高等数学 B2

浙江理工大学期末试题汇编

（答案册）

学校：________________

专业：________________

班级：________________

姓名：________________

学号：________________

（此试卷为 2022 年第二版 第 1 次发行）

目录

2022 年所有试卷版本见**试卷版**的尾页。如需资料获取请添加下方的 QQ 群获取。

更多信息

试卷整理人：张创琦　　　　　　　　微信公众号：创琦杂谈

试卷版次：2022 年 4 月 30 日 第二版 第 1 次发行

本人联系 QQ 号：1020238657（勘误请联系本人）

创琦杂谈学习交流群（QQ 群）群号：749060380

cq 数学物理学习群（QQ 群）群号：967276102

cq 计算机编程学习群（QQ 群）群号：653231806

1 浙江理工大学 2020—2021 学年第 2 学期《高等数学 B2》期末 A 卷

一、选择题

1.A　2. B　3. C　4. C　5. B　6. D

评分标准说明： 每题 4 分，错则扣全分

二、填空题

1. 12π　　2. $-2xy\sin(x^2y)$.　　3. $\dfrac{\pi^2}{e^2}$

4. $2edx+(e+2)dy$　　5. $\pi-2$　　6.0

评分标准说明： 每题 4 分，错则扣全分

三 、计算题（本题共五小题，满分 30 分）

1.**解：** $\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_\pi^{2\pi}r\sin r dr$ --------------- 4 分

$=-6\pi^2$ --------------- 2 分

评分标准说明： 只写出答案，无步骤的，扣 4 分。

2. **解：由区域对称性可知**

$\iint_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,d\sigma=2\int_0^1 dx\int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}\,dy$ --------------- 2 分

$=-\dfrac{2}{3}\int_0^1(x^3-1)dx$ -------------- 2 分

$=\dfrac{1}{2}$ --------------- 2 分

评分标准说明： 只写出答案，无步骤的，扣 4 分。

3 **解:** 等式两边同时对 x 和 y 求偏导

$$\frac{\partial u}{\partial x}+e^u\frac{\partial u}{\partial x}=y\ \ \rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{1+e^u}\qquad (1)$$ ---------------1 分

$$\frac{\partial u}{\partial y}+e^u\frac{\partial u}{\partial y}=x\ \ \rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{1+e^u}$$ ---------------1 分

再对（1）式两边同时对 y 求偏导得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+e^u\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+e^u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1$$ ---------------2 分

整理得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{1+e^u}-\frac{e^u xy}{(1+e^u)^3}$$ ---------------2 分

评分标准说明： 步骤正确，答案不对，扣 2 分。

4 解：　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}(\frac{n!2^n}{n^n})^{-1}=\lim\limits_{n\to\infty}2(\frac{n}{n+1})^n$ --------------- 2 分

$=\lim\limits_{n\to\infty}2[(1-\frac{1}{n+1})^{-(n+1)}]^{-\frac{n}{n+1}}=2e^{-1}<1$ --------------- 2 分

由比值判别法，原级数收敛--------------- 2 分

评分标准说明： 判断敛散性正确，但是过程错误，扣 3 分。

5 解：由于 $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n,-1<x<1$ --------------- 2 分

得 $\frac{1}{1+2x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-2x)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n,-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ ---------------2 分

又因为 $f(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+2x}$，所以

--------------- 2 分

评分标准说明：其他方法判断正确也可得分。

四 综合题（本题共两小题，满分 14 分）

1 解：$\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{-x^2y^2},\frac{\partial f}{\partial y}=xe^{-x^2y^2}$ --------------- 2 分

所以 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2xy^3e^{-x^2y^2},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=e^{-x^2y^2}-2x^2y^2e^{-x^2y^2}$，$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x^3ye^{-x^2y^2}$ ------ 3 分

$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2e^{-x^2y^2}$ --------------- 2 分

评分标准说明： 步骤正确，答案不对，扣 2 分。

2 解：令 $D_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,x\ge 0,y\ge 0\}$，$D_2=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le\sqrt{2},x\ge 0,y\ge 0\}$ ---------- 1 分

$$\iint_D xy[1+x^2+y^2]dxdy=\iint_{D_1}xy[1+x^2+y^2]dxdy+\iint_{D_2}xy[1+x^2+y^2]dxdy$$

则 $=\iint_{D_1}xydxdy+\iint_{D_2}2xydxdy$

------------ 3 分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^3\sin\theta\cos\theta dr+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^{2^{1/4}}r^3\sin\theta\cos\theta dr$ ------------ 2 分

$=\frac{3}{8}$------------ 1 分

评分标准说明：计算正确，过程不同也可得分。

五、证明题（本题共两小题，满分 8 分）

1 证：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+1)2}$ ------------ 2 分

$=\frac{1}{2}<1$，由比值判别法，原级数收敛------------ 2 分

2 证：$z=\ln\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$ ------------ 2 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$------------ 2 分

所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

评分标准说明：第 1 题用其他判别法证明也可。

2 浙江理工大学 2019—2020 学年第 2 学期《高等数学 B2》期末 A 卷

一 单选题。

1 C　　2 A　　3 C　　4 D　　5 B

二 填空题。

1. $y=(x+C)\cos x$.　　2. $R=\sqrt{3}$.　　3. $-\frac{1}{\sqrt{6}}$.

4. -1 .　　5. $\frac{1}{1+x^2y^2}(ydx+xdy)$.　　6. $0<p<1$

三 计算题一（本题共 6 小题，满分 48 分）

1.解:原方程对应的齐次方程为 $y''-5y'+6y=0$, 其特征方程为 $r^2-5r+6=0$ 的根为

$r_1=2,r_2=3$，对应齐次方程的通解为 $\bar{y}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x},(C_1,C_2$为任意常数). ------2 分

λ=1，令特解为 $y_*=Ae^x$,将其代入原方程，解得 $A=1$,所以特解为 $y_*=e^x$， ------2 分

所以原微分方程通解为 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + e^x, (C_1, C_2$ 为任意常数) -----1 分

又 $y(0)=1 \Rightarrow C_1 + C_2 + 1 = 1$

$y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x} + e^x,\ y'(0)=1 \Rightarrow 2C_1 + 3C_2 + 1 = 1$

因此 $C_1 = 0, C_2 = 0$ --------2 分

因此满足初始条件的特解为 $y = e^x$. --------1 分

2. 解：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yf' \bullet \frac{1}{y} + g + xg' \bullet (-\frac{y}{x^2}) = f'(\frac{x}{y}) + g(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x} g'(\frac{y}{x})$$ -------- 2 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{y} f'' + g' \bullet (-\frac{y}{x^2}) - \frac{y}{x} \bullet g'' \bullet (-\frac{y}{x^2}) + \frac{y}{x^2} g' = \frac{1}{y} f''(\frac{x}{y}) + \frac{y^2}{x^3} g''(\frac{y}{x})$$ -------- 2 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (-\frac{x}{y^2}) f'' + g' \bullet \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \bullet g' - \frac{y}{x} g'' \bullet \frac{1}{x} = -\frac{x}{y^2} f''(\frac{x}{y}) - \frac{y}{x^2} g''(\frac{y}{x})$$ --------2 分

$$\therefore x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$ -------- 2 分

3. 解：

$$I = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} \frac{r\sin\theta}{r} r dr = \int_0^{\pi} \sin\theta \bullet \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{2\sin\theta} d\theta = 2\int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta$$ ---------6 分

$$= -2\int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta) d\cos\theta = (-2\cos\theta + \frac{2}{3}\cos^3\theta) \Big|_0^{\pi} = \frac{8}{3}$$ ---------2 分

4. 解：

根据 $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{x^n}{n+1} \cdot \frac{n}{x^{n-1}} \right| = |x| < 1,$

所以收敛区间为 $(-1,1)$ ---------2 分

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n-1}, x \in (-1,1)$. 显然 $S(0)=1$.

$$xS(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x x^{n-1} dx = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} dx = \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x).$$ ---------4 分

故当 $x \neq 0$ 时， $S(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x},$

所以综上所述 $S(x)=\begin{cases}-\dfrac{\ln(1-x)}{x}, x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 1, \qquad x=0\end{cases}$ ---------2 分

令 $x=\dfrac{1}{2}$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=-\dfrac{1}{\frac{1}{2}}\ln(1-\dfrac{1}{2})=2\ln 2.$ ---------2 分

5. 解：

$$f(x)=1-\frac{2}{3+x-1}=1-\frac{2}{3}\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}$$ --------2 分

$$=1-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{3}\right)^n=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}(x-1)^n,-2<x<4.$$ --------4 分

6. 解：

积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, 0\le y\le 4-2x\}$, 则 -------2 分

$$\iint\limits_D(4-x^2)dxdy=\int_0^2(4-x^2)dx\int_0^{4-2x}dy$$ -------4 分

$$=\int_0^2(4-x^2)(4-2x)dx=\int_0^2(16-8x-4x^2+2x^3)dx=\frac{40}{3}$$ -------2 分

四 证明题（满分 8 分）

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\bullet\frac{\partial u}{\partial x}=F_u',\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial v}\bullet\frac{\partial v}{\partial y}=F_v',$$ --------2 分

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial u}\bullet\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial v}\bullet\frac{\partial v}{\partial z}=-F_u'-F_v'$$ -------1 分

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{F_u'}{F_u'+F_v'},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{F_v'}{F_u'+F_v'}$$ --------4 分

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_u'}{F_u'+F_v'}+\frac{F_v'}{F_u'+F_v'}=1$$ --------1 分

3 浙江理工大学 2015—2016 学年第 2 学期《高等数学 B2》期末 A 卷

一．选择题 （4 分 / 题　共 24 分）

1. C　　2. A　　3. C　　4. D　　5. B　　6. C

二．填空题（4 分/题　共 24 分）

1. $y=\tan(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{\pi}{4})$　　2. 1，$\frac{1}{2}$　　3. $\frac{9}{2}$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\sin2\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$　　5. $\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}$　　6. 1，$[0,2)$

三．计算题 （6 分/ 题　　共 30 分）

1. 解：齐次方程对应的特征方程为：$r^2-2r+2=0$ ——————————2 分

解得方程所对应的特征根为：$r_1=1+i,r_2=1-i$ ——————————3 分

因此齐次方程的通解为: $y=e^x(c_1\cos x+c_2\sin x)$ ——————————4 分

$\because f(x)=e^x,\therefore\lambda=1$ 不是特征根，故设特解为 $y^*=Ae^x$,待人方程，则得

$Ae^x=e^x\Rightarrow A=1$ ——————————5 分

因此，所求方程的通解为 $y=e^x(c_1\cos x+c_2\sin x)+e^x$ ——————————6 分

2. 解：令 $u=2x-y,v=y\sin x$，则 $z=f(u,v)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2\frac{\partial f}{\partial u}+y\cos x\frac{\partial f}{\partial v}$$ ——————————2 分

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial u}+\sin x\frac{\partial f}{\partial v}$$ ——————————4 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2\frac{\partial f}{\partial u}+y\cos x\frac{\partial f}{\partial v})$$

$$=2(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y})+\cos x\frac{\partial f}{\partial v}+y\cos x(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y})$$

$$=2(-\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\sin x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v})+\cos x\frac{\partial f}{\partial v}+y\cos x(-\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+\sin x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2})$$

$$=-2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(2\sin x-y\cos x)\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{1}{2}y\sin 2x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\cos x\frac{\partial f}{\partial v}$$

------ 6 分

3. 解：对 $F(x+z,y+z)-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)=2$ 两边微分得

$$dF-\frac{1}{2}(dx^2+dy^2+dz^2)=0$$ ---------------------------------2 分

$$F'_1 d(x+z)+F'_2 d(y+z)-\frac{1}{2}(2xdx+2ydy+2zdz)=0$$

$$(F'_1-x)dx+(F'_2-y)dy+(F'_1+F'_2-z)dz=0$$

-----------------------------4 分

所以 $$dz=\frac{(x-F_1')dx+(y-F_2')dy}{F_1'+F_2'-z}$$ -----------------------------6 分

4. 解：$I=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}dx$ ——————————————2 分

$$=\int_0^1 (y-y^2)\frac{\sin y}{y}dy$$ ——————————————3 分

$$=\int_0^1 \sin y dy-\int_0^1 y\sin y dy$$ ——————————————4 分

$$=-\cos y\Big|_0^1-(-y\cos y+\sin y)\Big|_0^1$$

$$=1-\sin 1$$ ——————————————6 分

5. 解：

$$0\le u_n=\frac{(1!)^2+(2!)^2+(3!)^2+\cdots+(n!)^2}{(2n)!}$$

$$\le\frac{(n!)^2+(n!)^2+(n!)^2+\cdots+(n!)^2}{(2n)!}$$ ——————————————2 分

$$=\frac{n\cdot(n!)^2}{(2n)!}=v_n$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{n\cdot(n!)^2}{(2n)!}}$$ ——————————————3 分

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4}<1$$

所以由比值判别法，知级数 $\sum_{n=0}^{\infty}v_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cdot(n!)^2}{(2n)!}$ 收敛。- ————————5 分

再由比较判别法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1!)^2+(2!)^2+(3!)^2+\cdots+(n!)^2}{(2n)!}$收敛。

————————6 分

四．解：由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3a^2 \\ x^2+y^2=2az \end{cases}$ 得$r^2+\frac{1}{4a^2}r^4=3a^2$，$\therefore r=\sqrt{2}a$ ————————3 分

$$V=\iint_D\left[\sqrt{3a^2-x^2-y^2}-\frac{1}{2a}(x^2+y^2)\right]dxdy$$ ————————6 分

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}a}(\sqrt{3a^2-r^2}-\frac{1}{2a}r^2)rdr=2\pi a^3(\sqrt{3}-\frac{5}{6})$$ ————————8 分

五．解：$f(x)=\frac{1}{2+(x-2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}}$ ————————2 分

$\because \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}$ ————————3 分

$\therefore \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-2}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2})^{n+1}(x-2)^n$ ————5 分

其中$-1<\frac{x-2}{2}<1$，即$0<x<4$ ————————6 分

当$x=0$时，级数为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}$发散；

当$x=4$时，级数为$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2}$发散；

故$\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2})^{n+1}(x-2)^n, x\in(0,4)$ ————————8 分

六．证明：$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k+1})$

$$=(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+3(a_3-a_4)+\cdots+n(a_n-a_{n+1})$$ ————————2 分

$$=a_1+a_2+\cdots+a_n-na_{n+1}$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，且$\lim_{n\to\infty}na_n=a$，故$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}(\sum_{k=1}^{n}a_k-na_{n+1})$收敛————4 分

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k - a = S - a$$ ——————————5 分

故$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$收敛. ————————————6 分

又$\because |a_n b_n| \le \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$，由比较判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$绝对收敛。……………………3 分

4 浙江理工大学 2008—2009 学年第 2 学期《高等数学 B2》期末 A 卷

一 C D D C A B

二 1. $\underline{x\cos(xy) - 2x\cos(xy)\sin(xy)}$ 2. $\underline{\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx}$. 3. $\underline{p > \frac{5}{3}}$

4. $\underline{y = -2e^{-2x}}$ 5. $\underline{(-4,4)}$

三 1. $F(x,y,z) = x + y - z - e^z$, 则：$F_x = 1, F_y = 1, F_z = -1 - e^z$ ………1 分.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{1}{1+e^z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{1}{1+e^z}$$ ………………3 分.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{(1+e^z)^2} \cdot e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$ ……………………………5 分.

$$= -\frac{e^z}{(1+e^z)^3}$$ …………………………………..7 分.

2 解：$\iint_D \frac{\sin x}{x} dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} \frac{\sin x}{x} dy$ ---------------------------------------3 分

$$= \int_0^1 \frac{\sin x}{x} y \Big|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 (\sin x - x\sin x)dx$$ -----------4 分

$$= -\cos x \Big|_0^1 - \int_0^1 x\sin x dx = 1 - \sin 1$$ --------------------7 分

3. $r^2 + 3r + 2 = 0, r_1 = -2, r_2 = -1$ ……………………………………1 分

对应齐次方程通解：$Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$ …………………………..3 分

$y^* = bxe^{-x}, b = 1$ ……………………………………………………5 分

所求通解：$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + xe^{-x}$ ………………………………7 分.

4 $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$ ………………………………………………..1 分

$x = 1, \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$收敛; $x = -1, -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散.收敛域（-1，1]………3 分

$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x (-1)^{n-1} x^{n-1}dx$

$= \int_0^x \{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}\}dx$

$= \int_0^x \dfrac{1}{1+x}dx = \ln(1+x)$ ……….7 分.

5. 由$\ln(1-x-2x^2) = \ln(1+x)(1-2x) = \ln(1+x) + \ln(1-2x)$, −−−−−−−−−−1 分

且 $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$, −−−−−−−−−−−−−3 分

$x \in (-1,1]$ −−−−−−−−−−−−−−−−4 分

$\ln(1-2x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(-2x)^n}{n} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}x^n,\ x \in [-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$ −−−−6 分

所以$\ln(1-x-2x^2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} - \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n,\ x \in [-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$ −−−−7分

=

四 1 解：即求成本函数$c(x,\ y)$在条件$x + y = 8$下的最小值

构造辅助函数 $F(x,\ y) = x^2 + 2y^2 - xy + \lambda(x + y - 8)$（2 分）

解方程组 $\begin{cases} F'_x = 2x - y + \lambda = 0 \\ F'_y = -x + 4y + \lambda = 0 \\ F'_\lambda = x + y - 8 = 0 \end{cases}$ 解得 $\lambda = -7, x = 5, y = 3$ （6 分）

这唯一的一组解即为所求，当这两种型号的机床分别生产5台和3台时，总成本最小，最小成本为：

$c(5,\ 3) = 5^2 + 2\times 3^2 - 5\times 3 = 28$（万）（8 分）

2 利用二重积分的几何意义计算球面$x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$与抛物面$x^2 + y^2 = 2az(a > 0)$所围

公共部分立体的体积

解：$\because \begin{cases} x^2+y^2+z^2=3a^2 \\ x^2+y^2=2az \end{cases} \Rightarrow z=a$

所求立体在 xoy 面上的投影区域为：$D: x^2+y^2 \le 2a^2$ ---------------------------2 分

由二重积分的几何意义所求立体的体积为

$$V=\iint_D (\sqrt{3a^2-x^2-y^2}-\frac{x^2+y^2}{2a})d\sigma$$ ---------------------------------5 分

用极坐标计算得

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a(\sqrt{3a^2-r^2}-\frac{r^2}{2a})rdr$$ ---7 分

$$=2\pi a^3(\sqrt{3}-\frac{5}{6})$$ --8 分

五 证明：

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛,所以部分和 $s_m=\sum_{n=1}^{m}(a_n-a_{n+1})=a_1-a_{m+1}$ 有界,从而数列 $\{a_n\}$ 有界

即存在常数 $M>0$，使 $|a_n|<M(n=1,2,3,\cdots)$，故 $|a_nb_n|<Mb_n(n=1,2,3,\cdots)$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 是收敛的正项级数，由比较审敛法知，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

5 浙江理工大学 2002—2003 学年第 2 学期《高等数学 B2》期末 A 卷

一 选择题（每小题 5 分）

1 A 2 A 3 B 4 B 5 D 6 C

二 填空题（每小题 5 分）

1 $\underline{\dfrac{z}{x(z-1)}}$ 2 $\underline{\dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2}}$ 3 $\underline{\dfrac{5}{3}e^x-\dfrac{7}{6}e^{-2x}-x-\dfrac{1}{2}}$

4 $\underline{\dfrac{1-e^{-4}}{2}}$ 5 $\underline{y^2=x+1}$

三

解：$shx=x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots \qquad -\infty<x<+\infty$ （8 分）

四

解：$\iint_D y^2e^{xy}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y y^2e^{xy}dx$ （5 分）

$$=\int_0^1 (ye^{y^2}-y)dy=\frac{e}{2}-1$$ （5 分）

五

解 $\iiint\limits_{\Omega} zdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^{\sqrt{1-r^2}}zdz$ （7 分）

$=\frac{\pi}{4}$ （3 分）

六

解 $y''-y=\frac{1-\cos 2x}{2}$

对应的齐次方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$ （5 分）

通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cos 2x$ （5 分）

七

证 设 $u=cx-az, v=cy-bz$ 方程 $\varphi(u,v)=0$ 两边对 x 微分得

$\varphi_u(c-a\frac{\partial z}{\partial x})+\varphi_v(-b\frac{\partial z}{\partial x})=0, \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{c\varphi_u}{a\varphi_u+b\varphi_v}$，同理 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c\varphi_v}{a\varphi_u+b\varphi_v}$ （5 分）

故 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c.$ （2 分）

6 浙江理工大学《高等数学 B2》期末模拟卷一

一 选择题（每小题 5 分）

1 A 2 A 3 B 4 B 5 D 6 C

二 填空题（每小题 5 分）

1 $\frac{z}{x(z-1)}$

2 $\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$

3 $\frac{5}{3}e^x-\frac{7}{6}e^{-2x}-x-\frac{1}{2}$

4 $\frac{1-e^{-4}}{2}$

三

解： $shx=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$ $-\infty<x<+\infty$ （8 分）

四

解：$\iint\limits_D y^2e^{xy}dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^y y^2e^{xy}dx$　　（5 分）

$$=\int\limits_0^1(ye^{y^2}-y)dy=\frac{e}{2}-1$$　　（5 分）

六

解　$y''-y=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

对应的齐次方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$　　（5 分）

通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{10}\cos 2x$　　（5 分）

七

证　设 $u=cx-az, v=cy-bz$　　方程 $\varphi(u,v)=0$ 两边对 x 微分得

$\varphi_u(c-a\dfrac{\partial z}{\partial x})+\varphi_v(-b\dfrac{\partial z}{\partial x})=0,\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{c\varphi_u}{a\varphi_u+b\varphi_v}$，同理　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{c\varphi_v}{a\varphi_u+b\varphi_v}$　　（5 分）

故 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=c.$　　（2 分）

7 浙江理工大学《高等数学 B2》期末模拟卷二

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

1．D；　2．C；　3．C；　4．B；　5．B；　6．C

二、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

1．$\underline{e^{x+y^2}(dx+2ydy).}$；　2．-12xy；　3．0　　4．$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$.

5．$\underline{R=0\,;\{0\}}$

三（10 分）解：　特征方程为 $r^2+4r+5=0$，得特征根 $r_{1,2}=-2\pm i$，………. ...(5 分)

因而得对应齐次方程的通解为 $\bar{y}(x)=e^{-2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$，…………………………………(10 分)

四（8 分）解：$\iint\limits_D xydxdy=\int\limits_0^1 dx\int_{x^2}^x xydy$　……………………………………………（5 分）

$=\int_0^1 \frac{1}{2}(x^3-x^5)dx=\frac{1}{24}$ …………………………………………………………….(8 分)

五（10 分 ）解：$\because \lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$ ，得到收敛半径为 R=1. ………….(2 分)

当 x=1，级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}n$，一般项不趋于 0，因此它发散。同理，当 x=－1 级数也发散。

所以收敛域为（－1，1）。…………………………………………...(4 分)

令和函数为$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，两边由 0 到 x 积分，得

$\int_0^x s(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{x}{1-x}$， ……………………………………………………..(6 分)

两边对 x 求导，即得$s(x)=\frac{1}{(1-x)^2},x\in(-1,1).$ ………………………………..(8 分)

取$x=\frac{1}{2}$,则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}=4.$$

所以，$\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{1}{2})^n=\frac{1}{2}\cdot 4=2.$ ……………………………………………………..(10 分)

六（6 分） 解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y,\text{...}(2分)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+2y,\text{...}(4分)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=1\text{...}(6分)$$

七 因$\ln(1+x-2x^2)=\ln(1-x)+\ln(1+2x)$ ……………………………………… (1 分)

在$-1\le x<1$中,$\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n}x^n$ …………. (3 分)

而在 $-1<2x\le 1$,即 $-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}$ 中

$$\ln(1+2x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5\text{ 分})$$

因此，$\ln(1+x-2x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n-1}{n}x^n, x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. ……………(6 分)

八（5 分） 证明：由题意知积分区域为 D 由 $y=1, y$轴以及$y=x$ 所围城…………（1 分）

交换积分顺序有 $\int_0^1 dy\int_0^y e^{1-x}dx=\int_0^1 dx\int_x^1 e^{1-x}dy$ ……………………………………….(4 分)

$$=\int_0^1(1-x)e^{1-x}dx.\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5\text{ 分})$$

8 浙江理工大学《高等数学 B2》期末模拟卷三

一、选择题（每小题 5 分，共 30 分）

2．D；　2．B；　3．A；　4．B；　5．C；　6．D

二、填空题（每小题 5 分，共 25 分）

1．$\underline{e^{xy}(ydx+xdy).}$；　2．-6y；　3．0　　4．$D=\{(x,y)\,|\,x+y>0 且 x+y\ne 1\}$.

5．$\underline{R=\frac{1}{2};[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$

三．(10 分)解：先求对应的 $y''-8y'+16y=0$ 的通解。

特征方程为 $r^2-8r+16=0$，得特征根 $r_1=r_2=4$，

因而得对应齐次方程的通解为 $\bar{y}(x)=(c_1+c_2x)e^{4x}$，…………………………….. ...(5 分)

因 $\lambda=4$ 是特征方程的二重根，$P_0(x)=1$ 是零次多项式，故应设特解为 $y_*(x)=cx^2e^{4x}$,

代入原方程，得 $c=\frac{1}{2}$，于是特解为 $y_*(x)=\frac{1}{2}x^2e^{4x}$.

求导得 $y_*'(x)=2cx(1+2x)e^{4x}, y_*''(x)=2c(1+8x+8x^2)e^{4x}$.

故原方程的通解为 $y(x)=(c_1+c_2x+\frac{1}{2}x^2)e^{4x}$. ………………………………(10 分)

四、（8 分）解：$\iint\limits_D x^2ydxdy=\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}x^2ydy$ ……………………………………（5 分）

$$=\int_0^1\frac{1}{2}x^2(1-x^2)dx=\frac{1}{15}$$ ………………………………………..(8 分)

五、（10 分 ）解：$\because \lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$ ，得到收敛半径为 R=1. …………….(2 分)

当 x=1，级数成为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$，一般项不趋于 0，因此它发散。同理，当 x=－1 级数也发散。

所以收敛域为（－1，1）。…………………………………………………(4 分)

令和函数为$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，两边由 0 到 x 积分，得

$\int_0^x s(x)dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$，……………………………………………………..(6 分)

两边对 x 求导，即得$s(x)=\frac{1}{(1-x)^2},x\in(-1,1).$ ………………………(8 分)

取$x=\frac{1}{2}$,则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}=4.$$

所以，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(\frac{1}{2})^n=\frac{1}{2}\cdot 4=2.$ ……………………………………………(10 分)

六.（6 分） 解：设 $u=x+y,v=x-y,$则$z=f(u,v),$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'+f_2',$…………………………………………………………………(2分)

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_1'-f_2',$…………………………………………………………………(4分)

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=f_{11}'-f_{22}'$……………………………………………………………………(6分)

七.因

$$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1}{2(3+x)}=\frac{1}{4(1+\frac{x-1}{2})}-\frac{1}{8(1+\frac{x-1}{4})}$$ ……..

…(1 分)

$$在 -1<x<3 中, \frac{1}{4(1+\frac{\mathrm{x}-1}{2})}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x-1)^n$$ ………………………..… (3 分)

$$在 -3<x<5 中, \frac{1}{8(1+\frac{\mathrm{x}-1}{4})}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}(x-1)^n$$ …………………………(5 分)

因 此 ， $$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}})(x-1)^n,$$

(-1<x<3)………..(6 分)

八.（6 分） 证明：积分区域 D 为 y 轴, y=a, 以及 y=x 所围成…………………………(1 分)

交换积分次序有

$$\int_0^a dy\int_0^y e^{m(a-x)}f(x)dx=\iint_D e^{m(a-x)}f(x)dxdy=\int_0^a dx\int_x^a e^{m(a-x)}f(x)dy$$ …….

…...(4 分)

$$=\int_0^a (a-x)e^{m(a-x)}f(x)dx.$$ ..…….(5 分)

9 浙江理工大学《高等数学 B2》期末模拟卷四

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、D; 2、C; 3、D; 4、C; 5、A;

二、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1、$-\frac{1}{2}$； 2、$e^{-\arctan\frac{y}{x}}[(2x+y)dx+(2y-x)dy]$； 3、0; 4、$p>1, 0<p\le 1;$

5、$[0,4);$ 6、$y-3z=0$.

三、计算题（本题共 5 小题，每小题 7 分，满分 35 分）

1、解：设 $u=x+y,v=x-y,$则$z=f(u,v),$ ……………………………………（1 分）

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_1^{'}+f_2^{'},\text{…………………………………………………………}(3分)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_1^{'}-f_2^{'},\text{…………………………………………………………}(5分)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=f_{11}^{'}-f_{22}^{'}\text{…………………………………………………………………}(7分)$$

2、解：$\iint\limits_D x^2ydxdy=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}x^2ydy$ ……………………………………………………（4 分）

$$=\int_0^1\frac{1}{2}x^2(1-x^2)dx=\frac{1}{15}$$ ………………………………………………(7 分)

3、解：因为$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\cdots+\frac{x^n}{2^n}+\cdots\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}$，$|x|<2$，（4 分）

所以$f(x)=\left(\frac{1}{2-x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n+1}}$，$|x|<2$。 ……………………………..(7 分)

4、解：由曲线的方程容易得到，点$M(\frac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2})$对应的参数$t=\frac{\pi}{2}$，在 M 点处

$x_t^{'}|_{t=\frac{\pi}{2}}=(1-\cos t)|_{t=\frac{\pi}{2}}=1,y_t^{'}|_{t=\frac{\pi}{2}}=\sin t|_{t=\frac{\pi}{2}}=1,z_t^{'}|_{t=\frac{\pi}{2}}=(2\cos\frac{t}{2})|_{t=\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2},$ ………(3 分)

因此在这点处曲线的切线方程为 $\frac{x-(\frac{\pi}{2}-1)}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$ …………………(5 分)

曲线的法平面方程为$x+y+\sqrt{2}z=\frac{\pi}{2}+4.$ ……………………………………………………(7 分)

5、易求得该幂级数的收敛区间为$(-1,1).$ …………………(3 分)

$\forall x\in(-1,1)$，令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，则$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^n}{n})'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$ …(5 分)

注意到$S(0)=0$，$\therefore S(x)=\int_0^x S'(x)dx=\int_0^x\frac{dx}{1-x}=-\ln(1-x)$ ……………………(7 分)

四、应用题（本题共 2 题，满分 16 分）

1、解：设容器高为h，底圆半径为r，则$s=2\pi r^2+2\pi rh$，由于$V=\pi r^2 h$，则$h=\dfrac{V}{\pi r^2}$，代入上式得

$$s(r)=2\pi r^2+\frac{2V}{r},(0<r<+\infty), \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$\dfrac{ds}{dr}=\dfrac{4\pi}{r^2}(r^3-\dfrac{V}{2\pi})$，令$\dfrac{ds}{dr}=0$，有$r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$　　而$\dfrac{d^2s}{dr^2}|_{r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}=12\pi>0$，$\cdots\cdots\cdots$(8 分)

故$r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$是唯一的极小值，从而，当$r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}},h=2r$时，即有盖圆柱形容器的高与底圆直径相等时，用料最省。$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(10 分)

2、解：D:　$x^2+y^2\le 1$　　令$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (2 分)

V=$\iint\limits_D(2-2x^2-2y^2)d\sigma\quad =2\pi-2\int_0^1 r^3\int_0^{2\pi}d\theta=\quad\pi$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(6 分)

五、证明：积分区域 D 为 y 轴, y=a, 以及 y=x 所围成$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(1 分)

$$\int_0^a dy\int_0^y e^{m(a-x)}f(x)dx=\iint\limits_D e^{m(a-x)}f(x)dxdy=\int_0^a dx\int_x^a e^{m(a-x)}f(x)dy \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (4\text{ 分})$$

$$=\int_0^a(a-x)e^{m(a-x)}f(x)dx. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.(5\text{ 分})$$

10 浙江理工大学《高等数学 B2》期末模拟卷五

一 单选题（每小题 4 分，共 24 分）

1. A　　2. D　　3. A　　4. B　　5. C　　6. C

二 填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. $y''-4y'+4y=0$　　2. $\dfrac{x+y}{x-y}$　　3. $dz=\dfrac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}dx+dy$

4. $\dfrac{3}{2}$　　5. $[-2,4)$　　6. $\dfrac{1}{(1-x)^2}$，　$x\in(-1,1)$

三 计算题（每小题 6 分，共 24 分）

1.解：对应的齐次方程的通解是$\overline{y}=C_1+C_2e^{2x}$　　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$2 分

设特解为$y^*=Axe^{2x}$，代入原方程得$A=\dfrac{1}{2}$，从而特解为$y^*=\dfrac{1}{2}xe^{2x}$　$\cdots\cdots$1 分

故通解为 $y = C_1 + (C_2 + \frac{1}{2}x)e^{2x}$，由条件得 $C_1 = \frac{3}{4}$，$C_2 = \frac{1}{4}$ …………..2 分

所求特解为 $y = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(1 + 2x)e^{2x}$。 ………………………………….1 分

2.解：$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}f + \frac{y}{x}f' + y\varphi'$ ……………………………………3 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = yf'' + \varphi' + y\varphi''$ …………………………………..3 分

3.解：$\iint_D xydxdy = \int_{-1}^{2} ydy \int_{y^2}^{y+2} xdx = \frac{45}{8}$ ……………………………..6 分

4 解：$\because \left|\frac{\cos n\pi}{\sqrt{2n+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ 发散，$\therefore$ 原级数非绝对收敛。…..3 分

$\because \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$，而由莱布尼兹判别法可知，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ 发散，

$\therefore$ 原级数条件收敛。 …………………………………3 分

四（8 分）解：$\begin{cases} f'_x(x,y) = 2xy(4-x-y) = 0 \\ f'_y(x,y) = x^2(4-x-y) - x^2y = 0 \end{cases}$ 得 $x = 0,(0 \le y \le 6)$，点 $(4,0),(2,1)$

点 $(2,1)$ 是极大值点，极大值 $f(2,1) = 4$。 ……………………………3 分

在边界 $x = 0,(0 \le y \le 6)$ 和 $y = 0,(0 \le x \le 6)$ 上 $f(x,y) = 0$， ……………2 分

在边界 $x + y = 6$ 上，$y = 6 - x$ 代入得 $z = 2x^3 - 12x^2$，$(0 \le x \le 6)$， ……….2 分

得极小值为 $f(4,2) = -64$

最大值为 $f(2,1) = 4$，最小值为 $f(4,2) = -64$。 ………………………..1 分

五.（8 分）解：$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$ ………………………..2 分

$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-1}{2})^n$，$-1 < x < 3$， ……………………………2 分

$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-1}{3})^n$，$-2 < x < 4$ ……………………………………2 分

$\therefore f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}})(x-1)^n$，$-1 < x < 3$ ………..2 分

六 (8 分)解：联立球面方程与抛物面方程可得，$r=\sqrt{2}a$ ……………………………2 分

$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}a}(\sqrt{3a^2-r^2}-\frac{1}{2a}r^2)rdr=2\pi a^3(\sqrt{3}-\frac{5}{6})$ 。……………………6 分

七（4 分）证明：由 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛知 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ ，……………………………………2 分

从而 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}=\infty$ ，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ 发散。…………………………………………2 分

11 浙江理工大学《高等数学 B2》期末模拟卷六

一 填空题（每题 5 分，共 25 分）

1． $\{(x,y)\,|\,0<x^2+y^2,y^2\le 4\}$；

2． $e^y\cos e^y f_v+\frac{1}{y}f_w$；

3． $z_y=\frac{x3^{xy}\ln 3-xz\sin(yz)-1}{3z^2+xy\sin(yz)}$；

4． $\frac{1}{24}$；

5． $\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n,|x-1|<1$.

二 选择题（每题 5 分，共 25 分）

1．A； 2． D； 3． C； 4． C； 5．（C）.

三、解：设 (x_0,y_0,z_0) 为所求的切点，则

$$2x_0-2y_0+z_0+D=0\text{………①}$$

$$x_0{}^2+y_0{}^2+\frac{z_0{}^2}{2}=1\text{………②}$$

设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+\frac{z^2}{2}-1$，则

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)=2x_0,\ F_y'(x_0,y_0,z_0)=2y_0,\ F_z'(x_0,y_0,z_0)=z_0$$

由题设知$(2x_0,2y_0,z_0)//(2,-2,1)$，由此得$\frac{2x_0}{2}=\frac{2y_0}{-2}=\frac{z_0}{1}$，即$y_0=-x_0,z_0=x_0$. 代入

②得$\frac{5}{2}x_0^2=1$，即$x_0=\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$. 从而$y_0=\mp\frac{\sqrt{10}}{5}$，　$z_0=\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$，即切点为

$$\left(\frac{\sqrt{10}}{5},-\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{\sqrt{10}}{5}\right)\text{或}\left(-\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{\sqrt{10}}{5},-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$$ …………..(5 分)

将$x_0=\frac{\sqrt{10}}{5}$，　$y_0=-\frac{\sqrt{10}}{5}$，　$z_0=\frac{\sqrt{10}}{5}$代入①得$D=-\sqrt{10}$；

将$x_0=-\frac{\sqrt{10}}{5}$，　$y_0=\frac{\sqrt{10}}{5}$，　$z_0=-\frac{\sqrt{10}}{5}$代入①得$D=\sqrt{10}$

综上所述，当$D=-\sqrt{10}$或$D=\sqrt{10}$时，平面$2x-2y+z+D$与椭球面$x^2+y^2+\frac{z^2}{2}=1$

相切，切点为$\left(\frac{\sqrt{10}}{5},-\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$或$\left(-\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{\sqrt{10}}{5},-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$…………..……..….(10 分)

四、解：(因被积函数$e^{|z|}$只与z有关，用“先二后一”法方便)

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}e^{|z|}dv=\int_{-1}^{1}e^{|z|}dz\iint\limits_{D_z}dxdy$$ …………………………….(2 分)

$$=\int_{-1}^{1}e^{|z|}\pi(1-z^2)\,dz$$ …………………………….(4 分)

$$=2\pi\int_{0}^{1}e^{z}(1-z^2)\,dz$$ …………………………….(6 分)

$$=2\pi$$ …………………………….(10 分)

其中$D_z: x^2+y^2\le 1-z^2$.

五、解：对$f(x)$进行偶延拓

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0, & n=2,4,6,\cdots \\ -\dfrac{4}{n^2\pi} & n=1,3,5,\cdots\end{cases}$$，…………………………（4 分）

$a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)dx=\pi+2$. ……………………………(6 分)

所以 $x+1=\dfrac{\pi}{2}+1-\dfrac{4}{\pi}\left(\cos x+\dfrac{1}{3^2}\cos 3x+\dfrac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right),\quad (0\le x\le\pi)$ ……(10 分)

六、解：

令 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$，其收敛区间为 $(-1,1)$ ……….(4 分)

$s'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\dfrac{1}{1-x^2}$ …………（6 分）

所以 $s(x)=\int_0^x\dfrac{1}{1-x^2}dx=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x},\quad (-1<x<1)$ ………………(10 分)

七、证明：记 $P(x,y)=xy^2-y\sin x, Q(x,y)=x^2y+\cos x$，因为

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=2xy-\sin x=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在整个 xoy 平面上恒成立，又 $\dfrac{\partial P}{\partial y},\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 xoy 平面上连续，所以

$(xy^2-y\sin x)dx+(x^2y+\cos x)dy$ 在整个 xoy 平面上是某个二元函数的全微分…..(5 分)

为求 $u(x,y)$，选择从 $O(0,0)$ 到 $A(x,0)$ 再到 $B(x,y)$ 的折线为积分路径，则

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(xy^2-y\sin x)dx+(x^2y+\cos x)dy$$

$$=\int_{OA}(xy^2-y\sin x)dx+(x^2y+\cos x)dy+\int_{AB}(xy^2-y\sin x)dx+(x^2y+\cos x)dy$$

$$=\int_0^y(x^2y+\cos x)dy=\frac{1}{2}x^2y^2+y\cos x$$ ……………………...(10 分)

12 浙江理工大学《高等数学 B2》期末模拟卷七

（有部分题目和卷 11 重复，在试卷里删去了，但是答案里没有删去，望谅解）

一 填空题（每题 5 分，共 25 分）

1．$\{(x,y)\,|\,0<x^2+y^2, y^2\le 4\}$；

2． $e^{y}\cos e^{y} f_{v}+\frac{1}{y} f_{w}$；

3、 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4} e^{x^2+y^2}dxdy=\pi(e^4-1)$

4、微分方程 $xy'=y\ln y$ 的通解为 $y=e^{cx}$

5、设 $\sum$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的内侧，则曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+y^2)dydz$ ＝0

二 选择题（每题 5 分，共 25 分）

1．A； 2．C； 3．D； 4．C； 5．（C）.

三 计算曲线积分（10 分）

$\int_L (e^{x}\sin y-2y)dx+(e^{x}\cos y-2)dy$, 其中 L 为上半圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2, y\ge 0$, 沿逆时针方向。

用格林公式

补充 L1, y=0,x 从 0 到 2a, (2 分)

在 L+L1 上应用格林公式

$\int_{L+l}(e^{x}\sin y-2y)dx+(e^{x}\cos y-2)dy, =2\iint dxdy=\pi a^2$ (6 分)

$\int_L(e^{x}\sin y-2y)dx+(e^{x}\cos y-2)dy=\int_{L+l}(e^{x}\sin y-2y)dx+(e^{x}\cos y-2)dy$

$-\int_l(e^{x}\sin y-2y)dx+(e^{x}\cos y-2)dy=\pi a^2$ （2 分）

四、计算曲面积分（10 分）

$\oiint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, 其中 $\sum$ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧。

利用高斯公式 （2 分）

$\oiint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy, =3\iint x^2+y^2+z^2dxdy$ （5 分）

$=\frac{12}{5}\pi a^5$ （3 分）

五、解：对 $f(x)$ 进行偶延拓

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0, & n=2,4,6,\cdots\\ -\frac{4}{n^2\pi} & n=1,3,5,\cdots\end{cases}$$，…………………………（4 分）

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)dx=\pi+2$$. ……………………………(6 分)

所以 $x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$, $(0\le x\le\pi)$……(10 分)

六、解：

令 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，其收敛区间为 $(-1,1)$……….(4 分)

$$s'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$$…………（6 分）

所以 $s(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$， $(-1<x<1)$ ………………(10 分)

七、证明：记 $P(x,y)=xy^2-y\sin x,Q(x,y)=x^2y+\cos x$，因为

$\frac{\partial P}{\partial y}=2xy-\sin x=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在整个 xoy 平面上恒成立，又 $\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 xoy 平面上连续，所以

$(xy^2-y\sin x)dx+(x^2y+\cos x)dy$ 在整个 xoy 平面上是某个二元函数的全微分…..(5 分)

为求 $u(x,y)$，选择从 $O(0,0)$ 到 $A(x,0)$ 再到 $B(x,y)$ 的折线为积分路径，则

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(xy^2-y\sin x)dx+(x^2y+\cos x)dy$$

$$=\int_{OA}(xy^2-y\sin x)dx+(x^2y+\cos x)dy+\int_{AB}(xy^2-y\sin x)dx+(x^2y+\cos x)dy$$

$$=\int_0^y(x^2y+\cos x)dy=\frac{1}{2}x^2y^2+y\cos x$$ ……………………...(10 分)

13 浙江理工大学《高等数学 B2》期末模拟卷八

一、选择题 **CCDBC** CDDCA BC

二、填空题

1． $\iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,d\sigma$　　2．(0,6)　　3． $\int_0^a dy\int_{-y}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$　　4．$(-1,1)$

5． $y''-2y'+y=0$　　6． $y=(x+c)\cos x$　　7． $x\cos(xy)-2x\cos(xy)\sin(xy)$

8. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

9. $p>\frac{5}{3}$　　10． $y=-2e^{-2x}$　　11． $(0,4)$　　12． $\frac{\pi^2}{8}$

三、计算题

1. 解答：1. D：1≤x≤3　x-1≤y≤2，改变积分顺序，

$$I=\int_0^2 dy\int_1^{y+1}\sin y^2 dx=\frac{1}{2}(1-\cos 4)$$

2. 解答：$I=\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\ln(1+\rho^2)\rho d\rho=\frac{\pi}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}$。

3. 解答：$F(x,y,z)=x+y-z-e^z$, 则：$F_x=1,F_y=1,F_z=-1-e^z$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{1}{1+e^z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{1}{1+e^z},\ \ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{(1+e^z)^2}\cdot e^z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{e^z}{(1+e^z)^3}.$$

4. 解答：

$$\iint\limits_D\frac{\sin x}{x}dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^x\frac{\sin x}{x}dy=\int_0^1\frac{\sin x}{x}y\Big|_{x^2}^{x}dx=\int_0^1(\sin x-x\sin x)dx=1-\sin 1$$

5. 解答：$r^2+3r+2=0,r_1=-2,r_2=-1$，对应齐次方程通解：

$Y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}$. $y^*=bxe^{-x},b=1$

所求通解：$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}+xe^{-x}$.

6. 解答：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，$x=1,\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$收敛; $x=-1,-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.收敛域（-1，1]，

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(-1)^{n-1}x^{n-1}dx$$

$$=\int_0^x\{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}\}dx$$

$$=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)$$

7. 解答： $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$, $R=\infty$,收敛区间为 $\left(-\infty,+\infty\right)$

设

$$S\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(n-1\right)!}x^{n-1}=xS_1\left(x\right)\text{，其中}S_1\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(n-1\right)!}x^{n-1}$$

$$\int_0^x S_1\left(x\right)dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(n-1\right)!}x^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{n}{\left(n-1\right)!}x^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\left(n-1\right)!}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{\left(n-1\right)!}=xe^x$$

所以 $S_1\left(x\right)=\left(xe^x\right)'=\left(1+x\right)e^x$ 。故 $S\left(x\right)=xS_1\left(x\right)=x\left(1+x\right)e^x$

8. 解答： $\ln(1-x-2x^2)=\ln(1+x)(1-2x)=\ln(1+x)+\ln(1-2x)$

所以 $\ln(1-x-2x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n,\ x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

四、应用题

1. 解答：即求成本函数 $c(x,\ \ y)$ 在条件 $x+y=8$ 下的最小值

构造辅助函数 $F(x,\ \ y)=x^2+2y^2-xy+\lambda(x+y-8)$

解方程组 $\begin{cases}F'_x=2x-y+\lambda=0\\F'_y=-x+4y+\lambda=0\\F'_\lambda=x+y-8=0\end{cases}$ 解得 $\lambda=-7,x=5,y=3$

这唯一的一组解即为所求，当这两种型号的机床分别生产5台和3台时，总成本最小，最小成本为：

$c(5,\ \ 3)=5^2+2\times3^2-5\times3=28$ （万）

注：还有其他方法，请大家自己考虑一下！然后两种方法比较一下，你更倾向于哪种解题方法？

2．利用二重积分的几何意义计算球面 $x^2+y^2+z^2=3a^2$ 与抛物面 $x^2+y^2=2az(a>0)$ 所围公共部分立体的体积

解：所求立体在 xoy 面上的投影区域为： $D:x^2+y^2\le2a^2-$

$$V=\iint_D\left(\sqrt{3a^2-x^2-y^2}-\frac{x^2+y^2}{2a}\right)dxdy \qquad =\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a(\sqrt{3a^2-r^2}-\frac{r^2}{2a})rdr$$

$$=2\pi a^3(\sqrt{3}-\frac{5}{6})$$

五、证明题

1. 证明：因为正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛，所以$\lim_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim_{n\to\infty}b_n=0$

又$(a_n+b_n)^2=a_n^2+b_n^2+2a_nb_n$，由比较判别法$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_n}=0,\lim_{n\to\infty}\frac{b_n^2}{b_n}=0,\lim_{n\to\infty}\frac{2a_nb_n}{a_n}=0$，

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 也收敛。

2. 证明：因为$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$收敛，所以部分和$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_1-a_{n+1}$的极限存在

故$\{S_n\}$有界，从而数列$\{a_n\}$有界。

即存在常数$M>0$，使$|a_n|<M(n=1,2,3,\cdots)$，故$|a_nb_n|<Mb_n(n=1,2,3,\cdots)$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$是收敛的正项级数，由比较判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$绝对收敛。

14 浙江理工大学《高等数学 B2》期末模拟卷九

一 选择题（4 分 / 题 共 24 分）

1. B　　2、C　　3、A　　4、C　　5、D　　6、D

二 填空题（4 分/题 共 24 分）

1. —5　　2、$y''-4y'+4y=0$　　3、$e^{xy}(ydx+xdy)$

4、0　　5、2　　6、$\frac{1}{2}$，$\left[-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$

三 计算题（6 分/ 题 共 30 分）

1.解：通解：$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}-\frac{1}{2}x+\frac{11}{8}$

2．解： $\frac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2f_1'+4y^2f_{11}''-4xye^{xy}f_{12}''+x^2e^{2xy}f_{22}''+x^2e^{xy}f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4xyf_{11}''+2(x^2-y^2)e^{xy}f_{12}''+xye^{2xy}f_{22}''+e^{xy}(1+xy)f'$$

3．解： $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yF_2'}{yF_1'+F_2'}$ $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{zF_2'-y^2F_1'}{y(yF_1'+F_2')}$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{yF_2'}{yF_1'+F_2'}dx+\frac{zF_2'-y^2F_1'}{y(yF_1'+F_2')}dy$$

4．解：$\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{x^2}^{x}e^{\frac{y}{x}}dy=\frac{3}{8}e-\frac{1}{2}\sqrt{e}$

5．解：$\because \left|\frac{\cos n\pi}{\sqrt{2n+1}}\right|=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$发散，所以不绝对收敛。

又$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{\sqrt{2n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$，$u_n>u_{n+1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$收敛，所以原级数条件收敛。

四（8 分）

解:解:$\because \begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\x^2+y^2=8z^2\end{cases}\Rightarrow z=\pm1$ 所求立体在xoy面上的投影区域为:$D:x^2+y^2\le 8$，

$\therefore 0\le r\le 2\sqrt{2}$， $0\le\theta\le 2\pi$

$$V=2\iint\limits_D\left(\sqrt{9-x^2-y^2}-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{8}}\right)d\sigma=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{9-r^2}-\frac{\sqrt{2}}{4}r\right)rdr=24\pi$$

五.（8 分）

解：由$\ln(1-x-2x^2)=\ln(1+x)(1-2x)=\ln(1+x)+\ln(1-2x)$

且 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$，$x\in(-1,1]$

$$\ln(1-2x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-2x)^n}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n,\ x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

所以$\ln(1-x-2x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n,\ x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

六（6 分）证明：$\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1+\frac{1}{n})^n u_n}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$，$\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ 绝对收敛

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\left|(1+\frac{1}{n})^n u\right|$收敛，即级数$\sum_{n=0}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n u_n$ 绝对收敛。