《离散数学》总复习

期末考试题型

- 解答题（60分）：需有解题过程，否则扣分（6个）
- 证明题（40分）：需有证明过程，否则扣分（4个）

期末复习方法

- 1) 仔细复习每道课堂测试题目，力求**每种题型**都会做；
- 2) 以**总复习PPT**为提纲，逐个复习知识点；
- 3) 以**课堂PPT**为主，书本为辅复习具体知识；

大纲

- 命题逻辑
- 谓词逻辑
- 集合与证明方法
- 关系与函数
- 图与特殊的图

命题逻辑

- 等值式与等值演算。
- 基本的等值式，其中含：双重否定律、幂等律、交换律、结合律、分配律、德·摩根律、吸收律、零律、同一律、排中律、矛盾律、蕴含等值式、等价等值式、假言易位、等价否定等值式、归谬论。
- 与主析取范式及主合取范式有关的概念：简单合取式、简单析取式、析取范式、合取范式、极小项、极大项、主析取范式、主合取范式。
- 推理的形式结构与证明

命题逻辑学习要求(1)

- 深刻理解等值式的概念。
- 牢记**基本等值式**，这是等值演算的基础；能熟练地应用它们进行等值演算。
- 了解简单析取式、简单合取式、**析取范式、合取范式**的概念。
- 深刻理解极小项及极大项的定义及它们的名称，及名称下角标与成真赋值的关系。
- 熟练掌握求公式的主析取范式的方法。
- 熟练掌握由公式的**主析取范式**求公式的**主合取范式**的方法。
- 会用公式的主析取范式（主合取范式）求公式的成真赋值、成假赋值。

命题逻辑学习要求(2)

- 理解并记住推理的形式结构的三种等价形式，即
  ①$\{A_1,A_2,\ldots,A_k\} \vdash B$
  ②$A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_k \to B$
  ③前提：$A_1,A_2,\ldots,A_k$
  　结论：B

在判断推理是否正确时，用②；在推理系统中构造证明时用③。

- 熟练掌握判断推理是否正确的三种方法（真值表法，等值演算法，主析取范式法）。
- 牢记推理系统中的各条推理规则。
- 对于给定的正确推理，要求在推理系统中给出严谨的证明序列。
- 会用附加前提证明法、归谬法与归结证明法。

命题逻辑典型习题

- 用等值演算法证明重言式和矛盾式
- 用等值演算法证明等值式
- 求公式的主析取范式和主合取范式
- 用主范式判断公式类型及两个公式是否等值
- 求解实际问题

基本等值式（一）

双重否定律 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

幂等律 $A \vee A \Leftrightarrow A$, $A \wedge A \Leftrightarrow A$

交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$, $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

德摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$, $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

基本等值式（二）

零律	$A\vee 1\Leftrightarrow 1,\quad A\wedge 0\Leftrightarrow 0$
同一律	$A\vee 0\Leftrightarrow A,\quad A\wedge 1\Leftrightarrow A$
排中律	$A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$
矛盾律	$A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$
蕴涵等值式	$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$
等价等值式	$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$
假言易位	$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$
等价否定等值式	$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow\neg B$
归谬论	$(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B)\Leftrightarrow\neg A$

等值演算的应用：证明两个公式等值

例：证明：$(p \to q) \to r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$

$(p \to q) \to r \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \to r$ （蕴含等值式、置换规则）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r$ （蕴含等值式、置换规则）

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r$ （德摩根律、置换规则）

$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$ （分配律、置换规则）

等值演算的应用：判断公式的类型

- 判断公式类型：$(p\rightarrow q)\wedge p\rightarrow q$

$(p\rightarrow q)\wedge p\rightarrow q$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\wedge p\rightarrow q$	（蕴涵等值式）
$\Leftrightarrow\neg((\neg p\vee q)\wedge p)\vee q$	（蕴涵等值式）
$\Leftrightarrow(\neg(\neg p\vee q)\vee\neg p)\vee q$	（德摩根律）
$\Leftrightarrow((p\wedge\neg q)\vee\neg p)\vee q$	（德摩根律）
$\Leftrightarrow((p\vee\neg p)\wedge(\neg q\vee\neg p))\vee q$	（分配律）
$\Leftrightarrow(1\wedge(\neg q\vee\neg p))\vee q$	（排中律）
$\Leftrightarrow(\neg q\vee q)\vee\neg p$	（同一律）
$\Leftrightarrow 1\vee\neg p$	（排中律）
$\Leftrightarrow 1$	（零律）

等值演算的应用：化简命题

例：在某次研讨会的中间休息时间，3名与会者根据王教授的口音对他是哪个省市的人进行了判断：

甲说王教授不是苏州人，是上海人。

乙说王教授不是上海人，是苏州人。

丙说王教授既不是上海人，也不是杭州人。

听完以上3人的判断后，王教授笑着说，他们3人中有一人说的全对，有一人说对了一半，另一人说的全不对。试用逻辑演算法分析王教授到底是哪里人？

解答（1/3）

设命题 p：王教授是苏州人。

q：王教授是上海人。

r：王教授是杭州人。

p,q,r中必有一个真命题，两个假命题，

要通过逻辑演算将真命题找出来。

设　甲的判断为$A_1=\neg p\wedge q$

乙的判断为$A_2=p\wedge\neg q$

丙的判断为$A_3=\neg q\wedge\neg r$

解答（2/3）

甲的判断全对　$B_1=A_1=\neg p\wedge q$

甲的判断对一半　$B_2=(\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$

甲的判断全错　$B_3=p\wedge\neg q$

乙的判断全对　$C_1=A_2=p\wedge\neg q$

乙的判断对一半　$C_2=(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$

乙的判断全错　$C_3=\neg p\wedge q$

丙的判断全对　$D_1=A_3=\neg q\wedge\neg r$

丙的判断对一半　$D_2=(q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r)$

丙的判断全错　$D_3=q\wedge r$

解答（3/3）

由王教授所说

$$E = (B_1 \wedge C_2 \wedge D_3) \vee (B_1 \wedge C_3 \wedge D_2) \vee (B_2 \wedge C_1 \wedge D_3)$$

$$\vee (B_2 \wedge C_3 \wedge D_1) \vee (B_2 \vee C_1 \wedge D_2) \vee (B_3 \wedge C_2 \wedge D_1)$$

为真命题。

经过等值演算后,可得

$$E \Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

由题设，王教授不能既是上海人，又是杭州人，因而p,r中必有一个假命题，即 $p \wedge \neg q \wedge r \Leftrightarrow 0$，于是

$$E \Leftrightarrow \neg p \wedge q \wedge \neg r$$

为真命题，因而必有p,r为假命题，q为真命题，即王教授是上海人。甲说的全对，丙说对了一半，而乙全说错了。

析取范式与合取范式

析取范式:由有限个简单合取式组成的析取式

$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_r$, 其中$A_1, A_2, \ldots, A_r$是简单合取式

合取范式:由有限个简单析取式组成的合取式

$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_r$, 其中$A_1, A_2, \ldots, A_r$是简单析取式

范式:析取范式与合取范式的统称

定理

(1) 一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每一个简单合取式都是矛盾式

(2) 一个合取范式是重言式当且仅当它的每一个简单析取式都是重言式

范式存在定理

定理: 任何命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式.

求公式A的范式的步骤:

(1) 消去A中的$\rightarrow$, $\leftrightarrow$

$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$

$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)$

(2) 否定联结词$\neg$的内移或消去

$\neg\neg A\Leftrightarrow A$

$\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$

$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$

(3) 使用分配律

$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$ 求合取范式

$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ 求析取范式

关于范式的说明

- 在范式中不会出现联结词→与↔，否则可使用等值式消除
  $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
  $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
- 在范式中不会出现形如$\neg\neg A$, $\neg(A \wedge B)$, $\neg(A \vee B)$的公式：
  $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
  $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
  $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- 在析取范式中不会出现形如$A \wedge (B \vee C)$的公式：
  $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- 在合取范式中不出现形$A \vee (B \wedge C)$的公式：
  $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- 命题公式的析取范式与合取范式不唯一

例题

求下面公式的析取范式与合取范式：$(p\to q)\leftrightarrow r$

求合取范式

$(p\to q)\leftrightarrow r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow r$ （消去→）

$\Leftrightarrow ((\neg p\vee q)\to r)\wedge(r\to(\neg p\vee q))$ （消去↔）

$\Leftrightarrow (\neg(\neg p\vee q)\vee r)\wedge(\neg r\vee\neg p\vee q)$ （消去→）

$\Leftrightarrow ((p\wedge\neg q)\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$ （否定号内移）

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$ （∨对∧分配律）

求析取范式

$(p\to q)\leftrightarrow r$

$\Leftrightarrow ((p\wedge\neg q)\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg p)\vee(p\wedge\neg q\wedge q)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg p)\vee(r\wedge q)\vee(r\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)$

主析取范式与主合取范式

极小项(极大项)

在含有n个命题变项的简单合取式(简单析取式)中,若每个命题变项均以文字的形式出现且仅出现一次，而且第i($1\le i\le n$)个文字(按下标或字母顺序排列)出现在左起第i位上。

主析取范式:由极小项构成的析取范式

主合取范式:由极大项构成的合取范式

存在定理：任何命题公式都存在着与之等值的主析取范式和主合取范式,并且是惟一的.

求主析取范式的步骤

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的析取范式$A'=B_1\lor B_2\lor \ldots \lor B_s$, 其中$B_j$是简单合取式 $j=1,2,\ldots,s$

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j\land(p_i\lor\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\land p_i)\lor(B_j\land\neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单合取式都是长度为n的极小项为止

(3) 消去重复出现的极小项, 即用m_i代替$m_i\lor m_i$

(4) 将极小项按下标从小到大排列

求主合取范式的步骤

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的合取范式$A'=B_1\wedge B_2\wedge \ldots \wedge B_s$, 其中$B_j$是简单析取式 $j=1,2, \ldots ,s$

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j\vee(p_i\wedge\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\vee p_i)\wedge(B_j\vee\neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单析取式都是长度为n的极大项为止

(3) 消去重复出现的极大项, 即用M_i代替$M_i\wedge M_i$

(4) 将极大项按下标从小到大排列

快速求法

设公式含有n个命题变项, 则

长度为k的简单合取式可展开成2^{n-k}个极小项的析取

例如 公式含p,q,r

$$q \Leftrightarrow (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r)$$

$$\Leftrightarrow m_2 \vee m_3 \vee m_6 \vee m_7$$

长度为k的简单析取式可展开成2^{n-k}个极大项的合取

例如 $p \vee \neg r \Leftrightarrow (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)$

$$\Leftrightarrow M_1 \wedge M_3$$

例：求 $(p\to q)\leftrightarrow r$ 主析取（合取）范式

$(p\to q)\leftrightarrow r \Leftrightarrow$

$(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)$

$p\wedge\neg q\wedge\neg r \Leftrightarrow m_4$

$\neg p\wedge r \Leftrightarrow \neg p\wedge(\neg q\vee q)\wedge r$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3$

$q\wedge r \quad \Leftrightarrow (\neg p\vee p)\wedge q\wedge r$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_3\vee m_7$

$(p\to q)\leftrightarrow r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_7$

$(p\to q)\leftrightarrow r \Leftrightarrow$

$(p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$

$\neg p\vee q\vee\neg r \Leftrightarrow M_5$

$p\vee r \quad \Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2$

$\neg q\vee r \Leftrightarrow (p\wedge\neg p)\vee\neg q\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_2\wedge M_6$

$(p\to q)\leftrightarrow r \Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_5\wedge M_6$

主析取范式的用途

- 求公式的成真赋值与成假赋值

➢ 若公式A中含n个命题变项，A的主析取范式含s(0≤s≤2n)个极小项，则A有s个成真赋值，它们是所含极小项角标的二进制表示，其余2n-s个赋值都是成假赋值。

- 判断公式的类型

➢ A为重言式当且仅当A的主析取范式含全部2^n个极小项。

➢ A为矛盾式当且仅当A的主析取范式不含任何极小项。此时，记A的主析取范式为0。

➢ A为可满足式当且仅当A的主析取范式至少含一个极小项。

- 判断两个命题公式是否等值

➢ 设公式A,B共含有n个命题变项，按n个命题变项求出A与B的主析取范式A‘与B’。若A‘＝B’,则A⇔B；否则，A与B不等值。

- 应用主析取范式分析和解决实际问题

主析取范式->主合取范式

由主析取范式求主合取范式

设 $A \Leftrightarrow m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \cdots \vee m_{i_s}$

没有出现的极小项是 $m_{j_1}, m_{j_2}, \cdots, m_{j_t}$，其中$t=2^n-s$,

于是

$$\neg A \Leftrightarrow m_{j_1} \vee m_{j_2} \vee \cdots \vee m_{j_t}$$

$$A \Leftrightarrow \neg(m_{j_1} \vee m_{j_2} \vee \cdots \vee m_{j_t})$$

$$\Leftrightarrow \neg m_{j_1} \wedge \neg m_{j_2} \wedge \cdots \wedge \neg m_{j_t}$$

$$\Leftrightarrow M_{j_1} \wedge M_{j_2} \wedge \cdots \wedge M_{j_t}$$

联结词完备集

- 设S是一个联结词集合, 如果任何$n(n\geq 1)$ 元真值函数都可以由仅含S中的联结词构成的公式表示, 则称S是联结词完备集

定理 下述联结词集合都是完备集:

(1) $S_1=\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

(2) $S_2=\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$

(3) $S_3=\{\neg, \wedge, \vee\}$

(4) $S_4=\{\neg, \wedge\}$

(5) $S_5=\{\neg, \vee\}$

(6) $S_6=\{\neg, \rightarrow\}$

$$A\leftrightarrow B \Leftrightarrow (A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$$

$$A\rightarrow B \Leftrightarrow \neg A\vee B$$

$$A\vee B \Leftrightarrow \neg\neg(A\vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A\wedge\neg B)$$

$$A\wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A\vee\neg B)$$

$$A\vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A)\vee B \Leftrightarrow \neg A\rightarrow B$$

推理的形式结构

形式(1) $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$

形式(2) 前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论: B

推理正确记作 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$

判断推理是否正确的方法:

- 真值表法
- 等值演算法
- 主析取范式法
- 构造证明法

推理定律——重言蕴涵式

$A \Rightarrow (A \lor B)$	附加律
$(A \land B) \Rightarrow A$	化简律
$(A \to B) \land A \Rightarrow B$	**假言推理**
$(A \to B) \land \neg B \Rightarrow \neg A$	**拒取式**
$(A \lor B) \land \neg B \Rightarrow A$	**析取三段论**
$(A \to B) \land (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$	假言三段论
$(A \leftrightarrow B) \land (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$	等价三段论
$(A \to B) \land (C \to D) \land (A \lor C) \Rightarrow (B \lor D)$	构造性二难
$(A \to B) \land (\neg A \to B) \Rightarrow B$	构造性二难(特殊形式)
$(A \to B) \land (C \to D) \land (\neg B \lor \neg D) \Rightarrow (\neg A \lor \neg C)$	破坏性二难

四种证明方法

1) 直接证明法

2) 附加前提证明法

欲证明	等价地证明
前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k$	前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k, C$
结论: $C \to B$	结论: B

*3)*归谬法(反证法)

欲证明　前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$　结论：B

将¬B加入前提, 若推出矛盾, 则得证推理正确.

4)归结证明法

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} \\ \neg &\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{C} \\ \therefore\ &\boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C} \end{aligned}$$

命题逻辑推理的难点

1. 弄清楚蕴涵式P→Q的逻辑关系及其真值，这里Q是P的必要条件。无论蕴涵关系如何表述，都要仔细地区分出蕴涵式的前件和后件。
2. 推理过程中推理规则、基本等值式和逻辑蕴涵式的引用要适当，逻辑思维要清晰。
3. 弄清楚几种推理方法的区别与联系，对于命题逻辑推理而言，任何一个问题的推理，都可以采取四种推理方法中的任何一种来证明，针对不同的问题选用不同的推理方法。一般而言，对于结论是蕴涵式或析取式的，大多可以采取带附加前提的直接证明方法。

例题

构造下面推理的证明：如果小张守第一垒并且小李向B队投球，则A队将取胜；或者A队未取胜，或者A队获得联赛第一名；A队没有获得联赛的第一名；小张守第一垒。因此，小李没有向B队投球。

构造证明：

（1）将简单命题符号化：

设 p:小张守第一垒。 q:小李向B队投球。

r:A队取胜。 s:A队获得联赛第一名。

（2）形式结构：

前提：$(p\wedge q)\rightarrow r, \neg r\vee s, \neg s, p$

结论：$\neg q$

例题（续）

3）证明：用归谬法

① q	结论的否定引入
② $\neg r \vee s$	前提引入
③ $\neg s$	前提引入
④ $\neg r$	②③析取三段论
⑤ $(p \wedge q) \rightarrow r$	前提引人
⑥ $\neg (p \wedge q)$	④⑤拒取式
⑦ $\neg p \vee \neg q$	⑥置换
⑧ p	前提引入
⑨ $\neg q$	⑦⑧析取三段论
⑩ $q \wedge \neg q$	①⑨合取

由于最后一步为矛盾式，所以推理正确。

一阶逻辑

- 个体词、谓词、量词
- 一阶逻辑中命题符号化
- 一阶逻辑公式
  ①原子公式 ②合式公式（或公式）③闭式
- 解释
- 一阶逻辑公式的分类
  ①逻辑有效式（或永真式）②矛盾式（或永假式）③可满足式
- 等值式与基本的等值式
  ①在有限个体域中消去量词等值式 ②量词否定等值式
  ③量词辖域收缩与扩张等值式 ④量词分配等值式
- 基本规则：置换规则、换名规则、代替规则
- 前束范式
- 推理理论：推理的形式结构、推理正确、构造证明
- 新的推理规则：UI、UG、EI、EG

一阶逻辑的学习要求（一）

- 要求准确地将给出的命题符号化：
  ①当给定个体域时，在给定个体域内将命题符号化。
  ②当没给定个体域时，应在全总个体域内符号化。
  ③在符号化时，当引入特性时，注意全称量词与蕴含联结词的搭配，存在量词与合取联结词的搭配。
- 深刻理解逻辑有效式、矛盾式、可满足式的概念。
- 记住闭式的性质：在任何解释下均为命题。
- 对给定的解释，会判别公式的真值或不能确定真值。

一阶逻辑的学习要求（二）

- 深刻理解重要的等值式，并能熟练地使用它们。
- 熟练地使用**置换规则、换名规则和代替规则**。
- 准确地求出给定公式的前束范式（形式可以不唯一）。
- 正确地使用**UI、UG、EI、EG规则**，特别地要注意它们之间的关系。
  - 一定对前束范式才能使用UI、UG、EI、EG规则，对不是前束范式的公式要使用它们，一定先求出公式的前束范式。
  - 记住UI、UG、EI、EG规则的各自使用条件。
  - 在同一推理的证明中，如果既要使用UI规则，又要使用EI规则，一定要先使用EI规则，后使用UI规则，而且UI规则使用的个体常项一定是EI规则中使用过的。
- 对于给定的推理，正确地构造出它的证明。

一阶逻辑命题符号化的三个基本要素

- **个体词**：指所研究对象中可以独立存在的具体或抽象的客体。
  - ➢ 个体常项、个体变项、个体域（或称论域）、全总个体域
- **谓词**：用来刻画个体词性质及个体词之间相互关系的词。
  - ➢ 谓词中个体词的顺序是十分重要的，不能随意变更。如命题F(b, c)为“真”，但命题F(c, b)为“假”；
  - ➢ 一元谓词用以描述某一个个体的某种特性，而n元谓词则用以描述n个个体之间的关系。
  - ➢ 0元谓词(不含个体词的)实际上就是一般的命题；
  - ➢ 具体命题的谓词表示形式和n元命题函数(n元谓词)是不同的，前者是有真值的，而后者不是命题，它的真值是不确定的。如上例中S(a)是有真值的，但S(x)却没有真值；
  - ➢ 一个n元谓词不是一个命题，但将n元谓词中的个体变元都用个体域中具体的个体取代后，就成为一个命题。而且，个体变元在不同的个体域中取不同的值对是否成为命题及命题的真值有很大的影响。
- **量词**：表示个体常项或个体变项之间数量关系的词。
  - ➢ 全称量词：符号化为“∀”
  - ➢ 存在量词：符号化为“∃”

谓词逻辑符号化的**两条规则**

统一个体域为全总个体域，而对每一个句子中个体变量的变化范围用一元特性谓词刻划之。这种特性谓词在加入到命题函数中时必定遵循如下原则：

（1）对于**全称量词**($\forall x$)，刻划其对应个体域的特性谓词作为**蕴涵式之前件**加入。

（2）对于**存在量词**($\exists x$)，刻划其对应个体域的特性谓词作为**合取式之合取项**加入。

谓词翻译难点

1. 一元谓词用以描述某一个个体的某种特性，而n元谓词则用以描述的n个个体之间关系；
2. 如有多个量词，则读的顺序按从左到右的顺序；另外，量词对变元的约束，往往与量词的次序有关，不同的量词次序，可以产生不同的真值，此时对多个量词同时出现时，不能随意颠倒它们的顺序，颠倒后会改变原有的含义；
3. 根据命题的实际意义，选用全称量词或存在量词。全称量词加入时，其刻划个体域的特性谓词将以蕴涵的前件加入，存在量词加入时，其刻划个体域的特性谓词将以合取项加入；
4. 有些命题在进行符号化时，由于语言叙述不同，可能翻译不同，但它们表示的意思是相同的，即句子符号化形式可不止一种。

一阶逻辑命题符号化时需要注意的事项

- 分析命题中表示性质和关系的谓词，分别符号为一元和n（ $n\geq 2$）元谓词。
- 根据命题的实际意义选用全称量词或存在量词。
- 一般说来，多个量词出现时，它们的顺序不能随意调换。
  - 例如，考虑个体域为实数集，H(x，y)表示x+y=10，
  - 则命题“对于任意的x，都存在y，使得x+y=10”的符号化形式为$\forall x\exists yH(x,y)$，为真命题。
  - 如果改变两个量词的顺序，得$\exists y\forall xH(x,y)$，为假命题。
- 有些命题的符号化形式可能不止一种。
  - $\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$
  - $\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$

例题

1）没有不犯错误的人。

命题的意思是：　　　① 存在不犯错误的人是不可能的。② 只要是人，必然犯错误。

设 M(x): x是人，F(x):x犯错误

命题符号化为 ① $\neg\exists x(M(x)\wedge\neg F(x))$

② $\forall x(M(x)\rightarrow F(x))$

2）不管黑猫白猫，抓住老鼠就是好猫。

需要考虑问题：①只是限制黑猫白猫，还是包含其它颜色的猫？

②是指至少抓住一只就可以，还是抓住所有的？

因此在描述命题时，总是将这些模糊概念做某种确切理解。

设 C(x)：x是猫，　W(x)：x是白的，　B(x)：x是黑的

G(x)：x是好的，M(x)：x是老鼠，　　K(x)：x抓住y

命题符号化为

$$\forall x\forall y(C(x)\wedge M(y)\wedge(B(x)\vee W(x))\wedge K(x,y))\rightarrow G(x))$$

一阶逻辑公式及解释

- 同在命题逻辑中一样，为在一阶逻辑中进行演算和推理，必须给出一阶逻辑中公式的抽象定义，以及它们的分类及解释。
- 一阶语言是用于一阶逻辑的形式语言，而一阶逻辑就是建立在一阶语言基础上的逻辑体系，一阶语言本身不具备任何意义，但可以根据需要被解释成具有某种含义。
- 一阶语言字母表的定义、项的定义、合式公式的定义
- 量词的辖域：在公式$\forall xA$和$\exists xA$中，称x为指导变元，A为相应量词的辖域. 在$\forall x$和$\exists x$的辖域中，x的所有出现称为约束出现，A中不是约束出现的其他变项称为自由出现

例题

证明：$(\forall x)P(x)\rightarrow Q(x)=(\exists y)(P(y)\rightarrow Q(x))$

证明 $(\forall x)P(x)\rightarrow Q(x)$

$= \neg(\forall x)P(x)\vee Q(x)$

$= (\exists x)\neg P(x)\vee Q(x)$

$= (\exists y)\neg P(y)\vee Q(x)$

$= (\exists y)(\neg P(y)\vee Q(x))$

$= (\exists y)(P(y)\rightarrow Q(x))$

解释

设一阶语言$\mathscr{L}$的个体常项集$\{a_i|\ i\geq 1\}$, 函数符号集$\{f_i|\ i\geq 1\}$, 谓词符号集$\{F_i|\ i\geq 1\}$, $\mathscr{L}$的解释I由下面4部分组成:

(1) 非空个体域D_I

(2) 对每一个个体常项$a_i \in D_I$, 称作a_i在I中的解释

(3) 对每一个函数符号f_i, 设其为m元的, 是D_I上的m元函数, 称作f_i在I中的解释

(4) 对每一个谓词符号F_i, 设其为n元的, 是一个n元谓词, 称作F_i在I中的解释

一阶公式的分类

- 设A为一个公式，若A在任何解释下均为真，则称A为永真式(或称逻辑有效式)。
- 设A为一个公式，若A在任何解释下均为假，则称A为矛盾式(或永假式)。
- 设A为一个公式，若至少存在一个解释使A为真，则称A为可满足式。

说明：

- 永真式一定是可满足式，但可满足式不一定是永真式。
- 在一阶逻辑中，到目前为止，还没有找到一种可行的算法，用来判断任意一个公式是否是可满足的，这与命题逻辑的情况是完全不同的。
- 但对某些特殊的公式还是可以判断的。

例题

判断$((\forall x)P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow((\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x))$是否为一个有效公式。

解 设个体域D={2, 4, 6, 8}，

P(x)： x能被2整除； Q(x)： x能被4整除。

可知$(\forall x)P(x)$ 真值为真，$(\forall x)Q(x)$ 真值为假。

1）自由变元x=4

原式真值=（$1\rightarrow Q(4))\rightarrow$（$1\rightarrow 0$）=0

故 $((\forall x)P(x)\rightarrow Q(4))\rightarrow((\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x))$的真值为假。所以原式不是有效公式。

2）自由变元x=6

原式真值 =（$1\rightarrow Q(6)$）$\rightarrow$（$1\rightarrow 0$）= 1

故$((\forall x)P(x)\rightarrow Q(6))\rightarrow((\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x))$的真值为真。

综上所述，个体域中有些个体使原式的真值为真，有些个体使原式的真值为假，因此，该公式只能是一个可满足公式。

一阶逻辑中的一些基本而重要等值式

- 代换实例
- 消去量词等值式

$\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\ldots\wedge A(a_n)$ $\exists xA(x) \Leftrightarrow A(a_1)\vee A(a_2)\vee\ldots\vee A(a_n)$

- 量词否定等值式

$\neg\forall xA(x) \Leftrightarrow \exists x\neg A(x)$ $\neg\exists xA(x) \Leftrightarrow \forall x\neg A(x)$

- 量词辖域收缩与扩张等值式

（1） $\forall x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\vee B$ $\forall x(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge B$

$\forall x(A(x)\rightarrow B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\rightarrow B$ $\forall x(B\rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B\rightarrow\forall xA(x)$

（2） $\exists x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee B$ $\exists x(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\wedge B$

$\exists x(A(x)\rightarrow B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\rightarrow B$ $\exists x(B\rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B\rightarrow\exists xA(x)$

- 量词分配等值式

$\forall x(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$ $\exists x(A(x)\vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

一阶逻辑等值演算的原则

- 置换规则：设Φ(A)是含公式A的公式，Φ(B)是用公式B取代Φ(A)中所有的A之后的公式，若A⇔B，则Φ(A)⇔Φ(B)。
- 换名规则：设A为一公式，将A中某量词辖域中某约束变项的所有出现及相应的指导变元改成该量词辖域中未曾出现过的某个体变项符号，公式的其余部分不变，设所得公式为A'，则A'⇔A。
- 代替（入）规则：设A为一公式，将A中某个自由出现的个体变项的所有出现用A中未曾出现过的个体变项符号代替，A中其余部分不变，设所得公式为A'，则A'⇔A。

换名规则和代替（入）规则的关系

换名规则和代替规则之间的共同点都是不能改变原有的约束关系，而不同点是：

（1）施行的对象不同：换名规则是对约束变元施行，代替规则是对自由变元施行；

（2）施行的范围不同：换名规则可以只对公式中的一个量词及其辖域内施行，即只对公式的一个子公式施行；而代替规则必须对整个公式同一个自由变元的所有自由出现同时施行，即必须对整个公式施行；

（3）施行后的结果不同：换名后，公式含义不变，因为约束变元只改名为另一个个体变元，约束关系不改变，约束变元不能改名为个体常量；代替后，不仅可用另一个个体变元进行代入，并且也可用个体常量去代入，从而使公式由具有普遍意义变为仅对该个体常量有意义，即公式的含义改变了。

例题

设个体域为D＝{a,b,c}，将下面各公式的量词消去：

(1) $\forall x(F(x)\to G(x))$ (2) $\forall x(F(x)\vee \exists yG(y))$ (3) $\exists x\forall yF(x,y)$

(1)$\forall x(F(x)\to G(x))$

$\Leftrightarrow(F(a)\to G(a)) \wedge (F(b)\to G(b)) \wedge (F(c)\to G(c))$

(2)$\forall x(F(x)\vee\exists yG(y))$

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\vee\exists yG(y)$ $\Leftrightarrow(F(a)\wedge F(b)\wedge F(c))\vee(G(a)\vee G(b)\vee G(c))$

(3) $\exists x\forall yF(x,y)$

$\Leftrightarrow \exists x(F(x,a)\wedge F(x,b)\wedge F(x,c))$

$\Leftrightarrow(F(a,a)\wedge F(a,b)\wedge F(a,c))\vee(F(b,a)\wedge F(b,b)\wedge F(b,c))$
$\vee(F(c,a)\wedge F(c,b)\wedge F(c,c))$

前束范式存在定理

- **定理：**一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式
- **步骤：**

(1)利用量词转化公式，把否定深入到指导变元的后面。

$$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x) \qquad \neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

(2)利用$\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$和$\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$把量词移到全式的最前面，这样便得到前束范式。

- **说明：**
- 求前束范式的过程，就是制造量词辖域可以扩大的条件，进行量词辖域扩大。
- 任何公式的前束范式都是存在的，但一般说来，并不唯一。
- 利用一阶逻辑等值式以及三条变换规则（置换规则、换名规则、代替规则）就可以求出与公式等值的前束范式，或所谓公式的前束范式。

例题

求公式的前束范式：$\forall xF(x) \wedge \neg \exists xG(x)$

$\forall xF(x) \wedge \neg \exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \neg \exists yG(y)$ (换名规则)

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall y \neg G(y)$ (量词否定等值式第二式)

$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \wedge \forall y \neg G(y))$ (量词辖域等值式第二式)

$\Leftrightarrow \forall x \forall y(F(x) \wedge \neg G(y))$ (量词辖域等值式第二式)

（$\Leftrightarrow \forall y \forall x(F(x) \wedge \neg G(y))$）

或者 $\forall xF(x) \wedge \neg \exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall x \neg G(x)$ (量词否定等值式第二式)

$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \wedge \neg G(x))$ (量词否定等值式第一式)

一阶逻辑的推理理论

- 在一阶逻辑中，从前提$A_1,A_2,\ldots A_k$出发推结论B的推理形式结构，依然采用如下的蕴涵式形式

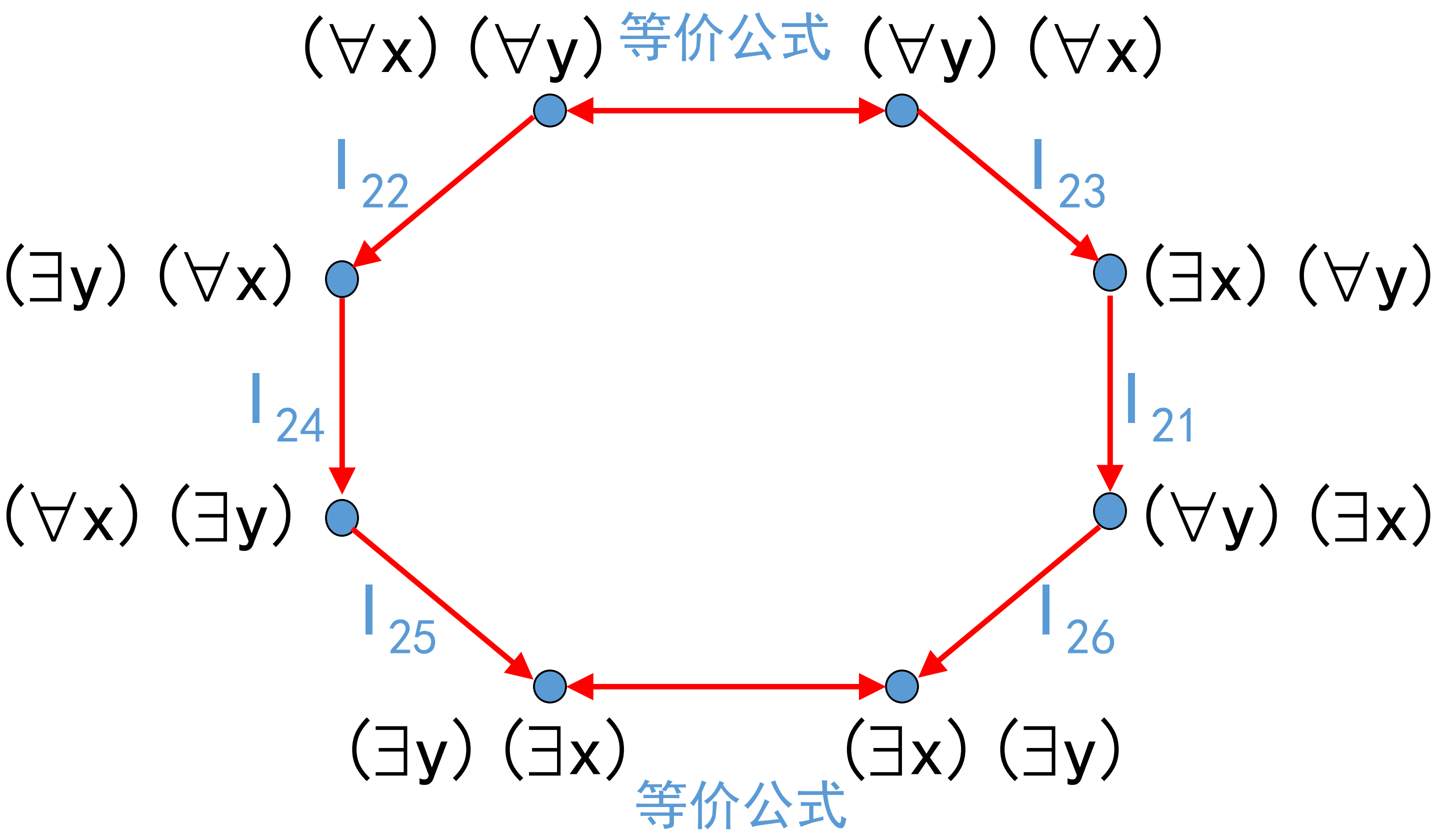
  $$A_1,A_2,\ldots,A_k \to B$$

  若该式为永真式，则称推理正确，否则称推理不正确。
- 于是，在一阶逻辑中判断推理是否正确也归结为判断上式是否为永真式了。
- 在一阶逻辑中称永真式的蕴涵式为推理定律，若一个推理的形式结构正是某条推理定律，则这个推理显然是正确的。
- 在一阶逻辑的推理中，某些前提与结论可能是受量词限制，为了使用命题逻辑中的等值式和推理定律，必须在推理过程中有消去和添加量词的规则，以便使谓词演算公式的推理过程可类似于命题演算中推理理论那样进行。

推理定律的来源

- 命题逻辑推理定律的代换实例
- 由基本等值式生成的推理定律
- 量词分配等值式
- 推理规则—量词消去和引入规则

量词关系图



推理规则

为了构造推理系统，还要给出4条重要的推理规则,即消去量词和引入量词的规则：

1. 全称量词消去规则(简记为UI规则)
2. 全称量词引入规则(简记为UG规则)
3. 存在量词引入规则(简称EG规则)
4. 存在量词消去规则(简记为EI规则)

全称量词消去规则(简记为UI规则)

$$\frac{\forall x A(x)}{\therefore A(y)} \qquad \frac{\forall x A(x)}{\therefore A(c)}$$

含义：如果个体域的所有元素都具有性质A，则个体域中的任一元素具有性质A。

两式成立的条件：

(1)在第一式中，取代x的y应为任意的不在A(x)中约束出现的个体变项。

(2)在第二式中，c为任意个体常项。

(3)用y或c去取代A(x)中自由出现的x时，一定要在x自由出现的一切地方进行取代。

全称量词引入规则(简记为UG规则)

$$\frac{A(y)}{\therefore \forall x A(x)}$$

该式成立的条件是：

(1)无论A(y)中自由出现的个体变项y取何值，A(y)应该均为真。

(2)取代自由出现的y的x也不能在A(y)中约束出现。

举例：

取个体域为实数集，F(x, y)为x>y，A(y)=∃x F(x, y)。

显然A(y)满足条件(1)。

对A(y)应用UG规则时，若取已约束出现的x取代y，会得到∀xA(x)=∀x ∃x(x>x)，这是假命题。产生这种错误的原因是违背了条件(2)。若取z取代y，得∀z A(z)=∀z ∃x (x>z)为真命题。

存在量词引入规则(简称EG规则)

$$\frac{A(c)}{\therefore \exists x A(x)}$$

该式成立的条件是：

(1)c是特定的个体常项。

(2)取代c的x不能在A(c)中出现过。

举例：

取个体域为实数集，F(x,y)为x>y，取A(5)=∃xF(x,5)。

显然A(5)是真命题。

在应用EG规则时，若用A(5)中已出现的x取代5，得∃x∃xF(x,x)=∃x(x>x)，这是假命题。产生这种错误的原因是违背了条件(2)。若用A(5)中未出现过的个体变项y取代5，得∃yA(y)=∃y∃xF(x>y)，这为真命题。

存在量词消去规则(简记为EI规则)

该式成立的条件是：

$$\frac{\exists x A(x)}{A(c)}$$

(1)c是使A为真的特定的个体常项。

(2)c不在A(x)中出现。

(3)若A(x)中除自由出现的x外，还有其它自由出现的个体变项，此规则不能使用。

举例：

取个体域为自然数集合，F(x)为x是奇数，G(x)为x是偶数。∃xF(x)与∃xG(x)都是真命题，则对于某些c和d，可以断定P(c)∧Q(d)必定为真，但不能断定P(c)∧Q(c)是真。 对∃xF(x)使用EI规则时，取代x的c一定是特定的个体常项1,3,5等奇数。对∃xG(x)使用EI规则时，取代x的c一定是特定的个体常项2,4,6等偶数。

谓词演算的综合推理方法

1. 推导过程中可以引用命题演算中的前提 P和结论T 。
2. 如果结论是以蕴涵形式(或析取形式)给出，我们还可以附加前提。
3. 若需消去量词，可以引用规则UI和规则EI。
4. 当所要求的结论可能被定量时，此时可引用规则UG和规则EG将其量词加入。
5. 证明时可采用如命题演算中的直接证明方法和间接证明方法。
6. 在推导过程中，对消去量词的公式或公式中不含量词的子公式，完全可以引用命题演算中的基本等价公式和基本蕴涵公式。
7. 在推导过程中，对含有量词的公式可以引用谓词中的基本等价公式和基本蕴涵公式。

谓词逻辑推理的难点

1. 在推导过程中，如既要使用规则UI又要使用规则EI消去公式中的量词，而且选用的个体是同一个符号，则必须先使用规则EI，再使用规则UI。然后再使用命题演算中的推理规则，最后使用规则UG或规则EG引入量词，得到所要的结论。
2. 如一个变量是用规则EI消去量词，对该变量在添加量词时，则只能使用规则EG，而不能使用规则UG；如使用规则UI消去量词，对该变量在添加量词时，则可使用规则EG和规则UG。
3. 如有两个含有存在量词的公式，当用规则EI消去量词时，不能选用同样的一个常量符号来取代两个公式中的变元，而应用不同的常量符号来取代它们。
4. 在用规则UI和规则EI消去量词、用规则UG和规则EG添加量词时，此量词必须位于整个公式的最前端，并且它的辖域为其后的整个公式。
5. 在添加量词$(\forall x)$、$(\exists x)$时，所选用的x不能在公式G(y)或G(c)中自由出现且G(y)或G(c)对x是自由的。
6. 在使用规则EG引入存在量词$(\exists x)$时，此x不得仅为G(c)或G(y)中的函数变元。在使用规则UG引入全称量词$(\forall x)$时，此x不得为G(y)中的函数变元(因该函数变元不得作为自由变元)。
7. 在使用规则UG引入全称量词$(\forall x)$时，G(y)中不得出现在使用规则UI引入y之后由规则EI引入的常量或函数。

例题

前提：$\exists xF(x)\rightarrow \forall xG(x)$

结论：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

证明

① $\exists xF(x)\rightarrow \forall xG(x)$	前提引入
② $\exists yF(y)\rightarrow \forall xG(x)$	①置换（换名规则）
③ $\forall y\forall x(F(y)\rightarrow G(x))$	②置换
④ $\forall x(F(z)\rightarrow G(x))$	③UI规则
⑤ $F(z)\rightarrow G(z)$	④UI规则
⑥ $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	⑤UG规则

集合内容提要

- 集合的**基本概念**—集合、相等、(真)包含、子集、空集、全集、幂集
- **集合运算**—交、并、(相对和绝对)补、对称差
- **文氏图**—有穷集计数问题
- 集合的**恒等式**
- **证明方法**概述—直接、间接、归谬、分情况证明、构造、数学归纳法等

集合论的学习要求

- 熟练掌握集合的子集、相等、空集、全集、幂集等概念及其符号化表示
- 熟练掌握集合的交、并、（相对和绝对）补、对称差的定义及其性质
- 掌握集合的文氏图的画法及利用文氏图解决有限集的计数问题的方法
- 牢记基本的集合恒等式（等幂律、交换律、结合律、分配律、德·摩根律、收律、零律、同一律、排中律、矛盾律、余补律、双重否定律、补交转换律）
- 准确地用逻辑演算或利用已知的集合恒等式或包含式证明新的等式或包含式
- 掌握几种常用证明方法的思想

集合论的典型题

- 判断元素与集合的隶属关系以及集合之间的包含关系
- 集合的基本运算题
- 有关集合运算性质的分析题
- <u>集合相等或者包含的**证明题**</u>

集合之间的关系及运算

包含(子集) $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$

不包含 $A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$

相等 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

不相等 $A \neq B \Leftrightarrow A \nsubseteq B \vee B \nsubseteq A$

真包含(真子集) $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

重要的恒等式

分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

德摩根律

绝对形式 $\sim(B \cup C) = \sim B \cap \sim C$, $\sim(B \cap C) = \sim B \cup \sim C$

相对形式 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

补交转换律 $A - B = A \cap \sim B$

$\cup$对$\oplus$没有分配律

典型例题一的分析

- 判断元素a与集合A的隶属关系是否成立的基本方法：
  把a作为一个整体，检查它在A中是否出现，
  注意这里的a可能是集合表达式。
- 判断集合包含$A\subseteq B$一般可以使用以下四种方法：
  - 若A、B是用枚举方式定义的，依次检查A的每个元素是否在B中出现。
  - 若A、B是用谓词法定义的，且A、B中元素性质分别为P和Q，那么“如果P则Q”意味着 $A\subseteq B$，“P当且仅当Q”意味着$A=B$。
  - 通过集合运算判断$A\subseteq B$，即$A\cup B=B$，$A\cap B=A$，$A-B=\varnothing$3个等式中有一个为真，则$A\subseteq B$。
  - 可以通过文氏图判断集合的包含（不是证明）。

集合恒等式的证明方法（逻辑演算法）

题目：A＝B

证明：$\forall x$，

$x \in A$

$\Leftrightarrow$ …… ……

$\Leftrightarrow x \in B$

所以 A＝B

或证 $P \subseteq Q \wedge Q \subseteq P$

题目：$A \subseteq B$

证明：$\forall x$，

$x \in A$

$\Rightarrow$ …… ……

$\Rightarrow x \in B$

所以 $A \subseteq B$

集合恒等式的证明方法（集合演算法）

题目：A＝B

证明： A

＝……

＝ B

所以 A＝B

题目：A⊆B

证明：A

⊆ … …

⊆ B

所以 A⊆B

例题

证明：$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

对任意的x，有

$$
\begin{aligned}
& x\in A-(B\cup C) \\
\Leftrightarrow\ & x\in A \wedge x\notin B\cup C \\
\Leftrightarrow\ & x\in A \wedge \neg(x\in B\vee x\in C) \\
\Leftrightarrow\ & x\in A \wedge (\neg x\in B\wedge\neg x\in C) \\
\Leftrightarrow\ & x\in A \wedge (x\notin B \wedge x\notin C) \\
\Leftrightarrow\ & (x\in A\wedge x\notin B) \wedge (x\in A\wedge x\notin C) \\
\Leftrightarrow\ & x\in A-B \wedge x\in A-C \\
\Leftrightarrow\ & x\in (A-B)\cap(A-C)
\end{aligned}
$$

所以 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

证明：$A\cup(A\cap B)=A$。

$$
\begin{aligned}
& A\cup(A\cap B) & \\
&=(A\cap E)\cup(A\cap B) & \text{(同一律)} \\
&=A\cap(E\cup B) & \text{(分配律)} \\
&=A\cap(B\cup E) & \text{(交换律)} \\
&=A\cap E & \text{(零律)} \\
&=A & \text{(同一律)}
\end{aligned}
$$

证明方法

- 直接证明法：假设A为真, 证明B为真
- 间接证明法：证明：若B不成立, 则A不成立, 即 $\neg B \rightarrow \neg A$
- 归谬法(反证法)：设A成立, 假设B不成立, 推出矛盾.
- 分情况证明法：待证明的命题形式为$A= A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_k \rightarrow B$，证明 $A_1 \rightarrow B$, $A_2 \rightarrow B, \ldots, A_k \rightarrow B$ 均为真
- 构造性证明法：在A为真的条件下, 构造出具有这种性质的客体

  数学归纳法：命题形式: $\forall x(x \in \mathrm{N} \wedge x \geq n_0), P(x)$

  (1)归纳基础 证$P(n_0)$为真

  (2)归纳步骤 $\forall x(x \geq n_0)$, 假设$P(x)$为真, 证$P(x+1)$为真.

关系

- 有序对与卡氏积
- 二元关系（包括空关系，恒等关系，全域关系等）及其表示（关系矩阵，关系图）
- 关系的五种性质（自反性，反自反性，对称性，反对称性，传递性）
- 二元关系的幂运算
- 关系的三种闭包（自反闭包，对称闭包，传递闭包）
- 等价关系和划分（包括等价类，商集，划分块等）
- 偏序关系（包括哈斯图，最大元，最小元，极大元，极小元，上界，下界，最小上界，最大下界等）

关系的学习要求

- 掌握：有序对及卡氏积的概念及卡氏积的性质
- 掌握：二元关系，A到B的二元关系，A上的二元关系，关系的定义域和值域，关系的逆，关系的合成，关系在集合上的限制，集合在关系下的象等概念，掌握关系的定义域、值域、逆、合成、限制、象等的主要性质
- 掌握：关系矩阵与关系图的概念及求法
- 掌握：集合A上的二元关系的主要性质（自反性，反自反性，对称性，反对称性，传递性）的定义及判别法，对某些关系证明它们有或没有中的性质
- 掌握：A上二元关系的n次幂的定义及主要性质
- 掌握A上二元关系的自反闭包、对称闭包、传递闭包的定义及求法
- 掌握：等价关系、等价类、商集、划分、等概念，以及等价关系与划分之间的对应
- 掌握：偏序关系、偏序集、哈斯图、最大元、最小元、极大元、极小元、上界、下界、上确界、下确界等概念

笛卡儿积

- 定义：设A，B为集合,用A中元素为第一元素，B中元素为第二元素构成的有序对集合， 即$A\times B=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in B\}$
- 性质：

1)对任意集合A，根据定义有:

$A\times\varnothing=\varnothing, \varnothing\times A=\varnothing$

(2)一般的说，笛卡儿积运算不满足交换律，即

$A\times B\neq B\times A$ (当 $A\neq\varnothing \wedge B\neq\varnothing \wedge A\neq B$ 时)

(3)笛卡儿积运算不满足结合律，即

$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$ (当 $A\neq\varnothing \wedge B\neq\varnothing \wedge C\neq\varnothing$ 时)

(4)笛卡儿积运算对并和交运算满足分配律，即

$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$

$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

(5)$A\subseteq C \wedge B\subseteq D \Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$

关系的表示方法

- 关系的三种表示方法：
  - 集合表达式
  - 关系矩阵
  - 关系图
- 关系矩阵和关系图可以表示有穷集上的关系。
- 例：设 A={1,2,3,4}，R={<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>}，则R的关系矩阵和关系图分别是？

关系的运算

- 定义域：$\mathrm{dom}\, R = \{x \mid \exists y(\langle x, y\rangle \in R)\}$
- 值域：$\mathrm{ran}\, R = \{y \mid \exists x(\langle x, y\rangle \in R)\}$
- 域： $\mathrm{fld}\, R = \mathrm{dom}\, R \cup \mathrm{ran}\, R$
- 逆: $R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid \langle y, x\rangle \in R\}$
- 合成：$F \circ G = \{\langle x, y\rangle \mid \exists t\, (\langle x, t\rangle \in G \wedge \langle t, y\rangle \in F)\}$
- 幂：（1） $R^0 = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\} = I_A$

  （2） $R^{n+1} = R^n \circ R$

R^n的计算

- 给定A上的关系R和自然数n，怎样计算R^n呢？
- 若n是0或1，结果是很简单的。下面考虑$n \geq 2$的情况。
  - 如果R是用集合表达式给出的，可以通过n-1次合成计算得到R^n。
  - 如果R是用关系矩阵M给出的，则R^n的关系矩阵是M^n，即n个矩阵M之积。与普通矩阵乘法不同的是，其中的相加是逻辑加，即：

$$1+1=1,\quad 1+0=0+1=1,\quad 0+0=0$$

  - 如果R是用关系图G给出的，可以直接由图G得到R^n的关系图G'。G'的顶点集与G相同。考察G的每个顶点x_i，如果在G中从x_i出发经过n步长的路径到达顶点x_j，则在G'中加一条从x_i到x_j的边。当把所有这样的便都找到以后，就得到图G'。

幂运算的性质

- 设A为n元集，R是A上的关系，则存在自然数s和t,使得$R^s=R^t$。
- 设R是A上的关系，m,n∈N，则

  (1)$R^m \circ R^n = R^{m+n}$ (2)$(R^m)^n = R^{mn}$
- 设R是A上的关系，若存在自然数s,t(s<t)使得$R^s=R^t$，则

  (1) 对任何k∈N有 $R^{s+k}=R^{t+k}$

  (2) 对任何k,i∈N有 $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$，其中p=t-s

  (3) 令$S=\{R^0, R^1, \ldots, R^{t-1}\}$，则对于任意的q∈N有 $R^q \in S$

关系的性质

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$, 且$i \neq j$, 则$r_{ji}=0$	对M^2中1所在位置, M中相位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边,一定是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边, 一定是一条有向边(无双向边)	如果顶点x_i到x_j有边, x_j到x_k有边,则从x_i到X_k也有边

关系性质的证明

- 通常的证明方法是利用定义证明。
- R在A上自反
  任取x，有
  $x \in A \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle x,x \rangle \in R$
- R在A上对称
  任取$\langle x,y \rangle$，有
  $\langle x,y \rangle \in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle y,x \rangle \in R$
- R在A上反对称
  任取$\langle x,y \rangle$，有
  $\langle x,y \rangle \in R \wedge \langle y,x \rangle \in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots \Rightarrow x = y$
- R在A上传递
  任取$\langle x,y \rangle$，$\langle y,z \rangle$，有
  $\langle x,y \rangle \in R \wedge \langle y,z \rangle \in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle x,z \rangle \in R$

关系的闭包

定义 设R是非空集合A上的关系, R 的自反 (对称或传递) 闭包 是A上的关系R', 使得 R'满足以下条件:

(1) R'是自反的（对称的或传递的）

(2) $R \subseteq R'$

(3) 对A上任何包含R 的自反（对称或传递）关系R'' 有

$R' \subseteq R''$.

一般将 R 的自反闭包记作 $r(R)$, 对称闭包记作 $s(R)$, 传递闭包记作 $t(R)$.

闭包的构造方法

- 集合：设R为A上的关系, 则有
  - (1) $r(R)=R\cup R^0$
  - (2) $s(R)=R\cup R^{-1}$
  - (3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup \ldots$
- 矩阵：设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系矩阵分别为M, M_r, M_s 和 M_t, 则有：
  - (1) $M_r=M+E$
  - （2）$M_s=M+M'$
  - （3）$M_t=M+M^2+M^3+\ldots$
- 图

等价关系和等价类

- **等价关系**：设R为非空集合上的关系. 如果R是**自反**的、**对称**的和**传递**的, 则称R为A上的等价关系. 设 R 是一个等价关系, 若$\langle x,y\rangle \in R$, 称 x等价于y, 记做$x \sim y$
- **等价类**：设R为非空集合A上的等价关系, $\forall x \in A$， 令 $[x]_R = \{ y \mid y \in A \wedge xRy \}$称 $[x]_R$ 为x关于R 的等价类。
- **定理**：

设R是非空集合A上的等价关系, 则

(1) $\forall x \in A$, $[x]$ 是A的非空子集.

(2) $\forall x, y \in A$, 如果 xRy, 则 $[x]=[y]$.

(3) $\forall x, y \in A$, 如果 $x \quad y$, 则 $[x]$与$[y]$不交.

(4) $\bigcup_{x \in A} [x] = A$, 即所有等价类的并集就是$A$.

商集和划分

- 设R 为非空集合A 上的等价关系, 以R 的所有等价类作为元素的集合称为A关于R 的商集, 记做 A/R,

$$A/R = \{ [x]_R \mid x \in A \}$$

- 设A为非空集合, 若A的子集族π ($\pi \subseteq P(A)$) 满足下面条件:

(1) $\varnothing \notin \pi$

(2) $\forall x \forall y\ (x,y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

(3) $\cup \pi = A$

则称π是A的一个划分, 称π 中的元素为A的划分块.

偏序关系

- 设R为非空集合A上的关系。如果R是自反的、反对称的和传递的，则称R为A上的偏序关系，记作≤。
- 说明：这里的“小于或等于”不是指数的大小，而是在偏序关系中的顺序性。x“小于或等于”y的含义是：依照这个序，x排在y的前边或者x就是y。根据不同偏序的定义，对序有着不同的解释。
- 可比：$\forall x, y \in A$，x与y可比 $\Leftrightarrow x \le y \vee y \le x$
- 不可比：在具有偏序关系的集合A中任取两个元素x和y，可能有下述几种情况发生：$x < y$，$y < x$，$x = y$

哈斯图

- 利用偏序关系的自反性、反对称性和传递性所得到的偏序集合图，称为哈斯图。
- 画偏序集<A，≤>的哈斯图的方法

  (1)用小圆圈代表元素。

  (2)$\forall x,y \in A$，若$x < y$，则将x画在y的下方。

  (3)对于A中的两个不同元素x和y，如果y覆盖x，就用一条线段连接x和y。

偏序集中的特殊元素

- 定义 设<A，≤>为偏序集，B⊆A，y∈B。

（1）若$\forall x(x\in B\rightarrow y\le x)$成立，则称y为B的最小元。

（2）若$\forall x(x\in B\rightarrow x\le y)$成立，则称y为B的最大元。

（3）若$\forall x(x\in B\wedge x\le y\rightarrow x=y)$成立，则称y为B的极小元。

（4）若$\forall x(x\in B\wedge y\le x\rightarrow x=y)$成立，则称y为B的极大元。

- 性质：

（1）最小元是B中最小的元素，它与B中其它元素都可比。
极小元不一定与B中元素可比，只要没有比它小的元素，它就是极小元。

（2）对于有穷集B，极小元一定存在，但最小元不一定存在。最小元如果存在，一定是唯一的。

（3）极小元可能有多个，但不同的极小元之间是不可比的（无关系）。

（4）如果B中只有一个极小元，则它一定是B的最小元。

（5）哈斯图中，集合B的极小元是B中各元素中的最底层。

上界、下界

定义：设<A，≤>为偏序集，$B\subseteq A$，$y\in A$。

（1）若 $\forall x(x\in B\to x\le y)$成立，则称y为B的上界。

（2）若 $\forall x(x\in B\to y\le x)$成立，则称y为B的下界。

（3）令C＝{y|y为B的上界}，则称C的最小元为B的最小上界或上确界。

（4）令D＝{y|y为B的下界}，则称D的最大元为B的最大下界或下确界。

性质：

（1） B的最小元一定是B的下界，同时也是B的最大下界。

（2） B的最大元一定是B的上界，同时也是B的最小上界。

（3） B的下界不一定是B的最小元，因为它可能不是B中的元素。

（4） B的上界也不一定是B的最大元。

（5） B的上界、下界、最小上界、最大下界都可能不存在。如果存在，最小上界与最大下界是唯一的。

函数

- 函数的基本概念与性质（单射，满射，双射）。
- 函数的合成与反函数。

函数的学习要求

- 掌握函数、A到B的函数、集合在函数下的像、集合在函数下的完全原像的概念及表示法；当A与B都是有穷集时，会求A到B的函数的个数。
- 掌握A到B的函数是单射、满射、和双射的定义及证明方法。
- 掌握常函数、恒等函数、单调函数、特征函数、自然映射等概念。
- 掌握合成函数的主要性质和求合成函数的方法。
- 掌握反函数的概念及主要性质。

函数的像和完全原像

定义：设函数f：$A\to B$，$A_1\subseteq A$，$B_1\subseteq B$。

（1）令$f(A_1)=\{f(x)\mid x\in A_1\}$，称 $f(A_1)$为A_1在f下的像(*image*)。特别地，当$A_1=A$时，称 $f(A)$为函数的像。

（2）令$f^{-1}(B_1)=\{x\mid x\in A\wedge f(x)\in B_1\}$，称$f^{-1}(B_1)$为$B_1$在 f下的完全原像(*preimage*) 。

讨论：

- 设 $B_1\subseteq B$，显然B_1在 f 下的原像 $f^{-1}(B_1)$是A的子集。
- 设 $A_1\subseteq A$，那么 $f(A_1)\subseteq B$。 $f(A_1)$的完全原像就是 $f^{-1}(f(A_1))$。一般来说， $f^{-1}(f(A_1))\neq A_1$，但是$A_1\subseteq f^{-1}(f(A_1))$。
- 例如函数 f:{1,2,3}→{0,1}，满足 $f(1)=f(2)=0$，$f(3)=1$
  令$A_1=\{1\}$，那么$f^{-1}(f(A_1))=f^{-1}(f(\{1\}))=f^{-1}(\{0\})=\{1,2\}$，
  这时，A_1是$f^{-1}(f(A_1))$的真子集。

满射、单射、双射

定义：$f:A\to B$，

（1）若 $\mathrm{ran}\, f = B$，则称 $f:A\to B$ 是满射（*surjection*）的。

（2）若 $\forall y \in \mathrm{ran}\, f$ 都存在唯一的 $x\in A$ 使得 $f(x) = y$，则称 $f:A\to B$ 是单射（*injection*）的。

（3）若 f 既是满射又是单射的，则称 $f:A\to B$ 是双射（*bijection*）的（一一映像（*one-to-one mapping*））。

说明：

- 如果 $f:A\to B$ 是满射的，则对于任意的 $y\in B$，都存在 $x\in A$，使得 $f(x) = y$。
- 如果 $f:A\to B$ 是单射的，则对于 x_1、$x_2\in A$ 且 $x_1\neq x_2$，一定有 $f(x_1)\neq f(x_2)$。换句话说，如果对于 x_1、$x_2\in A$ 有 $f(x_1) = f(x_2)$，则一定有 $x_1 = x_2$。

单射和满射的证明方法

- 证明函数 f:A→B是满射的，基本方法是：

  任取y∈B，找到x∈A(x与y相关，可能是一个关于y的表达式)或者证明存在x∈A，使得f(x)＝y。

- 证明函数 f:A→B是单射的，基本方法是：

  假设A中存在x_1和x_2，使得 $f(x_1)=f(x_2)$，利用已知条件或者相关的定理最终证明$x_1=x_2$。

实数集上函数性质的判断方法

- 对于实数集合上的函数，通常可以通过求导找到极值点。而有的极小值（或极大值）恰好是函数的最小值（或最大值），这样就可以求出函数的值域，从而判断函数是否为满射的。
- 如果函数存在极值，那么可以断定函数不是单射的，因为在极值点两侧可以找到不相等的x_1和x_2满足 $f(x_1)=f(x_2)$。
- 证明函数不具有某种性质的一般方法就是给出反例。
- 为证明函数不是单射的，需要找到$x_1 \neq x_2$且$f(x_1)=f(x_2)$。

  有时可能不容易找到具体的x_1和x_2，但是可以证明这样的x_1和x_2是存在的。
- 证明函数不是满射的一般方法就是找到 $y \in B-\text{ran}\ f$。

函数复合的定理（左复合，以书本为准）

- **定理：** 设f, g是函数, 则$f\circ g$也是函数, 且满足

  (1) $\mathrm{dom}(f\circ g)=\{\, x \mid x\in \mathrm{dom}g \wedge g(x)\in \mathrm{dom}f\}$

  (2) $\forall x\in \mathrm{dom}(f\circ g)$ 有 $f\circ g(x) = f(g(x))$

- **推论：**

  设$g: A\to B$, $f : B\to C$, 则 $f\circ g : A\to C$, 且$\forall x\in A$都有

  $$f\circ g(x) = f(g(x)).$$

反函数

- 设 $f: A \to B$是双射的, 则$f^{-1}: B \to A$也是双射的.
- 设 $f: A \to B$是双射的, 则

$$f^{-1} \circ f = I_B, \quad f \circ f^{-1} = I_A$$

- 说明：

➢任给函数F, 它的逆F^{-1}不一定是函数, 只是一个二元关系。

$$F = \{<x_1,y_1>, \quad <x_2,y_1>\}$$

$$F^{-1} = \{<y_1,x_1>, \quad <y_1,x_2>\}$$

➢任给单射函数f：$A \to B$, 则f^{-1}是函数, 且是从ran$f$到A的双射函数, 但不一定是从B到A的双射函数。

因为对于某些y∈B－ran f，f^{-1}没有值与之对应。

➢任给满射函数f：$A \to B$，则f^{-1}不一定是函数。

➢对于双射函数f：$A \to B$, f^{-1}：$B \to A$是从B到A的双射函数。

图与特殊的图

- 图的基本概念
- 图的连通性
- 图的矩阵表示
- 特殊图

图的学习要求（1）

- 理解与图的定义有关的诸多概念，以及它们之间的相互关系。
- 深刻理解握手定理及其推论的内容，并能熟练地应用它们。
- 深刻理解图同构、简单图、完全图、正则图、子图、补图、二部图等概念及其它们的性质和相互关系，并能熟练地应用这些性质和关系。
- 深刻理解通路与回路的定义、相互关系及其分类，掌握通路与回路的各种不同的表示方法。
- 理解无向图的点连通度、边连通度等概念及其之间的关系，并能熟练地求出给定的较为简单的图的点连通度与边连通度。
- 理解有向图连通性的概念及其分类，掌握判断有向连通图类型的方法。

图的学习要求（2）

- 理解**欧拉图**的定义及判别定理。
- 理解**哈密顿图**的定义并会用破坏哈密顿图应满足的某些**必要条件**的方法判断某些图不是哈密顿图。
- 会用**满足哈密顿图的充分条件**的方法判断某些图是哈密顿图。
- 严格地分清哈密顿图必要条件和充分条件，千万不能将必要条件当充分条件，同样地，也不能将充分条件当成必要条件。
- 深刻理解**平面图的基本概念**：平面图、平面嵌入、平面图的面、次数、极大平面图、极小非平面图、平面图的对偶图、自对偶图等。
- 熟练掌握**极大平面图**的性质，特别是充分必要条件。
- 熟练掌握并会应用**欧拉公式及其推广形式**。
- 掌握由欧拉公式及其推广形式所证明的平面的性质。
- 了解树的基本概念。

握手定理

定理 任何图(无向图和有向图)的所有顶点度数之和都等于边数的2倍.

证： 图中每条边(包括环)均有两个端点, 所以在计算各顶点度数之和时, 每条边均提供2度, m条边共提供$2m$度.

推论 任何图(无向图和有向图)都有偶数个奇度顶点

定理6.2 有向图所有顶点的入度之和等于出度之和等于边数

证： 每条边恰好提供1个入度和1个出度

问题研究

问题：在一个部门的25个人中间，由于意见不同，是否可能每个人恰好与其他5个人意见一致？

解答：不可能。考虑一个图，其中顶点代表人，如果两个人意见相同，可用边连接，所以每个顶点都是奇数度。存在奇数个度数为奇数的图，这是不可能的。

说明：

(1)很多离散问题可以用图模型求解。

(2)为了建立一个图模型，需要决定顶点和边分别代表什么。

(3)在一个图模型中，边经常代表两个顶点之间的关系。

图的同构

定义 设$G_1=\langle V_1, E_1\rangle$，$G_2=\langle V_2, E_2\rangle$为两个无向图，

若存在双射函数f：$V_1 \to V_2$，对于$v_i, v_j \in V_1$，$(v_i, v_j) \in E_1$

当且仅当 $(f(v_i), f(v_j)) \in E_2$，并且(v_i, v_j)与$(f(v_i), f(v_j))$的重数相同，

则称G_1与G_2是同构的，记做$G1 \cong G2$。

说明 （1） 类似地，可以定义两个有向图的同构。

（2） 图的同构关系看成全体图集合上的二元关系。

（3） 图的同构关系是等价关系。

（4） 在图同构的意义下，图的数学定义与图形表示是一一对应的。

完全图与正则图

无向完全图: 每对顶点之间都有一条边的无向简单图.
n阶无向完全图记作K_n,
顶点数n, 边数$m=n(n-1)/2$, $\Delta=\delta=n-1$

有向完全图: 每对顶点之间均有两条方向相反的边的有向简单图.
顶点数n, 边数$m=n(n-1)$, $\Delta^+=\delta^+=\Delta^-=\delta^-=n-1$, $\Delta=\delta=2(n-1)$

k-正则图: 每个顶点的度数均为k的无向简单图
顶点数n, 边数$m=kn/2$

子图

定义 设$G=<V,E>$, $G'=<V',E'>$是2个图(同为无向图,或同为有向图)

若$V'\subseteq V$且$E'\subseteq E$, 则称G'为G的子图, G为G'的母图, 记作$G'\subseteq G$

若$G'\subseteq G$ 且$V'=V$, 则称G'为G的生成子图

若$V'\subset V$或$E'\subset E$, 称G'为G的真子图

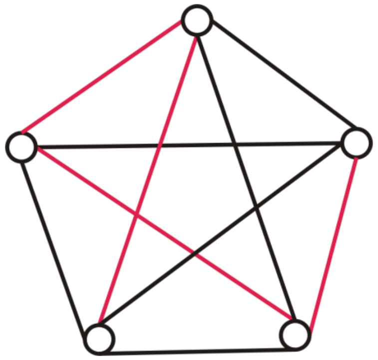
设$V'\subseteq V$且$V'\neq\varnothing$, 以V'为顶点集, 以两端点都在V'中的所有边为边集的G的子图称作V'的导出子图, 记作$G[V']$

设$E'\subseteq E$且$E'\neq\varnothing$, 以E'为边集, 以E'中边关联的所有顶点为顶点集的G的子图称作E'的导出子图, 记作$G[E']$

补图

- 设$G=<V,E>$为n阶无向简单图, 记 $\overline{E}=V\&V-E$,

  称 $\overline{G}=<V,\overline{E}>$ 为G的补图



通路与回路

- 在初级通路与初级回路的定义中，仍将初级回路看成初级通路(路径)的特殊情况，只是在应用中初级通路(路径)都是始点与终点不相同的，长为1的圈只能由环生成，长为2的圈只能由平行边生成，因而在简单无向图中，圈的长度至少为3。
- 若Γ中有边重复出现，则称Γ为复杂通路，又若$v_{i0}=v_{il}$，则称Γ为复杂回路。
- 在有向图中，通路、回路及分类的定义与无向图中非常相似，只是要注意有向边方向的一致性。
- 在以上的定义中，将回路定义成通路的特殊情况，即回路也是通路，又初级通路(回路)是简单通路(回路)，但反之不真。

连通度/点割集与边割集

- 问题：如何定量地比较无向图的连通性的强与弱？
- 点连通度：为了破坏连通性，至少需要删除多少个顶点？
- 边连通度：为了破坏连通性，至少需要删除多少条边？
- “破坏连通性”是指“变得更加不连通”。

定义 设无向图$G=\langle V,E\rangle$, $V'\subset V$, 若$p(G-V')>p(G)$且$\forall V''\subset V'$, $p(G-V'')=p(G)$, 则称V'为G的点割集. 若$\{v\}$为点割集, 则称v为割点.
设$E'\subseteq E$, 若$p(G-E')>p(G)$且$\forall E''\subset E'$, $p(G-E'')=p(G)$, 则称E'为G的边割集. 若$\{e\}$为边割集, 则称e为割边或桥.

有向图的连通性及其分类

设有向图$D=\langle V,E \rangle$, $u,v \in V$,

u可达v: u到v有通路. 规定u到自身总是可达的.

u与v相互可达: u可达v且v可达u

D弱连通(连通): 略去各边的方向所得无向图为连通图

D单向连通: $\forall u,v \in V$，u可达v 或v可达u

D强连通: $\forall u,v \in V$，u与v相互可达

D是强连通的当且仅当D中存在经过所有顶点的回路

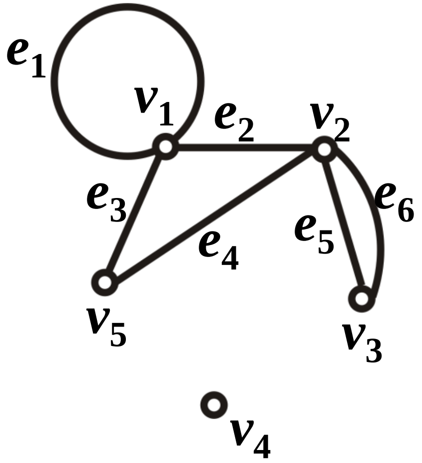
D是单向连通的当且仅当D中存在经过所有顶点的通路

无向图的关联矩阵

设无向图$G=\langle V,E\rangle$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

令m_{ij}为v_i与e_j的关联次数, 称$(m_{ij})_{n\times m}$为G的关联矩阵, 记为$M(G)$. m_{ij}的可能取值为:0,1,2

$$M(G)=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



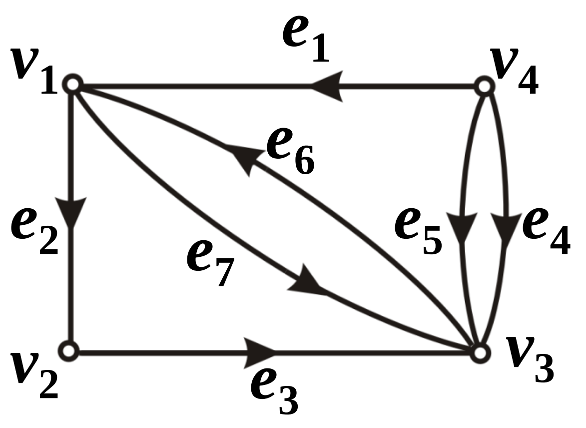
无环有向图的关联矩阵

设无环有向图$D=\langle V,E\rangle$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

令

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{为}e_j\text{的始点}\\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1, & v_i\text{为}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

则称$(m_{ij})_{n\times m}$为**D的关联矩阵**, 记为$M(D)$.



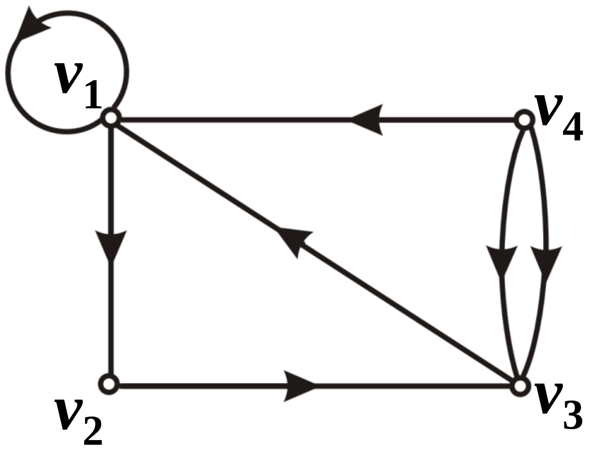
$$M(D)=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

有向图的邻接矩阵

设有向图$D=<V,E>$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令

为顶点v_i邻接到顶点v_j边的条数，称(　　)$_{m\times n}$为**D的邻接矩阵**,

记作$A(D)$, 简记作A.



$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

有向图中的通路数与回路数

定理 设A为n阶有向图D的邻接矩阵, 则A^l(l≥1)中元素 $a_{ij}^{(l)}$ 等于D中v_i到v_j长度为 l 的通路(含回路)数, $a_{ii}^{(l)}$ 等于v_i到自身长度为l 的回路数, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(l)}$ 等于D中长度为 l 的通路(含回路)总数, $\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{(l)}$ 等于D中长度为 l 的回路总数.

推论 设$B_l=A+A^2+\ldots+A^l$(l≥1), 则B_l中元素 $b_{ij}^{(l)}$ 等于D中v_i到v_j长度小于等于 l 的通路(含回路)数, $b_{ii}^{(l)}$ 等于D中v_i到v_i长度小于等于 l 的回路数, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^{(l)}$ 等于D中长度小于等于l 的通路(含回路)数, $\sum_{i=1}^{n}b_{ii}^{(l)}$ 为D中长度小于等于l 的回路数.

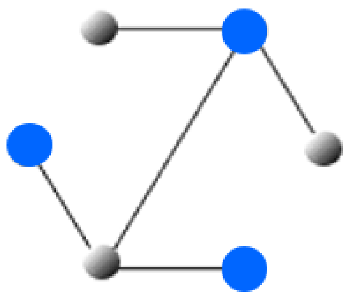
无向图的相邻矩阵与图的可达矩阵

- 设无向简单图G=<V,E>, V={v_1, v_2, …, v_n}, 令 $a_{ij}^{(1)}$为顶点v_i与v_j之间边的条数，称$(a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$为$G$的相邻矩阵, 记作$A(G)$.

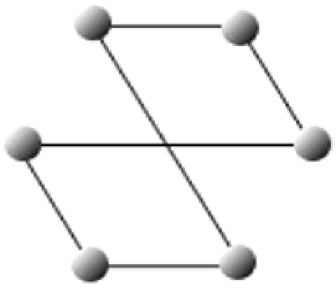
设图(无向图和有向图)G=<V,E>, V={v_1, v_2, …, v_n},
当vi可达vj时，p_{ij} =1，否则为0，
称$(p_{ij})_{n\times n}$为G的可达矩阵, 记作$P(G)$, 简记为P.

二部图的判别定理

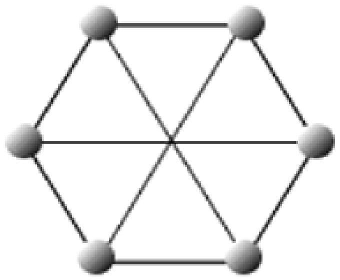
定理： 无向图*G*=<*V*,*E*>是二部图当且仅当*G*中无奇长度的回路



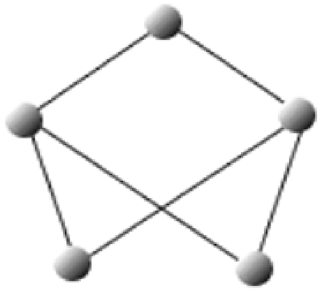
K_6的子图



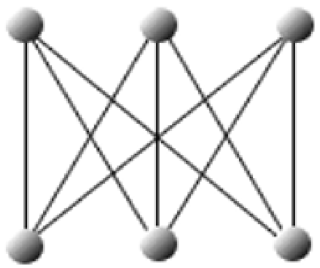
K_6的子图



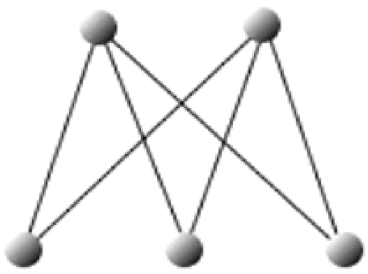
$K_{3,3}$



$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



$K_{2,3}$

存在完备匹配的条件

定理（Hall定理） 设二部图$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$, $|V_1|\leq|V_2|$，则G中存在V_1到V_2的完备匹配当且仅当V_1中任意$k(1\leq k\leq|V_1|)$个顶点至少与V_2中的k个顶点相邻(**相异性条件**).

定理 设二部图$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$, $|V_1|\leq|V_2|$. 如果存在正整数t，使得V_1中每个顶点至少关联t条边，而V_2中每个顶点至多关联t条边(**t条件**)，则G中存在V_1到V_2的完备匹配.

欧拉图的判定定理

定理 无向图G具有欧拉回路当且仅当G是连通的且无奇度顶点.
无向图G具有欧拉通路、但没有欧拉回路当且仅当G是连通的且有2个奇度顶点, 其余顶点均为偶度数的. 这2个奇度顶点是每条欧拉通路的端点.

定理 有向图D有欧拉回路当且仅当D是连通的且所有顶点的入度等于出度.
有向图D有欧拉通路、但没有欧拉回路当且仅当D是连通的且有一个顶点的入度比出度大1、一个顶点的入度比出度小1, 其余的顶点的入度等于出度.

哈密顿图的必要条件

定理 若无向图$G=\langle V,E\rangle$是哈密顿图, 则对于V的任意非空真子集V_1均有 $p(G-V_1)\le|V_1|$.

证 设C为G中一条哈密顿回路, 有$p(C-V_1)\le|V_1|$. 又因为$C\subseteq G$, 故 $p(G-V_1)\le p(C-V_1)\le|V_1|$.

例如 当$r\neq s$时, $K_{r,s}$不是哈密顿图

推论 有割点的图不是哈密顿图

存在哈密顿回路(通路)的充分条件

定理 设G是$n(n\geq3)$阶无向简单图, 若任意两个不相邻的顶点的度数之和大于等于$n-1$, 则G中存在哈密顿通路; 若任意两个不相邻的顶点的度数之和大于等于n, 则G中存在哈密顿回路, 即G为哈密顿图.

推论 设G是$n(n\geq3)$阶无向简单图, 若$\delta(G)\geq n/2$, 则G是哈密顿图

当$n\geq3$时, K_n是哈密顿图; 当$r=s\geq2$时, $K_{r,s}$是哈密顿图.

定理 设D是$n(n\geq2)$阶有向图, 若略去所有边的方向后所得无向图中含子图K_n, 则D中有哈密顿通路.

例题

例 设G是n阶无向连通图。证明：若G中有割点或桥，则G不是哈密顿图。

证明

(1)证明若G中有割点，则G不是哈密顿图。

设v为连通图G中一个割点，则$V'=\{v\}$为G中的点割集，而

$$p(G-V')\geq 2>1=|V'|$$

由定理可知G不是哈密顿图。

(2)证明若G中有桥，则G不是哈密顿图。

设G中有桥，$e=(u,v)$为其中的一个桥。

若u,v都是悬挂边，则G为K_2，K_2不是哈密顿图。

若u,v中至少有一个，比如u，$d(u)\geq 2$，由于e与u关联，e为桥，所以$G-u$至少产生两个连通分支，于是u为G中割点。

由(1)的讨论可知，G不是哈密顿图。

平面图的几点说明及一些简单结论

- 一般所谈平面图不一定是指平面嵌入，但讨论某些性质时，一定是指平面嵌入。
- K_5和$K_{3,3}$都不是平面图。
- 定理 设$G'\subseteq G$，若G为平面图，则G'也是平面图。

  设$G'\subseteq G$，若G'为非平面图，则G也是非平面图。
- 由定理可知，$K_n(n\geq5)$和$K_{3,n}(n\geq3)$都是非平面图。
- 定理 若G为平面图，则在G中加平行边或环所得图还是平面图。即平行边和环不影响图的平面性。