 1：定积分的性质和几何意义

1．A　　2．D　　3．$\int_1^2 ydx-\int_0^1 ydx$　　4．A　　5．C

考点 2：定积分求极限

1．ln2　　2．$\frac{\pi}{4}$　　3．$\sin 1-\cos 1$　　4．$\frac{1}{4}$

考点 3：变上限定积分

1．略（见 B 站我的账号上录制的视频）

2．B　　3．B　　4．2　　5．$xf(x^2)$　　6．$\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\le x<1\\ x-1, & 1\le x\le 2\end{cases}$

7．$\frac{1}{3}$　　8．$\frac{1}{3}$　　9．D　　10．$[-1,0)\cup[1,+\infty)$

11．$-\frac{\cos x}{e^y}$　　12．-1

13．

解　当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时

$$\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt=\int_{-1}^{x}(1+t)dt=\frac{1}{2}(1+x)^2$$

当 $x\geqslant 0$ 时，

$$\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt=\int_{-1}^{0}(1+t)dt+\int_{0}^{x}(1-t)dt=1-\frac{1}{2}(1-x)^2$$

故

$$\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+x)^2, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ 1-\frac{1}{2}(1-x)^2, & x>0\end{cases}$$

注释　本题主要考查变上限积分所确定的函数和被积函数带有绝对值的积分.

14．原题录入有误，正确的题目见下。

确定常数 a,b,c 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c(c\neq 0)$.

【分析】解决这类问题,原则上与求极限差不多,但是因为其中含有某些参数,比如在用洛必达法则前,极限是否为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型,要先行讨论,通过讨论,有时就可以推断出其中参数的特点,然后再求极限,这是一类常考的题目.

【解析】当 $x\to 0$ 时 $ax-\sin x\to 0$, 又由题设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c(c\neq 0)$, 所以应有

$\lim\limits_{x\to 0}\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt=0$ (否则与 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c(c\neq 0)$ 矛盾), 从而只有 $b=0$, 因此

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}$ 满足洛必达法则的条件,用洛必达法则求其极限.

$$0\neq c=\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}\overset{\text{洛等}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}.$$

(当 $x\to 0$ 时, $\ln(1+x)\sim x$)

如果 $a\neq 1$, 则右边极限为 ∞, 与原设左边矛盾, 故 $a=1$, 于是上述等式成为

$$0\neq c=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\overset{\text{等}}{=}\frac{1}{2}.\text{(当 } x\to 0 \text{ 时, } 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\text{)}$$

所以最后得 $a=1,b=0,c=\frac{1}{2}$.

考点 4:定积分与极限

1. C　　2. $\boxed{-\frac{1}{18}}$　　3. 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{sinx}{2x}$(洛必达法则)$=\frac{1}{2}$. (0 比 0)

4. 解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot e^{-\cos^2 x}}{2x}=\frac{1}{2e}$　　---------------------6 分

5. 解: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\cos\left(t^2\right)dt}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cos\left(x^4\right)}{\sin x}=2$

6. 解:

【分析】变限积分与极限等常联系在一起.

(1)往往将函数极限恒等变形为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式,使用洛必达法则;

(2)利用积分中值定理,可以消掉变限积分中的积分号,进而求得极限.

解 方法一:可看成$\frac{0}{0}$型未定式,由洛必达法则,得

$$I=\lim_{x\to a}\frac{x\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)}{1}=af(a).$$

方法二:$I=\lim\limits_{x\to a}\frac{xf(\xi)(x-a)}{x-a}(a<\xi<x)=\lim\limits_{x\to a}xf(\xi)=af(a)$.这里当$x\to a$时,$\xi\to a$.

7. 解:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\int_x^0\sqrt{u}\,\mathrm{e}^{x-u}\mathrm{d}u}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^x\int_0^x\sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u}{\sqrt{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^x\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u}{\sqrt{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\frac{2}{3}.$$

8. 解:原式$\overset{L'}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cdot x^2e^{x^2}\sin x^2}{6x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^5e^{x^2}}{6x^5}=\frac{1}{3}$

9. 解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\sin t\ln(1+t)dt-x^3}{x-\sin x}$ -------------1 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\ln\left(1+x\right)-3x^2}{1-\cos x}$ -------------3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\ln\left(1+x\right)}{1-\cos x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}$ ------------------4 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{x^2/2}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{x^2/2}=-4$ ------------------6 分

10. 解:解:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A\Rightarrow f\left(0\right)=0\Rightarrow\varphi\left(0\right)=0$ -----------------1 分

$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt\overset{xt=u}{=}\frac{1}{x}\int_0^x f\left(u\right)du$ -----------------3 分

$$\varphi'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2} \quad x\neq 0$$ -----------------4 分

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$$ -----------------7 分

$$\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=\varphi'(0)$$

$\therefore \varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。 -----------------8 分

考点 5：定积分与复合函数

1. $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1(1+x)dx+\int_1^2 x^2dx=\frac{23}{6}$

2. 提示：变量代换。答案$=\frac{7}{3}-\frac{1}{e}$

3.

4.解: 解法一:令 $x-1=t$，则 $x=t+1$，$dx=dt$，且当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$t=-\frac{1}{2}$；当 $x=2$ 时，$t=1$.⋯(2 分)

于是，$\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^1 f(t)dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} te^{-t^2}dt+\int_0^2(-1)dt=0+\int_0^2(-1)dt$ (奇偶性) ⋯⋯⋯⋯⋯⋯(4 分)

$=[-t]_0^2=-2$. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (6 分)

解法二: 令 $x-1=t$，则 $x=t+1$，$dx=dt$，且当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$t=-\frac{1}{2}$；当 $x=2$ 时，$t=1$.⋯⋯⋯(2 分)

于是，$\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^1 f(t)dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} te^{-t^2}dt+\int_0^2(-1)dt=-\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-t^2}d(-t^2)+\int_0^2(-1)dt$ (第一换元法)

⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(4 分)

$=-\frac{1}{2}\left[e^{-t^2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}+[-t]_0^2=-2$.⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(6 分)

评分标准：只写出正确答案但无演算过程的，扣 4 分. 括号内的注释不需写出.

4.

4. 解: 令 $x-1=t$，则 $\int_0^3 f(x-1)dx=\int_{-1}^2 f(t)dt$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (2 分)

$=\int_{-1}^1\frac{t}{1+\cos t}dt+\int_1^2(e^t+1)dt=0+\left[e^t+t\right]_1^2$ (奇偶性) ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(4 分)

$=e^2-e+1$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(6 分)

5. $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}-1$（将$x$的负一次方改为$x-1$）

6．解：令 $A=\int_0^1 f(x)dx$ -----------------2 分

则 $f(x)=x+2A$ -----------------3 分

两边对 x 在 $[0,1]$ 上积分，得

$A=\int_0^1(x+2A)dx=\frac{1}{2}+2A$ -----------------5 分

$\Rightarrow A=-\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=x-1$ -----------------6 分

7．$\cos x-\frac{2}{1+\pi}$

8．提示：令所求值为A，分部积分法。答案：$A=\frac{1}{2}\ln 2-1+\frac{\pi}{4}$

考点 6：计算定积分

1．B 2．B 3．B 4．A 5．$\frac{16}{3}$

6．$\frac{9}{2}\pi$ 7．$\frac{2}{3}$ 8．-2 9．2 10．$\frac{4}{3}$

11．$\frac{2}{3}$ 12．$\frac{\pi}{2}$ 13．0 14．$\frac{\pi}{2}$ 15．0

16．$\frac{3\pi^2}{16}$ 17．$\frac{1}{6}$

18．解：令 $x=\sin u$，则 $dx=\cos u du$，当 $x=0$，$u=0$;当 $x=\frac{1}{2}$，$u=\frac{\pi}{6}$ ------------- 2 分

原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{6}}u\sin^2 u du=\int_0^{\frac{\pi}{6}}u\frac{1-\cos 2u}{2}du=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}u du-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}u\cos 2u du$

------------- 2 分

$=\frac{\pi^2}{144}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}u d\sin 2u=\frac{\pi^2}{144}-\frac{1}{4}\left[u\sin 2u\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin 2u du\right]$ ------------- 2 分

$=\frac{\pi^2}{144}-\frac{\sqrt{3}\pi}{48}+\frac{1}{16}$.

19．

3.解：令 $x=\sec t$ $dx=\sec t\tan t dt$ 当 $x=\sqrt{2}$，时 $t=\frac{\pi}{4}$；$x=2$，时 $t=\frac{\pi}{3}$ 2 分

原式 $=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec t\cdot\tan t}{\sec^2 t\cdot\tan t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos t dt$ ……………………..4 分

$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ ……………………..5 分

20．注意：被积函数有绝对值，需分区间。答案$=\boxed{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$

21．提示：分部积分法原式=$\boxed{(1-\pi)\ln\pi-2\ln 2-1}$。能化为相同答案的其他形式都可以。

22．（凑微分法）答案=$\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$

23.（分部积分法）解：原式=$-\int_0^1 x\cdot e^{-x}d(-x)=-\int_0^1 xde^{-x}=-x\cdot e^{-x}|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-1}-e^{-x}|_0^1=1-\frac{2}{e}$

24．解：原式

$=\int_{-2}^{0}(x-x)e^{-x}dx+\int_{0}^{2}(x+x)e^{x}dx=2\int_0^2 xe^x dx$ ------------------2 分

$=2\int_0^2 xde^x=2\left(xe^x\big|_0^2-\int_0^2 e^x dx\right)$ ------------------4 分

$=2(e^2+1)$ ------------------6 分

25．解：令 $x=a\sin t$，则 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$，$dx=a\cos tdt$， -------------------------2 分

$x=0$ 时 $t=0$，$x=a$ 时 $t=\frac{\pi}{2}$，

于是原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\cos t}{a\sin t+a\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\sin t}{a\cos t+a\sin t}dt$ --------------------------4 分

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\sin t+a\cos t}{a\sin t+a\cos t}dt=\frac{\pi}{4}$ ---------------------------6 分

26．解：设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx\overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}dt$，则 $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}dx=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\ I=\frac{\pi}{4}$

27．解：令 $x=\tan t$，$x=1$ 时，$t=\frac{\pi}{4}$；$x=\sqrt{3}$ 时，$t=\frac{\pi}{3}$，$dx=\sec^2 tdt\cdots\cdots 2'$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec^2 t}{\tan^2 t\cdot\sec t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec t}{\tan^2 t}dt\cdots\cdots 3'$

原式 $=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=-\frac{1}{\sin t}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cdots\cdots 5'$

$=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdots\cdots 6'$

28．解：令 $t=\sqrt{5-4x}$，则 $x=\dfrac{5-t^2}{4}$， $dx=-\dfrac{t}{2}dt$，

于是 $\int_{-1}^{1}\dfrac{x}{\sqrt{5-4x}}dx=\int_{3}^{1}\dfrac{\frac{5-t^2}{4}}{t}\left(-\dfrac{t}{2}\right)dt=\dfrac{1}{8}\int_{1}^{3}\left(5-t^2\right)dt=\dfrac{1}{8}\left(5t-\dfrac{t^3}{3}\right)\Big|_1^3=\dfrac{1}{6}$

29．原式=$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$ -----------------1 分

$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{1+\cos^2 x}d\cos x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\cos 2x}d\cos 2x$ -----------------3 分

$=-\arctan\left(\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\ln\left|\cos 2x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$ -----------------5 分

$=\dfrac{\pi}{4}$ -----------------6 分

30．解：原式=$\int_{-1}^{1}\dfrac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx+\int_{-1}^{1}\dfrac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$ -----------------1 分

$=4\int_0^1\dfrac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$ -----------------3 分

$=4\int_0^1\dfrac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2}dx.$ -----------------5 分

$=4\int_0^1 dx-4\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=4-\pi$ -----------------6 分

31．解：左=$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\left(\dfrac{-2a}{x+a}\right)\right]^{\frac{x+a}{-2a}\cdot\frac{-2ax}{x+a}}=e^{-2a}$ -----------------2 分

右=$\int_a^{+\infty}2xe^{-2x}dx=-\int_a^{+\infty}xde^{-2x}=-xe^{-2x}\Big|_a^{+\infty}+\int_a^{+\infty}e^{-2x}dx=ae^{-2a}-\dfrac{e^{-2x}}{2}\Big|_a^{+\infty}=\dfrac{3a}{2}e^{-2a}$ -----------------5 分

$\therefore a=\dfrac{2}{3}$ -----------------6 分

32．0

33．（同第 29 题）

34．（提示：利用和差化积公式）答案：$\frac{2}{3}$

35．（提示：三角换元）答案：$\frac{\pi}{4}$

36．（提示：换元+分部积分）答案：-4π

37．（提示：三角换元）答案：$\frac{\pi}{8}$

38．2

知识点 2：曲线弧长

1．B　　2．C　　3．B　　4．$\sqrt{5}$　　5．$\frac{14}{3}$

6．$\int_0^x \sqrt{1+y'^2}dx = e^x - 1$，且 $y|_{x=0}=0$，得 $y' = \pm\sqrt{e^{2x}-1}$，取 $y'=\sqrt{e^{2x}-1}$，积分得：

$y=\sqrt{e^{2x}-1}-\arctan\sqrt{e^{2x}-1}+C$，由初始条件知 C=0，故 $y=\sqrt{e^{2x}-1}-\arctan\sqrt{e^{2x}-1}$。

知识点 3：反常积分

考点 1：反常积分的敛散性

1．B　　2．D　　3．B　　4．D　　5．C

6．C　　7．B　　8．AC　　9．B　　10．D

考点 2：计算反常积分

1．$\frac{1}{2}$　　2．6　　3．$\frac{1}{2}$　　4．$\frac{\pi}{3}$（题目录入错误，将$x+2$ 改为$x-2$）

5．$\frac{\pi}{4e}$　　6．ln2

知识点 4：定积分的应用

考点 1：旋转体相关

1．

1. 解: 平面区域 D 如图 1 所示.

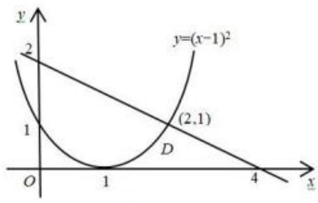


图 1

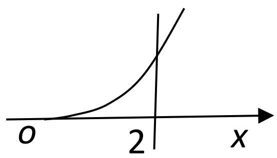
由题意知 $y'=2(x-1)$，过曲线 $y=(x-1)^2$ 上点 $(2,1)$ 的切线斜率为 $k_1=y'(2)=2$，法线斜率为 $k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{2}$，于是，法线方程为 $y=-\frac{1}{2}x+2$，且该法线与 x 轴的交点为 $(4,0)$ ……………(3 分)

因此，由该法线、x 轴及该曲线所围成的区域 D 绕 x 轴旋转一周所得的几何体的体积为 $V=\pi\int_1^2(x-1)^4 dx+\pi\int_2^4\left(-\frac{1}{2}x+2\right)^2 dx$ ………………………………(5 分)

$=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{3}=\frac{13\pi}{15}$ ……………………………………………………………(7 分)

评分标准：只写出正确答案但无解题过程的，扣 5 分．不需画图．

2．**解**：(1) 区域 D 如图



$$A=\int_0^2 x^2 dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2=\frac{8}{3};$$ ------------ 3 分

(2) $$V_y=\int_0^4 4\pi dy-\int_0^4 \pi y dy=16\pi-\frac{\pi}{2}y^2\Big|_0^4=8\pi.$$ ------------ 4 分

3．

1. 解：（1）

设切点坐标为$(x_0\ ,y_0)$,那么$k=y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$ ，

切线方程为：$y-y_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$,………………………………1 分

(0,0)代入切线方程，解得切点坐标(e,1)切线方程：$y=\frac{x}{e}$ …….2 分

$dA=(e^y-ey)dy$ ……………………….3 分

$A=\int_0^1(e^y-ey)dy=e^y\Big|_0^1-\frac{e}{2}y^2\Big|_0^1=\frac{e}{2}-1$ …………………….4 分

(2)

$dv=\pi((e^y)^2-(ey)^2)dy$ ……………………….5 分

$v=\pi\int_0^1(e^{2y}-e^2y^2)dy=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}\Big|_0^1-\frac{e^2}{3}y^3\Big|_0^1\right]=\frac{\pi e^2}{6}-\frac{\pi}{2}$…………….7 分

4．此题是第 5 题的简化版，请结合第 5 题一起做。（第 5 题少一个$y=x^2$的条件）

5．提示：作图理解，空心体积=外圈体积−内圈体积。

答案：(1)$A(1,1)$　　(2)$y=2x-1$　　(3)$V=\frac{\pi}{30}$

6．解：由题意，面积$\int_0^1(ax^2+bx+c)dx=\frac{1}{3}$，即$2a+3b+6c=2$；----------------2 分

又经过原点，则 c=0；因此$2a+3b=2$ ----------------------4 分

体积$V=\int_0^1\pi(ax^2+bx)^2dx=\pi(\frac{a^2}{5}+\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{3})=(\frac{4}{27}+\frac{1}{27}a+\frac{2}{135}a^2)\pi$ --------6 分

$V=(\frac{4}{27}+\frac{1}{27}a+\frac{2}{135}a^2)\pi$ 的取得最小值时，

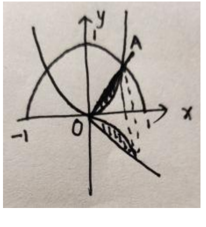
$V'=(\frac{1}{27}+\frac{4}{135}a)\pi=0$，得$a=-\frac{5}{4}$，$b=\frac{3}{2}$

而$V''>0$，所以此时体积最小--9 分

7．$a=-\frac{5}{3},b=2,c=0$

8．（旋转体体积、最值问题）

（1）



$\begin{cases}y=ax^2\\y=1-x^2\end{cases}\Rightarrow(x=\frac{1}{\sqrt{1+a}},y=\frac{a}{1+a})$,　　L_{OA}: $y=\frac{a}{\sqrt{1+a}}x$.

$V(a)=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}\pi\cdot\frac{a^2}{1+a}\cdot x^2dx-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}\pi\cdot a^2\cdot x^4dx$

$=\frac{\pi a^2}{1+a}\cdot\frac{1}{3(1+a)\sqrt{1+a}}-\frac{\pi a^2}{5(1+a)\sqrt{1+a}}=\frac{2}{15}\pi a^2\cdot(1+a)^{-\frac{5}{2}}$

（2）$V'(a)=\frac{2}{15}\pi\cdot[2a\cdot(1+a)^{-\frac{5}{2}}-\frac{5}{2}a^2\cdot(1+a)^{-\frac{7}{2}}]=\frac{2}{15}\pi a(1+a)^{-\frac{5}{2}}[2-\frac{5}{2}a(1+a)^{-1}]$

令$V'(a)=0$，解得唯一驻点$a=4$.

当 $a<4$ 时，$V'(a)>0$，当 $a>4$ 时，$V'(a)<0$,

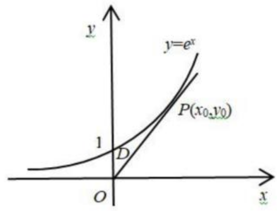


图 1

$\therefore a=4$ 为极大值点，也为最大值。此时 $V(4)=\frac{32\pi}{15\times 25\sqrt{5}}$

9．解：平面图形 D 如图 1 所示：

设切点坐标为 $P(x_0,y_0)$，于是曲线 $y=e^x$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的切线斜率为 $y'\big|_{x=x_0}=e^{x_0}$．过点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $y-y_0=e^{x_0}(x-x_0)$，它经过点 $O(0,0)$，所以 $-y_0=-x_0e^{x_0}$．又因 $y_0=e^{x_0}$，代入得 $x_0=1$，从而 $y_0=e^{x_0}=e$，切线方程为 $y=ex$ ………… (3 分)

(1) $A=\int_0^1(e^x-ex)\mathrm{d}x \quad =e^x\big|_0^1-\frac{1}{2}ex^2\big|_0^1=e-1-\frac{1}{2}e=\frac{1}{2}e-1$ …………………………………… (5 分)

(2) $V=\pi\int_0^1(e^{2x}-e^2x^2)\mathrm{d}x \quad =\frac{1}{2}\pi e^{2x}\big|_0^1-\frac{1}{3}\pi e^2x^3\big|_0^1=\frac{1}{2}\pi e^2-\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{3}\pi e^2=\frac{1}{6}\pi e^2-\frac{1}{2}\pi$ ………… (7 分)

评分标准：各问只写出正确答案但无解题过程的，各扣 1 分．不需画图．

10．解：（1）$V(c)=\pi\int_0^c e^{-2x}dx=\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-2c}\right)$， ----------------------2 分

又 $\lim\limits_{c\to+\infty}V(c)=\frac{\pi}{2}$，$V(a)=\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-2a}\right)$， ---------------------3 分

由 $V(a)=\frac{1}{2}\lim\limits_{c\to+\infty}V(c)$ 得 $a=\frac{1}{2}\ln 2$ ---------------------4 分

（2）设切点为 $\left(x_0,e^{-x_0}\right)$，则切线斜率 $k=-e^{-x_0}$，

切线方程为 $y-e^{-x_0}=-e^{-x_0}\left(x-x_0\right)$， ---------------------5 分

令 $x=0$ 得 $y=\left(1+x_0\right)e^{-x_0}$，$y=0$ 得 $x=1+x_0$，

从而切线与坐标轴夹成的面积为 $S=\frac{1}{2}\left(1+x_0\right)^2e^{-x_0}(x_0>0)$， ---------6 分

$S'=\frac{1}{2}\left(1-{x_0}^2\right)e^{-x_0}$，令 $S'=0$ 得 $x_0=\pm1$（负值舍去），当 $x_0<1$ 时，$S'>0$；当 $x_0>1$ 时，$S'<0$，故当 $x_0=1$ 时，面积 S 有极大值，亦即最大值，

所以切点为 $\left(1,e^{-1}\right)$，最大面积 $S=2e^{-1}$。 ------------------------8 分

11．解：由题设，当 $x\neq0$ 时，$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{3a}{2}$，即 $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\frac{3}{2}a$，由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续性，

得 $f(x)=\frac{3}{2}ax^2+cx,x\in[0,1]$， -------2 分

又由已知条件，得 $2=\int_0^1\left(\frac{3}{2}ax^2+cx\right)dx=\frac{a}{2}+\frac{c}{2},c=4-a$，

因此 $f(x)=\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x$ --------4 分

所求旋转体体积为$V\left(a\right)=\pi\int_0^1 f^2\left(x\right)dx=\pi\int_0^1\left[\frac{3}{2}ax^2+\left(4-a\right)\right]^2dx=\left(\frac{1}{30}a^2+\frac{1}{3}a+\frac{16}{3}\right)\pi$ ，-----6 分

由$V'\left(a\right)=\left(\frac{1}{15}a+\frac{1}{3}\right)\pi$，令$V'\left(a\right)=0$，得唯一驻点$a=-5$，

又因$V''\left(a\right)=\frac{1}{15}>0$，故$a=-5$时，旋转体体积为最小。 ------------8 分

12．解：（1）$A=4\int_0^a ydx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t-\sin^6 tdt\overset{\text{华里士公式}}{=}\frac{3}{8}\pi a^2$

（2）$L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\cos t\sin tdt=6a$

（3）$V=2\int_0^a \pi y^2dx=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\pi a^2\sin^6 t\cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt=\frac{32}{105}\pi a^3$

13．解：（1）由题意知：$S_1=-\int_0^a\left(x^2-ax\right)dx=\frac{1}{6}a^3$，$S_2=\int_a^3\left(x^2-ax\right)dx=9-\frac{9}{2}a+\frac{1}{6}a^3$，

$\because S_1=S_2,\therefore a=2\cdots\cdots3'$

（2）设S_1,S_2绕着y轴旋转一周而成的体积分别为：V_1,V_2，则：$V_1=-\int_0^2 2\pi x\left(x^2-2x\right)dx=\frac{8}{3}\pi$，

$V_2=\int_2^3 2\pi x\left(x^2-2x\right)dx=\frac{43}{6}\pi\cdots\cdots7'$，$\therefore V_1/V_2=16/43\cdots\cdots8'$

14．解：$S_1=\int_0^t\left(t^2-x^2\right)dx=\frac{2}{3}t^3$

$S_2=\int_t^1\left(x^2-t^2\right)dx=\frac{1}{3}-t^2+\frac{2}{3}t^3$

$\left(S_1+S_2\right)'=\left(\frac{1}{3}-t^2+\frac{4}{3}t^3\right)'=4t^2-2t$，驻点$t=0,t=\frac{1}{2}$

$\left(S_1+S_2\right)''=8t-2$，$\left(S_1+S_2\right)''\big|_{t=0}=-2$，$\left(S_1+S_2\right)''\Big|_{t=\frac{1}{2}}=2$

所以，当$t=\frac{1}{2}$时，S_1+S_2最小。

15．$\int_a^b\pi\left(f^2\left(x\right)-g^2\left(x\right)\right)dx$

16．解：$V_{\Delta OPA}=\dfrac{1}{3}\pi\left[c\left(c-a\right)\right]^2\cdot c=\dfrac{c^3\left(c-a\right)^2\pi}{3}$ -----------------2 分

记弧 OP 与直线 PA 及 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转的旋转体体积为 V，则 $V=\int_0^c\pi\left(x\left(x-a\right)\right)^2dx$ --5 分

$=\pi\left(\dfrac{c^5}{5}-\dfrac{ac^4}{2}+\dfrac{a^2c^3}{3}\right)$ -----------------6 分

$\dfrac{c^3\left(c-a\right)^2\pi}{3}=\pi\left(\dfrac{c^5}{5}-\dfrac{ac^4}{2}+\dfrac{a^2c^3}{3}\right)\Rightarrow c=\dfrac{5}{4}a$ -----------------8 分

17．

解 (1) 解方程组 $\begin{cases}y=ax\\y=x^2\end{cases}$ 得 $x=0,x=a$，如图 6-18 所示.

所以 $S=S_1+S_2=\int_0^a(ax-x^2)\mathrm{d}x+\int_a^1(x^2-ax)\mathrm{d}x=\dfrac{a^3}{3}-\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{3}$

$S'(a)=a^2-\dfrac{1}{2}$ 令 $S'(a)=0$，得 $a=\dfrac{1}{\sqrt2}<1$

$S''(a)=2a,S''\left(\dfrac{1}{\sqrt2}\right)>0$，有极小值也是最小值

所以当 $a=\dfrac{1}{\sqrt2}$ 时，$S=S_1+S_2$ 面积最小，$S=\dfrac{2-\sqrt2}{6}$

(2) $V_1=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt2}x\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}x^4\mathrm{d}x$

$=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{3}[x^3]_0^{\frac{1}{\sqrt2}}-\dfrac{\pi}{5}[x^5]_0^{\frac{1}{\sqrt2}}=\dfrac{\sqrt2\pi}{24}-\dfrac{\sqrt2\pi}{40}$

$V_2=\pi\int_{\frac{1}{\sqrt2}}^1x^4\mathrm{d}x-\pi\int_{\frac{1}{\sqrt2}}^1\dfrac{1}{2}x^2\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{5}x^5\Big|_{\frac{1}{\sqrt2}}^1-\dfrac{\pi}{6}x^3\Big|_{\frac{1}{\sqrt2}}^1$

$=\dfrac{\pi}{5}\left(1-\dfrac{\sqrt2}{8}\right)-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt2\pi}{24}=\dfrac{\pi}{5}-\dfrac{\sqrt2\pi}{40}-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt2\pi}{24}$

所以 $V=V_1+V_2=\dfrac{\pi}{30}+\dfrac{\sqrt2\pi}{30}=\dfrac{\pi}{30}(1+\sqrt2)$

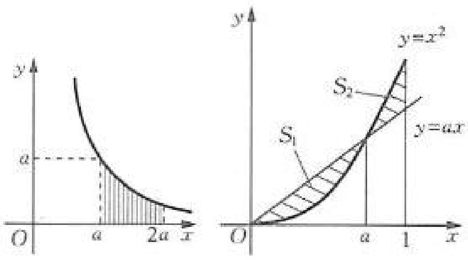


图 6-18

第六部分 微分方程 答案

知识点 1：基础练习

1．D 2． $y=Cxe^{\frac{x^2}{2}}$

3．**解：**特征方程 $\lambda^2+2\lambda+9=0$，特征根 $\lambda=-1\pm2\sqrt2i$. ------------- 1 分

所以齐次方程得通解为 $y=e^{-x}(C_1\cos2\sqrt2x+C_2\sin2\sqrt2x)$ ------------- 2 分

因为-1 不是特征根，设特解为$y=Ae^{-x}$，代入得，$A=1$． ------------- 2 分

所以，原方程的通解为$y=e^{-x}(1+C_1\cos 2\sqrt{2}x+C_2\sin 2\sqrt{2}x)$.------------- 1 分

评分标准说明：没写“C_1，C_2”扣 1 分。

4．**解**：(1)由 $F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=g^2(x)+f^2(x)$

$$=\left[f(x)+g(x)\right]^2-2f(x)g(x)=\left(2e^x\right)^2-2F(x)$$ ------------ 2 分

可见 $F(x)$所满足的一阶微分方程为$F'(x)+2F(x)=4e^{2x}$ ------------ 2 分

(2) $F(x)=e^{-\int 2\mathrm{d}x}\left[\int 4e^{2x}e^{\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=e^{-2x}\left[\int 4e^{4x}\mathrm{d}x+C\right]=e^{2x}+Ce^{-2x}$ --------- 2 分

将 $F(0)=f(0)g(0)=0$ 代入上式，得 $C=-1$， 于是$F(x)=e^{2x}-e^{-2x}$ --------- 1 分

评分标准说明：第 1 题不要求画图；第 2 题未求“C”扣 1 分。

5．A

6．

6.解：方程对应的线性齐次方程为$y''+2y'-3y=0$ ，

其特征方程为：$r^2+2r-3=0$,可解得特征根为：$r_1=1$,$r_2=-3$ ，

通解为：$Y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$ ………………………….. 2 分

设原方程的一个特解为：$y^*=ax+b$,代入原方程，得 ……………………….. 3 分

$-3ax+2a-3b=2x+3$, 解得$a=-\frac{2}{3}$,$b=-\frac{13}{9}$ ， $y^*=-\frac{2}{3}x-\frac{13}{9}$ 4 分

原方程通解为：$y=C_1e^x+C_2e^{-3x}-\frac{2}{3}x-\frac{13}{9}$ …………………….. 5 分

2. 解：因为$(x_0,f(x_0))$处的切线方程为:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

可解得，该直线与 x 轴交点为$\left(x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}，0\right)$

与直线$x=x_0$交点为$(x_0,f(x_0))$ ………………….2 分

所围成面积为

7．

$\frac{1}{2}|f(x_0)|\cdot\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|=4$ ………………………….3 分

化简得$8y'=y^2$ ………………………….4 分

通解为$-\frac{8}{y}=x+C$, …………………………. 6 分

初始条件$f(0)=2$,带入$C=-4$ $\therefore y=\frac{8}{4-x}$ ………………………….7 分

8．C

9．提示：齐次方程+有理函数积分，书本原题，计算较繁琐。特解为：$\boxed{y^3 = y^2 - x^2}$

10．A

11．$x^2y = 1$

12．解：特征方程 $r^2+1=0$ 解得 $r=\pm i$，--------------------------1 分

对应齐次方程的通解为 $Y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$ ------------------3 分

分别求 $y''+y=e^x$ 与 $y''+y=\cos x$ 的特解 y_1^* 和 y_2^*

可解得 $y_1^*=\dfrac{e^x}{2}$，$y_2^*=\dfrac{x\sin x}{2}$， ----------------------5 分

所以原方程通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{e^x}{2}+\dfrac{x\sin x}{2}$ -----------6 分

13．A

14．$y=C_1(x-1)+C_2(x^2-1)+1$

15．（I 型+I 型）$y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\dfrac{3}{2}x^2e^{2x}+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

16．C

17．$xy = 2$

18．（一阶非齐次线性方程组）

解：$P(x) = 2x,\quad Q(x) = 4x,$

$$y = e^{-\int 2xdx}[\int 4x\cdot e^{\int 2xdx}dx + C] = e^{-x^2}[\int 4x\cdot e^{x^2}dx + C] = e^{-x^2}[2\cdot\int e^{x^2}dx^2 + C]$$

$$= e^{-x^2}[2e^{x^2} + C] = 2 + C\cdot e^{-x^2}$$

19．D

20．B

21．$y=\dfrac{C-\cos x}{x}$

22．解：特征方程 $r^2+1=0$ 解得 $r=\pm i$，--------------------------1 分

对应齐次方程的通解为 $Y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$ ------------------3 分

分别求 $y''+y=e^x$ 与 $y''+y=\cos x$ 的特解 y_1^* 和 y_2^*.

可解得 $y_1^*=\dfrac{e^x}{2}$，$y_2^*=\dfrac{x\sin x}{2}$， ----------------------5 分

所以原方程通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{e^x}{2}+\dfrac{x\sin x}{2}$ -----------6 分

23．$y=C_1(1-x)+C_2(1-x^2)+1$（答案不唯一）

24．解：原方程变形为 $y(x-1)dy=(y^2-1)dx$， --------------1 分

设 $y^2-1\neq 0$，$x-1\neq 0$，分离变量得 $\dfrac{y}{y^2-1}dy=\dfrac{1}{x-1}dx$， --------------3 分

两端积分 $\displaystyle\int\frac{y}{y^2-1}dy=\int\frac{1}{x-1}dx$， --------------4 分

得$\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right|=\ln\left|x-1\right|+\ln\left|C_1\right|$， --------------5 分

于是 $y^2-1=\pm C_1^{\ 2}\left(x-1\right)^2=C\left(x-1\right)^2$ （$C=\pm C_1^{\ 2}$） --------------6 分

25．解： $y=x^2-x+1$ 在点 $\left(0,1\right)$ 处的切线斜率为 $y'\big|_{x=0}=-1$，

故应求 $y''-3y'+2y=2e^x$ 满足 $y\big|_{x=0}=1$， $y'\big|_{x=0}=-1$ 的特解， ----------------2 分

特征方程为 $r^2-3r+2=0\Rightarrow r=1,r=2$， -------------------4 分

可令特解形式为 $y^*=Axe^x$ 代入得 $A=-2$，

从而得到通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x$ ---------------------6 分

代入 $y\big|_{x=0}=1$， $y'\big|_{x=0}=-1$ 得 $C_1=1,C_2=0$，所求为 $y\left(x\right)=e^x-2xe^x$ --------8 分

26．D 27． $y=Ce^{x^2}$

28．解：相应齐次方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x+1}$，可得 $y=C(x+1)^2$，将 $y=C(x)(x+1)^2$ 代入原方程，可得：

$C'(x)=(x+1)^{\frac{1}{2}}$，则 $C(x)=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$，故原方程通解为 $y=(x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right]$。

29．解：原方程可变形为： $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}$，令： $\frac{y}{x}=u$，则： $y=xu,\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}\cdots\cdots2'$

从而原微分方程变形为： $x\frac{du}{dx}=-\frac{u^2+1}{u+1}$，分离变量得： $\frac{u+1}{u^2+1}du=-\frac{1}{x}dx$，

两边同时积分得： $-\frac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right)-\arctan u=\ln\left|x\right|+C\cdots\cdots5'$

即： $\ln\sqrt{x^2+y^2}+\arctan\frac{y}{x}=C\cdots\cdots6'$

30．解： $y=x^2-x+1$ 在点 $\left(0,1\right)$ 处的切线斜率为 $y'\big|_{x=0}=-1$，故应求 $y''-3y'+2y=2e^x$ 满足 $y\big|_{x=0}=1$，

$y'\big|_{x=0}=-1$ 的特解，$\cdots\cdots2'$

特征方程为 $r^2-3r+2=0\Rightarrow r=1,r=2$，可令特解形式为 $y^*=Axe^x$ 代入得 $A=-2$

从而得到通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x\cdots\cdots5'$

代入 $y\big|_{x=0}=1$， $y'\big|_{x=0}=-1$ 得 $C_1=1,C_2=0$，所求为 $y\left(x\right)=e^x-2xe^x\cdots\cdots6'$

31． $y^2=2x^2(\ln|x|+2)$ 或 $y^2=2x^2(\ln x+2)$ 或 $y^2=x^2(\ln x^2+4)$

32．

5. 解: 解法一: 原方程等价于 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}y=-x^2$.⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(1 分)

通解为 $y=e^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\left(\int(-x^2)e^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int(-x^2)e^{\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯(4 分)

$=e^{\ln x}\left(\int(-x^2)e^{-\ln x}\mathrm{d}x+C\right)=x\left(\int(-x)\mathrm{d}x+C\right)=x\left(-\frac{1}{2}x^2+C\right)=-\frac{1}{2}x^3+Cx$.（$C$ 为任意常数）⋯(6 分)

解法二: 原方程等价于 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}-x^2$.⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(1 分)

先求解齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}$ 的通解. 分离变量得 $\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，两端积分得 $\ln|y|=\ln|x|+C_1$（C_1 为任意常数), 即得齐次方程的通解为 $y=C_2x$，其中 $C_2=\pm e^{C_1}$. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(4 分)

令原方程通解为 $y=ux$，代入原方程得 $u=-\frac{1}{2}x^2+C$.从而原方程通解为 $y=-\frac{1}{2}x^3+Cx$（C 为任意常数). ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(6 分)

评分标准：只写出正确答案但无演算过程的，扣 4 分；结果计算正确但无 C 的，扣 1 分.

33．

2. 解: 由题设知，$y=y(x)$ 是微分方程 $y''-6y'+9y=e^{3x}$ 满足 $y(0)=0$，$y'(0)=2$ 的特解. 对应的特征方程为 $\lambda^2-6\lambda+9=0$，特征根 $\lambda_1=\lambda_2=3$. 从而对应的齐次微分方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(3 分)

因非齐次项 $f(x)=e^{3x}$，从而可设非齐次微分方程 $y''-6y'+9y=e^{3x}$ 具有形式为 $y^*=Ax^2e^{3x}$ 的特解. 代入原方程可确定常数 $A=\frac{1}{2}$，即原方程的通解为 $y=\left(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2\right)e^{3x}$.⋯⋯⋯(5 分)

由 $y(0)=0$，$y'(0)=2$ 可确定 $C_1=0$，$C_2=2$. 故所求曲线的方程为 $y=\left(2x+\frac{1}{2}x^2\right)e^{3x}=\frac{x}{2}(x+4)e^{3x}$. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(7 分)

评分标准:只写出正确答案但无演算过程的，扣 5 分.

34．$xy=2$ 或 $y=\frac{2}{x}$

35．

5. 解: 解法一: $y=e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int e^{x}e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{x}\left[(x-1)e^{x}+C\right]$ (C 为任意常数)……………(4 分)

由 $y(1)=0$, 得 $C=0$. 因此所求特解为 $y=\frac{x-1}{x}e^{x}$ ………………………………………(6 分)

解法二: 先求解齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=0$ 的通解. 分离变量得 $\frac{1}{y}\mathrm{d}y=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x$, 两端积分得 $\ln|y|=-\ln|x|+C_1$, 即得齐次方程的通解为 $y=\frac{C_2}{x}$ (C_1 为任意常数, $C_2=\pm e^{C_1}$)……………(2 分)

令非齐次解为 $y=\frac{u}{x}$, 代入得 $u=(x-1)e^{x}+C$. 于是原方程通解为 $y=\frac{(x-1)e^{x}+C}{x}$ (C 为任意常数) ………………………………………………………………(4 分)

由 $y(1)=0$, 得 $C=0$. 因此所求特解为 $y=\frac{x-1}{x}e^{x}$ ………………………………………(6 分)

评分标准:只写出正确答案但无演算过程的,扣 4 分.

36.

2. 解: 由题意知, 所求函数 $y=y(x)$ 为满足初始条件 $y(0)=1$ 及 $y'(0)=-1$ 的微分方程 $y''-3y'+2y=2e^{x}$ 的特解. 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$, 特征根为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$.

对应齐次方程通解为 $Y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$ ………………………………………………(3 分)

设特解具有如下形式: $y^{*}=xAe^{x}$, 解得, $A=-2$, 即有 $y^{*}=-2xe^{x}$. 因此原方程的通解为

$y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}-2xe^{x}$ ………………………………………………………(5 分)

代入初始条件得 $C_1=1$, $C_2=0$. 因此, 函数解析表达式为 $y=(1-2x)e^{x}$ ……………………(7 分)

第七部分　证明题专练　答案

知识点 1：导数相关

考点 1：不等式证明（三角函数、指数函数、对数函数等）

1．证明：令 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}, x\in[0,+\infty)$，显然，$f(0)=0$. ----　1 分

又因为，当 $x>0$，$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0$

故而 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，　------------　2 分

当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)$，　即 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$.　------------　1 分

2．证明：设 $f(x)=\tan x-x-\frac{1}{3}x^3, x\in[0,\frac{\pi}{2})$，则 $f(0)=0$，……………………………………....1 分

$f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=\tan^2 x-x^2>0, x\in(0,\frac{\pi}{2})$.…………………………...…..2 分

所以，$f(x)$在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，所以当 $0<x<\frac{\pi}{2}$， $f(x)>f(0)=0$.

即 $\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$.………………………………………………………………...….4 分

3．（搜题软件可以搜到这道题目的）

4．

1. 证明：当 $x>1$ 时，$\frac{\ln(1+x)}{\ln x}>\frac{x}{1+x}$ 等价于 $(1+x)\ln(1+x)-x\ln x>0$.

令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-x\ln x$，………………………………………………………………(1 分)

则有 $f'(x)=\ln(1+x)+1-\ln x-1=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>0 \quad (x>1)$，因此 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加. ………………………………………………………………………………(3 分)

再由 $f(1)=2\ln 2>0$，得知当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，即 $\frac{\ln(1+x)}{\ln x}>\frac{x}{1+x}$. 结论得证. ……………(4 分)

5．

1. 证明：证法一. 令 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2$ ……………………………………………(1 分)

则有 $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0 \ (x>0)$，因此 $f(x)$ 在 $[0+\infty)$ 上单调增加 ……………………(3 分)

由于 $f(0)=0$，因此当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，即 $\ln(1+x)>x-\frac{1}{2}x^2$. 结论得证. …………(4 分)

证法二. 由泰勒公式，知 $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}\frac{1}{(1+\xi)^3}x^3 \quad (0<\xi<x)$ …………………………(3 分)

$>x-\frac{1}{2}x^2 \ (x>0)$，即有 $\ln(1+x)>x-\frac{1}{2}x^2$. 结论得证. ……………………………………………(4 分)

6．证明：（教材 P132，例 1）

1. 设 $f(x)=\ln(1+x)$，当 $x>0$ 时，$f(x)$ 在 $[0,x]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，所以

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0) \qquad 0<\xi<x$$

即 $f(x)=\frac{x}{1+\xi}$，由此 $\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}$，又因为 $0<\xi<x$，所以

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$$

或由 $f(x)-x$ 和 $f(x)-\frac{x}{1+x}$ 的单调性证明

7．证明：函数 $f(x)=\ln x$，定义域$(0，+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}$，$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$，在定义域上为凸函数，根据凸

函数定义知：$\ln\frac{x+y}{2} > \frac{lnx+lny}{2} = ln\sqrt{xy}$　　得证

8．证明：令 $f(x)=(1+x)\ln x-2(x-1)$，即证 $f(x)>0,(x>1)$ ------------------------------2 分

因为 $f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$，---3 分

$f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}>0,(x>1)\Rightarrow f'(x)在x\ge 1时单增\Rightarrow f'(x)>f'(1)=0(\forall x>1)$ ---------4 分

$\Rightarrow f(x)在x\ge 1时单增\Rightarrow f(x)>f(1)=0,(\forall x>1)$，得证。----------------------------------5 分

9．证明：要证 $a^b>b^a$，只需证 $b\ln a>a\ln b$，令 $f(x)=x\ln a-a\ln x\ (x\ge a)$　　-----2 分

$\because f'(x)=\ln a-\frac{a}{x}>1-\frac{a}{x}\ge 0(x\ge a)$，

$\therefore f(x)在x\ge a$ 时单调增加，

$\therefore b>a$ 时，$f(b)>f(a)=0$

即 $b\ln a>a\ln b$，所以 $a^b>b^a$.---4 分

10．证明：提示：令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$，利用单调性证明

11．证明：当 $x>0$ 时，则 $e^x>1+x$

证：令 $f(x)=e^x-1-x$，则当 $x>0$ 时，$f'(x)=e^x-1>0$，因此 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加。

则 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，即 $e^x>1+x$

12．证明：

1）当 $x>1$ 时，即证 $(x+1)\ln x\ge x-1$

　　设 $f(x)=(x+1)\ln x-(x-1)$，则 $\forall x>1$，$f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}>0$

　　所以 $f(x)=(x+1)\ln x-(x-1)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加，则 $\forall x>1$，$f(x)>f(1)=0$。

2）当 $x<1$ 时，即证 $(x+1)\ln x\le x-1$

　令 $t=\frac{1}{x}$，则 $t>1$，即证 $(t+1)\ln t\ge t-1$，（1）已得证。

3）当 $x=1$ 时，$0\ge 0$ 显然成立。

考点 2：连续和可导性质的考察

1．证明：

(1)因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3 sin\frac{1}{x}-0}{x}=0=f'(0).$$

所以f(x)在$x=0$处可导,由于一元函数的可微与可导是等价的,从而f(x)在$x=0$处可微.

(2)当$x\neq 0$时,有

$$f'(x=3x^2 sin\frac{1}{x}+x^3 cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})=3x^2 sin\frac{1}{x}-xcos\frac{1}{x}$$

,所以

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2 sin\frac{1}{x}-xcos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

但$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}(3x^2 sin\frac{1}{x}-xcos\frac{1}{x})$,

即极限不存在,由导数定义知f'(x)在$x=0$处不可导,

从而f'(x)在$x=0$处不可微.

知识点 2：中值定理

1．证明：令 $F(x)=f(x)\sin x$，则 $F'(x)=f'\sin x+f\cos x$. …………………….........................1 分

则 $F(x)$在[0, 1]上连续，在(0, 1)内可导，且 F(0)=F(1)=0。……………………………..…...2 分

由罗尔中值定理, 存在ξ∈(0, 1)，使得 $F'(\xi)=0$. 即 $f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi$.……………..4 分

2．证明：原式等价于 $\frac{f'(\xi)}{a+b}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$，即 $\frac{f'(\xi)(b-a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$。因为函数在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，故有 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\xi\in(a,b)$。

又因为 $f(x)$ 和 x^2 在 $[a,b]$ 上满足柯西中值定理的条件，所以有 $\frac{f'(\xi)(b-a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$，化简可得原命题成立。

3．证明：要证 $(1+\xi^2)f'(\xi)=1$，只需证 $f'(\xi)-\frac{1}{1+\xi^2}=0$，

令 $F(x)=f(x)-\arctan x$ --2 分

$\because F(x)$在$[0,1]$上连续,$(0,1)$内可导, $F(0)=0,F(1)=0$

$\therefore$由罗尔定理知：至少$\exists\xi\in(0,1)$，使得$F'(\xi)=0$

即$\exists\xi\in(0,1)$，使得$(1+\xi^2)f'(\xi)=1$.--4 分

4．证明：

证 先证明存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$. 用反证法.

若不存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$，则在(a,b)内恒有 $f(x)>0$ 或$f(x)<0$，不妨设 $f(x)>0$（对 $f(x)<0$，类似可证），则

$$f'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}\geqslant 0,$$

$$f'(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b}\leqslant 0.$$

从而 $f'(a)f'(b)\leqslant 0$，与已知条件矛盾. 所以在(a,b)内至少存在一点 ξ，使$f(\xi)=0$.

再证存在 $\eta\in(a,b)$，使 $f''(\eta)=0$.

由 $f(a)=f(b)=f(\xi)$ 及罗尔定理知，存在 $\eta_1\in(a,\xi)$ 和 $\eta_2\in(\xi,b)$，使 $f'(\eta_1)=f'(\eta_2)=0$，再在$[\eta_1,\eta_2]$上对函数 $f'(x)$ 运用罗尔定理，知存在 $\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$，使 $f''(\eta)=0$.

5．证明：

（提示：作辅助函数$F(x)=\ln x$，在$[a,b]$上使用柯西中值定理。）

6．证明：令$F(x)=e^xf(x)$，则$F(x)$在$[a,b]$上满足拉格朗日中值定理的条件，故存在$\eta\in(a,b)$，使

$e^\eta\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=\dfrac{e^bf(b)-e^af(a)}{b-a}\overset{\because f(a)=f(b)=1}{=}\dfrac{e^b-e^a}{b-a}$，又因为函数$\varphi(x)=e^x$在$[a,b]$上满足拉格朗日中值定理的条件，故存在$\xi\in(a,b)$，使$e^\xi=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}$，从而得$e^\eta\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=e^\xi$，即$e^{\eta-\xi}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=1$。

7．（搜题软件上有解析）

8．证明：提示：构造函数$F(x)=e^{-\lambda x}f(x)$，在$[a,b]$上利用罗尔定理证明。

9．证明：构造函数$F(x)=xf(x)$.

因为$F(x)$在$[0,a]$上连续，在$(0,a)$内可导，且$F(a)=af(a)=0=F(0)$，

所以由罗尔定理知：至少存在一点$\xi\in(0,a)$，使得$F'(\xi)=0$，即$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

10．证明：

设$F(x)=f(x)-\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$

$\because f(x)$在$[a,b]$上连续

$\therefore F(x)$在 $[a,b]$上也连续

又$F(a)=\frac{1}{2}[f(a)-f(b)]$

$F(b)=\frac{1}{2}[f(b)-f(a)]$

$\therefore$当$f(a)=f(b)$时，$F(a)=F(b)=0$

此时取$\xi=a$或b

当$f(a)\neq f(b)$时，$F(a)\cdot F(b)<0$

$\therefore$由零点存在定理知，至少存在一点$\xi\in(a,b)$

使得$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$

$\therefore$命题成立。

11．证明：

设$F(x)=f(x)e^{g(x)}$

则$F(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在(a,b)上可微，且$F(a)=F(b)=0$

$\therefore$由罗尔定理知，至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)=0$

而$F'(x)=f'(x)e^{g(x)}+f(x)g'(x)e^{g(x)}$

$\therefore F'(\xi)=e^{g(\xi)}[f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)]$

$\because e^{g(\xi)}\neq 0$

$\therefore f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$

12．（搜题软件上有解析）

13．证明：

法一：柯西中值定理

令$g(x)=\ln x$.则$g'(x)=\dfrac{1}{x}\neq 0$. ------------ 1分

在$(1,2)$上应用柯西中值定理，存在$\xi\in(1,2)$，使得

$$\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$ ------------ 2分

即$\dfrac{f(2)}{\ln 2}=\dfrac{e^{\xi^2}}{\frac{1}{\xi}}$，故$f(2)=\xi e^{\xi^2}\ln 2$. ------------ 1分

法二：介值定理

令$F(x)=f(2)-xe^{x^2}\ln 2, x\in[1,2]$. 则$F(x)$在$[1,2]$上连续. ------------ 1分

由积分中值定理：存在$\eta\in[1,2]$,使得$f(2)=\int_1^x e^{t^2}\mathrm{d}t=e^{\eta^2}$

因为 $e\le f(2)\le e^4$，0<ln2<1，

所以 $F(1)=f(2)-e\ln 2>0$, $F(2)=f(2)-2e^4\ln 2=f(2)-e^4\ln 4<0$. ------------ 2 分

由介值定理，得，存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $F(\xi)=0$，

即 $f(2)=\xi e^{\xi^2}\ln 2$. ------------ 1 分

评分标准说明：第 2 题步骤不完整扣 1 分。

14．证明：由中值定理知有一 $a\in\left(\frac{2}{3},1\right)$ 使 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)dx=f(a)\cdots\cdots 2'$

$f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，且 $f(a)=f(0)$，由罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in(0,a)\subset(0,1)$

使 $f'(\xi)=0$

15．

2、证明：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，

又 $f''(x)$ 存在，因此 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$， -----------------------1 分

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$， -----------------------2 分

法一：利用泰勒公式

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2\geq x$ -------------------4 分

（ξ 介于 0 与 x 之间）

法二：利用单调性

$f''(x)>0\Rightarrow f'(x)$□ ， $f'(0)=1$，

当 $x>0$ 时， $f'(x)\geq f'(0)=1$；当 $x<0$ 时， $f'(x)\leq f'(0)=1$，

$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)$，（$\xi$ 介于 0 与 x 之间）

当 $x>0$ 时，$\xi>0$，$f'(\xi)\geq 1$，即 $\frac{f(x)}{x}\geq 1, f(x)\geq x$；当 $x<0$ 时，$\xi<0$，$f'(\xi)\leq 1$，

即 $\frac{f(x)}{x}\leq 1, f(x)\geq x$。 ---------------4 分

16．课堂例题。提示：分区间使用拉格朗日中值定理+罗尔中值定理。

17．提示：构造函数法 $F(x)=\frac{f(x)}{1+x^2}$，罗尔定理。

18．证明：设 $F(x)=xf(x)$，------------------------------2 分

则在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，且 $F(0)=F(a)=0$，------------------------3 分

由罗尔定理可得：至少 $\exists\xi\in(0,a)$，使得 $F'(\xi)=0$，

即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$，即 $f(\xi)=-\xi f'(\xi)$-------------------------------5 分

19．证明：

设 $F(x)=f(x)-x$，显然 $F(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续，在 $(\frac{1}{2},1)$ 内可导，且

$F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}>0, F(1)=-1<0.$

由零点定理，存在 $x_1\in[\frac{1}{2},1]$，使得 $F(x_1)=0$. 又由 $F(0)=0$. 在 $[0,x_1]$ 上对 $F(x)$ 应用

罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,x_1)\subset(0,1)$ 使 $F'(\xi)=f'(\xi)-1=0$, 即

$f'(\xi)=1$ 成立。

20．证明：

$\because$ f(x)在[0, 2]上连续，

$\therefore$ 由积分中值定理知，至少 $\exists\xi_0\in(0,2)$(关于开闭区间解释，见 235 页注释),

s.t. (使得) $\int_0^2 f(x)dx=2f(\xi_0)$

又 $\because 2f(0)=\int_0^2 f(x)dx$，　$\therefore f(0)=f(\xi)$

21．证明：

不妨设 $x_1<x_2$，记 $x_0=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$，则　$x_1<x_0<x_2$。

$\Rightarrow x_0-x_1=(1-\lambda)(x_2-x_1), x_2-x_0=\lambda(x_2-x_1)$，由 Lagrange 定理，有

$f(x_0)-f(x_1)=f'(\xi_1)(1-\lambda)(x_2-x_1)$　　(1)

$f(x_2)-f(x_0)=f'(\xi_2)\lambda(x_2-x_1)$　　(2)　$(x_1<\xi_1<x_0<\xi_2<x_2)$

$f''(x)>0\Rightarrow f'(x)\uparrow$，$\Rightarrow$　$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$，$(1)\times\lambda-(2)(1-\lambda)$，得：

$f(x_0)-[\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)]=[f'(\xi_1)-f'(\xi_2)]\lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)\le 0$

$\Rightarrow f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$。

22．证明：

$\because a,b$ 均为正数，$\therefore 0<\dfrac{a}{a+b}<1$，又 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由介值定理，存在 $\tau\in(0,1)$，使得 $f(\tau)=\dfrac{a}{a+b}$，

$f(x)$ 在 $[0,\tau]$ 及 $[\tau,1]$ 上分别用拉格朗日中值定理，有

$f(\tau)-f(0)=(\tau-0)f'(\xi),\xi\in(0,\tau)$；$f(1)-f(\tau)=(1-\tau)f'(\eta),\eta\in(\tau,1)$；

$\tau=\dfrac{f(\tau)}{f'(\xi)}=\dfrac{a}{(a+b)f'(\xi)}$；$1-\tau=\dfrac{1-f(\tau)}{f'(\eta)}=\dfrac{b}{(a+b)f'(\eta)}$；

即 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$。

23．证明：

2. 证明: 因 $\dfrac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)\mathrm{d}x=f(b)$，且 $f(x)$ 在 $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ 上连续，所以由积分中值定理可知: 至少存在一点 $\xi_1\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right)\subset(a,b)$，使得 $f(\xi_1)=f(b)$. ① ……………………………(2 分)

因为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $(\xi_1,b)\subset(a,b)$. 于是 $f(x)$ 在 $[\xi_1,b]$ 上连续，在 (ξ_1,b) 内可导. 结合式①结论可知，可知满足罗尔定理条件. ………………………………… (3 分)

因此，由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,b)\subset(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$. 定理得证. ……… (4 分)

24．证明：

2.证明: 因 $f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}e^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x$，且 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$ 上连续，所以由积分中值定理可知: 至少存在一点 $\xi_1\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)\subset(0,1)$，使得 $f(1)=e^{1-\xi_1^2}f(\xi_1)$.………………………………………………(1 分)

令 $F(x)=e^{-x^2}f(x)$，$x\in[0,1]$. 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(1)=e^{-1}f(1)=e^{-\xi_1^2}f(\xi_1)$，$F(\xi_1)=e^{-\xi_1^2}f(\xi_1)=F(1)$.………………………(3 分)

所以由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即使 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$. 结论得证. ……………………………………………………………………………………… (4 分)

25．可以使用搜题软件，或翻阅 2022 A1 期中考试的那个文件。

知识点 3：积分

考点 1：定积分

1．课本第五章第三节例题。提示：变量代换法+还原法。

2．提示：偶函数概念+负代换。可以使用搜题软件。

3．提示：由 $\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)dx$ 分部积分证得。

4．证明：（求导或分部积分法）

左$=\int_0^u f(t)dt\cdot u\Big|_0^x-\int_0^x uf(u)du=x\cdot\int_0^x f(t)dt-\int_0^x uf(u)du=\int_0^x f(t)(x-t)dt=$右.

5．证明：

设$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$，$\begin{cases}I_1+I_2=\dfrac{\pi}{2}\\ I_1-I_2=0\end{cases}\Rightarrow I_1=I_2=\dfrac{\pi}{4}$

6．证明：

（1）证明：$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$

$$=\int_0^a f(x)dx-\int_0^{-a}f(x)dx$$ -----------------1 分

令$x=-t$，则$dx=-dt$，当$x=0$时，$t=0$；$x=-a$时，$t=a$

$\int_0^{-a}f(x)dx=\int_0^a f(-t)d(-t)=-\int_0^a f(-x)dx$ ----------------2 分

故得 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(-x)dx$

$$=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx$$

（2）由上述结论

$\therefore\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\sin x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right]dx$ -------------------3 分

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1-\sin^2 x}dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 xdx$$

$=2$ ---------------------4 分

7．证明：$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n xdx\overset{x=\pi-t}{=}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^n(\pi-t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$

$$\int_0^{\pi}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$$

8．证明：$\because A(x)=f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt$，$B(x)=\int_x^b f(t)dt-f(x)(b-x)$

$\therefore$令$F(x)=f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt-2007\left[\int_x^b f(t)dt-f(x)(b-x)\right]$ -----------------2 分

$F'(x)=f'(x)(x-a)+2007f'(x)(b-x)>0\ (\because f'(x)>0)$

故$F(x)$在(a,b)内至多有一个零点。 -----------------4 分

又 $F(a)=-2007\left[\int_a^b f(t)dt-f(a)(b-a)\right]=-2007\int_a^b [f(t)-f(a)]dt<0$

$F(b)=f(b)(b-a)-\int_a^b f(t)dt=\int_a^b [f(b)-f(t)]dt>0$

故由零点定理知，$F(x)$ 在 (a,b) 内至少有一个零点。 -----------------6 分

综上所述，可知 $F(x)$ 在 (a,b) 内有唯一的零点 ξ，使得 $F(\xi)=0$，即 $\dfrac{A(\xi)}{B(\xi)}=2007$。

9．证明：令 $F(x)=(\int_0^x f(t)dt)^2-\int_0^x f^3(t)dt,\ 0\le x\le 1,$ -----------------2 分

则 $F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)dt-f^3(x)=f(x)[2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)].$

记 $G(x)=2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)$，$0\le x\le 1.$

$G'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)[1-f'(x)],$ -----------------4 分

因为 $f(0)=0,0<f'(x)\le 1$，所以当 $0\le x\le 1$ 时，$f(x)\ge 0$，$1-f'(x)\ge 0$，$G'(x)\ge 0$，又 $G(0)=0$，故 $G(x)\ge 0,$ 从而 $F'(x)\ge 0$，又 $F(0)=0$，故当 $0\le x\le 1$ 时，$F(x)\ge 0$，也有 $F(1)\ge 0$，

即 $(\int_0^1 f(x)dx)^2\ge\int_0^1 f^3(x)dx.$ -----------------6 分

知识点 4：零点、实根相关

考点 1：零点、实根相关

1．证明：（1）$F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\ge 2$

（2）$F(x)$ 递增，又 $F(a)=\int_b^a \dfrac{dt}{f(t)}<0,F(b)=\int_b^a f(t)dt>0$，由零点定理知结论成立。

2．可以使用搜题软件。

3．提示：令 $f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$，在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right],\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上分别使用零点定理，证明至少有两个零点。

再用罗尔定理反证，不可能有更多的零点。

4．证明：设 $f(x)=\ln x+x-\dfrac{1}{2}$，在 $\left[\dfrac{1}{e},1\right]$ 上连续，且 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}-\dfrac{3}{2}<0$，$f(1)=\dfrac{1}{2}>0$，由零点定理知

至少存在一点$\xi\in\left(\frac{1}{e},1\right)\subset(0,1)$，使得$f(\xi)=0$，即方程$\ln x=\frac{1}{2}-x$至少有一个不超过 1 的正根。

5．证明：（1）先证有唯一实根

a）设$f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x-1$，在$[0,1]$上连续，

又$f(0)=-1<0, f(1)=n-1>0\ (\because n>2)$

所以由零点定理知：$f(x)$在$(0,1)$内至少存在一个零点。

b）因为$\forall x\in(0,1)$以及$n>2$，$f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+2x+1>0$

所以$f(x)$在$[0,1]$上单调增加，$f(x)$在$[0,1]$上至多存在一个零点。

因此，方程$x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x-1=0$在$(0,1)$上必有唯一的零点。

（2）再证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在。记该唯一零点为$x_n$。

（注：x_n是与 n 有关的量，x_3是方程$x^3+x^2+x-1=0$的根，x_4是方程$x^4+x^3+x^2+x-1=0$的根…，

所以$\{x_n\}$为一数列。）

a)由上述知，$\forall n>2, 0<x_n<1$，即数列有界。

b)$\because x_{n-1}^{n-1}+x_{n-1}^{n-2}+\cdots+x_{n-1}^2+x_{n-1}-1=0\Rightarrow x_{n-1}^n+x_{n-1}^{n-1}+\cdots+x_{n-1}^2+x_{n-1}-1>0$

而$x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n^2+x_n-1=0$，所以$x_n<x_{n-1}$，即数列单调减少。

因此$\{x_n\}$极限存在。

（3）求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

$\because x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n^2+x_n-1=0$

$\therefore x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n^2+x_n+1=2\Rightarrow\left(x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n^2+x_n+1\right)(x_n-1)=2\,(x_n-1)$

即$\left(x_n^{n+1}-1\right)=2(x_n-1)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n^{n+1}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}2\,(x_n-1)$

$\because\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{n+1}=0$

$\therefore 0-1=2\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n-1\right)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$。

6．可以使用搜题软件。