高等数学 B2

浙江理工大学期末试题汇编

（答案册 五套精装版）

学校：________________________

专业：________________________

班级：________________________

姓名：________________________

学号：________________________

（此试卷为 2022 年第二版 第 1 次发行）

目 录

2022 年所有试卷版本见**试卷版**的尾页。如需资料获取请添加下方的 QQ 群获取。

更多信息

试卷整理人：张创琦　　　　　　　　　微信公众号：创琦杂谈
试卷版次：2022 年 4 月 30 日 第二版 第 1 次发行
本人联系 QQ 号：1020238657（勘误请联系本人）
创琦杂谈学习交流群（QQ 群）群号：749060380
cq 数学物理学习群（QQ 群）群号：967276102
cq 计算机编程学习群（QQ 群）群号：653231806
感谢浙理羊同学以及学校各大资料平台对本资料的支持。

1 浙江理工大学 2020—2021 学年第 2 学期《高等数学 B2》期末 A 卷

一、选择题

1.A　2. B　3. C　4. C　5. B　6. D

评分标准说明：　每题 4 分，错则扣全分

二、填空题

1. 12π　　2. $-2xy\sin(x^2y)$.　　3. $\dfrac{\pi^2}{e^2}$

4. $2edx+(e+2)dy$　　5. $\pi-2$　　6.0

评分标准说明：　每题 4 分，错则扣全分

三 、计算题（本题共五小题，满分 30 分）

1.**解：**　$\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_\pi^{2\pi}r\sin r dr$ --------------- 4 分

$=-6\pi^2$ --------------- 2 分

评分标准说明：　只写出答案，无步骤的，扣 4 分。

2. **解：由区域对称性可知**

$\iint_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,d\sigma=2\int_0^1dx\int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}dy$ --------------- 2 分

$=-\frac{2}{3}\int_0^1(x^3-1)dx$ -------------- 2 分

$=\frac{1}{2}$ --------------- 2 分

评分标准说明：　只写出答案，无步骤的，扣 4 分。

3 **解：** 等式两边同时对 x 和 y 求偏导

$$\frac{\partial u}{\partial x}+e^u\frac{\partial u}{\partial x}=y \ \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{1+e^u} \quad (1)$$ ---------------1 分

$$\frac{\partial u}{\partial y}+e^u\frac{\partial u}{\partial y}=x \ \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{1+e^u}$$ ---------------1 分

再对（1）式两边同时对 y 求偏导得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+e^u\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+e^u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1$$ ---------------2 分

整理得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{1+e^u}-\frac{e^u xy}{(1+e^u)^3}$$ ---------------2 分

评分标准说明：　步骤正确，答案不对，扣 2 分。

4 **解：** 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}(\frac{n!2^n}{n^n})^{-1}=\lim\limits_{n\to\infty}2(\frac{n}{n+1})^n$ --------------- 2 分

$=\lim\limits_{n\to\infty}2[(1-\frac{1}{n+1})^{-(n+1)}]^{-\frac{n}{n+1}}=2e^{-1}<1$ --------------- 2 分

由比值判别法，原级数收敛--------------- 2 分

评分标准说明： 判断敛散性正确，但是过程错误，扣 3 分。

5 **解：** 由于 $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n,-1<x<1$ --------------- 2 分

得 $\frac{1}{1+2x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-2x)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^nx^n,-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ ---------------2 分

又因为 $f(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+2x}$，所以

--------------- 2 分

评分标准说明：其他方法判断正确也可得分。

四 综合题（本题共两小题，满分 14 分）

1 **解：** $\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{-x^2y^2},\frac{\partial f}{\partial y}=xe^{-x^2y^2}$ --------------- 2 分

所以 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2xy^3e^{-x^2y^2},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=e^{-x^2y^2}-2x^2y^2e^{-x^2y^2}$， $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x^3ye^{-x^2y^2}$ ------ 3 分

$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2e^{-x^2y^2}$ --------------- 2 分

评分标准说明： 步骤正确，答案不对，扣 2 分。

2 **解：** 令 $D_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,x\ge 0,y\ge 0\}$ ， $D_2=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le\sqrt{2},x\ge 0,y\ge 0\}$

---------- 1 分

$$\iint_D xy[1+x^2+y^2]dxdy=\iint_{D_1}xy[1+x^2+y^2]dxdy+\iint_{D_2}xy[1+x^2+y^2]dxdy$$

则 $=\iint_{D_1}xydxdy+\iint_{D_2}2xydxdy$

------------ 3 分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^3\sin\theta\cos\theta dr+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^{2^{1/4}}r^3\sin\theta\cos\theta dr$ ------------ 2 分

$=\frac{3}{8}$------------ 1 分

评分标准说明：计算正确，过程不同也可得分。

五、证明题（本题共两小题，满分 8 分）

1 证：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+1)2}$ ------------ 2 分

$=\frac{1}{2}<1$，由比值判别法，原级数收敛------------ 2 分

2 证： $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$ ------------ 2 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$------------ 2 分

所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

评分标准说明：第 1 题用其他判别法证明也可。

2 浙江理工大学 2019—2020 学年第 2 学期《高等数学 B2》期末 A 卷

一 单选题。

1 C　　2 A　　3 C　　4 D　　5 B

二 填空题。

1. $y=(x+C)\cos x$.　　2. $R=\sqrt{3}$.　　3. $-\frac{1}{\sqrt{6}}$.

4. -1 .　　5. $\frac{1}{1+x^2y^2}(ydx+xdy)$.　　6. $0<p<1$

三 计算题一（本题共 6 小题，满分 48 分）

1.**解**:原方程对应的齐次方程为 $y''-5y'+6y=0$, 其特征方程为 $r^2-5r+6=0$ 的根为

$r_1=2,r_2=3$，对应齐次方程的通解为 $\bar{y}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x},(C_1,C_2$为任意常数). ------2 分

λ=1，令特解为 $y_*=Ae^x$,将其代入原方程，解得 $A=1$,所以特解为 $y_*=e^x$， ------2 分

所以原微分方程通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+e^x,(C_1,C_2\text{为任意常数})$ -----1 分

又 $y(0)=1\Rightarrow C_1+C_2+1=1$

$y'=2C_1e^{2x}+3C_2e^{3x}+e^x$，$y'(0)=1\Rightarrow 2C_1+3C_2+1=1$

因此 $C_1=0,C_2=0$ --------2 分

因此满足初始条件的特解为 $y=e^x$. --------1 分

2. 解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'\bullet\frac{1}{y}+g+xg'\bullet(-\frac{y}{x^2})=f'(\frac{x}{y})+g(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}g'(\frac{y}{x})$$ -------- 2 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{y}f''+g'\bullet(-\frac{y}{x^2})-\frac{y}{x}\bullet g''\bullet(-\frac{y}{x^2})+\frac{y}{x^2}g'=\frac{1}{y}f''(\frac{x}{y})+\frac{y^2}{x^3}g''(\frac{y}{x})$$ -------- 2 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(-\frac{x}{y^2})f''+g'\bullet\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\bullet g'-\frac{y}{x}g''\bullet\frac{1}{x}=-\frac{x}{y^2}f''(\frac{x}{y})-\frac{y}{x^2}g''(\frac{y}{x})$$ --------2 分

$$\therefore x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0.$$ -------- 2 分

3. 解：

$$I=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\frac{r\sin\theta}{r}rdr=\int_0^{\pi}\sin\theta\bullet\frac{1}{2}r^2\Big|_0^{2\sin\theta}d\theta=2\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta$$ ---------6 分

$$=-2\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)d\cos\theta=(-2\cos\theta+\frac{2}{3}\cos^3\theta)\Big|_0^{\pi}=\frac{8}{3}$$ ---------2 分

4. 解：

根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|<1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{n+1}\cdot\frac{n}{x^{n-1}}\right|=|x|<1$,

所以收敛区间为 $(-1,1)$ ---------2 分

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n-1},x\in(-1,1)$. 显然 $S(0)=1$.

$$xS(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{n-1}dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x).$$ ---------4 分

故当 $x\neq0$ 时， $S(x)=-\frac{\ln(1-x)}{x}$,

所以综上所述 $S(x)=\begin{cases}-\dfrac{\ln(1-x)}{x}, x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 1, \qquad x=0\end{cases}$ ---------2 分

令 $x=\dfrac{1}{2}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{\frac{1}{2}}\ln(1-\frac{1}{2})=2\ln 2.$ ---------2 分

5. 解：

$f(x)=1-\dfrac{2}{3+x-1}=1-\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{1+\dfrac{x-1}{3}}$ --------2 分

$=1-\dfrac{2}{3}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{3}\right)^n=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}(x-1)^n, -2< x<4.$ --------4 分

6. 解：

积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, 0\le y\le 4-2x\}$，则 -------2 分

$\displaystyle\iint_D(4-x^2)dxdy=\int_0^2(4-x^2)dx\int_0^{4-2x}dy$ -------4 分

$\displaystyle=\int_0^2(4-x^2)(4-2x)dx=\int_0^2(16-8x-4x^2+2x^3)dx=\frac{40}{3}$ -------2 分

四 证明题（满分 8 分）

$\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial u}\bullet\dfrac{\partial u}{\partial x}=F_u',\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\partial F}{\partial v}\bullet\dfrac{\partial v}{\partial y}=F_v',$ --------2 分

$\dfrac{\partial F}{\partial z}=\dfrac{\partial F}{\partial u}\bullet\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial F}{\partial v}\bullet\dfrac{\partial v}{\partial z}=-F_u'-F_v'$ -------1 分

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\dfrac{F_u'}{F_u'+F_v'},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\dfrac{F_v'}{F_u'+F_v'}$ --------4 分

$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{F_u'}{F_u'+F_v'}+\dfrac{F_v'}{F_u'+F_v'}=1$ --------1 分

3 浙江理工大学 2015—2016 学年第 2 学期《高等数学 B2》期末 A 卷

一．选择题 （4 分 / 题　共 24 分）

1. C　　2. A　　3. C　　4. D　　5. B　　6. C

二．填空题（4 分/题　共 24 分）

1. $y=\tan(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{\pi}{4})$　　2. 1，$\frac{1}{2}$　　3. $\frac{9}{2}$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\sin 2\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr$　　5. $\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}$　　6. 1，$[0,2)$

三．计算题 （6 分/ 题　共 30 分）

1. 解：齐次方程对应的特征方程为：$r^2-2r+2=0$ ————————2 分

解得方程所对应的特征根为：$r_1=1+i,r_2=1-i$ ————————3 分

因此齐次方程的通解为: $y=e^x(c_1\cos x+c_2\sin x)$ ————————4 分

$\because f(x)=e^x,\therefore\lambda=1$不是特征根，故设特解为 $y^*=Ae^x$,待人方程，则得

$Ae^x=e^x\Rightarrow A=1$ ————————5 分

因此，所求方程的通解为 $y=e^x(c_1\cos x+c_2\sin x)+e^x$ ————————6 分

2. 解：令 $u=2x-y,v=y\sin x$，则 $z=f(u,v)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2\frac{\partial f}{\partial u}+y\cos x\frac{\partial f}{\partial v}$$ ————————2 分

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial u}+\sin x\frac{\partial f}{\partial v}$$ ————————4 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2\frac{\partial f}{\partial u}+y\cos x\frac{\partial f}{\partial v})$$

$$=2(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y})+\cos x\frac{\partial f}{\partial v}+y\cos x(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y})$$

$$=2(-\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\sin x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v})+\cos x\frac{\partial f}{\partial v}+y\cos x(-\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+\sin x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2})$$

$$=-2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(2\sin x-y\cos x)\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{1}{2}y\sin 2x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\cos x\frac{\partial f}{\partial v}$$

------ 6 分

3. 解：对 $F(x+z,y+z)-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)=2$ 两边微分得

$$dF-\frac{1}{2}(dx^2+dy^2+dz^2)=0$$ ---------------------------------2 分

$$F'_1 d(x+z)+F'_2 d(y+z)-\frac{1}{2}(2xdx+2ydy+2zdz)=0$$

$$(F'_1-x)dx+(F'_2-y)dy+(F'_1+F'_2-z)dz=0$$

-----------------------------4 分

所以 $$dz=\frac{(x-F_1')dx+(y-F_2')dy}{F_1'+F_2'-z}$$ ----------------------------6 分

4. 解：$I=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}dx$ ——————————————2 分

$$=\int_0^1 (y-y^2)\frac{\sin y}{y}dy$$ ——————————————3 分

$$=\int_0^1 \sin y dy-\int_0^1 y\sin y dy$$ ——————————————4 分

$$=-\cos y\Big|_0^1-(-y\cos y+\sin y)\Big|_0^1$$

$$=1-\sin 1$$ ——————————————6 分

5. 解：

$$0\le u_n=\frac{(1!)^2+(2!)^2+(3!)^2+\cdots+(n!)^2}{(2n)!}$$

$$\le\frac{(n!)^2+(n!)^2+(n!)^2+\cdots+(n!)^2}{(2n)!}$$ ——————————————2 分

$$=\frac{n\cdot(n!)^2}{(2n)!}=v_n$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{n\cdot(n!)^2}{(2n)!}}$$ ——————————————3 分

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4}<1$$

所以由比值判别法，知级数 $\sum_{n=0}^{\infty}v_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cdot(n!)^2}{(2n)!}$ 收敛。- ————————5 分

再由比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1!)^2+(2!)^2+(3!)^2+\cdots+(n!)^2}{(2n)!}$ 收敛。

————————6 分

四．解：由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3a^2 \\ x^2+y^2=2az \end{cases}$ 得 $r^2+\frac{1}{4a^2}r^4=3a^2$，$\therefore r=\sqrt{2}a$ ————————3 分

$V=\iint_D\left[\sqrt{3a^2-x^2-y^2}-\frac{1}{2a}(x^2+y^2)\right]dxdy$ ————————6 分

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}a}(\sqrt{3a^2-r^2}-\frac{1}{2a}r^2)rdr=2\pi a^3(\sqrt{3}-\frac{5}{6})$ ————————8 分

五．解：$f(x)=\frac{1}{2+(x-2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}}$ ————————2 分

$\because \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}$ ————————3 分

$\therefore \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-2}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2})^{n+1}(x-2)^n$ ————5 分

其中 $-1<\frac{x-2}{2}<1$，即 $0<x<4$ ————————6 分

当 $x=0$ 时，级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}$ 发散；

当 $x=4$ 时，级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2}$ 发散；

故 $\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2})^{n+1}(x-2)^n, x\in(0,4)$ ————————8 分

六．证明：$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k+1})$

$=(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+3(a_3-a_4)+\cdots+n(a_n-a_{n+1})$ ————————2 分

$=a_1+a_2+\cdots+a_n-na_{n+1}$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}na_n=a$，故 $\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}(\sum_{k=1}^{n}a_k-na_{n+1})$ 收敛————4 分

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k - a = S - a$$ ————————————5 分

故 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛. ——————————————6 分

又 $\because |a_n b_n| \le \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$，由比较判别法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛。……………………3 分

4 浙江理工大学 2008—2009 学年第 2 学期《高等数学 B2》期末 A 卷

一 C D D C A B

二 1. $\underline{x\cos(xy) - 2x\cos(xy)\sin(xy)}$ 2. $\underline{\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx}$. 3. $\underline{p > \frac{5}{3}}$

4. $\underline{y = -2e^{-2x}}$ 5. $\underline{(-4,4)}$

三 1. $F(x,y,z) = x + y - z - e^z$, 则：$F_x = 1, F_y = 1, F_z = -1 - e^z$ ………1 分.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{1}{1+e^z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{1}{1+e^z}$$ ………………3 分.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{(1+e^z)^2} \cdot e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$ ……………………………5 分.

$$= -\frac{e^z}{(1+e^z)^3}$$ …………………………………..7 分.

2 解：$\iint_D \frac{\sin x}{x} dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} \frac{\sin x}{x} dy$ --3 分

$$= \int_0^1 \frac{\sin x}{x} y\Big|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 (\sin x - x\sin x)dx$$ -----------4 分

$$= -\cos x\Big|_0^1 - \int_0^1 x\sin x dx = 1 - \sin 1$$ --------------------7 分

3． $r^2 + 3r + 2 = 0, r_1 = -2, r_2 = -1$ ……………………………………1 分

对应齐次方程通解：$Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$ …………………………..3 分

$y^* = bxe^{-x}, b = 1$…………………………………………………5 分

所求通解：$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + xe^{-x}$………………………………7 分.

4 $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$…………………………………………..1 分

$x = 1, \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$收敛; $x = -1, -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散.收敛域（-1，1]………3 分

$S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x(-1)^{n-1}x^{n-1}dx$

$= \int_0^x\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}\}dx$

$= \int_0^x\dfrac{1}{1+x}dx = \ln(1+x)$ ……….7 分.

5. 由$\ln(1-x-2x^2) = \ln(1+x)(1-2x) = \ln(1+x) + \ln(1-2x)$,－－－－－－－－－－1 分

且 $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$, －－－－－－－－－－－－－3 分

$x \in (-1, 1]$－－－－－－－－－－－－－－－－4 分

$\ln(1-2x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(-2x)^n}{n} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}x^n$, $x \in [-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$－－－－6 分

所以$\ln(1-x-2x^2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} - \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$, $x \in [-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$－－－－7分

=

四 1 解：即求成本函数$c(x,\ y)$在条件$x + y = 8$下的最小值

构造辅助函数 $F(x,\ y) = x^2 + 2y^2 - xy + \lambda(x + y - 8)$（2 分）

解方程组 $\begin{cases} F'_x = 2x - y + \lambda = 0 \\ F'_y = -x + 4y + \lambda = 0 \\ F'_\lambda = x + y - 8 = 0 \end{cases}$ 解得 $\lambda = -7, x = 5, y = 3$ （6 分）

这唯一的一组解即为所求，当这两种型号的机床分别生产5台和3台时，总成本最小，最小成本为：

$c(5,\ 3) = 5^2 + 2\times 3^2 - 5\times 3 = 28$（万）（8 分）

2 利用二重积分的几何意义计算球面$x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$与抛物面$x^2 + y^2 = 2az(a > 0)$所围

公共部分立体的体积

解：$\because \begin{cases} x^2+y^2+z^2=3a^2 \\ x^2+y^2=2az \end{cases} \Rightarrow z=a$

所求立体在 xoy 面上的投影区域为：$D: x^2+y^2 \le 2a^2$ ---------------------------2 分

由二重积分的几何意义所求立体的体积为

$$V=\iint_D (\sqrt{3a^2-x^2-y^2}-\frac{x^2+y^2}{2a})d\sigma$$ ---------------------------------5 分

用极坐标计算得

$$V=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (\sqrt{3a^2-r^2}-\frac{r^2}{2a})rdr$$ ---7 分

$$=2\pi a^3(\sqrt{3}-\frac{5}{6})$$ --8 分

五 证明：

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛,所以部分和 $s_m=\sum_{n=1}^{m}(a_n-a_{n+1})=a_1-a_{m+1}$ 有界,从而数列 $\{a_n\}$ 有界

即存在常数 $M>0$，使 $|a_n|<M(n=1,2,3,\cdots)$，故 $|a_nb_n|<Mb_n(n=1,2,3,\cdots)$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 是收敛的正项级数，由比较审敛法知，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

5 浙江理工大学 2002—2003 学年第 2 学期《高等数学 B2》期末 A 卷

一 选择题（每小题 5 分）

1 A　2 A　3 B　4 B　5 D　6 C

二 填空题（每小题 5 分）

1 $\underline{\frac{z}{x(z-1)}}$　　2 $\underline{\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}}$　　3 $\underline{\frac{5}{3}e^x-\frac{7}{6}e^{-2x}-x-\frac{1}{2}}$

4 $\underline{\frac{1-e^{-4}}{2}}$　　5 $\underline{y^2=x+1}$

三

解：$shx=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$　　$-\infty<x<+\infty$　　（8 分）

四

解：$\iint_D y^2e^{xy}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y y^2e^{xy}dx$　　（5 分）

$$=\int_0^1 (ye^{y^2}-y)dy=\frac{e}{2}-1$$ （5 分）

五

解 $\iiint\limits_{\Omega} zdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^{\sqrt{1-r^2}}zdz$ （7 分）

$=\frac{\pi}{4}$ （3 分）

六

解 $y''-y=\frac{1-\cos 2x}{2}$

对应的齐次方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$ （5 分）

通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cos 2x$ （5 分）

七

证 设 $u=cx-az, v=cy-bz$ 方程 $\varphi(u,v)=0$ 两边对 x 微分得

$\varphi_u(c-a\frac{\partial z}{\partial x})+\varphi_v(-b\frac{\partial z}{\partial x})=0, \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{c\varphi_u}{a\varphi_u+b\varphi_v}$，同理 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c\varphi_v}{a\varphi_u+b\varphi_v}$ （5 分）

故 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c.$ （2 分）