创琦杂谈 CQ TALK

高等数学 A1

浙江理工大学期末试题 题型汇编

（试卷册）

学校：__________________

专业：__________________

班级：__________________

姓名：__________________

学号：__________________

（此试卷为 2022 级第一版）

目 录

写在前面

这已经是我第三次写序言了，每年坚持写序言（前两次的序言可见微信公众号“创琦杂谈”查看，也欢迎大家关注哈）已成为一种习惯。

今天是计算机学院团展的日子，我坐在自己的办公座位，写着自己的代码，手机在一边放着团展的节目，突然感觉一种幸福的感觉涌上心头。那也是我美好的大学时光啊！工作的压力貌似已经压的我面目全非，到宿舍的第一件事是想休息，身为大一的你体会不到这种劳累，因为刚开学迎接你们的是各式的社团活动，还有每次下学前可以在学生活动中心看到各式各样的摆摊，可以互动，还可以拿奖品。大学的设施齐全，运动、读书、研究……你的各种爱好将在这里释放，在这里你可以来一场说走就走的旅行（当然，遵守疫情防控是第一），你可以结交很多志同道合的朋友，在这里你可以轻松度过很长时间，大学这美好的四年正徐徐向你展开！

大学的幸福生活要珍惜，也要努力学习，虽说大学成绩不像高考成绩一样可以改变我们的人生轨迹（当然，很多人也需要大学成绩，比如转专业和出国），但好好学习是充实生活、是丰富学识、是提高能力的第一步。

很多人都会坚持不下来，这是一大困难，我们要试着克服。进入大学后，我们的生活更加丰富多彩，课外时间也更加充实了。可很多人对学习的态度变弱了。每次当我反思自己这一天有多少时间是在认真投入学习时，结果令我吃惊并且失望，学习时长竟然能用手指头数地过来，当我去想时间都去那儿了的时候，我又感到一丝空虚。我现在在写序言，想到了 2021 届的学子们也快开学了，心里还是有很多感慨的。此时此刻，我的脑海里浮现的是我曾经追过的五点半的那缕阳光，为了背单词、背文科题目背到口干舌燥却浑然不知；中午饭过后总想着要在班里多学习一会儿，结果每次回宿舍午休都得迟到；刷数学、理综题目时刷到忘了时间，忘了身边的一切；和小伙伴们争论一道题争到面红耳赤……当我高考完过后再去看自己做过的题目时，发现那一张张卷子有过我青春的回忆。时间，带走的是少年的张扬与不羁，带不走的是少年们为了自己的理想而不顾一切地追求自己所热爱的一切的坚韧、不屈、执着与勇气。我和别人唠嗑时总是会说我高三那时候怎么怎么放松，怎么怎么不努力，我觉得我发扬了中国了一大精神：谦虚的精神。但真正的生活，没有走过怎又能知道呢？当高考结束铃声响起，当录取志愿书递送到你的手边，当拖着行李箱迈进校园，少年成熟了，敢于追求的梦也越来越清晰了，热爱学习，热爱生活，本就是一个 18 岁的花季少年身上最发光发亮的地方。

关于写高数试卷，我在这里给大家提几点建议哈。

1、重视课本。重视课本的知识点、习题、概念定理的应用辨析。课本是基础，是提升的地基。做完试卷后你会发现，期末考点万变不离其宗，也有多道试题来源于课本。课本的每道题目存在都有其必然的道理，希望大家在期末考前不要扔掉课本；

2、学着去总结题型。总结题型是脱离题海游上岸的船舶，总结之后，你会发现考点也就只有那么些。总结时，大家要注意这个知识的应用背景、注意事项等等；

3、认真做题。这是我必须强调的，大学期末卷子没有高考难，想取得高分态度一定要端正，认真去学习每个类型的题目，去学习每个知识点。

在这里希望大家可以认真做卷子，争取期末取得理想的成绩！

由于时间紧，录入时可能出现错误，也可能有其他大大小小的错误，恳请大家批评指正。

张创琦
2022 年 10 月 22 日

更多信息

试卷整理人：张创琦　　　　　　微信公众号：创琦杂谈

创琦杂谈**网站**：www.cqtalk.cn（暂未上线，预计 2023.3 上线）

试卷版次：2023 年 2 月 2 日 第一版 第 1 次发行

本人联系 QQ 号：1020238657（勘误请联系本人）

创琦杂谈学习交流群（QQ 群号：749060380）　　cq 数学物理学习群（QQ 群号：967276102）

cq 计算机编程学习群（QQ 群号：653231806）　　cq 考研学习群（QQ 群号：687924502）

创琦杂谈公众号优秀文章：

曾发布了《四级备考前要注意什么？创琦请回答！（一）》、《走！一起去春季校园招聘会看看，感受人间真实》、《送给即将期末考试的你》、《那些你不曾在选课中注意到的事情》、《身为大学生，你的劳动价值是多少？》（荐读）、《如何找到自己的培养计划》以及计算机学院、信息学院本科阶段多个专业的分流经验分享（来自 20 多位学长学姐的亲身经历与分享，文章过多，就不贴链接啦），公众号也可以帮忙大家发布相关社会实践的问卷。

我最近在联手身边同学开发网站和 APP，争取给大家提供更优质的学习讨论平台。

QQ 群：

“创琦杂谈学习交流群”主要为大家更新各种科目的资料，群里可以讨论问题、也可以发布社会实践的调查问卷互相帮助，目前群成员已有不到 1500 人，相信您的问题会有人解答的。

“cq 数学物理学习群”更适合讨论数学物理相关的题目等，数学科目包括但不限于：高等数学、线性代数、概率论与数理统计等，物理包括但不限于：普通物理、普通物理实验。

“cq 计算机编程学习群”适用于讨论编程语言相关内容，包括但不限于：C 语言、C++语言、Java 语言、matlab 语言、python 语言等，也可以讨论计算机相关课程，包括但不限于：数据结构、算法、计算机网络、操作系统、计算机组成原理等。

考试承诺：本人郑重承诺：本人已阅读并且透彻地理解《浙江理工大学考场规则》，愿意在考试中自觉遵守这些规定，保证按规定的程序和要求参加考试，如有违反，自愿按《浙江理工大学学生违纪处分规定》有关条款接受处理。

资料说明：此资料为高数 A1 试卷册，如需答案册或者高等数学 A1 期末历年试题、高等数学 A2 期中和期末试题、线性代数试题、概率论试题、物理部分题库以及专业课知识相关试题等等，欢迎加入创琦杂谈学习交流群。

B 站上同步讲解部分经典题目（正在录制和更新中，敬请期待）（本人 B 站名称为“张创琦”，头像为一朵白色的花）

最终感谢我的老师、我的朋友，还要感谢各位朋友们对我的大力支持。

本人尽全力为大家寻找、整理数学考试资料，但因时间仓促以及本人水平有限，本练习册中必有许多不足之处，还望各位不吝赐教。

第一部分 极限

知识点 1：极限性质

1.（2021，2019 期末）

设$x_n \le a_n \le y_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$，$\{x_n\}$，$\{y_n\}$和$\{a_n\}$均为数列，则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$（　　）

A.存在且等于零　　　　B. 存在但不一定等于零

C.一定不存在　　　　D.不一定存在

2.（2011，2008 期末）以下说法正确的是（　　）

A．开区间上连续函数取不到最大值与最小值

B．若 $f(x)$ 在某点无定义，则该点极限必不存在

C．若$\lim\limits_{x\to a} f(x)$存在，$\lim\limits_{x\to a} g(x)$不存在，则$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$必不存在

D．数列单调且有界是数列极限存在的充分非必要条件

3.（2003 期末）函数 $f(x) = x\sin x$ （　　）

A．在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界　　　　B．在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界

C．当 $x\to\infty$ 时为无穷大　　　　D．当 $x\to\infty$ 时有有限的极限值

4.（2021 期中）设数列$\{a_n\}$单调减小，$\{b_n\}$单调增加，且$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$，则（　　）

A．$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$　　　　B．$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$

C．$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$不存在　　　　D．$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$不存在，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$存在

5．设数列通项为 $x_n = \begin{cases} \dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & 若n为奇数, \\ \dfrac{1}{n}, & 若n为偶数, \end{cases}$ 当 $n\to\infty$ 时，$\{x_n\}$ 是（　　）.

*A.*无穷大量.　*B.*无穷小量.　*C.*有界变量.　*D.* 无界变量

6.（2012 期中）数列 $\{a_n\}$ 无界是数列发散的（　　）

A．必要非充分条件　　B．充分非必要条件　　C．充要条件　　D．非充分非必要条件

7.（2011 期中）设数列 x_n 和 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，则（　　）

(A) x_n 收敛，y_n 必发散；　　　　(B) x_n 无界，y_n 必有界；

(C) x_n 有界，y_n 必为无穷小；　　　　(D) $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，y_n 必为无穷小；

8.（2010 期中）函数 $f(x)$ 在 a 点的去心领域内有界，是极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在的（　　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件　　C．充要条件　　D．非充分非必要条件

9.（2010 期中）下面四个论述中正确的是（　　）

A．若 $x_n \ge 0(n=0,1,\cdots)$，且 $\{x_n\}$ 单调递减，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $a>0$；

B．若 $x_n > 0(n=0,1,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $a>0$；

C．若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$，则 $x_n \ge 0(n=0,1,\cdots)$；

D．若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$，则存在正整数 N，当 n>N 时，都有 $x_n \ge \dfrac{a}{2}$

10.（2021 期末）

设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to a} h(x)$ 不存在，则下列四个命题中正确的是（　　）

A. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]$ 不存在.　　B. $\lim\limits_{x\to a}[g(x)+h(x)]$ 不存在.

C. $\lim\limits_{x\to a}[g(x)\cdot h(x)]$ 不存在.　　D. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ 不存在.

知识点 2：无穷大、无穷小、常见等价无穷小

1.（2020 期末）若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}} = e$，则 k =（　　）

A．k =− 2　　B．k =− 1　　C．k = 1　　D．k = 2

2.（2019 期末）

下列各式正确的是（　　）

A. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1$　　B. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

C. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e$　　D. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x} = -e$

3.（2017 期末）$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{\sin x}}.$ =________________

4.（2016 期末）当 $x\to 0$，则 $x\sin x$ 是 $\ln(1+x)$ 的（　　）

(A)．高阶无穷小　　(B)．低阶无穷小　　(C)．同阶无穷小　　(D)．等价无穷小.

5.（2015 期末）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x} + x\sin\dfrac{1}{x}\right) =$ ________________。

6.（2013 期末）下列各式正确的是（　　）

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\tan(x^2-1)}{x-1} = 2$，（2）$\lim\limits_{x\to 0} x\arctan\dfrac{1}{x} = 1$，（3）$\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\dfrac{1}{x} = 1$，（4）$\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

A．（2） B．（1） C．（1）（3） D．（1）（2）（3）

7．（2012 期末）设 $f\left(x\right)=\int_0^{\sin x}\sin\left(t^2\right)dt$ ，$g\left(x\right)=\sin x-x$ ，则当 $x\to 0$ 时，正确的是（ ）

A．$f\left(x\right)$ 与 $g\left(x\right)$ 是等价无穷小 B．$f\left(x\right)$ 是比 $g\left(x\right)$ 高阶的无穷小

C．$f\left(x\right)$ 与 $g\left(x\right)$ 是同阶无穷小 D．$g\left(x\right)$ 是比 $f\left(x\right)$ 高阶的无穷小

8．（2012 期末）当 $x\to x_0$ 时，$f\left(x\right)$ 是比 $g\left(x\right)$ 高阶的无穷小，则当 $x\to x_0$ 时，无穷小 $f\left(x\right)+g\left(x\right)$ 与无穷小 $g\left(x\right)$ 的关系是（ ）无穷小

A．高阶 B．低阶 C．同阶非等价 D．等价

9．（2010 期末）当 $x\to 0$ 时，若无穷小量 ax^2+bx 与 $\sin x$ 等价，则 a,b 的值一定为（ ）

（A）$a=0,b=1$ （B）$a=0,b$ 为任意数 （C）$b=1,a$ 为任意数 （D）a,b 为任意数

10．（2006 期末，2005 期中）设当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x),\beta(x)$ 都是无穷小($\beta(x)\neq 0$)，则当 $x\to x_0$ 时，下列表达式中不一定为无穷小的是（ ）.

(A) $\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}$; (B) $\alpha^2(x)+\beta^3(x)\sin\dfrac{1}{x}$; (C) $\ln(1+\alpha(x)\beta(x))$; (D) $|\alpha(x)|+|\beta(x)|$

11．（2003 期末）设 $f(x),\varphi(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内连续，且当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的高阶无穷小，则当 $x\to 0$ 时，$\int_0^x f\left(t\right)\sin t dt$ 是 $\int_0^x t\varphi\left(t\right)dt$ 的（ ）

A．低阶无穷小 B．高阶无穷小 C．同阶非等阶无穷小 D．等阶无穷小

12．（期末模拟）设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$ ，则 $a=$__________

13．（期末模拟）设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时，有（ ）

A．$f(x)$ 与 x 是等价无穷小. B．$f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小.

C．$f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小. D．$f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小.

14．（2011 期末）设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arctan x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x^p}=c\neq 0$ ，求 p,c 。

15.（2012 期中）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a$（$a$ 为有限数），则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(x)}{x}=$________

16.（2008 期中）下列等式成立的是（　　）

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=0$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　C. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$

17.（2005 期中）当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则 $a=$____________

知识点 3：函数的连续性和间断点

1.（2020 期末）设 $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+4x+3}$，则$f(x)$的第一类间断点是___________________。

2.（2018 期末）设 $f(x)=\begin{cases}(x+2)\cos\dfrac{1}{x^2-4}, & x\neq\pm 2\\ 0, & x=\pm 2\end{cases}$，则 $f(x)$（　　）

A．在点 $x=\pm 2$ 都连续　　B．在 $x=2$ 连续，在点 $x=-2$ 间断

C．在点 $x=\pm 2$ 都间断　　D．在 $x=2$ 间断，在点 $x=-2$ 连续

3.（2018 期末）若 $f(x)=\begin{cases}(1-2x)^{\frac{1}{x}}, x<0\\ \ln(1+x)+k, x\geq 0\end{cases}$ 处处连续，则 $k=$_________.

4.（2012 期末）若 $f(x)$ 是奇函数且 $f'(0)$ 存在，则 $x=0$ 是函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 的（　　）

A．可去间断点　　B. 无穷间断点　　C. 连续点　　D. 振荡间断点

5.（2011，2008 期末）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为__________。

6.（2020 期中）判断函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$ 有（　　）

A．1 个可去间断点，1 个跳跃间断点；　　C．2 个跳跃间断点；

C．1 个可去间断点，1 个无穷间断点；　　D．2 个无穷间断点.

8.（2019 期中）曲线 $y=\frac{x^2+x}{x^2-1}$ 的无穷间断点有_______条。

9.（2018 期中）点 $x=0$ 是函数 $y=\dfrac{3^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}+1}$ 的（　　）

A．连续点　　　　B．跳跃间断点　　　　C．可去间断点　　　　D．第二类间断点

11．已知函数 $f(x)=\begin{cases} x,\ x\le 0, \\ \dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n+1}\le x\le \dfrac{1}{n}, n=1,2,\cdots. \end{cases}$ 则（　　）.

$A.\ x=0$为$f(x)$的第一类间断点.

$B.\ x=0$为$f(x)$的第二类间断点.

$C.\ f(x)$在$x=0$处连续但不可导.

$D.\ f(x)$在$x=0$处可导.

13.（2012 期中）设 $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{\left(1+x\right)x^2}, x<0 \\ \dfrac{x-1}{x^2+x-2}, x\ge 0 \end{cases}$，则 $f\left(x\right)$ 的间断点有（　　）

A．$x=1, x=-1$　　　　B．$x=0, x=1$　　　　C．$x=0, x=-1$　　　　D．没有

14.（2011 期中）函数 $f(x)=\dfrac{x\ln(x+3)}{x^2+3x+2}$ 的可去间断点为________________

15.（2003 期中）设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}$，则 $x=1$ 为 $f(x)$ 的（　　）

A．连续点；　　　B．无穷间断点；　　　C．跳跃间断点；　　　D．可去间断点

16.（2003 期中）函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的不连续点的全体是________________

7.（2016 期末）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，求$f(x)$的间断点，并说明间断点的类型。

10.（2018 期中）讨论函数 $f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+x^3e^{nx}}{x+e^{nx}}$ 的连续性（n 为正整数）。

12．设 $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{|x|(x^2-4)}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点的类型。

知识点 4：求极限

1.（2016 期末）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}}{e^x-1}\right)=$ __________

2.（2010 期末）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{n}\left[\cos^2\dfrac{\pi}{n}+\cos^2\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\cos^2\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right]=$ __________

3.（期末模拟）已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，则（　　）

A．$a=1,b=1$　　　　B．$a=-1,b=1$

C．$a=1,b=-1$　　　　D．$a=-1,b=-1$

4.（2020，2008 期末）计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$。

5.（2018 期末）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin 2x}-1\right)}$.

6.（2015 期末）计算极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$.

7.（2014 期末）求 $\lim\limits_{\mathrm{x}\to+\infty}\mathrm{x}^3\mathrm{e}^{-\mathrm{x}^3}$

8.（2013 期末）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right]$

9.（2012 期末）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]$.

10.（2008 期末）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+(n-1)}+\frac{1}{n+n}\right)$

11.（期末模拟）求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$

12.（2020，2018 期中）计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{(e^x-1)(\sqrt[3]{1+x^2}-1)}$.

13.（2019 期中）计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-sinx}$

14.（2019 期中）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}\right]$

15.（2018 期中）设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2x^2+5}{x-1}+ax+b)=3$，则 $a=$_________ ，$b=$________.

16.（2018 期中）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\dfrac{2}{\sqrt{n^4+2}}+\cdots+\dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)=$_____________.

17.（2018 期中）已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{x}}=e$，则 a=__________.

18．（2018 期中）计算 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

19．（2017 期中）设 $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-\sqrt[3]{1-x^3}-ax-b)=0$ ，则 $a=$_________ ， $b=$________.

20．（2017 期中）极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$

21．（2017 期中）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n})$.

22．（2016 期中）计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{\sin2x}$

23．（2016 期中）计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+\ln(1-x)-1}{x-\arctan x}$

24.（2015 期中）$\lim_{n\to\infty}[n(tan\frac{1}{n}+tan\frac{3}{n}+tan\frac{5}{n}+\cdots+tan\frac{999}{n})]$

25.（2015 期中）计算极限 $\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^x-1-x)^2}{\ln(x+x^2\sin^3x)-\ln x}$

26.（2015 期中）计算极限 $\lim_{x\to a}(\frac{\sin x}{\sin a})^{\frac{1}{x-a}}$

26.（2014 期中）计算极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$

27.（2014 期中）求数列极限 $\lim_{n\to\infty}a_n$，其中 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

28.（2012 期中）设$0<a<b$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=$（　　）

A．0　　B．1　　C．a　　D．b

29.（2012 期中）$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2xe^x\right)^{\frac{1}{x}}=$（　　）

30.（2012 期中）求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$。

31.（2012 期中）已知$\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)$存在，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f\left(x\right)\sin x}-1}{e^{3x}-1}=2$，求$\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)$。

32.（2011 期中）计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n}\right)$

33.（2011 期中）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\cos x-1}{\sin 2x}$

34.（2010 期中）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4\sin^2\dfrac{x}{2}}}{x}$

35．（2006 期中）$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=$ [　　]

A. e；　　B. e^{-1}；　　C. $e+1$；　　D. $e^{-1}+1$

36．（2006 期中）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}}(x-1)^{\tan x}=$__________，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{-}}(x-1)^{\tan x}=$__________

37．（2006 期中）数列$\{x_n\}$通项$x_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

38．（2006 期中）计算$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x})$

39．（2005 期中）$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x+2}=$

40．（2005 期中）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$.

41.（2005 期中）$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{\frac{x}{2}-1}$.

42.（2005 期中）$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$

43.（2005 期中）已知$\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)$存在，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f\left(x\right)\sin x}-1}{e^{3x}-1}=2$，求$\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)$

44.（2005 期中）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^{x}-1}\right)$

45.（2004 期中）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}+\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}})=$

46.（2004 期中）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})\qquad (x>0)$

47.（2004 期中）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$

48.（2004 期中）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^{3}}$

49.（2004 期中）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-x}{x^{2}\sin x}$

50.（2003 期中）计算$\lim\limits_{n\to\infty}n^{2}\sin\dfrac{2}{n^{2}}$

51．（2003 期中）计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x})$

52．（2003 期中）求 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}},(a>0,b>0,c>0)$

第二部分 导数

知识点 1：切线、导数的定义和几何意义、连续和可导的关系

1.（2020 期末）若曲线 $y=x^2+ax+b$ 与 $y=x^3+x$ 点$(1,2)$处相切，则 a,b 的值为（　　）

A. $a=0, b=-2$　　B. $a=2, b=-1$　　C. $a=1, b=-3$　　D. $a=-3, b=1$

2.（2019 期末）

设函数$f(x)$在 x=0 处可导，$f(0)=0$,则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$（　　）

A. $-2f'(0)$　　B. $-f'(0)$　　C. $f'(0)$　　D. 0

3.（2019 期末）

若 $f(x)=\begin{cases} b(1+\sin x)+a+2, & x>0 \\ e^{ax}-1, & x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则 $a=$________ $b=$________；

4.（2017 期末）设函数 $f(x)=\begin{cases} x^k\sin\frac{1}{x}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处下列叙述错误的是（　　）

A. $k>0$ 时连续　　B. $k>1$ 时连续不可导　　C. $k>1$ 时可导　　D. $k>2$ 时导函数连续

5.（2016 期末）设 $f(x)=\begin{cases} \frac{1-\cos 2x}{x^2} & x\ne 0 \\ k & x=0 \end{cases}$，当 $k=$__________时，$f(x)$ 连续。

6.（2015 期末）曲线 $y=x\ln x$ 上在点________________处的切线与直线 $x-y+1=0$ 平行。

7.（2014 期末）设$f(x)$可导，且$f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则当$\Delta x\to 0$ 时，$f(x)$在x_0点处的微分 dy是（　　）

A 与Δx等价的无穷小　　B 与Δx同阶的无穷小

C 比Δx低阶的无穷小　　D 比Δx高阶的无穷小

8.（2013 期末）若函数 $f(x)$ 在 x_0 处存在左、右导数，则 $f(x)$ 在 x_0 点（　　）

（A）可导　　（B）不可导　　（C）连续　　（D）不连续

9.（2013 期末）设周期函数 $f(x)$ 在实数集 R 内可导，周期为 4，又 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处切线斜率为（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）0　　（C）-1　　（D）-2

10.（2013 期末）假设函数 $f(x)=\begin{cases} ax+b, x<1 \\ \ln x, x\ge 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 点可导，则 $a=$__________，$b=$__________。

11．（2012 期末）若 $f\left(x\right)=\begin{cases}b\left(1+\sin x\right)+a+2, & x>0\\ e^{ax}-1, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则 $a=$________ $b=$_______;

12．（2012 期末）设 $f(x)$ 对任何 x 满足 $f\left(1+x\right)=2f\left(x\right)$，且 $f\left(0\right)=1$，$f'\left(0\right)=C$（常数），则 $f'\left(1\right)=$（　　）

A．$-C$　　　B．$2C$　　　C．$\dfrac{C}{2}$　　　D．不存在

13．（2012 期末）若 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2, & x\le 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导，则 $a=$________ $b=$_______;

14．（2011 期末）直线 $4x-y-6=0$ 与曲线 $y=x^4-3$ 相切，则切点的坐标是（　　）。

(A) $(1,-2)$；　(B) $(-2,-1)$ ；　(C) $(-1,-2)$；　(D) $(-2,1)$；

15．（2011 期末）已知 $f'\left(3\right)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(3-h\right)-f\left(3\right)}{2h}=$________________。

16．（2010 期末）设函数 $f\left(x\right)$ 在点 $x=0$ 的某领域内连续，且 $f\left(0\right)=0$，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f\left(x\right)$（　　）

（A）不可导　（B）可导，且 $f'\left(0\right)\neq 0$　（C）取得极小值　（D）取得极大值

17．（2008 期末）设在 $\left[0,1\right]$ 上，$f''(x)<0$，则 $f'(0)$，$f'(1)$，$f(1)-f\left(0\right)$ 或 $f(0)-f\left(1\right)$ 几个数的大小顺序为（　　）

(A) $f'(0)>f'(1)>f\left(1\right)-f\left(0\right)$　　(B) $f'\left(1\right)>f\left(0\right)-f\left(1\right)>f'(0)$

(C) $f\left(1\right)-f\left(0\right)>f'(0)>f'\left(1\right)$　　(D) $f'(0)>f\left(1\right)-f\left(0\right)>f'\left(1\right)$

18．（2006 期末）设 $f(x)$ 在任意 x 满足 $f(1+x)=af(x)$，且有 $f'(0)=b$，a，b 为非零常数，则（　　）

(A) $f'(1)$ 不存在　　(B) $f'(1)$ 存在且 $f'(1)=a$

(C) $f'(1)$ 存在，且 $f'(1)=b$　　(D) $f'(1)$ 存在，且 $f'(1)=ab$

19．（2006 期末）设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为（　　）

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cosh)$ 存在　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sinh)$ 存在　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left[f(2h)-f(h)\right]$ 存在

20.（2003 期末）函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0 \\ k, \qquad\qquad x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 k 等于（　　）

A. 1　　B. 0　　C. 2　　D. -1

22.（2020 期中）下列说法正确的是（　　）

A. 若 $f(x)$在 $x=x_0$ 连续，则 $f(x)$在 $x=x_0$ 可导；

B. 若 $f(x)$在 $x=x_0$ 不可导，则 $f(x)$在 $x=x_0$ 不连续；

C. 若 $f(x)$在 $x=x_0$ 不可微，则 $f(x)$在 $x=x_0$ 极限不存在；

D. 若 $f(x)$在 $x=x_0$ 不连续，则 $f(x)$在 $x=x_0$ 不可导.

23.（2019 期中）已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)}{x}=\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}=$（　　）

(A) $\dfrac{1}{6}$；　　(B) $\dfrac{1}{3}$；　　(C) $\dfrac{1}{2}$；　　(D) $\dfrac{4}{3}$

24.（2019 期中）函数 $y=f(x)$ 下面说法正确的是（　　）

(A) 函数在某点连续一定在该点可导；　　(B)函数在某点不可导一定在该点不连续；

(C) 函数在某点不可导一定在该点连续；　　(D)函数在某点可导一定在该点连续；

25.（2018 期中）已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，周期为 4，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线斜率为（　　）.

A．1/2　　B．0　　C．-1　　D．-2

26.（2017 期中）设 $f(x)$ 可导，$f(x)f'(x)>0$，则（　　）.

$A.\ f(1)>f(-1)$　　$B.\ f(1)<f(-1)$

$C.\ |f(1)|>|f(-1)|$　　$D.\ |f(1)|<|f(-1)|$

27. 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x)>0,\ f''(x)>0$, Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x>0$，则（　　）.

A. $0<dy<\Delta y$　　B. $0<\Delta y<dy$

C. $\Delta y<dy<0$　　D. $dy<\Delta y<0$

28．求 a,b 的值，使函数 $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & x>0 \\ b(1-x^2), & x\leq 0 \end{cases}$ 处处可导。

29．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, x>0\\ x^2 g(x), x\le 0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 x=0 处（　　）

A. 极限不存在；　　B. 极限存在，但导数不存在；　　C. 连续，但不可导；　　D. 可导

30．设 $f(x)=-f(-x)$，且在 $(0,+\infty)$ 内二阶可导，又 $f'(x)>0$，$f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内的单调性和凹凸性是（　　）

A．单调增，凹　　B．单调减，凹　　C．单调增，凸　　D．单调减，凸

31．设 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+k\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{1}{3}f'(x_0)$，则 $k=$____________________

32．（2008 期中）设函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\frac{5}{3}}\cos\dfrac{1}{x}, x\ne 0\\ 0, x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处 $f(x)$（　　）

A．不连续　　B．连续，但不可导　　C．可导，但导数不连续　　D．可导，且导数连续

33．（2008 期中）函数 $f(x)=(x^2-x-2)\left|x^3-x\right|$ 不可导点的个数是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

34．（2006 期中）以下结论正确的是（　　）

A.若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$\lim\limits_{h\to+\infty}\dfrac{f\left(\frac{1}{h}\right)-f(0)}{\frac{1}{h}}$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

B.若曲线 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$

C. 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]$ 存在（n 为正整数），则 $f(x)$ 在 x_0 点可导，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]=f'(x_0)$

D.若 $f(x)$ 在 x_0 处可微，则 $f(x)$ 在 x_0 点的某领域内有界

35．（2006 期中）设 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$，则 $f'(0)=$____________

36．（2005 期中）两曲线 $y=x^2+ax+b$ 与 $2y=-1+xy^3$ 相切于点 $(1,-1)$，则 a,b 的值为（　　）.

(A) $0,2$；　(B) $1,3$；　(C) $-3,1$；　(D) $-1,-1$

37.（2005 期中）已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(\cos 2x-\cos 3x)}{x^2}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________

38.（2004 期中）设 $f'(x_0)=A$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{h}=$________

39.（2003 期中）设 $f(x)$ 为定义在 (a,b) 内的初等函数，则下列命题正确的是（　　）

A．$f(x)$ 在 (a,b) 内必定可导；　　B．$f(x)$ 在 (a,b) 内必定可微分；

C．$f(x)$ 在 (a,b) 内必定连续；　　D．$f(x)$ 在 (a,b) 内必定有界。

40.（2003 期中）讨论 n 的取值范围，使函数 $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0;\\ 0, \quad x=0\end{cases}$，

（1）在 $x=0$ 处是连续的；
（2）在 $x=0$ 处可微分（可导）；
（3）在 $x=0$ 处其导函数是连续的。

知识点 2：求导法则、复合函数求导、分段函数求导

1.（2018 期末）$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$，则 $dy=$______________.

2.（2016，2011 期末）设 $y=\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)$，则 $dy=$____________

3.（2014 期末）已知$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则$y''=$__________

4.（2013 期末）设 $y=3e^x\cos x$，则函数的微分 $dy=$__________________。

5.（2012 期末）设 $\dfrac{df(x)}{dx}=g(x)$，$\varphi(x)=x^3$，则 $\dfrac{d}{dx}f\left[\varphi(x)\right]=$_______________。

6.（2012 期末）设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}\right]$，则 $f'(t)=$______________。

7.（2011 期末）设 $f'(\cos^2 x)=\sin^2 x$，且 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 为（　　）。

（A）$\cos x+\frac{1}{2}\cos^2 x$；　（B）$\cos^2 x-\frac{1}{2}\cos^4 x$；　（C）$x+\frac{1}{2}x^2$；　（D）$x-\frac{1}{2}x^2$；

8.（2010 期末）设 $f'(\ln x)=1+x$，则 $f(x)=$（　　）

（A）$x+e^x+C$　（B）$e^x+\frac{1}{2}x^2+C$　（C）$\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$　（D）$e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$

9.（2008 期末）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-1}{x},x>0\\ \ln\left(\cos\sqrt{|x|}\right),-\dfrac{\pi}{2}<x\le 0\end{cases}$，则（　　）

(A) $f'(0)=0$　(B) $f'(0)=1$　(C) $f'(0)=\frac{1}{2}$　(D) $f'(0)$ 不存在

10.（2006 期末）已知 $\frac{d}{dx}\left[f\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]=\frac{1}{x}$，则 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=$____________

11.（2006，2003 期末）设 $y=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，则 $f'(0)=$_________

12.（2003 期末）设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则使不等式 $\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}(a>0,b>0)$ 成立的充分条件是（　　）

A. $a<b$　B. $e<a<b$

C. $b<a$　D. $e<b<a$

13.（2019 期末）设 $y=\operatorname{arccot}\frac{x-1}{x+1}$，求 $\mathrm{d}y$.

14.（2018 期末）求 $f'(x)$，其中 $f(x)=\begin{cases}e^x\sin x,x>0\\ x^2+x,x\le 0\end{cases}$.

15.（2003 期末）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x},x\ne 0\\ 0,x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 有三阶导数，且 $g(0)=1,g'(0)=-1$，求 $f'(x)$，

并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。（8 分）

16．（2020，2014 期中）设函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=0, f'(1)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(\sqrt{1+x}-1)}{f(e^x-x)}=$ ________.

17．（2019 期中）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$ ________

18．（2017 期中）设 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$，则 $f'(x)$ 的零点的个数为________

19．（2012 期中）设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ 且 $f(x)$ 可导，则 $df(x)=$ ________

20．（2011 期中）函数 $f(u)$ 可导，$y=f(x\sin x)$，则 $dy=$ ________

21．（2006 期中）设 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$，其中 a、b、c、d 互不相等，且满足 $f'(k)=(k-a)(k-b)(k-c)$，则 k 的值等于（　　）

A. a　　　B. b　　　C. c　　　D. d

22．（2006 期中）函数 $f(u)$ 可导，$y=f(x\sin x)$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ ________

23．（2005 期中）设方程 $x=y^y$ 确定 y 是 x 的函数，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ ________

24．（2005 期中）设 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，且 $f'(x)=\arcsin x^2$ 则 $dy(0)=$ ________

25．（2004 期中）$d\left[\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]=$ ________ $d\sqrt{1+x^2}$

知识点 3：参数方程求导

1．（2019，2010 期末）设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 确定，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}=$ ________

2．（2018 期末）设由方程组 $\begin{cases}x=2t-1\\ te^y+y+1=0\end{cases}$ 确定了 y 是关于 x 的函数，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=$（　　）

A．$-\dfrac{e^y}{2}$　　B．$-2e$　　C．$-\dfrac{1}{2e}$　　D．$\dfrac{1}{2e}$

3．（2017 期末）设参数方程$\begin{cases} x=t^2+2t \\ y=\ln(1+t) \end{cases}$，则曲线$y=y(x)$在$x=3$处切线的斜率为________.

4．（2014 期末）求曲线$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$（其中$a>0$，且为常数）在$t=\frac{\pi}{2}$处的切线方程。

5．（2014 期末）求曲线$\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$（其中$a>0$，且为常数）相应于$0\le t\le \pi$的一段弧的长度。

6．（2012 期末）设曲线方程$\begin{cases} x=2t-1 \\ te^y+y+1=0 \end{cases}$，求曲线在$t=0$对应点处的切线方程.

7．（2012，2008 期末）$\begin{cases} x=\ln\cos t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

8．（2006 期末）$\begin{cases} x=\cos\left(t^2\right) \\ y=t\cos\left(t^2\right)-\int_1^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u du \end{cases}, t>0$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

9．（2006 期末）$\begin{cases} x=\arctan t \\ y=t+e^{ty} \end{cases}$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}$

10．设 $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$，其中 $f''(t)$ 存在且不为零，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

知识点 4：反函数求导

1．（2018 期末）$y=4x-\frac{1}{x}\left(x>0\right)$ 的反函数 $x=\varphi\left(y\right)$ 在 $y=0$ 处的导数为____________.

知识点 5：求高阶导

1．（2015 期末）设 $f\left(x\right)=3x^2+x\left|x\right|$，使 $f^{(n)}\left(0\right)$ 存在的最高阶数 n 为（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

2．（2008 期末）$f(x)=\ln\left(2-3x\right)$ 的 10 阶导数是（　　）

（A）$\frac{-3^{10}\cdot 10!}{\left(2-3x\right)^{11}}$　　(B) $\frac{3^{10}\cdot 10!}{\left(2-3x\right)^{11}}$　　(C) $\frac{-3^{10}\cdot 9!}{\left(2-3x\right)^{10}}$　　(D) $\frac{3^{10}\cdot 9!}{\left(2-3x\right)^{10}}$

3．设函数 $y=x^2e^x$, 则 $y^{(10)}=$____________

4.（2018 期中）设 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $y^{(n)}=$ ________________.

5.（2014 期中）函数 $y=\ln(1-2x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$

6.（2012 期中）$y=x^2e^x$，则 $y^{(20)}=$________________

7.（2011 期中）设 $y=e^x(x^2+2x+2)$，则 $y^{(n)}=$（　　　　　　　　　　　　）

8.（2014 期中）$y=x^2\sin x$，则 $y^{(50)}=$________________

知识点 6：隐函数求导

1.（2008 期末）已知 $e^{x+y}=xy+5$，则 $y'=$________________

2.（2020 期末）设 $y=y(x)$是由方程 $e^y+xy=e$ 确定的函数，求 $y'(0)$, $y''(0)$。

3.（2019 期末）设方程$x^y=y^x$确定的函数$y=y(x)$，求y'.

4.（2017 期末）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 所确定，求 dy.

5．（2016 期末）求曲线 $y=x\ln y$ 在点 $\left(\dfrac{e^2}{2},e^2\right)$ 处的切线方程和法线方程

6．（2015 期末）已知函数 $y=x^{\sin x}(x>0)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

7．（2010 期末） $y\left(x\right)$ 由方程 $\sin\left(xy\right)-e^{x+y}=5$ 确定，求 y'

8．（2005 期末）已知 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

9．（2005 期末）已知 $y=3^x+x^3+3^3+x^x$，求 $\dfrac{dy}{dx}$

第三部分 中值定理和函数性质

说明：本部分内容在考试中出现的证明题会单独放到一个部分讲解。

知识点 1：费马引理、罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理

考点一：微分中值定理的基本考察

1.（2014 期末）若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上有定义，在开区间(a, b)内可导，则（　　）

A．对任何$\xi \in (a,b)$，有$\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$

B．当$f(a)\cdot f(b)<0$时，存在$\xi \in (a,b)$，使$f(\xi)=0$

C．当$f(a)=f(b)$时，存在$\xi \in (a,b)$，使$f'(\xi)=0$

D．存在$\xi \in (a,b)$，使$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

2.（2011 期末，2003 期中）设函数 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 $\left(a,b\right)$ 内可导，则由微分中值定理得至少存在一点 $\xi \in \left(a,b\right)$，使 $e^{f(b)}-e^{f(a)}=$__________________。

3.（2008 期末）对函数 $y=x^3-3x+10$ 在区间 $\left[-1,2\right]$ 应用罗尔中值定理时，满足 $f'(\xi)=0$ 的 $\xi=$（　　）

(A)　-1　　(B)　2　　(C)　1　　(D)　± 1

4.（2006 期末）函数 $y=\ln(x+1)$ 在区间 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理的 ξ 为（　　）

(A)　$\ln 2$　　(B)　$\dfrac{1}{\ln 2}$　　(C)　$\dfrac{1}{\ln 2}-1$　　(D)　$\dfrac{1}{2}$

知识点 2：函数的拐点、驻点、单调性、极值、最值、凹凸性、渐近线

考点一：函数的渐近线

1.（2015 期末）曲线 $y=\dfrac{x^2}{3x+1}$ 的斜渐近线方程为__________________。

2.（2019，2017 期中）函数 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ 图形的渐近线有________________.

3.（2019 期中）曲线 $y=\frac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为：________条。

4.（2012 期中）曲线 $y=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}$ 的铅直渐近线是________________

5.（2010 期中） $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$ 的铅直渐近线是___________

考点二：函数的拐点、驻点、单调性、极值、最值、凹凸性

1.（2020 期末）设 $f(x)$在 x=0 的某领域内连续，且 $f(0)$=0，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=-1$，则在点 x=0 处 $f(x)$（　　）

A.不可导　　　B.可导且$f'(0)\neq 0$　　　C.取得极大值　　　D.取得极小值

2.（2020 期末）曲线 $y=1-e^{-x^2}$ 的凹区间是__________________。

3.（2020 期末）函数 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 的极大值为__________________。

4.（2019 期末）函数$f(x)=x-ln(1+x)$在区间____________上单调减小。

5.（2019 期末）函数$f(x)=ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$的驻点个数为________（填写数字）。

6.（2018 期中）若二次可导函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=1$，则（　　）.

A．$x=a$是$f(x)$的极大值点　　　B．$x=a$是$f(x)$的极小值点

C．$x=a$不是$f(x)$的极值点　　　D．$(a,f(a))$是$f(x)$的一个拐点

7.（2017 期末）函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+1$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点的个数是_________个。

8.（2016 期末）函数 $y=x-\ln(1+x^2)$ 在定义域内（　　）

(A) 无极值　　(B) 极大值为$1-\ln 2$　　(C) 极小值为$1-\ln 2$　　(D) $f(x)$非单调函数

9.（2014 期末）若曲线$y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点$(-1,0)$，则$a=$_____，$b=$_____

10.（2014 期末）函数$y=x^{2x}$在区间$(0,1]$上的最小值为___________

11.（2012 期末）设 $y=x^2+6x-4$，那么在区间 $(-\infty,-3)$ 和 $(0,+\infty)$ 内，y 分别为（　　）

A．单调增加，单调增加　　　B．单调增加，单调减少

C．单调减少，单调减少　　　D．单调减少，单调增加

12.（2010 期末）函数 $f(x)=x-\ln(1+x)$ 在区间______________上单调减少。

13.（2006 期末）设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0, f'''(x_0)>0,$ 则下列正确的是（　　）

(A) $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值　　　(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　　(D) $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

14.（期末模拟）设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点的个数为______。

15．设$f(x)$的导数在 x=a 处连续，又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$，则　　　（　　）

A．$x=a$是 $f(x)$的极小值点；　　　B．$x=a$是$f(x)$的极大值点；

C．$x=a$不是 $f(x)$的极值点；　　　D．$(a,f(a))$是曲线$y=f(x)$的拐点.

16．曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$的拐点是（　　）

A．(1, 0)　　B. (2, 0)　　C. (3, 0)　　D. (4, 0)

17．函数 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为__________

18．设函数 $f\left(x\right)$ 有二阶连续导数，且 $f'\left(0\right)=0$ ，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''\left(x\right)}{\left|x\right|}=1$，则（　　）

A．$f\left(0\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 的极大值；

B．$f\left(0\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 的极小值；

C．$\left(0,f\left(0\right)\right)$ 是曲线 $y=f\left(x\right)$ 的拐点；

D．$f\left(0\right)$ 不是 $f\left(x\right)$ 的极值，$\left(0,f\left(0\right)\right)$ 也不是曲线 $y=f\left(x\right)$ 的拐点。

19.（2011 期中）函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 在（$-\infty,+\infty$）上是（　　）。

(A) 处处单调减少；　(B) 具有最小值；　(C)处处单调增加；　（D）具有最大值；

20.（2010 期中）曲线 $y=\ln x$ 上一点 P 的切线经过原点，则点 P 的坐标为________________

21.（2008 期中）设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}-1$，则 $f\left(x\right)=$_________

22.（2008 期中）要使函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ 在 $x=0$ 处连续，则须定义 $f\left(0\right)$ 的值为__________

23.（2008 期中）设函数 $f\left(x\right)$ 当 $x\neq 0$ 时满足 $f\left(x^3\right)+2f\left(\dfrac{1}{x^3}\right)=3x$，则 $f'\left(1\right)=$__________

24.（2005 期中）函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的以下结论正确的是（　　）.

(A) 若 $f'(x_0)=0$，则 $f(x_0)$ 必是一个极值；

(B) 若 $f''(x_0)=0$，则点 $(x_0,f(x_0))$ 必是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点；

(C) 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n[f(x_0+\dfrac{1}{n})-f(x_0)]$ 存在（n 为正整数），则 $f(x)$ 在 x_0 点可导，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}n[f(x_0+\dfrac{1}{n})-f(x_0)]=f'(x_0)$；

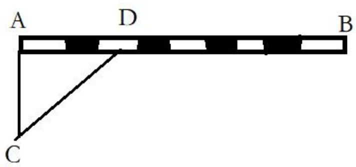
(D) 若 $f(x)$ 在 x_0 处可微，则 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内有界

25.（2018 期末）求函数 $y=\dfrac{x^3}{\left(x-1\right)^2}$ 的单调区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线。

26.（2015 期末）求曲线 $y=x^3-3x^2+24x-19$ 在拐点处的切线方程与法线方程。

27.（2014 期末）数学建模题。（本题 6 分）

铁路线 AB 之间的距离为 100km，工厂 C 距 A 处为 20km，AC 垂直于 AB（如下图所示），为了运输需要，要在 AB 线上选定一点 D 向工厂修筑一条公路，已知铁路每公里货运的运费与公路上每公里货运的运费之比为 3：5，为了使货物从供应站 B 运到工厂 C 的运费最省，问 D 点应选在何处？



28.（2013 期末）设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^3+3t+1 \\ y=t^3-3t+1 \end{cases}$ 确定，求使得曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 取值范围。

29.（2013 期末）求函数 $y=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ 的单调区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线，并作出草图。（本题 9 分）

30.（2003 期末）求 k，是曲线 $y=k\left(x^2-3\right)^2$ 上拐点处的法线通过原点。

31.（2018 期中）讨论方程 $\ln x=ax(a>0)$ 有几个实根.

知识点3：曲线的弧微分和曲率

考点一：曲线的弧微分与曲率

1．（2016，2008期末）等边双曲线 $xy=1$ 在点(1,1)处的曲率为____________

2．（2013期末）在抛物线 $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ 上曲率最大的点为_____________

3．设函数$y=-x^2+1$在定义域内弧微分 ds =____________，顶点处的曲率K=________

4．（2011期中）设函数 $y=f\left(x\right)$ 在区间 (a,b) 内二阶可导，则弧微分 ds =_____________，曲率 K=_____________。

第四部分 不定积分

知识点 1：基本性质

考点一：原函数、函数、导函数三者的关系

1.（2018 期末）下列等式中正确的是（　　）

A. $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = f(x)$　　B. $\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx = f(x)$

C. $\frac{d}{dx}\int_x^b f(x)dx = f(x)$　　D. $\int f'(x)dx = f(x)$

2.（2015 期末）设函数 $f(x)$ 具有连续的导数，则以下等式中错误的是（　　）

A. $\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)dx\right) = f(x)$　　B. $d\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)dx$

C. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$　　D. $\int f'(t)dt = f(t) + C$

3.（2013 期末）若 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$，则 $f(x)$ 的一个原函数是（　　）

A. $1+\sin x$　　B. $1-\sin x$　　C. $1+\cos x$　　D. $1-\cos x$

4.（2010 期末）下列各式中正确的是（　　）

A. $\int df(x) = f(x)$　　B. $\int f'(x)dx = f(x)$

C. $d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$　　D. $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$

5.（2006 期末）如果 $\int \mathrm{d}f(x) = \int \mathrm{d}g(x)$，则下列各式中不一定成立的是（　　）

A. $f(x) = g(x)$　　B. $f'(x) = g'(x)$

C. $d[f(x)] = d[g(x)]$　　D. $d\int f'(x)\mathrm{dx} = d\int g'(x)\mathrm{dx}$

6.（2003 期末）下列等式中正确的是（　　）

A. $d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$　　B. $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$

C. $\int df(x) = f(x)$　　D. $\int df(x) = f(x) + c$

7.（2006 期末）设 $\int f(x)dx = F(x) + C$，且 $x = at + b$，则 $\int f(t)dt =$（　　）

A. $F(x)+C$　　B. $\frac{1}{a}F(at+b)+C$

C. $F(t)+C$　　D. $F(at+b)+C$

8.（2006 期末）设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则下列表述正确的有（　　）个。

a．当 $F(x)$ 是奇函数时，$f(x)$ 必为偶函数

b．当 $F(x)$ 是偶函数时，$f(x)$ 必为奇函数

c．当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必为偶函数

d．当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必为奇函数

e．当 $F(x)$ 是周期函数时，$f(x)$ 必为周期函数

f．当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必为周期函数

g．当 $f(x)$ 是单调递增函数时，$F(x)$ 必为单调递增函数

A．小于或等于 4　　B．5　　C．6　　D．7

9.（2014 期末）设$f(x)$与$g(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内可导，且$f(x)>g(x)$，则必有（　　）（多选）

A．$f(-x)>g(-x)$　　B．$f'(x)>g'(x)$

C．$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$　　D．$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t>\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$

10.（2015 期末）已知函数 $f(x)$ 的一个原函数是 $\sin 2x$，则 $\int 2xf(x)dx=$（　　）

A．$2x\cos 2x-\sin 2x+C$　　B．$2x\sin 2x-\cos 2x+C$

C．$2x\sin 2x+\cos 2x+C$　　D．$2x\cos 2x+\sin 2x+C$

考点二：复合函数求不定积分

1.（2019 期末）

$f(\mathrm{x})=\cos\mathrm{x}$，则 $\int\frac{1}{\mathrm{x}^2}\mathrm{f}'\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)\mathrm{dx}=$(　　)

A. $-cos\frac{1}{x}+C$　　B. $cos\frac{1}{x}+C$　　C. $-sin\frac{1}{x}+C$　　D. $sin\frac{1}{x}+C$

2.（2018 期末）设 $\int f(x)dx=xe^x-e^x+C$，则 $\int f'(x)dx=$的________________.

3.（2017 期末）设 e^{-2x} 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f'(x)=$（　　）

A．$-8e^{-2x}$　　B．$-4e^{-2x}$　　C．$4e^{-2x}$　　D．$2e^{-2x}$

4.（2017 期末）若 $f'(e^x)=1+x$，则 $f(x)=$____________.

5．已知 $\int f(x)dx=xe^x-e^x+C$，则 $\int f'(x)dx=$（　　）

A．xe^x-e^x+C　　B．xe^x+e^x+C

C．xe^x+C　　D．xe^x-2e^x+C

6．设 $f'(\ln x)=1+x$，则 $f(x)=$（　　）

A．$x+e^x+C$　　B．$e^x+\frac{1}{2}x^2+C$　　C．$\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$　　D．$e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$

7.（2013，2012 期末）已知 $F(x)$ 是 $\cos x$ 的一个原函数，$F(0)=0$，则 $\int xF(x)dx=$____________________。

8.（2012 期末）设积分族 $y=\int f(x)dx$ 中有倾斜角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的直线，则 $y=f(x)$ 的图形是（　　）

A．平行于 y 轴的直线　　　　B．抛物线

C．平行于 x 轴的直线　　　　D．直线 $y=x$

9.（2011 期末）若 $\int f(x)dx=\arccos 2x+C$，则 $f(x)=$____________________。

10.（2010 期末）若 $\int f(x)dx=\arcsin 2x+C$，则 $f(x)=$____________________。

11.（2006，2003 期末）若 $\int f(x)dx=x^2+c$，则 $\int xf(1-x^2)dx=$____________________。

12.（2020 期末）若 $\int \dfrac{f'(\ln x)}{x}\mathbf{d}x=x+C$，则 $f(x)=$（　　）

A．e^x　　　B．e^{-x}　　　C．$-2e^{-2x}$　　　D．$2e^{-2x}$

13.（2006 期末）设 $\int \dfrac{f'\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx=e^x+C$，则 $f(x)=$____________________。

考点三：大题计算不定积分

1.（2020 期末）求不定积分 $\int e^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$。

2.（2019 期末）求不定积分 $\int \sqrt{x}\ln x\mathrm{d}x$

3.（2018 期末）求不定积分 $\int \dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx.$

4.（2017 期末）求不定积分 $\int e^{2\sqrt{x}}dx.$

5.（2016 期末）求不定积分 $\int xe^x dx$

6.（2015 期末）计算不定积分 $\int e^{\sqrt{x}}dx.$

7.（2013，2012 期末）求不定积分 $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

8.（2012 期末）求不定积分 $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$

9.（2012 期末）求不定积分 $\int x\tan^2 xdx$

10．（2011 期末）计算$\int \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x} dx$

11．（2010 期末）$\int x \sec^2 x dx$

12．（2008 期末）$\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

13．（2006 期末）$\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

14．（2006 期末）$\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$

15.（2003 期末）求$\int \frac{xe^{\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx$

16.（期末模拟）$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}} =$______.

17.（期末模拟）求$\int x\arctan x dx$.

第五部分 定积分

知识点 1：定积分的性质

考点一：定积分的性质和几何意义

1.（2016 期末）曲线 $y=x(x-1)(2-x),(0\le x\le 2)$ 与 x 轴所围成图形的面积可表示为（　　）

A．$-\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx+\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$　　B．$\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$

C．$\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx-\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$　　D．$-\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$

2.（2014 期末）曲线$y=e^{-x}\sin x(0\le x\le 3\pi)$与 x 轴所围成的面积可表示为（　　）

A．$-\int_0^{3\pi}e^{-x}\sin x\mathrm{d}x$　　B．$\int_0^{2\pi}e^{-x}\sin x\mathrm{d}x-\int_{2\pi}^{3\pi}e^{-x}\sin x\mathrm{d}x$

C．$\int_0^{3\pi}e^{-x}\sin x\mathrm{d}x$　　D．$\int_0^{\pi}e^{-x}\sin x\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{2\pi}e^{-x}\sin x\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi}e^{-x}\sin x\mathrm{d}x$

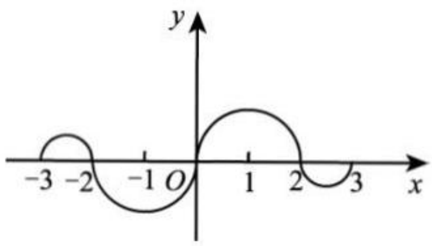
3.（2006 期末）曲线 $y=x\left(x-1\right)\left(2-x\right)$ 与 x 轴所围图形面积可表为定积分__________

4.（2012，2008 期末）设 $f(x)$ 在点 $\left[a,b\right]$ 连续是 $f(x)$ 在点 $\left[a,b\right]$ 可积的（　　）条件。

A．充分非必要　　B．必要非充分　　C．充要　　D．既非充分又非必要

5.（2007 考研）

如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$，$[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间 $[-2,0]$，$[0,2]$ 上的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周. 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则下列结论正确的是（　　）



(A) $F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$.

(B) $F(3)=\frac{5}{4}F(2)$.

(C) $F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$.

(D) $F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$.

考点二：定积分求极限

1.（期末模拟）$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})$=__________

2.（2012 考研）$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2})$=__________

3.（2016 考研）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(sin\frac{1}{n}+2sin\frac{2}{n}+\cdots+nsin\frac{n}{n})$=__________

4.（2017 考研）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})$=__________

考点三：变上限定积分

1．（基础练习）设$f(x)$连续，试求**下列函数的导数**。

（1）$\int_{e^x}^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$　（2）$\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$　（3）$\int_0^x cos(x-t)^2\mathrm{d}t$　（4）$\int_1^2 f(x+t)\mathrm{d}t$

2．（2014 期末）设$f(x)$连续，则在下列变上限积分定义的函数中，必为偶函数的是（　　）

A．$\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$　　B．$\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$

C．$\int_0^x f(t^2)\,\mathrm{d}t$　　D．$\int_0^x [f(t)]^2\,\mathrm{d}t$

3．（2011 期末）已知$F'(x)=f(x)$，则$\int_a^x f(t+a)dt=$（　　）

A．$F(x)-F(a)$　B．$F(x+a)-F(2a)$　C．$F(t)-F(a)$　D．$F(t+a)-F(a)$

4．（2015 考研）设函数$f(x)$连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2} xf(t)\mathrm{d}t$. 若$\varphi(1)=1$，$\varphi'(1)=5$，则$f(1)$=__________

5．（1998 考研）设$f(x)$连续，则$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)\,dt$=____________________

6．（1993 考研）已知$f(x)=\begin{cases}x^2，0\le \mathrm{x}<1\\ 1，1\le x\le 2\end{cases}$，设$F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\,(0\le x\le 2)$，则$F(x)$为________________

7．（2010 期末）若$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt}{x^3}, & x\ne 0\\ a, & x=0\end{cases}$，则$a=$_________时，函数$f(x)$在点$x=0$处连续。

8．（2006 期末）函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^{\sin x}\left(e^{x^2}-1\right)dx}{x^3}, & x\ne 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在$x=0$处连续，则$a=$_____________

9.（2015，2006，2003 期末）函数 $y=\int_0^{x^2}(t-1)e^t dt$ 有极大值点（　　）

A．$x=1$　　B．$x=-1$　　C．$x=\pm 1$　　D．$x=0$

10.（2012 期末）函数 $f(x)=\int_1^{x^2}\left(x^2-t\right)e^{-t^2}dt$ 的单调递增区间是________。

11.（2015 期末）求由 $\int_0^y e^t dt+\int_0^x \cos t dt=0$ 所确定的隐函数对 x 的导数 $\frac{dy}{dx}=$_______________。

12.（2010 考研）设可导函数$y=y(x)$由方程$\int_0^{x+y} e^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x x\sin t^2\mathrm{d}t$确定，则当$x=0$ 时$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$___________

13.（1988 考研）设$x\geq 1$，求$\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t$

14.（1998 考研）确定常数 a、b、c 的值，使$\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\ (c\neq 0)$.

考点四：定积分与极限

1.（2017 期末）已知 $\int_1^x f\left(t^2\right)dt=x^3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x}=$（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．0

2.（2018 期末）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x\left(\frac{\sin t}{t}-1\right)dt=$________.

3.（2014 期末）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t\mathrm{d}t}{x^2}$

4.（2012 期末）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{\sin^2 x}$

5.（2011，2010 期末）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\cos\left(t^2\right)dt}{1-\cos x}$

6.（期末模拟）求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}\int_a^x f\left(t\right)dt$，其中 $f(x)$ 连续。

7.（2017 考研）求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{x-t}e^t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}$

8.（2008 期末）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} te^t\sin t dt}{x^6}$

9．（2006 期末）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t\ln(1+t)dt-x^3}{e^{x^2}(x-\sin x)}$

10．（2006 期末）设函数$f(x)$连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$($A$为常数)，求$\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。（本题 8 分）

考点五：定积分与复合函数

1．（2013 期末）若函数 $f(x)=\begin{cases}1+x, x\le 1\\ x^2, x>1\end{cases}$，求定积分 $\int_0^2 f(x)dx$

2．（2017 期末）求 $\int_1^3 f(x-2)dx$，其中 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, x<0\\ e^{-x}, x\ge 0\end{cases}$.

3．（2021 期末）设$f(x)=\begin{cases}xe^{-x^2}，-\frac{1}{2}\le x<2\\ -1，x\ge\frac{1}{2}\end{cases}$，计算定积分$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)\mathrm{d}x$

4.（2021 期末）设$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+\cos x}, & x\le 1\\ e^x+1, & x>1\end{cases}$，计算定积分$\int_0^3 f(x-1)\mathrm{d}x$

5.（2014 期末）设$f(x)=\begin{cases}xe^{x^2}(-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2})\\ -1(x>\frac{1}{2})\end{cases}$，则$\int_1^2 f(x^{-1})\mathrm{d}x=$____________

6.（2006，2021 期末）设 $f(x)$ 连续，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(x)dx$，求 $f(x)$

7.（2021 期末）设$f(x)$是连续函数，且$f(x)=cosx+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$，则$f(x)=$____________

8.（2017 期末）已知 $2x\int_0^1 f\left(x\right)dx+f\left(x\right)=\ln\left(1+x^2\right)$，求 $\int_0^1 f\left(x\right)dx.$

考点六：计算定积分

1.（2006 期末，1997 考研）设在区间$[a,b]$上，$f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)>0$，令 $S_1=\int_a^b f(x)dx$，$S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$，则（　　）

A．$S_1<S_2<S_3$　　B．$S_2<S_1<S_3$　　C．$S_3<S_1<S_2$　　D．$S_2<S_3<S_1$

2.（2011 考研）设$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\mathrm{d}x$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x$，则（　　）

A．$I<J<K$　　B．$I<K<J$　　C．$J<I<K$　　D．$K<J<I$

3.（2017 期末）设二阶可导函数$f(x)$满足$f(1)=f(-1)=1$，$f(0)=-1$，且$f''(x)>0$，则（　　）

A．$\int_{-1}^1 f(x)dx>0$　　B．$\int_{-1}^1 f(x)dx<0$

C. $\int_{-1}^{0} f(x)dx > \int_{0}^{1} f(x)dx$ D. $\int_{-1}^{0} f(x)dx < \int_{0}^{1} f(x)dx$

4.（2018 期末）设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 xdx$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3 x+\cos^4 x\right)dx$, $P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^2\sin^3 x-\cos^4 x\right)dx$ ，则（ ）

A. P<M<N B. M<P<N C. P<N<M D. N<M<P

5.（2019 期末）

设$f(x)$在$[-2,2]$上为偶函数，则$\int_{-2}^{2} x[x+f(x)]dx=$__________

6.（2017 期末）$\int_{-3}^{3}\left(x+\sqrt{9-x^2}\right)dx=$____________.

7.（2020 期末）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\mathrm{d}x=$___________________。

8.（2016 期末）已知$f(x)$的一个原函数是 $\sin 2x$，则$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} f'(2x)\,\mathrm{d}x$ =________

9.（2016 期末）积分$\int_{0}^{1} e^{\sqrt{t}}dt=$____________

10.（2015 期末）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\cdot(\sin x+1)dx=$_____________。

11.（2013 期末）定积分$\int_{-1}^{1}\left(x^2+x\sqrt{1-x^2}\right)dx=$__________。

12.（2012 期末）$\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)dx=$__________。

13.（2012 期末）$\int_{-1}^{1}\frac{x^7+2x^5+8x}{\cos^4 x+1}dx=$_________________;

14.（2008 期末）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{1+\sin^2 x}dx=$__________________________

15.（2006 期末）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\arctan x^3\cdot\left(\sin^2 2x+\sqrt{1+x^2}\right)dx=$____________

16.（2006 期末）$\int_{0}^{\pi} x\sin^4 xdx=$__________

17.（期末模拟）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin xdx=$______.

18.（2020 期末）求定积分$\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$。

19.（2019 期末）求定积分$\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$

20.（2018 期末）求定积分$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx.$

21.（2018 期末）已知$f\left(x\right)$的原函数为$\left(1+\sin x\right)\ln x$，求$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}xf'\left(x\right)dx.$

22.（2015 期末）计算定积分$\int_1^e\frac{1}{x\left(2+\ln^2 x\right)}dx.$

23.（2014 期末）计算积分$\int_0^1 xe^{-x}\mathrm{d}x$

24.（2012 期末）计算定积分 $\int_{-2}^{2}(x+|x|)e^{|x|}dx$

25.（2012 期末）$\int_{0}^{a}\frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}dx$

26.（2011 期末）计算 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ 。

27.（2010 期末）$\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$

28.（2008 期末）$\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{5-4x}}dx$

29.（2006 期末）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x+\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx$

30.（2006 期末）$\int_{-1}^{1} \frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}} dx$

31.（2006 期末）已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=\int_{a}^{+\infty} 2xe^{-2x}dx$，求 a 的值

32.（2003 期末）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \arctan x^3\cdot\left(\sin^2 2x+\sqrt{1+x^2}\right)dx=$__________

33.（2003 期末）计算 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x+\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx$

34.（期末模拟）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cos 2xdx$；

35．（2005 考研）计算$\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

36．（2010 考研）计算$\int_0^{\pi^2} \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x$

37．（期末模拟）计算$\int_0^1 x\arcsin x\mathrm{d}x$

38．（1995 考研）设$f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt$，计算$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$

知识点 2：曲线弧长

1．（2012 期末）平面曲线 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}dt$，$\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$的弧长为（　　）

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos x}dx$　　B. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}dx$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sqrt{\cos x}}dx$　　D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sqrt{\cos x}}dx$

2.（2012 期末）曲线 $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}$ 自 $x=1$ 至 $x=e$ 之间的一段曲线弧的弧长为（　　）

A. $\frac{e^2+2}{4}$　　B. $\frac{1-e^2}{4}$　　C. $\frac{e^2+1}{4}$　　D. $\frac{e^2-1}{4}$

3.（2010，2008 期末）设曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\int\limits_0^t\sqrt{1+u^2}du, \\ y=\int\limits_t^1\sqrt{1-u^2}du, \end{cases}$ $(0\le t\le 1)$，则 L 的长度为（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{3}$

4.（2021 期末）曲线$\begin{cases} x=t^3 \\ y=2t^3 \end{cases}$介于 $0\le t\le 1$ 之间的弧长为__________

5.（2021 期末）曲线$y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$上响应于 $0\le t\le 3$ 的一段弧长为__________

6.（2013 期末）设光滑曲线 $y=\varphi(x)$ 过原点，且当 $x>0$ 时 $\varphi(x)>0$，对应于 $[0,x]$ 一段曲线的弧长为 e^x-1，求 $\varphi(x)$。

知识点 3：反常积分

考点一：反常积分的敛散性

1.（2020 期末）反常积分 $\int_{-\infty}^{0}e^{-kt}\,\mathbf{d}t$ 收敛，则（　　）

A. $k>0$　　B. $k<0$　　C. $k\ge 0$　　D. $k\le 0$

2.（2019 期末，2013 期末）对反常积分$\int_1^2\frac{dx}{(x-1)^p}$，下列结论正确的是（　　）

A. $p=1$ 时该反常积分收敛　　B. $p>1$ 时该反常积分收敛

C. $p\le 1$ 时该反常积分发散　　D. $p<1$ 时该反常积分收敛

3.（2017 期末）若积分$\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x(\ln x)^k}$收敛，则 k 满足（　　）

A．k<1　　B．k>1　　C．k=0　　D．k=e

4.（2016 期末）对反常积分$\int_0^1\dfrac{dx}{x^p}$，下列结论正确的是（　　）

A．$p>1$时收敛　　B．$p<1$时发散　　C．$p=1$时收敛　　D．$p\geq 1$时发散

5.（2015 期末）反常积分$\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$（　　）

A．发散　　B．收敛于 1　　C．收敛于 1/2　　D．收敛于−1/2

6.（2012 期末，2010 期末）对反常积分$\int_2^{\infty}\dfrac{dx}{x^p}$，下列结论正确的是（　　）

A．$p=1$时该反常积分收敛　　B．$p\geq 1$时该反常积分发散

C．$p>1$时该反常积分收敛　　D．$p<1$时该反常积分收敛

7.（2012 期末，2008 期末）在下列广义积分中收敛的是（　　）

A．$\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$　　B．$\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$　　C．$\int_{-1}^1\dfrac{1}{x^2}dx$　　D．$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x}dx$

8.（2011 期末）在下列反常积分中收敛的是（　　）（多选）

A．$\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}\mathrm{d}x$　　B．$\int_1^{+\infty}\sqrt{x}dx$　　C．$\int_1^{+\infty}x^{-\left(\frac{4}{3}\right)}dx$　　D．$\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x}$

9.（2021 期末）在下列反常积分中**发散**的是（　　）

A．$\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$　　B．$\int_{-1}^1\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$　　C．$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2x}\mathrm{d}x$　　D．$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

10.（2021 期末）在下列反常积分中收敛的是（　　）

A．$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$　　B．$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x$　　C．$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$　　D．$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}\mathrm{d}x$

考点二：计算反常积分

1.（2018 期末）$\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln^3 x}=$_________.

2.（2017 期末）反常积分$\int_0^2\dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=$_________

3.（2014 期末）广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=$_________

4.（2000 考研）$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+7)\sqrt{x+2}}=$_________

5.（2000 考研）$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{2-x}}=$_________

6．（2013 考研）$\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$=__________

知识点 4：定积分的应用

考点一：旋转体相关

1．（2021 期末）在曲线$y=(x-1)^2$上的点$(2,1)$处作曲线的法线，由法线、x轴及曲线$y=(x-1)^2$所围成的区域为$D(y>0)$，求区域绕x轴旋转一周所成的几何体的体积。

2．（2020 期末）设曲线 $y=x^2$ 与直线 x=2 及 x 轴所围成的平面图形为 D，求：

(1) D 的面积 A；(2) D 绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积Vy。

3．（2019 期末）经过坐标原点作曲线$y=\ln x$的切线，该曲线$y=\ln x$与切线及x轴围成的平面图形为 D. 求：

（1）D 的面积；

（2）D 绕y轴旋转一周所形成的旋转体的体积。

4．（2018 期末）在曲线 $y=x^2\left(x\geq 0\right)$上某点 A 处作一切线，若过点 A 作的切线与曲线 $y=x^2$ 及 x 轴所围图形的面积为$\dfrac{1}{12}$，求该平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 V。

5.（2017 期末）在曲线 $y=x^2\left(x\geq 0\right)$ 上某点 A 处作一切线，使之与曲线以及 x 轴所围图形的面积为 $\frac{1}{12}$，试求：（1）切点 A 的坐标；（2）过切点 A 的切线方程；（3）由上述所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积。

6.（2016，2013 期末）设 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，当 $0\leq x\leq 1$ 时 $y\geq 0$，又与 x 轴及 $x=1$ 所围成图形的面积为 $\frac{1}{3}$，试确定 a,b,c 的值，使此图形绕 x 轴旋转一周的体积最小。

7.（2015 期末）设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点 $\left(0,0\right)$，且当 $x\in\left[0,1\right]$ 时，$y\geq 0$. 试确定 a,b,c 的值，使得抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $x=1,y=0$ 所围图形的面积为 4/9，且使该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积最小。

8.（2014 期末）设曲线 $y=ax^2(x\geq 0,\text{且}a>0)$ 与曲线 $y=1-x^2$ 交于点 A. 过原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形 D，求

（1）D 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积 $V(a)$；

（2）求 a 的值，使得 $V(a)$ 最大。

9．（2021 期末）经过坐标原点作曲线$y=e^x$的切线，该曲线$y=e^x$与切线及y轴围成的平面图形为 D. 求：
（1）D 的面积 A；
（2）D 绕x轴旋转一周所形成的旋转体的体积 V。

10．（2012 期末）

设曲线方程为 $y=e^{-x}\left(x\geq 0\right)$（1）把曲线 $y=e^{-x}$，x 轴，y 轴和直线 $x=c(c>0)$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周得旋转体，求此旋转体的体积 $V(c)$，并求满足 $V\left(a\right)=\frac{1}{2}\lim\limits_{c\to+\infty}V\left(c\right)$ 的 a.（2）在此曲线上找一点，使过该点的切线与两坐标轴所夹平面图形的面积最大，并求出该面积。

11.（2012 期末）设函数 $f\left(x\right)$ 在闭区间 $\left[0,1\right]$ 上连续，在开区间 $\left(0,1\right)$ 内大于 0，并满足 $xf'\left(x\right)=f\left(x\right)+\frac{3a}{2}x^2$（$a$ 为常数）。又曲线 $y=f\left(x\right)$ 与 $x=0$，$x=1$，$y=0$ 所围的图形 S 的面积值为 2.求函数 $y=f\left(x\right)$，并问 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小。

12．（2010 期末）已知星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ $\left(a>0\right)$，求：

（1）它所围成的面积；（2）它的弧长；（3）它绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积。(8 分)

13.（2010 期末）抛物线 $y=x^2-ax\left(0<a<3\right)$ 与直线 $y=0,x=3$ 所围成图形被 x 轴分成两部分，记 x 轴下方部分为 S_1，x 轴上方部分为 S_2，则

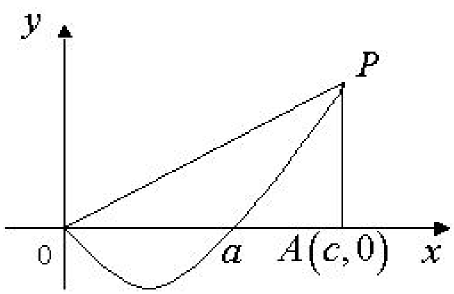
（1）求使 S_1 与 S_2 面积相等的 a 值

（2）对此 a 值，求使 S_1 与 S_2 绕 y 轴旋转一周而成的体积之比

14.（2008 期末）在曲线 $y=x^2\left(0\le x\le 1\right)$ 上取点 $\left(t,t^2\right)\left(0<t<1\right)$，设 S_1 是由曲线 $y=x^2$，直线 $y=t^2$ 和 $x=0$ 所围的面积；S_2 是由曲线 $y=x^2$，直线 $y=t^2$ 和 $x=1$ 所围的面积，求 t 为何值时 S_1+S_2 取最小值。

15.（2006 期末）设 $f(x)$，$g\left(x\right)$ 在区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，且 $f\left(x\right)>g\left(x\right)>0$，则由 $y=f(x)$，$y=g\left(x\right)$，$x=a$，$x=b$ 所围图形绕 x 轴旋转一周而成的体积可表为定积分____________________

16.（2006 期末）曲线 $y=x\left(x-a\right)$ 在 $\left[0,c\right]\left(0<a<c\right)$ 上的一段弧 OP 与直线 PA 及 x 轴围成的图形（如图所示）绕 x 轴旋转。问 c 取何值时，旋转体的体积等于 ΔOPA 绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积。（本题 8 分）



17.（2003 期末）设直线 $y = ax$ 与抛物线 $y = x^2$ 所围成图形的面积为 S_1，它们与直线 $x = 1$ 所围成的图形面积为 S_2，并且 $a < 1$，

（1）试确定 a 的值，使 $S_1 + S_2$ 达到最小，并求出最小值；

（2）求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

第六部分 微分方程

前提说明：本章节不再更新讲解视频（如果实在没学懂可以在 b 站上搜索“宋浩”，找到相应课程即可。）

本章节的练习题不再打算区分类型（比如齐次式、非齐次式等等），而是以年份作为分题顺序，请大家**自行思考用哪一类求法**。

备考建议：请认真完成教材的课后练习题目，除了 2020 年期末出了一道较难的题目，其他考试均侧重于计算。此章节内容以课本为重，历年真题辅助练习，以掌握知识点。

知识点 1：基础练习

1.（2020 期末）微分方程 $y'=3y^{\frac{2}{3}}$ 的一个特解是（　　）

A. $y=(x+C)^2$　　B. $y=x^3+1$　　C. $y=C(1+x)^3$　　D. $y=(x+2)^3$

2.（2020 期末）方程 $xy'-(1+x^2)y=0$ 的通解为__________________。

3.（2020 期末）求微分方程 $y''+2y'+9y=8e^{-x}$ 的通解。

4.（2020 期末）设 $F(x)=f(x)g(x)$，其中 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件：$f'(x)=g(x)$, $g'(x)=f(x)$, 且 $f(0)=0, f(x)+g(x)=2e^x$，求：

(1) $F(x)$所满足的一阶微分方程；(2) $F(x)$的表达式。

5.（2019 期末）

设$y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^x$是二阶常系数非线性微分方程$y''+ay'+by=ce^x$的一个特解，

则（　　）.

A. $a=-3$，$b=2$，$c=-1$　　B. $a=3$，$b=2$，$c=-1$

C. $a=-3$，$b=2$，$c=1$　　D. $a=3$，$b=2$，$c=1$

6.（2019 期末）

求微分方程$y''+2y'-3y=2x+3$的通解

7.（2019 期末）

2.设函数$f(x)$在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的$x_0 \in I$，曲线$y = f(x)$在$\big(x_0, f(x_0)\big)$处的切线与直线$x = x_0$，x 轴所围区域的面积恒为 4，且$f(0) = 2$,求$f(x)$的表达式

8.（2018 期末）已知二阶微分方程 $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\sin x$，则其特解为（　　）

A. $e^{-x}(a\cos x + b\sin x)$　　B. $ae^{-x}\cos x + bxe^{-x}\sin x$

C. $xe^{-x}(a\cos x + b\sin x)$　　D. $axe^{-x}\cos x + be^{-x}\sin x$

9.（2018 期末）求微分方程$\left(y^2 - 3x^2\right)dy + 2xydx = 0, y\big|_{x=0} = 1$的特解。

10.（2017 期末）微分方程$\left(x^2 + y^2\right)dx + 2xydy = 0$ 的通解为（　　）

A. $\frac{x^3}{3} + xy^2 = C$　　B. $\frac{x^3}{2} + xy^2 = C$　　C. $x^3 + xy^2 = C$　　D. $\frac{x^3}{3} - xy^2 = C$

11.（2017 期末）微分方程满足条件 $y(1) = -1$ 的特解 $dy - 2xy^2dx = 0$ 为______________

12.（2016 期末）求微分方程 $y'' + y = e^x + \cos x$ 的通解。

13.（2015 期末）微分方程 $y''' = \sin x$ 的通解是（　　）

（A）$y = \cos x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$　　（B）$y = \cos x + C$

（C）$y = \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$　　（D）$y = 2\sin 2x$

14．（2015 期末）已知 $y=1, y=x, y=x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解，则该方程的通解为______________________________________。

15．（2015 期末）求微分方程 $y''-4y'+4y=3e^{2x}+2x$ 的通解。

16．（2014 期末）设非齐次线性微分方程$y'+P(x)y=Q(x)$有两个不同的解$y_1(x), y_2(x)$，C 为任意常数，则方程的通解是（　　）

A $C[y_1(x)-y_2(x)]$　　　　B $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$

C $C[y_1(x)+y_2(x)]$　　　　D $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$

17．（2014 期末）微分方程$xy'+y=0$ 满足初始条件$y(1)=2$ 的特解是____________

18．（2014 期末）求微分方程$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+2xy=4x$的通解。

19．（2013 期末）微分方程 $y''+2y'-3y=e^x\sin x$ 的一个特解应具有形式（　　）

（A）$ae^x\sin x$　（B）$axe^x\sin x$　（C）$xe^x(a\sin x+b\cos x)$　（D）$e^x(a\sin x+b\cos x)$

20.（2012 期末）设 $f(x)$ 是方程当 $y''+2y'+4y=0$ 的一个特解，如果 $f(x_0)<0$，且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 处（　　）

A. 取极大值　　B. 取极小值　　C. 某领域内单调增　　D. 某领域内单调减

21．（2012 期末）一阶线性微分方程 $xy'+y=\sin x$ 的通解为______________________________.

22．（2012 期末）求微分方程 $y''+y=e^x+\cos x$ 的通解。

23．（2012 期末）已知 $y=1$、 $y=x$ 、 $y=x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解，则该方程的通解为______________________.

24．（2012 期末）求微分方程 $dx+xydy=y^2dx+ydy$ 的通解。

25．（2012 期末）设函数 $y=y\left(x\right)$ 满足 $y''-3y'+2y=2e^x$，且其图形与抛物线 $y=x^2-x+1$ 在点 $\left(0,1\right)$ 处有公切线，求 $y\left(x\right)$

26．（2011 期末）微分方程 $y''-y=e^x+1$ 的一个特解应有形式（　　　　）

(A) ae^x+b　　(B) axe^x+bx　　(C) ae^x+bx　　(D) axe^x+b

27．（2011 期末）微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=2xy$ 的通解为__________________________。

28．（2011 期末）求方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x+1}=\left(x+1\right)^{\frac{5}{2}}$ 的通解。

29．（2010 期末）求微分方程 $\left(y+x\right)dy+\left(x-y\right)dx=0$ 的通解。

30．（2010 期末）设函数 $y=y(x)$ 满足 $y''-3y'+2y=2e^{x}$，且其图形与抛物线 $y=x^{2}-x+1$ 在点 $(0,1)$ 处有公切线，求 $y(x)$。

31．（2021 期末）微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy}$满足初始条件$y(1)=2$ 的特解为____________________________。

32．（2021 期末）求方程$x\frac{dy}{dx}=y-x^3$的通解。

33．（2021 期末）已知曲线$y=y(x)$经过原点，且在原点的切线平行于直线 $2x-y-5=0$，而$y(x)$满足微分方程$y''-6y'+9y=e^{3x}$，求此曲线的方程。

34．（2021 期末）微分方程$xy'+y=0$ 满足初始条件$y(1)=2$ 的特解为____________________________。

35．（2021 期末）求微分方程$y'+\frac{y}{x}=e^x$满足初始条件$y(1)=0$ 的特解。

36．（2021 期末）设函数$y=y(x)$满足微分方程$y''-3y'+2y=2e^x$，其图形在点$(0,1)$处的切线与曲线$y=x^2-x+1$ 在该点处的切线重合，求函数$y=y(x)$的解析表达式。

第七部分 证明题专练

知识点 1：导数相关

考点一：不等式证明（三角函数、指数函数、对数函数等）

1.（2020 期末）证明：当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$ 。

2.（2020 期中）当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，证明 $\tan x>x+\dfrac{1}{3}x^3$.

3.（2021 期中）证明：当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$e^{-x}+\sin x<1+\frac{x^2}{2}$

4.（2021 期末）证明：当$x>1$ 时，$\frac{\ln(1+x)}{\ln x}>\frac{x}{1+x}$

5.（2021 期末）证明：当$x>0$ 时，$\ln(1+x)>x-\frac{1}{2}x^2$

6.（2011 期末，2016 期中）证明：当 $x>0$ 时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$。

7.（2019 期中）当$x>y>0$ 时，证明 $\ln\sqrt{xy}<\ln\frac{x+y}{2}$

8.（2018 期中）当 $x>1$ 时，证明：$\ln x>\frac{2\left(x-1\right)}{x+1}$

9.（2017 期中）设 $b>a>e$，证明：$a^b>b^a$.

10.（2010 期中）证明：当 $x>0$ 时，$\ln\left(1+x\right)>\frac{\arctan x}{1+x}$

11.（2008 期中）证明：当 $x>0$ 时，则 $e^x>1+x$

12．（2006 期中）证明：当$x>0$时，$\left(x^2-1\right)\ln x\geq\left(x-1\right)^2$

考点二：连续和可导性质的考察

1．（2015 期中）设$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，证明$f(x)$在$x=0$处可微，但$f'(x)$在$x=0$处不连续。

知识点 2：中值定理

1．（2020 期中）设函数$f(x)$在$[0, 1]$上连续，在$(0, 1)$内可导，且$f(1)=0$，试证明存在$\xi\in(0, 1)$，使得$f'\left(\xi\right)=-f\left(\xi\right)\cot\xi$.

2．（2019 期中）设函数$f\left(x\right)$在$\left[a,b\right]$上连续，在$\left(a,b\right)$内可导，且$0<a<b$，试证存在$\xi,\eta\in\left(a,b\right)$，使得$f'\left(\xi\right)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$。

（提示：用拉格朗日中值定理和柯西中值定理）

3.（2018 期中）设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续，$\left(0,1\right)$ 内可导，$f\left(0\right)=0$，$f\left(1\right)=\frac{\pi}{4}$，证明：存在 $\xi\in\left(0,1\right)$，使得 $\left(1+\xi^2\right)f'\left(\xi\right)=1$.

4.（2017 期中）设 $f(x)$ 在区间 $\left[a,b\right]$ 上具有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，$f'(a)f'(b)>0$，证明存在 $\xi\in\left(a,b\right)$ 和 $\eta\in\left(a,b\right)$，使 $f(\xi)=0$ 及 $f''(\eta)=0$.

5.（2014 期中，2005 期中）设 $0<a<b$，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 $\left(a,b\right)$ 内可导，试利用柯西中值定理，证明存在一点 $\xi\in\left(a,b\right)$，使得 $f\left(b\right)-f\left(a\right)=\xi f'\left(\xi\right)\ln\frac{b}{a}$。

6.（2012 期中）设函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 $\left(a,b\right)$ 内可导，且 $f\left(a\right)=f\left(b\right)=1$，试证：$\xi,\eta\in\left(a,b\right)$，使 $e^{\eta-\xi}\left[f\left(\eta\right)+f'\left(\eta\right)\right]=1$。

7.（2005 期中）若函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 内具有二阶导数，且 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=f\left(x_3\right)$，其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$，证明：在 (x_1,x_3) 内至少存在一点 ξ，使得 $f''\left(\xi\right)=0$

8.（2010 期中）设函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 $\left(a,b\right)$ 内可微，且 $f\left(a\right)=f\left(b\right)=0$，证明：对 $\forall\lambda\in R$，$\exists c\in\left(a,b\right)$，使得 $f'\left(c\right)=\lambda f\left(c\right)$

9.（2006 期中）设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，且 $f(a)=0$，证明存在一点 $\xi\in(0,a)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

10.（2004 期中）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)]$。

11.（2004 期中）设 $f(x),g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可微，且 $f(a)=f(b)=0$，

证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$。

12．（2003 期中）设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0, f'(x)$ 单调增加，证明：$\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加。

13．（2020 期末）设函数 $f(x)=\int_1^x e^{t^2}\mathrm{d}t$，证明：存在 $\xi\in(1,2)$, 使得 $f(2)=\xi e^{\xi^2}\ln 2$ 。

14．（2019 期末，2010 期末）设函数 f(x)在$[0, 1]$上连续，在$(0, 1)$内可导，且满足 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = f(0)$，证明：至少存在一点$\xi \in (0, 1)$使 $f'(\xi) = 0$.

15．（2019 期末，2013 期末）已知$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$，且$f''(x) > 0$，证明：$f(x) \geq x$.

16．（2018 期末）设函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续，在 $\left(0,1\right)$ 内二阶可导，且过两点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 与 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 的直线与曲线 $y=f\left(x\right)$ 相交于 $\left(c,f\left(c\right)\right)$，其中 $0<c<1$，试证：至少存在一点 $\xi\in\left(0,1\right)$，使得 $f''\left(\xi\right)=0$.

17．（2017 期末）设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,2\right]$ 上连续，在 $\left(0,2\right)$ 内可导，且有 $f\left(2\right)=5f\left(0\right)$。试证明：在 $\left(0,2\right)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $\left(1+\xi^2\right)f'\left(\xi\right)=2\xi f\left(\xi\right)$.

18．（2016 期末）设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，且 $f(a)=0$，证明存在一点 $\xi\in(0,a)$，使 $f(\xi)=-\xi f'(\xi)$。

19．（2015 期末，2016 期中，2021 期中）设函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续，在 $\left(0,1\right)$ 内可导，且

$f\left(0\right)=f\left(1\right)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，试证明至少存在一点 $\xi\in\left(0,1\right)$，使得 $f'\left(\xi\right)=1$

20．（2014 期末）设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $2f(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，证明 $\exists\xi\in(0,2), \mathrm{s.t.} f(\xi)=f(0)$

21．（2011 期中，2005 期中）设 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内二阶可导，且 $f''(x)>0$，证明：对于任意的 $x_1, x_2\in(a,\ b)$，

且 $x_1 \neq x_2$ 及 $\lambda(0<\lambda<1)$，恒有 $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$.

22.（2011 期末，2008 期中）设 $f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续，在 $\left(0,1\right)$ 内可导，且 $f(0)=0$， $f(1)=1$，试证：对任意给定的正数 a,b 在 $\left(0,1\right)$ 内存在不同的 ξ,η，使 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$。

23.（2021 期末）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx=f(b)$. 证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使得 $f'(\xi)=0$.

24.（2021 期末）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}} e^{1-x^2} f(x)\mathrm{d}x$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

25.（2022 期中）

设函数 $f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续，在 $\left(0,1\right)$ 内可导，且 $f(0)=1$, $f(1)=0$.证明：

1）至少 $\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=\xi$；

2）至少 $\exists\eta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)=-\dfrac{2f(\eta)}{\eta}$.

知识点3：积分

考点一：定积分

1.（2018 期末）若 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续，证明：$\int_0^{\pi} xf\left(\sin x\right)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f\left(\sin x\right)dx.$

2.（2017 期末）证明：若 $f\left(x\right)$ 为连续的奇函数，则 $\int_0^{x} f\left(t\right)dt$ 是偶函数。

3.（2015 期末）设 $f''\left(x\right)$ 在区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，试用分部积分法证明：

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]+\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx$$

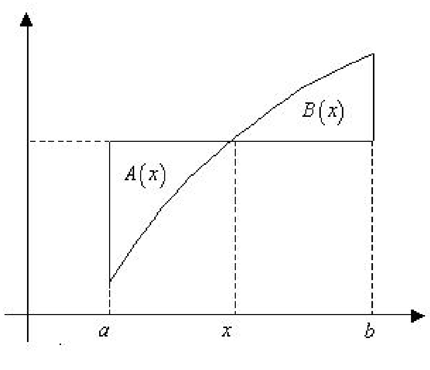
4.（2014 期末）设 $f(x)$ 是连续函数，证明 $\int_0^x \left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u=\int_0^x f(t)(x-t)\,\mathrm{d}t$

5.（2013 期末）证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$，并由此计算该积分值。

6.（2012 期末，2003 期末）证明$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}\left[f(x)+f(-x)\right]dx$，并利用结论求$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin x}$

7.（2008 期末）证明$\int_{0}^{\pi} \sin^{n} x dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n} x dx$ 。

8.（2006 期末）设$f(x)$在$[a,b]$上可导，且$f'(x)>0$，$f(a)>0$，试证：对于如图所示的两个面积函数$A(x)$和$B(x)$，存在唯一的$\xi \in (a,b)$，使得$\frac{A(\xi)}{B(\xi)} = 2007$。（本题 6 分）



9.（2006 期末）设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0, 0<f'(x)\le 1$，证明：

$$\left(\int_{0}^{1} f(x)dx\right)^{2} \ge \int_{0}^{1} f^{3}(x)dx$$

知识点 4：零点、实根相关

考点一：零点、实根相关

1．（2013，2012 期末）设 $f(x)$ 在区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，且 $f(x)>0$，$F\left(x\right)=\int_a^x f\left(t\right)dt+\int_b^x \frac{dt}{f\left(t\right)}$，$x\in\left[a,b\right]$，

证明：

（1）$F'\left(x\right)\geq 2$；

（2）方程 $F\left(x\right)=0$ 在区间 $\left(a,b\right)$ 内有且仅有一个根。

2．（2015 期中）证明：若 $a^2-3b<0$，则方程 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c=0$ 有唯一实根。

3．（2014 期中）证明 $x^2-x\sin x-\cos x=0$ 仅有两个实根。

4．（2012 期中）证明方程 $\ln x=\frac{1}{2}-x$ 至少有一个不超过 1 的正根。

5．（2006 期中）方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1 = 0$ 在 $\left(0,1\right)$ 上必有唯一的实根 $x_n \left(n > 2\right)$，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

6．（2005 期中）设常数 $k > 0$，讨论函数 $f(x) = \ln x - \dfrac{x}{e} + k$ 在 $(0,\ +\infty)$ 内零点的个数。