

# 离散数学概论

## 第一章 命题逻辑

课程QQ号： **689423416**

金耀 数字媒体技术系

fool1025@163.com

13857104418

# 如何学好（离散）数学

- ❖ **多思考**：如概念、定义、定理、公式等用途是什么？  
与学过的知识有什么联系？其直观意义是什么？
- ❖ **多做题**：熟悉、巩固、内化数学知识。
- ❖ **多应用**：深化数学知识，训练数学思维，掌握数学方法。

**“学习数学最好的方式就是使用它，使用它越多，你就觉得它越有用，越有趣，学得就越好，也越快，越扎实。”**

# 知识点回顾

- ❖ 命题的定义 (2个要点)
- ❖ 命题的分类 (2大类)
- ❖ 命题的符号化 (5个联结词)
- ❖ 命题公式的赋值 (2种) 与分类 (3种)

# 常见问题

- ❖ 命题变项  $(p, q, r)$  是命题吗？
- ❖ 为什么命题前件为假，整个命题为真？
- ❖ 充分条件与必要条件（如果天晴，我就去打球。）

## 例：命题翻译

❖ 你可以在寝室使用网络，仅当你成绩达标或者你不是大一新生。

$$(p \rightarrow (q \vee \neg r))$$

❖ 如果你身高不足1米，那么你不能乘坐过山车，除非你已年满16周岁。

$$(p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q \quad q \rightarrow (\neg p \vee r)$$

# 第一章 命题逻辑

1.1 命题及符号化基本概念

1.2 命题等值演算

1.3 范式

1.4 逻辑电路



### 本讲主要内容

- 等值式
- 基本等值式
- 等值演算与置换规则
- 应用实例

# 命题公式与代数公式

❖ 常元与变元

❖ 赋值

❖ 运算符 (优先级)

❖ 定义域与值域 (离散 v.s. 连续)

❖ 运算律 (等值律)



## 例：判断下列公式类型

$$(q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p \quad \neg(\neg p \vee q) \wedge q$$

**运用真值表验证：**

$p$	$q$	$(q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$	$\neg(\neg p \vee q) \wedge q$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

## 1. 等值式

❖ **定义** 若等价式  $A \leftrightarrow B$  是重言式，则称  $A$  与  $B$  **等值**，记作  $A \leftrightarrow B$ ，并称  $A \leftrightarrow B$  是**等值式**。

❖ **第一种方法**：用真值表可验证两个公式是否等值。

请验证： $p \rightarrow (q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow r$$

# 关系符号与运算符号

❖  $\Leftrightarrow$  是关系符号，表示两个命题公式之间的（等价）**关系**（具有自反性、对称性、传递性）；

❖  $\neg \vee \wedge \rightarrow \leftrightarrow$  等连接词是运算符号，其特点是具有**运算**结果。

## 2. 基本等值式

**双重否定律** :  $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

**等幂律**:  $A \vee A \Leftrightarrow A, A \wedge A \Leftrightarrow A$

**交换律**:  $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A, A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

**结合律**:  $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

**分配律**:  $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

分配律注意符号



## 基本等值式(续)

$$\neg(x \geq a \parallel y \geq b) \Leftrightarrow (x < a \ \&\& \ y < b)$$

**德·摩根律:**  $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

**吸收律:**  $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A, \quad A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

**零律:**  $A \vee 1 \Leftrightarrow 1, \quad A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

**同一律:**  $A \vee 0 \Leftrightarrow A, \quad A \wedge 1 \Leftrightarrow A$

**排中律:**  $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$

**矛盾律:**  $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$

德·摩根 De Morgan



英国数学家  
(1806-1871)

## 基本等值式(续)

**蕴涵等值式:**  $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

**假言易位:**  $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$

**等价等值式:**  $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

**等价否定等值式:**  $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

**归谬论:**  $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

**注意:**

$A, B, C$  代表任意的命题公式

牢记这些等值式是继续学习的基础

$A$	$B$	$A \rightarrow B$	$\neg A \vee B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$\Leftrightarrow B \vee \neg A$$

$$\Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

$$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B)$$

$$\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$$

$$\Leftrightarrow (\neg A \wedge (B \vee \neg B))$$

$$\Leftrightarrow \neg A \wedge 1$$

$$\Leftrightarrow \neg A$$

### 3. 等值演算与置换规则

**等值演算：**

由已知的等值式推演出新的等值式的过程

**置换规则：** 若  $A \Leftrightarrow B$ , 则  $\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$

**等值演算的基础：**

- (1) 等值关系的性质：自反、对称、传递
- (2) 基本的等值式
- (3) 置换规则

# 代入规则

❖ 设 $A$ 是重言式，对其所有相同的命题变项都用同一命题公式进行代换，则所得结果仍是重言式，即重言式的值不依赖于命题变项值的变化。

$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

$$(s \rightarrow t) \vee ((s \rightarrow t) \wedge q) \Leftrightarrow (s \rightarrow t)$$



## 4. 应用举例——证明两个公式等值

**课堂练习1:** 证明  $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$

证  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r)$  (蕴涵等值式, 置换规则)

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r$  (结合律, 置换规则)

$\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r$  (德·摩根律, 置换规则)

$\Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$  (蕴涵等值式, 置换规则)

## 4. 应用举例——证明两个公式不等值

课堂讨论:

证明:  $p \rightarrow (q \rightarrow r) \not\equiv (p \rightarrow q) \rightarrow r$

**方法一** 真值表法 (自己证)

**方法二** 观察赋值法. 容易看出000, 010等是左边的成真赋值, 是右边的成假赋值.

**方法三** 用等值演算先化简两个公式, 再观察.

## 4. 应用举例——判断公式类型

### 课堂练习2:

用等值演算法判断下列公式的类型

$$(1) \quad q \wedge \neg(p \rightarrow q)$$

解  $q \wedge \neg(p \rightarrow q)$

$$\Leftrightarrow q \wedge \neg(\neg p \vee q) \quad (\text{蕴涵等值式})$$

$$\Leftrightarrow q \wedge (p \wedge \neg q) \quad (\text{德·摩根律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge (q \wedge \neg q) \quad (\text{交换律, 结合律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge 0 \quad (\text{矛盾律})$$

$$\Leftrightarrow 0 \quad (\text{零律})$$

该式为矛盾式.

## 4. 应用举例——判断公式类型

### 课堂练习3:

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

解  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \leftrightarrow (q \vee \neg p) \quad (\text{蕴涵等值式})$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee q) \quad (\text{交换律})$$

$$\Leftrightarrow 1$$

该式为重言式.

## 4. 应用举例——判断公式类型

### 课堂练习4:

$$((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge r$$

解  $((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge r$

$$\Leftrightarrow (p \wedge (q \vee \neg q)) \wedge r \quad (\text{分配律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge 1 \wedge r \quad (\text{排中律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge r \quad (\text{同一律})$$

该式为可满足式.

**总结：** $A$ 为矛盾式当且仅当 $A \Leftrightarrow 0$

$A$ 为重言式当且仅当 $A \Leftrightarrow 1$

**说明：**演算步骤不唯一,应尽量  
使演算短些

# 第一章 命题逻辑

## 1.1 命题及符号化基本概念

## 1.2 命题等值演算

## 1.3 范式

## 1.4 逻辑电路



### 本讲主要内容

- 析取范式与合取范式
- 主析取范式与主合取范式
- 主析取范式的用途



# 引子：二次曲线类型的判定

给定二次曲线的一般形式，判断其类型：

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

转化为二次曲线的标准型：

$$\frac{X^2}{A'} + \frac{Y^2}{B'} = 1 \quad (\text{椭圆/双曲线})$$

$$Y = A'X^2 \quad (\text{抛物线})$$



# 1. 析取范式与合取范式

❖ **文字**:命题变项及其否定的总称.

❖ **简单析取式**:有限个文字构成的析取式.

如  $p, \neg q, p \vee \neg q, p \vee q \vee r, \dots$

❖ **析取范式**:由有限个简单合取式组成的析取式  $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_r$ , 其中

$A_1, A_2, \dots, A_r$  是简单合取式.

❖ **公式A的析取范式**:与A等值的析取范式

# 1. 析取范式与合取范式

❖ **简单合取式**: 有限个文字构成的合取式

如:  $p, \neg q, p \wedge \neg q, p \wedge q \wedge r, \dots$

❖ **合取范式**: 由有限个简单析取式组成的合取式

$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_r$ , 其中  $A_1, A_2, \dots, A_r$  是简单析取式

❖ **公式  $A$  的合取范式**: 与  $A$  等值的合取范式

# 1.析取范式与合取范式

**说明：**

**单个文字既是简单析取式，又是简单合取式**

**$p \wedge \neg q \wedge r, \neg p \vee q \vee \neg r$ 既是析取范式，又是合取范式**

**(为什么?)**

# 1.析取范式与合取范式

**定理** 任何命题公式都存在着与之等值的析取范式.

求公式 $A$ 的范式的步骤:

(1) 消去 $A$ 中的 $\rightarrow, \leftrightarrow$  (若存在)

(2) 否定联结词 $\neg$ 的内移或消去

(3) 使用分配律

$\wedge$ 对 $\vee$ 分配 (析取范式)

$\vee$ 对 $\wedge$ 分配 (合取范式)

公式的范式存在, 但不唯一。

# 1.析取范式与合取范式

**例 求下列公式的析取范式与合取范式**

$$(1) A=(p \rightarrow \neg q) \vee \neg r$$

**解**  $(p \rightarrow \neg q) \vee \neg r$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee \neg r \quad (\text{消去} \rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee \neg r \quad (\text{结合律})$$

这既是A的**析取范式** (由3个简单合取式组成的析取式), 又是A的**合取范式** (由一个简单析取式组成的合取式)

# 1.析取范式与合取范式

## 课堂练习1:

$$B=(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r$$

解  $(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r$

$$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\rightarrow r \quad (\text{消去第一个}\rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee\neg q)\vee r \quad (\text{消去第二个}\rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r \quad (\text{否定号内移——德·摩根律})$$

这一步已为**析取范式** (两个简单合取式构成)

继续:  $(p\wedge q)\vee r$

$$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r) \quad (\vee\text{对}\wedge\text{分配律})$$

这一步得到**合取范式** (由两个简单析取式构成)

# 1. 主析取范式与主合取范式

**定义** 在含有 $n$ 个命题变项的简单合取式(简单析取式)中, 若每个命题变项均以文字的形式出现且仅出现一次, 称这样的简单合取式(简单析取式)为**极小项(极大项)**。

设文字的集合为 $\{p, q, r, \dots, \neg p', \neg q', \neg r' \dots\}$ ,  
则该集合的**极小值**为:

$$p \wedge q \wedge r \wedge \dots \wedge \neg p' \wedge \neg q' \wedge \neg r' \wedge \dots,$$

该集合的**极大值**为:

$$p \vee q \vee r \vee \dots \vee \neg p' \vee \neg q' \vee \neg r' \vee \dots。$$

# 1. 主析取范式与主合取范式

## 说明：

- ❖  $n$ 个命题变项产生 $2^n$ 个极小项和 $2^n$ 个极大项
- ❖  $2^n$ 个极小项（极大项）均互不等值
- ❖ 在极小项和极大项中文字均按下标或字母**顺序**排列
- ❖ 用 $m_i$ 表示第 $i$ 个极小项，其中 $i$ 是该极小项成真赋值的十进制表示。  
用 $M_i$ 表示第 $i$ 个极大项，其中 $i$ 是该极大项成假赋值的十进制表示，  
 $m_i(M_i)$ 称为极小项(极大项)的名称。
- ❖  $m_i$ 与 $M_i$ 的关系： $\neg m_i \Leftrightarrow M_i$ ,  $\neg M_i \Leftrightarrow m_i$



# 1.主析取范式与主合取范式

由 $p, q$ 两个命题变项形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	$m_0$	$p \vee q$	0 0	$M_0$
$\neg p \wedge q$	0 1	$m_1$	$p \vee \neg q$	0 1	$M_1$
$p \wedge \neg q$	1 0	$m_2$	$\neg p \vee q$	1 0	$M_2$
$p \wedge q$	1 1	$m_3$	$\neg p \vee \neg q$	1 1	$M_3$

# 1.主析取范式与主合取范式

课堂讨论-由 $p, q, r$ 三个命题变项形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	$m_0$	$p \vee q \vee r$	0 0 0	$M_0$
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	$m_1$	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	$M_1$
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	$m_2$	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	$M_2$
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	$m_3$	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	$M_3$
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	$m_4$	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	$M_4$
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	$m_5$	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	$M_5$
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	$m_6$	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	$M_6$
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	$m_7$	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	$M_7$

# 1. 析取范式与主析取范式

- ❖  $n$ 个命题变项产生 $2^n$ 个极小项和 $2^n$ 个极大项
- ❖  $2^n$ 个极小项（极大项）均互不等值
- ❖ 在极小项和极大项中文字均按下标或字母顺序排列
- ❖  $m_i$ 与 $M_i$ 的关系:  $\neg m_i \Leftrightarrow M_i, \neg M_i \Leftrightarrow m_i$

# 1. 析取范式与主析取范式

**主析取范式**: 由极小项构成的析取范式

**主合取范式**: 由极大项构成的合取范式

例如,  $n=3$ , 命题变项为  $p, q, r$  时,

$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow m_1 \vee m_3$  是主析取范式

$(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \Leftrightarrow M_1 \wedge M_5$  是主合取范式

**$A$  的主析取范式**: 与  $A$  等值的主析取范式

**$A$  的主合取范式**: 与  $A$  等值的主合取范式.

## 2. 主析取范式与主合取范式

**定理** 任何命题公式都存在着与之等值的主析取范式和主合取范式, 并且是唯一的.

用等值演算法求公式的主范式的步骤:

- (1) 先求析取范式 (合取范式).
- (2) 将不是极小项 (极大项) 的简单合取式 (简单析取式) 化成与之等值的若干个极小项的析取 (极大项的合取), 需要利用同一律 (零律)、排中律 (矛盾律)、分配律、幂等律等.
- (3) 极小项 (极大项) 用名称 $m_i$  ( $M_i$ ) 表示, 并按角标从小到大顺序排序.

## 2. 主析取范式与主合取范式

**例1 求 $\neg(p \rightarrow q) \vee \neg r$ 的主析取范式与主合取范式**

**解** (1)  $\neg(p \rightarrow q) \vee \neg r \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee \neg r$

$$p \wedge \neg q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge 1 \quad \text{同一律}$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge (\neg r \vee r) \quad \text{排中律}$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \quad \text{分配律}$$

$$\Leftrightarrow m_4 \vee m_5$$

$$\neg r \Leftrightarrow (\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge \neg r \quad \text{同一律, 排中律}$$

$$\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \vee \neg p \wedge q \wedge \neg r \vee p \wedge \neg q \wedge \neg r \vee p \wedge q \wedge \neg r$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_6 \quad \text{分配律}$$

**得**  $\neg(p \rightarrow q) \vee \neg r \Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6$

**可记作**  $\Leftrightarrow \Sigma(0, 2, 4, 5, 6)$

## 2. 主析取范式与主合取范式

**课堂练习-**  $\neg(p \rightarrow q) \vee \neg r \Leftrightarrow (p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$

$$p \vee \neg r \Leftrightarrow p \vee 0 \vee \neg r$$

同一律

$$\Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg q) \vee \neg r$$

矛盾律

$$\Leftrightarrow (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)$$

分配律

$$\Leftrightarrow M_1 \wedge M_3$$

$$\neg q \vee \neg r \Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee \neg q \vee \neg r$$

同一律, 矛盾律

$$\Leftrightarrow (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$$

分配律

$$\Leftrightarrow M_3 \wedge M_7$$

$$\text{得 } \neg(p \rightarrow q) \vee \neg r \Leftrightarrow M_1 \wedge M_3 \wedge M_7$$

可记作

$$\Leftrightarrow \Pi(1,3,7)$$

## 快速求法——“查漏补缺”

设公式含有 $n$ 个命题变项, 则长度为 $k$ 的简单合取式可展开成 $2^{n-k}$ 个极小项的析取.

例如 公式含 $p, q, r$

$$\begin{aligned} q &\Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \\ &\Leftrightarrow m_2 \vee m_3 \vee m_6 \vee m_7 \end{aligned}$$

长度为 $k$ 的简单析取式可展开成 $2^{n-k}$ 个极大项的合取

$$\begin{aligned} \text{例如 } p \vee \neg r &\Leftrightarrow (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \\ &\Leftrightarrow M_1 \wedge M_3 \end{aligned}$$



## 2. 主析取范式与主合取范式

**例2 (1)** 求  $A \Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee r$  的主析取范式

**解 用快速求法**

**(1)**  $\neg p \wedge q \Leftrightarrow$

$$\neg p \wedge \neg q \wedge r \Leftrightarrow$$

$$r \Leftrightarrow$$



这个已经是析取范式

## 2. 主析取范式与主合取范式

**课堂讨论-** 求  $B \Leftrightarrow \neg p \wedge (p \vee q \vee \neg r)$  的主合取范式

$$\text{解 } \neg p \Leftrightarrow (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$$

$$\Leftrightarrow M_4 \wedge M_5 \wedge M_6 \wedge M_7$$

$$p \vee q \vee \neg r \Leftrightarrow M_1$$

$$\text{得 } B \Leftrightarrow M_1 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6 \wedge M_7 \Leftrightarrow \Pi(1, 4, 5, 6, 7)$$

### 3. 主析取范式的用途

#### (1) 求公式的成真赋值和成假赋值

设公式 $A$ 含 $n$ 个命题变项,  $A$ 的主析取范式有 $s$ 个极小项, 则 $A$ 有 $s$ 个成真赋值, 它们是极小项下标的二进制表示, 其余 $2^n-s$ 个赋值都是成假赋值.

例如  $\neg(p \rightarrow q) \vee \neg r \Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6$

成真赋值:

000, 010, 100, 101, 110;

成假赋值:

001, 011, 111

### 3. 主析取范式的用途

#### (2) 判断公式的类型

设 $A$ 含 $n$ 个命题变项,

则 $A$ 为**重言式**当且仅当 $A$ 的主析取范式含 $2^n$ 个极小项,  $A$ 为**矛盾式**当且仅当 $A$ 的主析取范式不含任何极小项,记作 $0$ 。

$A$ 为**可满足式**当且仅当 $A$ 的主析取范式中至少含一个 极小项

### 3. 主析取范式的用途

**例3** 用主析取范式判断公式的类型：

$$(1) A \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q) \wedge q \quad (2) B \Leftrightarrow p \rightarrow (p \vee q) \quad (3) C \Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$$

$$\text{解 } (1) A \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge q \Leftrightarrow 0 \quad \text{矛盾式}$$

$$(2) B \Leftrightarrow \neg p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \quad \text{重言式}$$

$$\begin{aligned} (3) C &\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r \\ &\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \\ &\quad \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7 \quad \text{非重言式的可满足式}$$

### 3. 主析取范式的用途

#### (3) 判断两个公式是否等值

**例4** 用主析取范式判断下面2组公式是否等值:

**(1)**  $p$  与  $(\neg p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

$$\text{解 } p \Leftrightarrow p \wedge (\neg q \vee q)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow m_2 \vee m_3$$

$$(\neg p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee (p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow m_2 \vee m_3$$

$$\text{故 } p \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$$

### 3. 主析取范式的用途

(2)  $(p \wedge q) \vee r$  与  $p \wedge (q \vee r)$

解:  $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$\vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow m1 \vee m3 \vee m5 \vee m6 \vee m7$

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow m5 \vee m6 \vee m7$

故  $(p \wedge q) \vee r \not\Leftrightarrow p \wedge (q \vee r)$

## 课堂讨论

### (4) 应用主析取范式分析和解决实际问题

**例5** 某单位要从A,B,C三人选派若干人出国考察,需满足下述条件:

- (1) 若A去,则C必须去;  $p \rightarrow r$ ,
- (2) 若B去,则C不能去;  $q \rightarrow \neg r$ ,
- (3) 若C不去,则A或B可以去。  $\neg r \rightarrow (p \vee q)$

问有几种可能的选派方案?

**解** 记 $p$ :派A去,  $q$ :派B去,  $r$ :派C去

**求下式的成真赋值**

$$A = (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \neg r) \wedge (\neg r \rightarrow (p \vee q))$$



# 课堂讨论

## 求A的主析取范式

$$A = (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \neg r) \wedge (r \vee p \vee q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_2 \vee m_5$$

成真赋值: 001, 010, 101

结论: 方案1 派C去, 方案2 派B去  
方案3 C去, 而A,B都不去

## 思考

- ❖  $A$  中含  $n$  个命题变项，其主析取范式含  $s$  个极小项，则  $A$  有多少个成真赋值和成假赋值？其主合取范式有多少个极大项？
- ❖  $n$  个命题变项可产生多少个不同的主析取范式？
- ❖ 如何根据公式的主析取范式求其主合取范式？

## 命题逻辑应用：逻辑谜题

一个岛上居住着两类人——骑士和无赖。骑士说的都是真话，无赖只会说假话。你碰到两个人A和B。如果A说“B是骑士”，B说“我们是两类人”，判断A和B分别是那类人。

设  $p$  : A是骑士;  $q$  : B是骑士。

$a$  :  $q$ 为真。

$b$  :  $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 为真。

则有如下两种情况：

- 1) 若 $p$ 真，则 $q, a, b$ 都为真，但 $b$ 为假，则矛盾；
- 2) 若 $p$ 假，则 $q, a, b$ 都为假，成立，则A与B都是无赖。

# 命题逻辑应用：数独游戏

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6							7	
5								
7			3					5
	1			9				
							6	

$$\bigwedge_{i=1}^9 \bigwedge_{n=1}^9 \bigvee_{j=1}^9 p(i, j, n)$$

$$\bigwedge_{j=1}^9 \bigwedge_{n=1}^9 \bigvee_{i=1}^9 p(i, j, n)$$

$$\bigwedge_{r=0}^2 \bigwedge_{s=0}^2 \bigwedge_{n=1}^9 \bigvee_{i=1}^3 \bigvee_{j=1}^3 p(3r + i, 3s + j, n)$$

$$p(i, j, n) \rightarrow p(i, j, n') \quad n \neq n'$$

## 1.4 组合电路

❖ 组合电路

❖ 逻辑门

与门，或门，非门，与非门，或非门

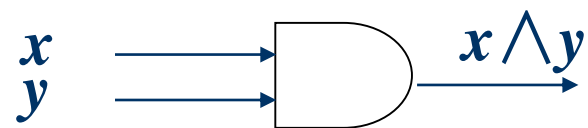
❖ 奎因-莫可拉斯基方法

# 组合电路

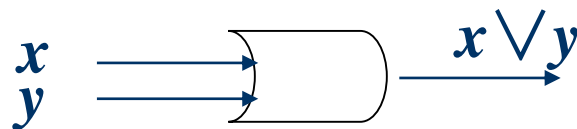
**逻辑门：**实现逻辑运算的电子元件.

**与门，或门，非门.**

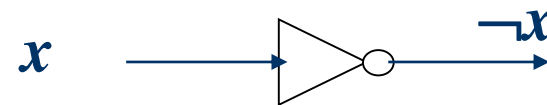
**组合电路：**实现命题公式的由电子元件组成的电路.



与门



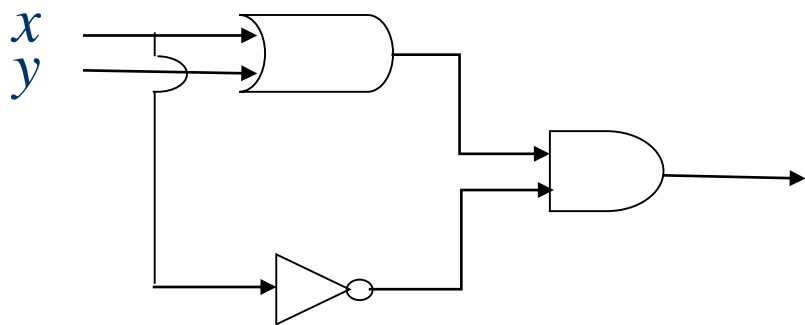
或门



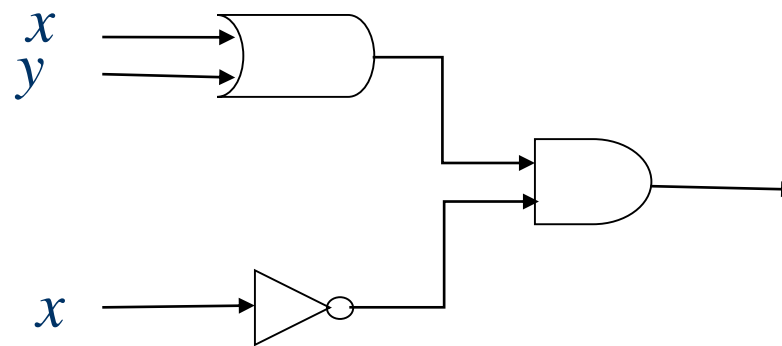
非门

# 组合电路的例子

$(x \vee y) \wedge \neg x$  的组合电路



第一种画法



第二种画法

## 例

楼梯的灯由上下2个开关控制，要求按动任何一个开关都能打开或关闭灯。试设计一个这样的线路。

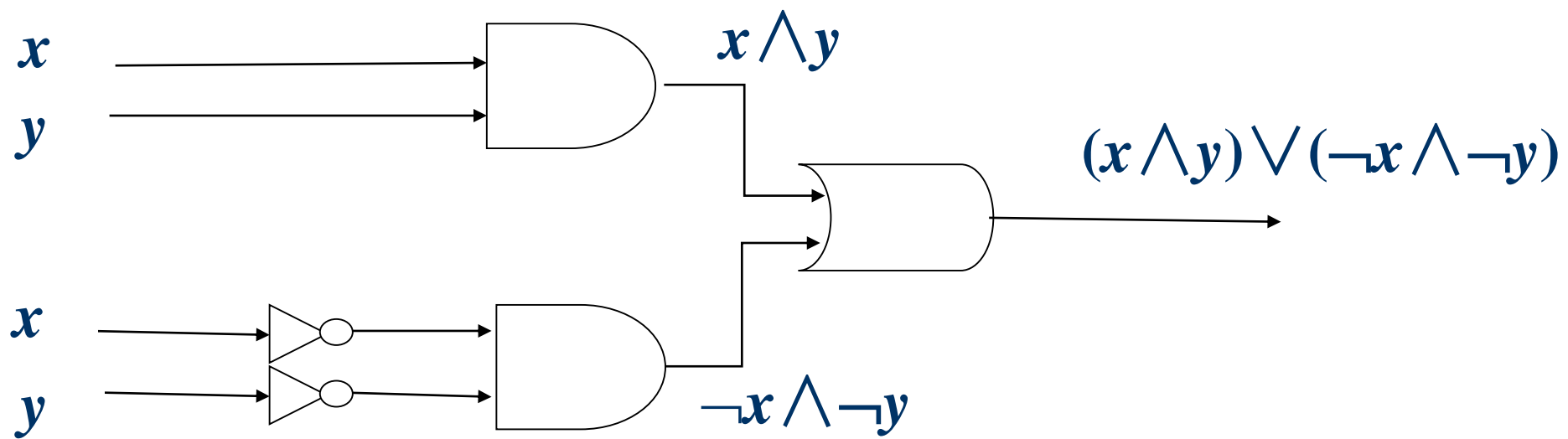
解  $x, y$ : 开关的状态,  $F$ : 灯的状态, 打开为1, 关闭为0.  
不妨设当2个开关都为0时灯是打开的。

$$F = m_0 \wedge m_3 = (\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y)$$

$x$	$y$	$F(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



## 例(续)



# 设计组合电路

- 步骤:** 1.构造输入输出表(问题的真值函数),  
2. 写出主析取范式,  
3. 化简.

**最简展开式:** 包含最少运算的公式

**例** 当且仅当  $x=y=z=1$  或  $x=y=1$ 且  $z=0$  时输出1.

$$F = m_6 \vee m_7 = (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z)$$

4个与门,1个或门和一个非门

$$F \Leftrightarrow x \wedge y \quad \text{一个与门}$$

## 奎因-莫可拉斯基方法 (\*)

1. 合并简单合取式生成所有可能出现在最简展开式中的项.
2. 确定最简展开式中的项.

**例 求下述公式的最简展开式：**

$$\begin{aligned} F = & (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \\ & \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \\ & \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \\ & \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \end{aligned}$$

## 例子（续）

解

编号	极小项	角码	标记	
1	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$	1110	*	
2	$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	1011	*	
3	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	0111	*	
4	$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$	1010	*	
5	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$	0101	*	
6	$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	0011	*	
7	$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$	0001	*	

## 例子(续)

第一批				第二批		
合并项	项	表示串	标记	合并项	项	表示串
(1,4)	$x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$	1-10		(3,5,6,7)	$\neg x_1 \wedge x_4$	0- -1
(2,4)	$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$	101-				
(2,6)	$\neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	-011				
(3,5)	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_4$	01-1	*			
(3,6)	$\neg x_1 \wedge x_3 \wedge x_4$	0-11	*			
(5,7)	$\neg x_1 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$	0-01	*			
(6,7)	$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_4$	00-1	*			

标记\*表示该项已被合并

## 例子(续)

项	覆盖	运算符数
$x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$	(1,4)	3
$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$	(2,4)	3
$\neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	(2,6)	3
$\neg x_1 \wedge x_4$	(3,5,6,7)	2

**选择(1,4), (2,4)和(3,5,6,7), 或者(1,4), (2,6)和(3,5,6,7).**

**最简展开式为**

$$F \Leftrightarrow (x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_4)$$

**或**

$$F \Leftrightarrow (x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge x_4)$$

# 课外习题

❖ 课后习题：9、11、15、20

❖ 答题派题目：如截图

1. 1.8 用等值演算法证明下列等值式。

- (1)  $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \Leftrightarrow p$
- (2)  $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$
- (3)  $\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q))$

(30)

2. 1.12 求下列命题公式的主析取范式、主合取范式、成真赋值、成假赋值。

- (1)  $(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \wedge q \wedge r)$
- (2)  $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \vee p)$
- (3)  $\neg(p \rightarrow q) \wedge q \wedge r$

(30)

3. 1.15 某勘测队有3名队员。有一天取得一块矿样，3人的判断如下。

甲说：这不是铁，也不是铜。

乙说：这不是铁，是锡。

丙说：这不是锡，是铁。

经实验室鉴定后发现，其中一人两个判断都正确，一人判断对一半，另一个人判断全错了。根据以上情况判断矿样的种类并指出谁的判断全对？谁的判断对一半？谁的判断全错？

(20)

4. 1.17 输入输出的关系如表1-2和表1-3所示，试写出实现它们的组合电路的合式公式，并用奎因-莫可拉斯基方法化简。

(20)

表 1-2

$x$	$y$	$z$	$F$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

表 1-3

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$F$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$F$
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	0