

• 全国硕士研究生入学考试 •

# 《离散数学》

## 考点精讲及复习思路

主讲老师：洪亮



关注考试点官方微博：

<http://weibo.com/kaoshidian>

意见及建议也可发送邮件至：[service@kaoshidian.com](mailto:service@kaoshidian.com)



客服电话请拨打：

**400-6885-365**

周一至周日：8:00-24:00

# 目 录

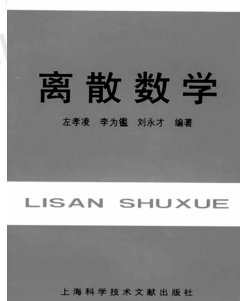
---

绪 论	(1)
第一章 命题逻辑	(7)
第二章 谓词逻辑	(15)
第三章 二元关系	(23)
第四章 图论	(51)
第五章 代数系统	(86)

# 绪 论

## 《离散数学》考研分析

### 一、教材说明：



作者：左孝凌，李为鉴，刘永才，出版社：上海科学技术出版社

其他参考书目

《离散数学》耿素云、屈婉玲等，清华大学出版社

《离散数学》方世昌，西安电子科技大学出版社

《离散数学》洪帆，华中科技大学出版社

《离散数学及其应用》，傅彦等，高等教育出版社

《离散数学及其应用》，Kenneth H. Rosen 著，袁崇义等译，机械工业出版社

### 二、考试形式、题型及知识点分析

#### 1. 考试形式

①单考离散数学：基础题约占 60%，综合题约占 40%

②计算机类一张卷子合考时：离散数学一般占总分的 40—60%，侧重于基础知识点及对知识点灵活运用的考核，大题为主

③复试中常考笔试科目

#### 2. 常见的考试题型

题型一般分两类：

1) 基础题：判断题、填空题、选择题、应用计算题、证明题等等

基础题主要考察对各种基本概念的掌握程度，以及各种定理的证明和基本应用。

例如：

证明等价关系：即证明关系有自反、对称、传递的性质。

证明偏序关系:即证明关系有自反、反对称、传递的性质。

证明群:即要证明代数系统封闭、可结合、有么元和逆元。

## 2) 综合题:

内容涵盖若干章或融合多个知识点的考题,或者是结合应用背景形成的综合应用题。

某一通讯编码的码字  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_7\}$ , 其中  $x_1, x_2, x_3$  和  $x_4$  为数据位,  $x_5, x_6, x_7$  为校验位, 并且满足:

$$X_5 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$$

$$X_6 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_4$$

$$X_7 = x_1 \oplus x_3 \oplus x_4$$

这里的  $\oplus$  是模2加法, 设  $S$  为所有这样的码字构成的集合, 在  $S$  上定义二元运算如下:

$$\forall x, y \in S, \quad x \cdot y = (x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, \dots, x_7 \oplus y_7)$$

证明  $\langle S, \cdot \rangle$  构成一个群, 且是  $\langle T, \cdot \rangle$  的子群, 其中

$$T = \{x | x \text{ 是7位0和1构成的序列}\}$$

## 3. 考试内容涉及的知识点分布

### 第一部分 数理逻辑

#### (1) 命题逻辑:

知识点:

1) 命题的概念、表示、分类; 五种基本联结词的逻辑意义。

2) 命题公式的递归定义, 自然语言翻译成命题公式。

3) 真值表的构造、命题公式等价的概念。

4) 重言式与蕴涵式的定义、逻辑意义, 逻辑等价与逻辑蕴涵的意义和证明方法。常用的逻辑等价公式和逻辑蕴涵公式。

5) 命题公式的合取范式、析取范式、主合取范式、主析取范式。极小项、极大项。求范式、主范式的方法, 公式类型与主范式之间的关系。

6) 命题逻辑的推理理论, 主要的推理方法: 真值表法、直接证明法、间接证明法。常用推理规则:  $P$  规则、 $T$  规则、 $CP$  规则。

重点: 蕴涵式的理解, 命题的符号化, 命题逻辑推理, 计算范式、主析取(合取)范式等。

#### (2) 谓词逻辑:

知识点:

1) 谓词的概念与表示方法, 量词、个体域和个体的概念

2) 谓词逻辑的合式公式与自然语言的翻译

3) 自由变元、约束变元、辖域的概念

4) 谓词逻辑的等价式和蕴含式

5) 前束范式的概念及求解方法

6) 谓词逻辑的推理理论:  $P$ 、 $T$  规则;  $US$ 、 $UG$ 、 $ES$ 、 $EG$  规则; 直接证明方法、间接证明方法、反证法、

$CP$  规则;

重点: 谓词公式的符号化, 谓词逻辑的推理等



## 第二部分 集合与关系

### (1) 集合与关系:

知识点:

- 1) 集合的基本概念与表示方法;
- 2) 集合的运算:并、交、对称差、幂集;
- 3) 序偶与笛卡尔积;
- 4) 关系及其表示、关系矩阵、关系图;
- 5) 关系的性质,复合关系、逆关系;
- 6) 关系的闭包运算: $r(R), s(R), t(R)$ ;

重点:幂集的计算,关于关系性质的证明,关系的闭包计算

### (2) 特殊关系:

知识点:

- 1) 等价关系的概念、等价关系的证明、等价类、商集的定义与计算
- 2) 集合划分的定义,等价关系与集合划分的关系
- 3) 偏序关系、拟序关系、全序关系和良序关系的定义
- 4) 偏序关系的哈斯图表示,偏序关系的八个特殊元。

重点:等价关系的证明、等价类商集的计算、等价关系与集合划分的关系、偏序关系的证明以及特殊元的计算等

### (3) 函数:

知识点:

- 1) 函数的概念,定义域、值域等基本概念,单射函数、满射函数、双射函数。
- 2) 复合函数、逆函数的概念,复合函数与关系复合的联系与区别,逆函数与逆关系的联系与区别。

重点:单、满、双函数的证明,复合函数、逆函数等相关的证明

## 第三部分 图论

### (1) 图:

知识点:

- 1) 图的基本概念:图的定义、表示、操作、分类以及邻接点与邻接边定义;
- 2) 图的基本性质:结点度数、图的基本定理(握手定理)、图的同构、完全图、补图、子图、真子图、生成子图、导出子图的概念;
- 3) 通路和回路:简单(基本)通路和简单(基本)回路、通路和回路长度、结点的距离、可达性判定及矩阵表示

- 4) 图的连通性:无向连通图与连通分支、强(单向、弱)连通图及其对应的连通分支定义等;

重点:连通图(证明),与结点度数相关的证明或计算等

### (2) 树:

知识点:

- 1) 树的概念:树、森林、根数、根、叶结点、分支点、生成树、最小生成树等
- 2) 树的基本性质: $m = n - 1$
- 3) 与根数相关的概念:祖先与后代、父亲与儿子、 $k$ 元树、 $k$ 元完全树、最优树
- 4) 树的算法:广度优先搜索算法、Kruskal 算法、Prim 算法、哈夫曼算法、根数的遍历算法

重点:树的基本概念相关计算和证明,最小生成树构造,哈夫曼编码等等

### (3) 特殊图

知识点:

- 1) 几个特殊图的概念:欧拉图、汉密尔顿图、偶图、平面图
- 2) 几个特殊图的判定方法
- 3) 偶图的匹配、图的着色
- 4) 欧拉图、汉密尔顿图、偶图、平面图的应用

重点:欧拉图、汉密尔顿图、偶图、平面图的判定以及应用

## 第四部分 代数系统

### (1) 代数结构

知识点:

- 1) 代数运算的定义,代数运算的封闭性,代数系统的概念,子代树的概念
- 2) 二元运算律:结合律、交换律、吸收律、分配率、幂等律、可消去律
- 3) 代数系统中的特殊元素:幺元(单位元)、零元、逆元、幂等元的一些基本性质
- 4) 同态与同构的概念、基本性质以及判定
- 5) 广群、半群、独异点、循环半群的概念及其性质
- 6) 群、元素的周期、子群的概念和性质
- 7) 交换群、循环群等特殊群的概念及性质
- 8) 陪集和拉格朗日定理
- 9) 正规子群和商群的概念和性质
- 10) 环、域的定义及性质

重点:代数结构中特殊元素的识别和计算;半群、含幺半群、群、Abel 群的运算性质;半群、含幺半群、群、Abel 群、子群、正规子群的证明方法;

### (2) 格与布尔代数

知识点:

- 1) 格的概念,偏序格与代数格的等价关系
- 2) 各种特殊格、布尔代数的概念与判断
- 3) 格的性质与运算律,对偶原理,保序定理
- 4) 子格与子布尔代数、格同态与布尔同态的概念与证明
- 5) 布尔表达式及其简化与标准形式

重点:格与布尔代数的性质、证明以及应用

## 4. 考试题型及题型考核点分析

题型	考核点	涉及章节	备注
选择题 填空题 判断题 问答题	主要是概念、原理内容准确性和理解深度的考核	全书所有章节	
证明题	命题逻辑、谓词逻辑的形式化及公式之间的等价关系的证明	1-1-2, 1-2-2, 1-1-6, 1-2-6	
	集合相等的判定, 关系性质的证明(等价、偏序、全序、良序等), 关系运算律的证明。	2-1-1, 2-1-4, 2-1-5, 2-2-1, 2-2-3	
	函数的性质(单、满、双)的判定和证明	2-3-1	
	图的同构、结点的度数等的证明	3-1-2, 3-2-1, 3-2-2, 3-2-3	
	树及其性质的判定和证明	3-2	
	几种特殊图的判定	3-3-1, 3-3-2	
	代数系统中特殊元唯一性证明, 特殊元的性质证明, 代数系统的同态与同构证明及其性质证明等	4-1-3, 4-1-4, 4-2-4	
	半群、含么半群、群、Abel 群、子群的判定, 元素的周期性证明, 有限群的一些性质证明, 环和域的性质证明	4-1-5, 4-1-6, 4-1-7, 4-1-10	
计算题	格与布尔代数的性质及判定	4-2	
	命题公式的化简、合取范式、析取范式、主合取范式、主析取范式的求取	1-1-2, 1-1-5, 1-2-4, 1-2-5	
	集合的交、并、差以及幂集的计算	2-1-2	
	关系的交、并、差、补、复合、求逆以及幂运算的计算, 关系的闭包运算	2-1-4, 2-1-5, 2-1-6	
	集合划分、等价类的计算、商集的求取	2-2-1, 2-2-2	
	对给定函数做复合运算, 求逆运算, 对给定置换函数做复合运算、求逆运算等	2-3-2	
	结点的度数、连通分支、通路数目等; 树中叶节点和分支点的数目; 欧拉通(回)路、汉密尔顿通(回)路、匹配方案、面边界及其次数、图的次数等	第三部分 图论	
	代数系统中特殊元(么元、逆元、零元、可消去元、幂等元等)	4-1-3, 4-1-6	
	循环群的生成元、有限群的子群、元素的周期、陪集等的计算	4-1-6, 4-1-7, 4-1-8	

题型	考核点	涉及章节	备注
综合应用题	数理逻辑中,给出命题的自然语言描述,要求进行符号化,然后进行结论的有效性证明	第一部分 数理逻辑	
	二元关系中基于集合划分与等价关系的计算等价类或者商集的的综合应用	第二部分 集合与关系	
	结合具体的应用场景,运用图论中各种定理和判定方法的综合应用题	第三部分 图论	网络环境下构造组播最优树,编码优化中哈夫曼编码的应用等
	基于群论里面的陪集、拉格朗日定理、正规子群、商群的综合应用题	第四部分 代数系统	
	结合具体背景,采用格或者布尔代数进行求解的综合应用题	第四部分 代数系统	信息安全中的访问控制模型,逻辑电路中门电路,逻辑电路设计等

### 三、复习注意事项

如何复习:

1. 强化概念定义的理解。离散数学是建立在大量概念之上的逻辑推理学科,概念的理解是我们学习这门学科的核心。掌握、理解和运用这些概念和定理是复习好这门课的关键。要特别注意概念之间的联系,而描述这些联系的则是定理和性质。

2. 善于归纳解题的方法。离散数学的证明题多,不同的题型会需要不同的证明方法(如直接证明法、反证法、归纳法、构造性证明法),同一个题也可能有几种方法。但是《离散数学》证明题的方法性是很强的,如果拿到一道题,立即能够看出它所属的类型及关联的知识点,就不难选用正确的方法将其解决,反之则事倍功半。由此可见,在平常学习中,要善于总结和归纳,仔细体会题目类型和此类题目的解题套路。

3. 及时补充应用的背景。离散数学是计算机科学与技术的理论基础。也称为计算机数学。因而补充离散数学应用的相关背景知识,对考题中的综合应用题的求解会有很大的帮助。



# 第一章 命题逻辑

## 一、考点讲解

1. 命题的概念、表示、分类;五种基本联结词的逻辑意义。
2. 命题公式的递归定义,自然语言翻译成命题公式
3. 真值表的构造、命题公式等价的概念。
4. 重言式与蕴涵式的定义、逻辑意义,逻辑等价与逻辑蕴涵的意义和证明方法。常用的逻辑等价公式和逻辑蕴涵公式。
5. 命题公式的合取范式、析取范式、主合取范式、主析取范式。极小项、极大项。求范式、主范式的方法,公式类型与主范式之间的关系。
6. 命题逻辑的推理理论,主要的推理方法:真值表法、直接证明法、间接证明法。常用推理规则: $P$ 规则、 $T$ 规则、 $CP$ 规则。

### 知识点1 命题与命题联结词

命题定义:

具有确切真值的陈述句称为命题

真值只有“真”和“假”两种“ $T$ ”(或“1”)和“ $F$ ”(或“0”)表示。

注意:一切没有判断内容的句子都不能作为命题,如命令句、感叹句、疑问句、祈使句、二义性的陈述句等。

一定要可以判断真假

命题一定是陈述句,但并非一切陈述句都是命题。

命题的真值有时可明确给出,有时还需要依靠环境、条件、实际情况时间才能确定其真值。

一般来说,命题可分两种类型:

- 1) 原子命题(简单命题):不能再分解为更为简单命题的命题。
- 2) 复合命题:可以分解为更为简单命题的命题。而且这些简单命题之间是通过如“或者”、“并且”、“不”、“如果……则……”、“当且仅当”等这样的关联词和标点符号复合而构成一个复合命题。

### 五个基本联结词

联结词	自然语言
$\neg$	不、非等
$\wedge$	既……又……、不仅……而且……、虽然……但是……、并且、和、与,等等
$\rightarrow$	如 $P$ 则 $Q$ 、只要 $P$ 就 $Q$ 、 $P$ 仅当 $Q$ 、只有 $Q$ 才 $P$ 、除非 $Q$ 否则 $\neg P$ ,等等
$\leftrightarrow$	等价、当且仅当、充分必要、等等;
$\vee$	相容(可兼)的或

注意:

- ①联结词是句子与句子之间的联结,而非单纯的名词、形容词、数词等地联结;
- ②联结词是两个句子真值之间的联结,而非句子的具体含义的联结,两个句子之间可以无任何地内在联系;
- ③联结词与自然语言之间的对应并非一一对应;
- ④弄清楚蕴涵式  $P \rightarrow Q$  的逻辑关系及其真值,这里  $Q$  是  $P$  的必要条件。无论蕴涵关系如何表述,都要仔细地区分出蕴涵式的前件和后件。

例 “ $\rightarrow$ ”的理解

设  $P$ :雪是白色的; $Q$ : $2+2=4$ 。将下列命题符号化:

- (1)因为雪是白色的,所以  $2+2=4$ ;  $P \rightarrow Q$
- (2)如果  $2+2=4$ ,则雪是白色的;  $Q \rightarrow P$
- (3)只有雪是白色的,才有  $2+2=4$ ;  $Q \rightarrow P$
- (4)只有  $2+2=4$ ,雪才是白色的;  $P \rightarrow Q$
- (5)只要雪不是白色的,就有  $2+2=4$ ;  $\neg P \rightarrow Q$
- (6)除非雪是白色的,否则  $2+2 \neq 4$ ;  $\neg P \rightarrow \neg Q$  或  $Q \rightarrow P$
- (7)雪是白色的当且仅当  $2+2=4$ ;  $P \leftrightarrow Q$

例 设命题  $P$ :明天上午七点下雨;

$Q$ :明天上午七点下雪;

$R$ :我将去学校。

符号化下述语句:

$$(P \wedge Q) \rightarrow R$$

- (1)如果明天上午七点不是雨夹雪,则我将去学校  $(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$
- (2)如果明天上午七点不下雨并且不下雪,则我将去学校
- (3)如果明天上午七点下雨或下雪,则我将不去学校  $(P \vee Q) \rightarrow \neg R$
- (4)明天上午我将雨雪无阻一定去学校  $1 \rightarrow R$

解:

- (1)可符号化为: $\neg (P \wedge Q) \rightarrow R$ 。
- (2)可符号化为: $(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$ 。
- (3)可符号化为: $(P \vee Q) \rightarrow \neg R$ 。
- (4)可符号化为:  

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee$$

$$(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)。$$
 或
$$((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \wedge R。$$

知识点2 命题公式、解释与真值表

定义:一个特定的命题是一个常值命题,它不是具有值“ $T$ ”(“ $1$ ”),就是具有值“ $F$ ”(“ $0$ ”)。



而一个任意的没有赋予具体内容的原子命题是一个变量命题,常称它为命题变量(或命题变元),该命题变量无具体的真值,它的变域是集合 $\{T, F\}$ (或 $\{0, 1\}$ )

注意:

(1)复合命题为命题变元的“函数”(真值函数),其函数值仍为“真”或“假”值。

(2)真值函数或命题公式,没有确切真值。

命题公式的递归定义

1. 命题变元本身是一个公式;
2. 如  $G$  是公式,则  $(\neg G)$  也是公式;
3. 如  $G, H$  是公式,则  $(G \wedge H)$ 、 $(G \vee H)$ 、 $(G \rightarrow H)$ 、 $(G \leftrightarrow H)$  也是公式;
4. 仅由有限步使用规则 1-3 后产生的结果。该公式常用符号  $G, H, \dots$  等表示。

公式的解释与真值表

定义:设  $P_1, P_2, \dots, P_n$  是出现在公式  $G$  中的所有命题变元,指定  $P_1, P_2, \dots, P_n$  一组真值,则这组真值称为  $G$  的一个解释。如果公式  $G$  在解释  $I$  下是真的,则称  $I$  满足  $G$ ;如果  $G$  在解释  $I$  下是假的,则称  $I$  不满足  $G$ 。

一般来说,若有  $n$  个命题变元,则应有  $2^n$  个不同的解释。

定义:将公式  $G$  在其所有可能解释下的真值情况列成的表,称为  $G$  的真值表。

例 下面这组公式的真值表:

$$G_1 = \neg (P \rightarrow Q) \rightarrow P;$$

$$G_2 = (P \rightarrow Q) \wedge P;$$

$$G_3 = \neg (P \wedge \neg Q) \leftrightarrow \neg (P \rightarrow Q)。$$

$P$	$Q$	$\neg (P \rightarrow Q) \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \wedge P$	$\neg (P \wedge \neg Q) \leftrightarrow \neg (P \rightarrow Q)$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	0

永真公式、永假公式、可满足式

1. 公式  $G$  称为永真公式(重言式),如果在它的所有解释之下都为“真”。
2. 公式  $G$  称为永假公式(矛盾式),如果在它的所有解释之下都为“假”。
3. 公式  $G$  称为可满足的,如果它不是永假的。

知识点3 十六个基本等价公式

设  $G, H, S$  是任何的公式,则:

$$1) E_1: G \vee G = G \quad E_2: G \wedge G = G \text{ (幂等律)}$$

$$2) E_3: G \vee H = H \vee G \quad E_4: G \wedge H = H \wedge G \text{ (交换律)}$$

- 3)  $E_5: G \vee (H \vee S) = (G \vee H) \vee S$      $E_6: G \wedge (H \wedge S) = (G \wedge H) \wedge S$  (结合律)
- 4)  $E_7: G \vee (G \wedge H) = G$      $E_8: G \wedge (G \vee H) = G$  (吸收律)
- 5)  $E_9: G \vee (H \wedge S) = (G \vee H) \wedge (G \vee S)$      $E_{10}: G \wedge (H \vee S) = (G \wedge H) \vee (G \wedge S)$  (分配律)
- 6)  $E_{11}: G \vee 0 = G$      $E_{12}: G \wedge 1 = G$  (同一律)
- 7)  $E_{13}: G \vee 1 = 1$      $E_{14}: G \wedge 0 = 0$  (零律)
- 8)  $E_{15}: G \vee \neg G = 1$  (排中律)
- 9)  $E_{16}: G \wedge \neg G = 0$  (矛盾律)
- 10)  $E_{17}: \neg(\neg G) = G$  (双重否定律)
- 11)  $E_{18}: \neg(G \vee H) = \neg G \wedge \neg H$  (De Morgan 定律)
- 12)  $E_{19}: \neg(G \wedge H) = \neg G \vee \neg H$
- 13)  $E_{20}: (G \leftrightarrow H) = (G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G)$  (等价)
- 14)  $E_{21}: (G \rightarrow H) = (\neg G \vee H)$  (蕴涵)
- 15)  $E_{22}: G \rightarrow H = \neg H \rightarrow \neg G$  (假言易位)
- 16)  $E_{23}: G \leftrightarrow H = \neg G \leftrightarrow \neg H$  (等价否定等式)
- 17)  $E_{24}: (G \rightarrow (H \wedge (G \rightarrow \neg H))) = \neg G$  (归谬论)

#### 知识点4 范式

析取范式和合取范式

- (1) 命题变元或命题变元的否定称为文字
- (2) 有限个文字的析取称为析取式(也称为子句)
- (3) 有限个文字的合取称为合取式(也称为短语)
- (4)  $P$  与  $\neg P$  称为互补对。

有限个合取式的析取式称为析取范式

有限个析取式的合取式称为合取范式

#### 范式的求解方法

转换方法:

- (1) 利用等价公式中的等价式和蕴涵式将公式中的  $\rightarrow, \leftrightarrow$  用联结词  $\neg, \wedge, \vee$  来取代, 这可利用如下等价关系:

$$\begin{aligned} (G \rightarrow H) &= (\neg G \vee H); \\ (G \leftrightarrow H) &= (G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G) \\ &= (\neg G \vee H) \wedge (\neg H \vee G). \end{aligned}$$

- (2) 重复使用德·摩根定律将否定号移到各个命题变元的前端, 并消去多余的否定号, 这可利用如下等价关系:  $\neg(\neg G) = G$ ;

$$\begin{aligned} \neg(G \vee H) &= \neg G \wedge \neg H; \\ \neg(G \wedge H) &= \neg G \vee \neg H. \end{aligned}$$

(3) 重复利用分配律, 可将公式化成一些合取式的析取, 或化成一些析取式的合取, 这可利用如下等价关系:

$$G \vee (H \wedge S) = (G \vee H) \wedge (G \vee S);$$

$$G \wedge (H \vee S) = (G \wedge H) \vee (G \wedge S)。$$

**极小项和极大项定义:**

在含有  $n$  个命题变元  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  的短语或子句中, 若每个命题变元与其否定不同时存在, 但二者之一恰好出现一次且仅一次, 则称此短语或子句为关于  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  的一个极小项或极大项。

对于  $n$  个命题变元, 可构成  $2^n$  个极小项和  $2^n$  个极大项

**例** 三个命题变元的极小项和极大项

$P$	$Q$	$R$	极小项	极大项
0	0	0	$m_0 = \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$M_0 = P \vee Q \vee R$
0	0	1	$m_1 = \neg P \wedge \neg Q \wedge R$	$M_1 = P \vee Q \vee \neg R$
0	1	0	$m_2 = \neg P \wedge Q \wedge \neg R$	$M_2 = P \vee \neg Q \vee R$
0	1	1	$m_3 = \neg P \wedge Q \wedge R$	$M_3 = P \vee \neg Q \vee \neg R$
1	0	0	$m_4 = P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$M_4 = \neg P \vee Q \vee R$
1	0	1	$m_5 = P \wedge \neg Q \wedge R$	$M_5 = \neg P \vee Q \vee \neg R$
1	1	0	$m_6 = P \wedge Q \wedge \neg R$	$M_6 = \neg P \vee \neg Q \vee R$
1	1	1	$m_7 = P \wedge Q \wedge R$	$M_7 = \neg P \vee \neg Q \vee \neg R$

极小项和极大项的性质:

任意两个极小项的合取必为假;  $m_i \wedge m_j = 0$

任意两个极大项的析取必为真;  $M_i \vee M_j = 1$

极大项的否定是极小项;  $\neg M_i = m_i$

极小项的否定是极大项;  $M_i = \neg m_i$

所有极小项的析取为永真公式;

所有极大项的合取是永假公式。

$$\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1 \quad \bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$$

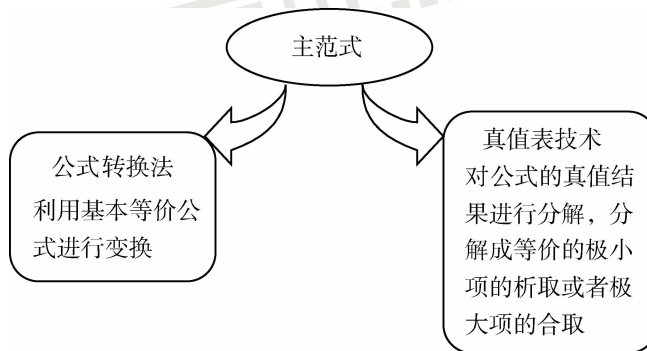
主析取范式和主合取范式:

(1) 在给定的析取范式中, 每一个合取式都是极小项, 则称该范式为主析取范式

(2) 在给定的合取范式中, 每一个析取式都是极大项, 则称该范式为主合取范式

(3) 如果一个主析取范式不包含任何极小项, 则称该主析取范式为“空”; 如果一个主合取范式不包含任何极大项, 则称主合取范式为“空”。

求主析取范式和主合取范式的方法



需要说明:

求任何一个公式的主析取范式和主合取范式不仅要取决于该公式,而且取决于该公式所包含的命题变元。

如公式:

$$G_1 = (P \rightarrow Q) \wedge Q,$$

$$G_2(P, Q, R) = (P \rightarrow Q) \wedge Q.$$

前者是依赖于两个命题变元的,后者应依赖于三个命题变元。

#### 知识点5 命题逻辑的推理理论

推理的基本概念:设  $G, H$  是公式,对任意解释  $I$ ,如果  $I$  满足  $G$ ,那么  $I$  满足  $H$ ,则称  $H$  是  $G$  的逻辑结果(或称  $G$  蕴涵  $H$ ),记为  $G \Rightarrow H$ ,此时称  $G$  为前提, $H$  为结论。

推广:设  $G_1, G_2, \dots, G_n, H$  是公式,称  $H$  是  $G_1, G_2, \dots, G_n$  的逻辑结果( $G_1, G_2, \dots, G_n$  共同蕴涵  $H$ ),当且仅当  $(G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n) \rightarrow H$  为永真式,记为  $G_1, G_2, \dots, G_n \Rightarrow H$ ,称  $G_1, G_2, \dots, G_n$  称为一组前提,用集合  $\Gamma$  来表示,记  $\Gamma = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ 。 $H$  称为结论,则可简记为  $\Gamma \Rightarrow H$

推理定律:设  $G, H, I, J$  是任意的命题公式,则有:

$$1) I_1: G \wedge H \Rightarrow G \quad I_2: G \wedge H \Rightarrow H \text{ (简化规则)}$$

$$2) I_3: G \Rightarrow G \vee H \quad I_4: H \Rightarrow G \vee H \text{ (添加规则)}$$

$$3) I_5: \neg G \Rightarrow G \rightarrow H \quad I_6: H \Rightarrow G \rightarrow H$$

$$4) I_7: \neg (G \rightarrow H) \Rightarrow G \quad I_8: \neg (G \rightarrow H) \Rightarrow \neg H$$

$$5) I_9: G, H \Rightarrow G \wedge H$$

$$6) I_{10}: \neg G, G \vee H \Rightarrow H \quad I_{11}: \neg G, G \rightarrow H \Rightarrow H \text{ (选言三段论)}$$

$$7) I_{12}: G, G \rightarrow H \Rightarrow H \text{ (分离规则)}$$

$$8) I_{13}: \neg H, G \rightarrow H \Rightarrow \neg G \text{ (否定后件式)}$$

$$9) I_{14}: G \rightarrow H, H \rightarrow I \Rightarrow G \rightarrow I \text{ (假言三段论)}$$

$$10) I_{15}: G \vee H, G \rightarrow I, H \rightarrow I \Rightarrow I \text{ (二难推论)}$$

推理规则:

①规则  $P$  (称为前提引用规则):在推导的过程中,可随时引入前提集中的任意一个前提;

②规则  $T$  (逻辑结果引用规则):在推导的过程中,可以随时引入公式  $S$ ,该公式  $S$  是由其前的一个

规则 P

$A \rightarrow A \vee B$  永真



或多个公式推导出来的逻辑结果。

③规则  $CP$  (附加前提规则): 如果能从给定的前提集合  $\Gamma$  与公式  $P$  推导出  $S$  则能从此前提集合  $\Gamma$  推导出  $P \rightarrow S$ 。

推理方法:

①真值表法: 采用真值表

②基本等价公式: 即判断  $(G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_m) \rightarrow C$  是否为重言式。

③主析取范式法: 即判断  $(G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_m) \rightarrow C$  是否为所有极小项的析取。

④直接证明法: 由前提出发, 利用已知等价式、重言蕴涵式及有关推理规则推出结论, 主要应用  $P$  和  $T$  规则。

⑤  $CP$  规则证明法: 即欲证  $(G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_m) \Rightarrow (B \rightarrow C)$ , 只要证  $(G_1 \wedge G_2 \wedge \cdots \wedge G_m \rightarrow B) \Rightarrow C$  即可。

⑥反证法: 将结论的否定式作为前提, 然后推理出矛盾式

命题逻辑推理的难点:

1. 弄清楚蕴涵式  $P \rightarrow Q$  的逻辑关系及其真值, 这里  $Q$  是  $P$  的必要条件。无论蕴涵关系如何表述, 都要仔细地区分出蕴涵式的前件和后件。

2. 推理过程中推理规则、基本等值式和逻辑蕴涵式的引用要适当, 逻辑思维要清晰。

3. 弄清楚几种推理方法的区别与联系, 对于命题逻辑推理而言, 针对不同的问题选用不同的推理方法。一般而言, 对于结论是蕴涵式或析取式的, 大多可以采取带  $CP$  规则的直接证明方法。

## 二、典型题举例

### 一、填空题

1. 命题“如果  $1+2=5$ , 则雪是黑的”的真值为\_\_\_\_\_。

### 二、选择题

1. 设  $P$ : 我去上街,  $Q$ : 天在下雨. 命题“我去上街, 除非天在下雨”符号化为( )

A.  $P \rightarrow \neg Q$       B.  $\neg Q \rightarrow P$       C.  $P \rightarrow Q$       D.  $P \leftrightarrow Q$

### 三、求命题公式

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$  的主合取范式与主析取范式。

### 四、符号化下述语句, 并进行推理证明。

“如果马会飞或羊吃草, 则母鸡就会是飞鸟; 如果母鸡是飞鸟, 那么烤熟的鸭子还会跑; 烤熟的鸭子不会跑。所以羊不吃草。”

分析: 令  $P$ : 马会飞;  $Q$ : 羊吃草;

$R$ : 母鸡是飞鸟;

$S$ : 烤熟的鸭子还会跑。

符号化上述语句为:

$\Gamma = \{P \vee Q \rightarrow R, R \rightarrow S, \neg S\}, G = \neg Q$ 。

证明  $\Gamma \Rightarrow G$ 。

### 三、本讲小结

本讲主要讲解了命题与联结词、命题公式与真值表、十六个基本等价公式、范式及其主范式的求解方法以及推理理论的基本概念；

重点讲解了命题符号化以及推理方法、主范式的求解过程；

常考题型多为填空题、选择题、计算题或证明题。

应试方法主要是熟记并深刻理解上述知识点的概念,并在习题演练中归纳解题方法。



## 第二章 谓词逻辑

### 一、考点讲解：

1. 谓词的概念与表示方法, 量词、个体域和个体的概念
2. 谓词逻辑的合式公式与自然语言的翻译
3. 自由变元、约束变元、辖域的概念
4. 谓词逻辑的等价式和蕴含式
5. 前束范式的概念及求解方法
6. 谓词逻辑的推理理论:  $P$ 、 $T$  规则;  $US$ 、 $UG$ 、 $ES$ 、 $EG$  规则; 直接证明方法、间接证明方法、反证法、 $CP$  规则;

#### 知识点1 谓词逻辑中的基本概念与表示

##### 1. 谓词的概念与表示

在谓词逻辑中, 原子命题分解成个体词和谓词.

##### · 个体词

是可以独立存在的客体, 它可以是具体事物或抽象的概念

个体词分个体常量(用  $a, b, c, \dots$  表示)和个体变量(用  $x, y, z, \dots$  表示);

##### · 谓词

是用来刻画个体词的性质或事物之间关系的词.

含  $n$  个个体词的谓词称  $n$  元谓词。

##### 2. 命题函数与量词

##### · (简单)命题函数

即“谓词(若干客体变项)”。

##### · 复合命题函数

由  $\neg$ 、 $\wedge$ 、 $\vee$ 、 $\rightarrow$ 、 $\leftrightarrow$ 、 $\forall$  联结若干简单命题函数而得。

##### · 量词

量词有两类:

- (1) 全称量词( $\forall$ ), 表示“所有的”或“每一个”;
- (2) 存在量词( $\exists$ ), 表示“存在某个”或“至少有一个”。

在谓词逻辑中, 使用量词应注意以下几点:

- ① 在不同个体域中, 命题符号化的形式可能不同, 命题的真值也可能会改变.
- ② 在考虑命题符号化时, 如果对个体域未作说明, 一律使用全总个体域.

③多个量词出现时,不能随意颠倒它们的顺序,否则可能会改变命题的含义.

④在谓词逻辑中,命题符号化必须明确个体域,无特别说明认为是全总个体域。一般地,对于全称量词( $\forall x$ ),刻划其对应个体域的特性谓词作为蕴涵式之前件加入,对于存在量词( $\exists x$ ),刻划其对应个体域的特性谓词作为合取式之合取项加入

例 用谓词逻辑符号化下述语句:

(1)天下乌鸦一般黑;

(2)在美国留学的学生未必都是亚洲人;

$x$  (3)每个实数都存在比它大的另外的实数;

(4)尽管有人很聪明,但未必一切人都聪明;

解:(1)天下乌鸦一般黑

设  $F(x)$ : $x$  是乌鸦; $G(x,y)$ : $x$  与  $y$  一般黑,则:

$(\forall x)(\forall y)(F(x) \wedge F(y) \rightarrow G(x,y))$

或者  $\neg (\exists x)(\exists y)(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x,y))$ ;

(2)在美国留学的学生未必都是亚洲人

设  $A(x)$ : $x$  是亚洲人; $H(x)$ : $x$  是在美国留学的学生,

则:  $\neg (\forall x)(H(x) \rightarrow A(x))$

或者  $(\exists x)(H(x) \wedge \neg A(x))$ ;

(3)每个实数都存在比它大的另外的实数

设  $R(x)$ : $x$  是实数; $L(x,y)$ : $x$  小于  $y$ ,则:

$(\forall x)(R(x) \rightarrow (\exists y)(R(y) \wedge L(x,y)))$

(4)尽管有人很聪明,但未必一切人都聪明

设  $M(x)$ : $x$  是人; $C(x)$ : $x$  很聪明,则:

$(\exists x)(M(x) \wedge C(x)) \wedge \neg (\forall x)(M(x) \rightarrow C(x))$

知识点2 谓词公式与解释、变元的约束

1. 谓词公式与解释

· 原子公式

若  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是  $n$  元谓词,  $t_1, t_2, \dots, t_n$  是项,则称  $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$  为原子谓词公式,简称原子公式;

· 谓词公式

满足下列条件的表达式,称为合式公式,简称公式。

①原子公式是合式公式;

②若  $G, H$  是合式公式,则  $(\neg G), (\neg H), (G \vee H), (G \wedge H), (G \rightarrow H), (G \leftrightarrow H)$  也是合式公式;

③若  $G$  是合式公式,  $x$  是个体变量,则  $(\forall x)G, (\exists x)G$  也是合式公式;

④仅仅由①-③产生的表达式才是合式公式。

## · 解释

谓词逻辑中公式  $G$  的每一个解释  $I$  (Explanation) 由如下四部分组成:

- (1) 非空的个体域集合  $D$ ;
- (2)  $G$  中的每个常量符号, 指定  $D$  中的某个特定的元素;
- (3)  $G$  中的每个  $n$  元函数符号, 指定  $D^n$  到  $D$  中的某个特定的函数
- (4)  $G$  中的每个  $n$  元谓词符号, 指定  $D^n$  到  $\{0, 1\}$  中的某个特定的谓词。

注意:

当个体域  $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  是有限集合时

$$(\forall x) G(x) = G(x_0) \wedge G(x_1) \wedge \dots \wedge G(x_n)$$

$$(\exists x) G(x) = G(x_0) \vee G(x_1) \vee \dots \vee G(x_n)$$

## · 谓词公式分类

- (1) 公式  $G$  称为有效公式

如果  $G$  在它所有的解释  $I$  下都取值为“真”;

- (2) 公式  $G$  称为矛盾公式

如果  $G$  在它所有的解释  $I$  下都取值为“假”。

- (3) 公式  $G$  称为可满足公式

如果至少有一种解释  $I$  使得  $G$  取值为“真”。

## 2. 变元的约束

## · 变元与辖域

给定一个合适公式  $G$ , 若变元  $x$  出现在使用变元的量词的辖域之内, 则称变元  $x$  的出现为约束出现, 此时的变元  $x$  称为约束变元。若  $x$  的出现不是约束出现, 则称它为自由出现, 此时的变元  $x$  称为自由变元

量词辖域的确定方法:

- (1) 若量词后有括号, 则括号内的子公式就是该量词的辖域;
- (2) 若量词后无括号, 则与量词邻接的子公式为该量词的辖域。

## · 约束变元的换名规则

就是把公式中量词的指导变元及其辖域中的该变元换成该公式中没有出现的个体变元, 公式的其余部分不变。

## · 自由变元的代入规则

就是把公式中的某一自由变元, 用该公式中没有出现的个体变元符号替代, 且要把该公式中所有的该自由变元都换成新引入的这个符号。

## 知识点3 谓词演算的基本等价式、前束范式

## 1. 谓词演算的基本等价式与蕴含式

十二个等价式

$$(1) E_{25}: (\exists x)G(x) = (\exists y)G(y);$$

$$E_{26}: (\forall x)G(x) = (\forall y)G(y);$$

——(改名规则)

$$(2) E_{27}: \neg (\exists x)G(x) = (\forall x)\neg G(x);$$

$$E_{28}: \neg (\forall x)G(x) = (\exists x)\neg G(x);$$

——(量词转换律/量词否定等值式)

$$(3) E_{29}: (\forall x)(G(x) \vee S) = (\forall x)G(x) \vee S;$$

$$E_{30}: (\forall x)(G(x) \wedge S) = (\forall x)G(x) \wedge S;$$

$$E_{31}: (\exists x)(G(x) \vee S) = (\exists x)G(x) \vee S;$$

$$E_{32}: (\exists x)(G(x) \wedge S) = (\exists x)G(x) \wedge S;$$

——(量词辖域的扩张与收律)

$$(4) E_{33}: (\forall x)(G(x) \wedge H(x)) = (\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x);$$

$$E_{34}: (\exists x)(G(x) \vee H(x)) = (\exists x)G(x) \vee H(x);$$

——(量词分配律)

$$(5) E_{35}: (\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x) = (\forall x)(\forall y)(G(x) \vee H(y));$$

$$E_{36}: (\exists x)G(x) \wedge (\exists x)H(x) = (\exists x)(\exists y)(G(x) \wedge H(y));$$

## 2. 前束范式

### · 前束范式

称公式  $G$  是一个前束范式,如果  $G$  中的一切量词都位于该公式的最前端(不含否定词)且这些量词的辖域都延伸到公式的末端。其标准形式如下:

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\cdots(Q_nx_n)M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

其中  $Q_i$  为量词“ $\forall$ ”或“ $\exists$ ”( $i=1, \cdots, n$ ),  $M$  称作公式  $G$  的母式(基式),  $M$  中不再有量词。

### · 谓词公式

①消去联结词  $\rightarrow, \leftrightarrow$ ;

②将联结词  $\neg$  移至原子谓词公式之前;

③利用换名或代入规则使所有约束变元的符号均不同,并且自由变元与约束变元的符号也不同;

④将  $\forall x, \exists x$  移至整个公式最左边;

⑤得到公式的前束范式

例 求  $\neg ((\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \rightarrow (\exists x)(\neg (\forall y)Q(y, b) \rightarrow R(x)))$  的前束范式。

解:(1)消去联结词“ $\leftrightarrow$ ”,得:

$$\neg (\neg (\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \vee (\exists x)(\neg \neg (\forall y)Q(y, b) \vee R(x)))$$

(2) $\neg$  内移,得:

$$\begin{aligned} & (\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \wedge \neg (\exists x)((\forall y)Q(y, b) \vee R(x)) \\ & = (\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \wedge (\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b) \wedge \neg R(x)) \end{aligned}$$



(3)量词左移,得:

$$\begin{aligned} & (\forall x)((\exists y)P(a,x,y) \wedge (\exists y)\neg Q(y,b) \wedge \neg R(x)) \\ &= (\forall x)((\exists y)P(a,x,y) \wedge (\exists z)\neg Q(z,b) \wedge \neg R(x)) \\ &= (\forall x)(\exists y)(\exists z)(P(a,x,y) \wedge \neg Q(z,b) \wedge \neg R(x)) \\ &= (\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a,b,x,y,z) \end{aligned}$$

即:  $(\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a,b,x,y,z)$  为原式的前束范式,这里  $S(a,b,x,y,z)$  是原公式的母式。

#### 知识点4 谓词逻辑的推理理论

谓词演算的推理是命题演算推理的推广和扩充,命题演算中的基本等价公式,重言蕴含式以及  $P, T, CP$  规则在谓词演算中仍然适用

##### 1. 谓词逻辑的推理定律

$$(1) I_{16}: (\forall x)G(x) \Rightarrow (\exists x)G(x);$$

$$(2) I_{17}: (\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x) \Rightarrow (\forall x)(G(x) \vee H(x));$$

$$I_{18}: (\exists x)(G(x) \wedge H(x)) \Rightarrow (\exists x)G(x) \wedge (\exists x)H(x);$$

$$(3) I_{19}: (\forall x)(G(x) \rightarrow H(x)) \Rightarrow (\forall x)G(x) \rightarrow (\forall x)H(x);$$

$$I_{20}: (\forall x)(G(x) \rightarrow H(x)) \Rightarrow (\exists x)G(x) \rightarrow (\exists x)H(x);$$

$$(4) I_{21}: (\exists x)(\forall y)G(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)G(x,y);$$

$$I_{22}: (\forall x)(\forall y)G(x,y) \Rightarrow (\exists y)(x)G(x,y);$$

$$I_{23}: (\forall y)(\forall x)G(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)G(x,y);$$

$$I_{24}: (\exists y)(\forall x)G(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)G(x,y);$$

$$I_{25}: (\forall x)(\exists y)G(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)G(x,y);$$

$$I_{26}: (\forall y)(\exists x)G(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)G(x,y)。$$

##### 2. 谓词逻辑的推理规则

①  $US$ (全称特指规则, Universal SPecify):

$$(\forall x)G(x) \Rightarrow G(y)$$

其中  $G(x)$  对  $y$  是自由的——在  $G(x)$  中,  $x$  不出现在量词  $(\forall y)$  或  $(\exists y)$  的辖域之内。

推广:  $(\forall x)G(x) \Rightarrow G(c)$

其中  $c$  为任意个体常量

②  $ES$ (存在特指规则, Existential SPecify):

$$(\exists x)G(x) \Rightarrow G(c)$$

其中  $c$  为使  $G(c)$  为真的特定个体常量;若  $G(x)$  中还有除  $x$  以外的自由变量时,则必须用这些变量的函数符号来取代。

③  $UG$ (全称推广规则, Universal Generalize):

$$G(y) \Rightarrow (\forall x)G(x)$$

其中  $G(y)$  对  $x$  是自由的且  $G(y)$  中无自由变量  $x$

④ $EG$ (存在推广规则, Existential Generalize):

$$G(c) \Rightarrow (\exists x)G(x)$$

其中  $G(c)$  对  $x$  是自由的且  $G(c)$  中无自由变量  $x$

$$\text{推广: } G(y) \Rightarrow (\exists x)G(x)$$

其中  $G(y)$  对  $x$  是自由的且  $G(y)$  中无自由变量  $x$

### 3. 谓词演算的综合推理步骤

①推导过程中可以引用命题演算中的规则  $P$  和规则  $T$ 。

②如果结论是以蕴涵形式(或析取形式)给出,可以使用规则  $CP$ 。

③若需消去量词,可以引用规则  $US$  和规则  $ES$ 。

④当所要求的结论可能被定量时,此时可引用规则  $UG$  和规则  $EG$  将其量词加入。

⑤证明时可采用如命题演算中的直接证明方法和间接证明方法。

⑥在推导过程中,对消去量词的公式或公式中不含量词的子公式,完全可以引用命题演算中的基本等价公式和基本蕴涵公式。

⑦在推导过程中,对含有量词的公式可以引用谓词中的基本等价公式和基本蕴涵公式。

例:对下述语句进行符号化,并进行推理

“每个喜欢步行的人都不喜欢坐汽车;每个人或者喜欢坐汽车或者喜欢骑自行车;有的人不喜欢骑自行车。因而有的人不喜欢步行”。

设: $H(x)$ : $x$  是人; $P(x)$ : $x$  喜欢坐汽车; $Q(x)$ : $x$  喜欢骑自行车; $R(x)$ : $x$  喜欢步行。

则上述语句可符号化为:

$$(\forall x)(H(x) \wedge R(x) \rightarrow \neg P(x)),$$

$$(\forall x)(H(x) \rightarrow P(x) \vee Q(x)),$$

$$(\exists x)(H(x) \wedge \neg Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(H(x) \wedge \neg R(x))$$

解:

$$(1) (\exists x)(H(x) \wedge \neg Q(x)) \quad P$$

$$(2) H(c) \wedge \neg Q(c) \quad ES, (1)$$

$$(3) H(c) \quad T, (2), I$$

$$(4) \neg Q(c) \quad T, (2), I$$

$$(5) (\forall x)(H(x) \rightarrow P(x) \vee Q(x)) \quad P$$

$$(6) H(c) \rightarrow P(c) \vee Q(c) \quad US, (5)$$

$$(7) P(c) \vee Q(c) \quad T, (3), (6), I$$

$$(8) P(c) \quad T, (4), (7), I$$

$$(9) (\forall x)(H(x) \wedge R(x) \rightarrow \neg P(x)) \quad P$$

$$(10) H(c) \wedge R(c) \rightarrow \neg P(c) \quad US, (9)$$

$$(11) \neg (H(c) \wedge R(c)) \quad T, (8), (10), I$$



$$(12) \neg H(c) \vee \neg R(c) \quad T, (11), E$$

$$(13) \neg R(c) \quad T, (3), (12), I$$

$$(14) H(c) \wedge \neg R(c) \quad T, (3), (13), I$$

$$(15) (\exists x)(H(x) \wedge \neg R(x)) \quad EG, (14)$$

#### 4. 谓词演算过程的难点

①在推导过程中,如既要使用规则  $US$  又要使用规则  $ES$  消去公式中的量词,而且选用的个体是同一个符号,则必须先使用规则  $ES$ ,再使用规则  $US$ 。然后再使用命题演算中的推理规则,最后使用规则  $UG$  或规则  $EG$  引入量词,得到所要的结论。

②如一个变量是用规则  $ES$  消去量词,对该变量在添加量词时,则只能使用规则  $EG$ ,而不能使用规则  $UG$ ;如使用规则  $US$  消去量词,对该变量在添加量词时,则可使用规则  $EG$  和规则  $UG$ 。

③如有两个含有存在量词的公式,当用规则  $ES$  消去量词时,不能选用同样的一个常量符号来取代两个公式中的变元,而应用不同的常量符号来取代它们。

④在用规则  $US$  和规则  $ES$  消去量词、用规则  $UG$  和规则  $EG$  添加量词时,此量词必须位于整个公式的最前端,并且它的辖域为其后的整个公式。

⑤在添加量词( $\forall x$ )、( $\exists x$ )时,所选用的  $x$  不能在公式  $G(y)$  或  $G(c)$  中自由出现且  $G(y)$  或  $G(c)$  对  $x$  是自由的。

⑥在使用规则  $EG$  引入存在量词( $\exists x$ )时,此  $x$  不得仅为  $G(c)$  或  $G(y)$  中的函数变元。在使用规则  $UG$  引入全称量词( $\forall x$ )时,此  $x$  不得为  $G(y)$  中的函数变元(因该函数变元不得作为自由变元)。

⑦在使用规则  $UG$  引入全称量词( $\forall x$ )时, $G(y)$  中不得出现使用规则  $US$  引入  $y$  之后由规则  $ES$  引入的常量或函数。

## 二、典型题举例

### 一、判断题

1. 公式  $\forall x F(x) \vee \neg \exists x G(x)$  的前束范式为  $\forall x (F(x) \vee \neg G(x))$ . ( )
2. 已知个体域为  $\{2, 3\}$ , 如果  $L(2, 2) = L(3, 3) = 1, L(2, 3) = L(3, 2) = 0$ , 那么  $\exists y \forall x F(x) L(x, y)$  的真值为 0. ( )

### 二、把公式 $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(P(x, z) \wedge P(y, z) \rightarrow (\exists u)Q(x, y, u))$ 转化为前束范式

### 三、符号化下述语句,并进行推理证明.

“没有不守信用的人是可以信赖的;有些可以信赖的人是受过教育的,因此,有些受过教育的人是守信用的。”

“海关人员检查每一个进入本国的不重要人物;某些走私者进入该国时仅仅被走私者所检查;没有一个走私者是重要人物;海关人员中的某些人士走私者。”

提示:设个体域为人

$E(x)$ :  $x$  进入国境;  $V(x)$ :  $x$  是重要人物;  $C(x)$ :  $x$  是海关人员;

$P(x)$ :  $x$  是走私者;  $S(x, y)$ :  $y$  检查  $x$ ;

第一句话:  $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(x, y)))$

第二句话:  $\exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge \forall y(S(x, y) \rightarrow P(y)))$

...

### 三、本讲小结

本讲主要讲解了谓词的概念与表示、命题函数与量词、谓词公式与解释、变元约束、谓词演算的基本等价式、前束范式以及谓词推理理论;

重点讲解了自然语言的谓词符号化、谓词推理理论;

常考题型多为判断题、选择题、计算题或证明题。

应试方法主要是熟记并深刻理解上述知识点的概念与定义,并在习题演练中归纳解题方法。

## 第三章 二元关系

### 第1讲 集合与关系的定义

#### 一、考点讲解：

- 1) 集合的基本概念与表示方法；
- 2) 子集与幂集, 集合的运算；
- 3) 序偶与笛卡尔积；
- 4) 关系及其表示、关系矩阵、关系图；

#### 知识点1 集合的基本概念与表示方法：

##### 1. 集合的概念

由指定范围内的某些特定对象聚集在一起构成。

指定范围内的每一个对象称为这个集合的元素。



##### 2. 集合的表示方法

枚举法

$$A = \{a, b, c, d\}$$

描述法

$$P = \{x | P(x)\}$$

例  $S = \{x | x \text{ 是整数, 并且 } x_2 + 1 = 0\}$

文氏图法

利用平面上点的集合作成的对集合的图解

##### 3. 集合与元素, 集合与集合的关系

集合与元素:  $a \in A$  或  $a \notin A$  两者必居其一且仅居其一

集合与集合:

集合相等:

$A = B \Leftrightarrow A$  与  $B$  具有相同的元素, 否则,  $A \neq B$ 。

包含与真包含关系:

$B \subseteq A \Leftrightarrow$  对任意  $x$ , 如  $x \in B$ , 则  $x \in A$

$B \subseteq A \Leftrightarrow$  对任意  $x$ , 如  $x \in B$ , 则  $x \in A$ , 并且,  $\exists y \in A$ , 且  $y \notin B$

例 设  $A = \{a\}$  是一个集合,  $B = \{\{a\}, \{\{a\}\}\}$ , 试问  $\{A\} \in B$  和  $\{A\} \subseteq B$  同时成立吗?

解:  $\{A\} \in B$  和  $\{A\} \subseteq B$  同时成立。

#### 4. 特殊集合

空集: 不含任何元素的集合, 记作  $\Phi$

空集是一切集合的子集

空集是绝对唯一的

全集: 在一个相对固定的范围内, 包含此范围内所有元素的集合, 称为全集或论集

全集是相对唯一的

有限集与无限集

集合  $A$  中元素的数目称为集合  $A$  的基数, 记为  $|A|$

如  $|A|$  是有限的, 则称集合  $A$  为有限集

如  $|A|$  是无限的, 则称集合  $A$  为无限集

#### 知识点2 子集与幂集, 集合的运算:

##### 1. 子集与幂集

序偶: 如果一个集合  $A$  含有  $n$  个元素, 则称集合  $A$  为  $n$  元集, 称  $A$  的含有  $m$  个 ( $0 \leq m \leq n$ ) 元素的子集为  $A$  的  $m$  元子集。

一般来说, 对于  $n$  元集  $A$ , 它的  $m$  ( $0 \leq m \leq n$ ) 元子集有  $C_n^m$  个, 所以不同的子集总数有

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

幂集: 设  $A$  为任意集合, 把  $A$  的所有不同子集构成的集合叫做  $A$  的幂集或论集, 记为  $P(A)$  或  $2^A$ 。

$P(A) = \{x \mid \text{一切 } x \in A\}$ , 又称为集族。

例 求下列幂集

(1)  $P(\Phi)$ ; (2)  $P(\{\Phi\})$ ; (3)  $P(\{a, \{b, c\}\})$ 。

解:

(1)  $P(\Phi) = \{\Phi\}$ ;

(2)  $P(\{\Phi\}) = \{\Phi, \{\Phi\}\}$ ;

(3)  $P(\{a, \{b, c\}\}) = \{\Phi, \{a\}, \{\{b, c\}\}, \{a, \{b, c\}\}\}$ 。

显然, 若集合  $A$  有  $n$  个元素, 则集合  $A$  共有  $2^{|A|}$  个子集, 即:  $|P(A)| = 2^{|A|}$ 。

##### 2. 集合的运算

设  $A, B$  是两个集合:

并集  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$

交集  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$

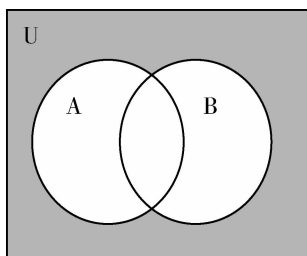
差集  $A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$

补集  $\bar{A} = U - A = \{x \mid x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$  ( $A'$ ,  $\sim A, A^c$ )



对称差集  $A \oplus B = \{x \mid (x \in A) \text{ 且 } (x \notin B) \text{ 或 } (x \in B) \text{ 且 } (x \notin A)\}$

例 在 20 个大学生中,有 10 人爱好音乐,有 8 人爱好美术,有 6 人既爱好音乐又爱好美术。问不爱好音乐又不爱好美术的学生有多少个?



### 知识点 3 序偶与笛卡尔积

#### 1. 序偶与笛卡尔积

序偶:由两个元素  $x, y$  按照一定的次序组成的二元组称为有序偶对(序偶),记作  $\langle x, y \rangle$ ,其中称  $x$  为  $\langle x, y \rangle$  的第一元素,  $y$  为  $\langle x, y \rangle$  的第二元素。

给定序偶  $\langle a, b \rangle$  和  $\langle c, d \rangle$ ,  $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \Leftrightarrow a = c \text{ 且 } b = d$ 。

#### 笛卡尔积

设  $A, B$  是两个集合,称集合  $A \times B = \{\langle x, y \rangle \mid (x \in A) \wedge (y \in B)\}$  为集合  $A$  与  $B$  的笛卡尔积 (Descartes Product)。

集合  $A$  与集合  $B$  的笛卡尔积  $A \times B$  仍然是集合。

序偶中的第一元素取自  $A$ ,第二元素取自  $B$ 。

例 设  $A = \{a\}, B = \{b, c\}, C = \Phi, D = \{1, 2\}$ ,请分别写出下列笛卡儿积中的元素。

(1)  $A \times B, B \times A$ ; (2)  $A \times C, C \times A$ ; (3)  $A \times (B \times D), (A \times B) \times D$ 。

解: (1)  $A \times B = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle\}, B \times A = \{\langle b, a \rangle, \langle c, a \rangle\}$

(2)  $A \times C = \Phi, C \times A = \Phi$ ;

(3) 因为  $B \times D = \{\langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle\}$ ,

所以  $A \times (B \times D) = \{\langle a, \langle b, 1 \rangle \rangle, \langle a, \langle b, 2 \rangle \rangle, \langle a, \langle c, 1 \rangle \rangle, \langle a, \langle c, 2 \rangle \rangle\}$

同理,  $(A \times B) \times D = \{\langle \langle a, b \rangle, 1 \rangle, \langle \langle a, b \rangle, 2 \rangle, \langle \langle a, c \rangle, 1 \rangle, \langle \langle a, c \rangle, 2 \rangle\}$

结论

(1) 笛卡儿积不满足交换律;

(2)  $A \times B = \Phi$  当且仅当  $A = \Phi$  或者  $B = \Phi$ ;

(3) 笛卡儿积不满足结合律;

(4) 对有限集  $A, B$ , 有  $|A \times B| = |B \times A| = |A| \times |B|$ 。

### 知识点 4 二元关系

#### 1. 定义

设  $A, B$  为两个非空集合,称  $A \times B$  的任何子集  $R$  为从  $A$  到  $B$  的二元关系,简称关系。如  $A = B$ ,则称  $R$  为  $A$  上的二元关系。

这里,  $A$  称为  $R$  的前域,  $B$  称为  $R$  的后域。

令  $C = \{x | \langle x, y \rangle \in R\} \subseteq A$ ,

$D = \{y | \langle x, y \rangle \in R\} \subseteq B$ ,

称  $C$  为  $R$  的定义域, 记为  $C = \text{dom}R$ ;

称  $D$  为  $R$  的值域, 记  $D = \text{ran}R$ ;

并称  $\text{fld}R = D \cup C$  为  $R$  的域。

当  $R = \Phi$  时, 称  $R$  为空关系(empty relation);

当  $R = A \times B$  时, 则称  $R$  为全关系(Total Relation)。

设一有序对  $\langle x, y \rangle$  :

若  $\langle x, y \rangle \in R$ , 则记为  $xRy$ ;

若  $\langle x, y \rangle \notin R$ , 则记为  $x \not R y$ 。

例 设  $A = \{a, b\}$ ,  $B = \{c, d\}$ , 试写出从  $A$  到  $B$  的所有不同关系。

解: 因为  $A = \{a, b\}$ ,  $B = \{c, d\}$ , 所以

$A \times B = \{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\}$ 。

于是  $A \times B$  的所有不同子集为:

0-元子集:  $\Phi$ ;

1-元子集:  $\{\langle a, c \rangle\}, \{\langle a, d \rangle\}, \{\langle b, c \rangle\}, \{\langle b, d \rangle\}$ ;

2-元子集:  $\{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle\}, \{\langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle\},$

$\{\langle a, c \rangle, \langle b, d \rangle\}, \{\langle a, d \rangle, \langle b, d \rangle\},$

$\{\langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle\}, \{\langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\}$ ;

3-元子集:  $\{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle\}, \{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, d \rangle\},$

$\{\langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\}, \{\langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\}$ ;

4-元子集:  $\{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\}$ 。

注意:

当集合  $A, B$  都是有限集时,  $A \times B$  共有  $2^{|A| \cdot |B|}$  个不同的子集, 即从  $A$  到  $B$  的不同关系共有

$2^{|A| \cdot |B|}$  个。

## 2. 关系的表示法

①集合表示法(枚举和叙述法)

例如, 设  $R$  上的“相等”关系为  $S$ , 则有  $S = \{\langle x, y \rangle | (x, y \in R) \wedge (x = y)\}$

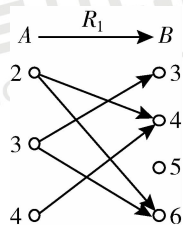
②关系图法

$A \neq B$

例如 设  $A = \{2, 3, 4\}$ ,  $B = \{3, 4, 5, 6\}$ , 则  $A$  到  $B$  之间的一种整除关系  $R_1 = \{\langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 6 \rangle,$

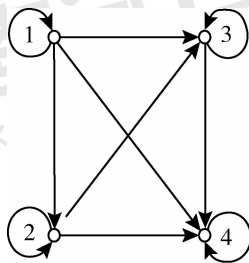
$\langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$





$$A = B$$

例如  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , 则  $A$  上的小于等于关系  $R_2 = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle \}$



### ③关系矩阵

设  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ ,  $R$  是从  $A$  到  $B$  的一个二元关系, 称矩阵  $M_R = (r_{ij})_{n \times m}$  为关系  $R$  的关系矩阵, 其中

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \langle a_i, b_j \rangle \in R \\ 0 & \langle a_i, b_j \rangle \notin R \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m)$$

又称  $M_R$  为  $R$  的邻接矩阵 (Adjacency Matrix)。

注意:

1. 必须先对集合  $A, B$  中的元素排序
2.  $A$  中元素序号对应矩阵元素的行下标
3.  $B$  中元素序号对应矩阵元素的列下标
4. 关系矩阵是 0-1 矩阵, 称为布尔矩阵

### 二、本讲小结

本讲主要讲解了集合的基本概念与表示方法、子集与幂集的定义、序偶与二元关系的概念和定义;

重点讲解了幂集的计算、二元关系;

常考题型多为选择题、填空题、计算题。

应试方法主要是熟记并在题型演练中深化上述知识点的概念与定义。

### 三、课后习题

1. 设  $A, B$  为任意集合, 证明:  $A \subseteq B$ , 则  $P(A) \subseteq P(B)$ 。
2. 求从 1 到 1000 的整数中不能被 5、6 和 8 中任何一个数整除的整数个数。

## 第2讲 关系的性质及运算

### 一、考点讲解:

1) 关系的运算,复合运算、逆运算、幂运算

2) 关系的性质;

3) 关系的闭包运算: $r(R), s(R), t(R)$ ;

#### 知识点1 关系的运算

1. 关系的运算

设  $R, S$  都是从集合  $A$  到  $B$  的两个关系,则:

$$R \cup S = \{ \langle x, y \rangle \mid (xRy) \vee (xSy) \}$$

$$R \cap S = \{ \langle x, y \rangle \mid (xRy) \wedge (xSy) \}$$

$$R - S = \{ \langle x, y \rangle \mid (xRy) \wedge (x \not S y) \}$$

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid (xRy) \}$$

注意: $A \times B$  是相对于  $R$  的全集,所以有  $R = A \times B - R$ ,且  $R \cup R = A \times B, R \cap R = \Phi$ 。

$$\bar{R} = R, S \subseteq R \Leftrightarrow \bar{R} \subseteq \bar{S}$$

2. 复合运算

设  $A, B, C$  是三个集合,  $R$  是从  $A$  到  $B$  的关系 ( $R: A \rightarrow B$ ),  $S$  是从  $B$  到  $C$  的关系 ( $S: B \rightarrow C$ ), 则  $R$  与  $S$  的复合关系 (合成关系)  $R \circ S$  是从  $A$  到  $C$  的关系, 并且:

$$R \circ S = \{ \langle x, z \rangle \mid x \in A \wedge z \in C \wedge (\exists y) (y \in B \wedge xRy \wedge ySz) \}$$

运算“ $\circ$ ”称为复合运算。

1)  $R$  和  $S$  是可复合的  $\Leftrightarrow R$  的后域和  $S$  的前域完全相同;

2)  $R \circ S$  的前域是  $R$  的前域  $A$ , 后域是  $S$  的后域  $C$ ;

3)  $R \circ S = \Phi \Leftrightarrow$  对任意  $x \in A$  和  $z \in C$ , 不存在  $y \in B$ , 使得  $xRy$  和  $ySz$  同时成立;

4)  $\Phi \circ R = R \circ \Phi = \Phi$ 。

例 试判断下列关系是否是两个关系的复合, 如果是, 请指出对应的两个关系。

(1) “祖孙”关系;

(2) “舅甥”关系;

(3) “兄妹”关系。

解:

(1) “祖孙”关系是“父女”关系和“母子”关系的复合;

(2) “舅甥”关系是“兄妹”关系和“母子”关系的复合;

(3) 不是。

定理: 设  $A, B, C$  和  $D$  是任意四个集合,  $R$  是从  $A$  到  $B$  的关系,  $S_1, S_2$  是从  $B$  到  $C$  的关系,  $T$  是从  $C$  到  $D$  的关系, 则:

$$1) Ro(S_1 \cup S_2) = (RoS_1) \cup (RoS_2)$$

$$2) Ro(S_1 \cap S_2) \subseteq (RoS_1) \cap (RoS_2)$$

$$3) (S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$$

$$4) (S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$$

证明之。

证明: 对任意  $\langle b, d \rangle \in (S_1 \cap S_2) \circ T$ , 则由复合运算知, 至少存在  $c \in C$ , 使得  $\langle b, c \rangle \in (S_1 \cap S_2)$ ,  $\langle c, d \rangle \in T$ . 即  $\langle b, c \rangle \in S_1$ , 且  $\langle b, c \rangle \in S_2$ . 因此, 由  $\langle b, c \rangle \in S_1$  且  $\langle c, d \rangle \in T$ , 则有:  $\langle b, d \rangle \in (S_1 \circ T)$

由  $\langle b, c \rangle \in S_2$  且  $\langle c, d \rangle \in T$ , 则有  $\langle b, d \rangle \in (S_2 \circ T)$ 。

所以  $\langle b, d \rangle \in (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$  即  $(S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$ 。

### 3. 关系的逆运算

设  $A, B$  是两个集合,  $R$  是  $A$  到  $B$  的关系, 则从  $B$  到  $A$  的关系

$$R^{-1} = \{ \langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R \}$$

称为  $R$  的逆关系, 运算“ $-1$ ”称为逆运算。

注意: 关系是一种集合, 逆关系也是一种集合, 因此, 如果  $R$  是一种关系, 则  $R^{-1}$  和  $R$  都是关系, 但  $R^{-1}$  和  $R$  是完全不同的两种关系, 千万不要混淆。

若  $R \subseteq A \times B$ ,  $R = A \times B - R \subseteq A \times B$ ,  $R^{-1} \subseteq B \times A$ 。

由定义:  $(R^{-1})^{-1} = R$ ;  $\Phi^{-1} = \Phi$ 。

定理: 设  $A, B$  和  $C$  是任意三个集合,  $R, S$  分别是  $A$  到  $B, B$  到  $C$  的二元关系, 则

$$(RoS)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$$

证明:

任取  $\langle c, a \rangle \in (RoS)^{-1}$ , 则  $\langle a, c \rangle \in RoS$

由“ $\circ$ ”的定义知: 则存在  $b \in B$ , 使得:  $\langle a, b \rangle \in R$ ,  $\langle b, c \rangle \in S$ ,

由“ $R^{-1}$ ”的定义知,  $\langle b, a \rangle \in R^{-1}$ ,  $\langle c, b \rangle \in S^{-1}$ ,

从而有  $\langle c, a \rangle \in S^{-1} \circ R^{-1}$ , 即  $(RoS)^{-1} \subseteq S^{-1} \circ R^{-1}$ 。

反之, 任取  $\langle c, a \rangle \in S^{-1} \circ R^{-1}$ ,

由“ $\circ$ ”的定义知: 则至少存一个  $b \in B$ , 使得:  $\langle c, b \rangle \in S^{-1}$  和  $\langle b, a \rangle \in R^{-1}$ 。

由“ $R^{-1}$ ”的定义知, 有  $\langle a, b \rangle \in R$ ,  $\langle b, c \rangle \in S$ 。

从而  $\langle a, c \rangle \in RoS$ , 即  $\langle c, a \rangle \in (RoS)^{-1}$ , 即  $S^{-1} \circ R^{-1} \subseteq (RoS)^{-1}$ 。

由集合的定义知:  $(RoS)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$ 。

定理: 设  $R, S$  是从集合  $A$  到集合  $B$  的关系, 则有

$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}; \text{(分配性)}$$

$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1};$$

$$(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1};$$

$$(R)^{-1} = (R^{-1}); (\text{可换性})$$

$$(A \times B)^{-1} = (B \times A);$$

$$S \subseteq R \Leftrightarrow S^{-1} \subseteq R^{-1}; (\text{单调性})$$

### 3. 关系的幂运算

设  $R$  是集合  $A$  上的关系, 则  $R$  的  $n$  次幂, 记为  $R^n$ , 定义如下:

$$R^0 = I_A = \{ \langle a, a \rangle \mid a \in A \};$$

$$R^1 = R;$$

$$R^{n+1} = R^n \circ R = R \circ R^n.$$

由于关系的复合运算满足结合律,  $R^n$  即为  $n$  个  $R$  的复合, 也是  $A$  上的二元关系。

$$\text{显然, } R^m \circ R^n = R^{m+n}, (R^m)^n = R^{mn}.$$

定理: 设  $A$  是有限集合, 且  $|A| = n$ ,  $R$  是  $A$  上的二元关系, 则:

$$\bigcup_{i=1}^{\alpha} R^i = \bigcup_{i=1}^n R^i$$

① 幂集  $R^n$  的基数  $|R^n|$  并非随着  $n$  的增加而增加, 而是呈递减趋势;

② 当  $n \geq |A|$  时, 则  $R^n \subseteq \bigcup_{i=1}^{|A|} R^i$

#### 知识点2 关系的性质:

如无特别声明, 都是假定其前域和后域相同。即都为定义在集合  $A$  上的关系, 且  $A$  是非空集合。

##### 1. 自反性与反自反

设  $R$  是集合  $A$  上的关系, 如果对任意  $x \in A$ , 都有  $\langle x, x \rangle \in R$ , 那么称  $R$  在  $A$  上是自反的 (Reflexive), 或称  $R$  具有自反性 (Reflexivity);

例如: 朋友关系。

如果对任意  $x \in A$ , 都有  $\langle x, x \rangle \notin R$ , 那么称  $R$  在  $A$  上是反自反的 (Antireflexive), 或称  $R$  具有反自反性 (Antireflexivity)。

例如: 父子关系。

$$R \text{ 在 } A \text{ 上是自反的} \Leftrightarrow (\forall x)((x \in A) \rightarrow (\langle x, x \rangle \in R)) = 1$$

$$R \text{ 在 } A \text{ 上是反自反的} \Leftrightarrow (\forall x)((x \in A) \rightarrow (\langle x, x \rangle \notin R)) = 1$$

$$R \text{ 在 } A \text{ 上不是自反的} \Leftrightarrow (\exists x)((x \in A) \wedge (\langle x, x \rangle \notin R)) = 1$$

$$R \text{ 在 } A \text{ 上不是反自反的} \Leftrightarrow (\exists x)((x \in A) \wedge (\langle x, x \rangle \in R)) = 1$$

设  $A = \{1, 2, 3\}$ , 定义  $A$  上的关系  $R, S$  和  $T$  如下:

$$(1) R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \};$$

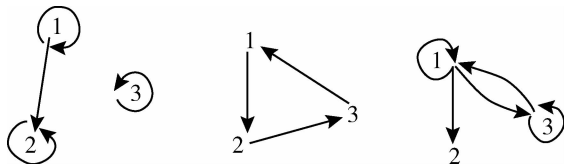
$$(2) S = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle \};$$

$$(3) T = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}.$$



设  $R, S$  和  $T$  的关系矩阵分别为  $M_R, M_S$  和  $M_T$ , 则:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



- 1) 关系  $R$  是自反的  $\Rightarrow R$  不是反自反的
- 2) 存在既不是自反的也不是反自反的关系
- 3) 关系  $R$  是自反的  $\Leftrightarrow$  关系图中每个结点都有环
- 4) 关系  $R$  是反自反的  $\Leftrightarrow$  关系图中每个结点都无环
- 5) 关系  $R$  是自反的  $\Leftrightarrow$  关系矩阵的主对角线上全为 1
- 6) 关系  $R$  是反自反的  $\Leftrightarrow$  关系矩阵的主对角线上全为 0

## 2. 对称性与反对称性

设  $R$  是集合  $A$  上的关系,

对任意  $x, y \in A$ , 如果  $\langle x, y \rangle \in R$ , 那么  $\langle y, x \rangle \in R$ , 则称关系  $R$  是对称的 (Symmetric), 或称  $R$  具有对称性 (Symmetry);

对任意  $x, y \in A$ , 如果  $\langle x, y \rangle \in R$  且  $\langle y, x \rangle \in R$ , 那么  $x = y$  (或者如果  $x \neq y$  且  $\langle x, y \rangle \in R$ , 那么  $\langle y, x \rangle \notin R$ ), 则称关系  $R$  是反对称的 (Antisymmetric), 或称  $R$  具有反对称性 (Antisymmetry)。

$R$  在  $A$  上是对称的  $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in A) \wedge (y \in A) \wedge (\langle x, y \rangle \in R) \rightarrow (\langle y, x \rangle \in R)) = 1$

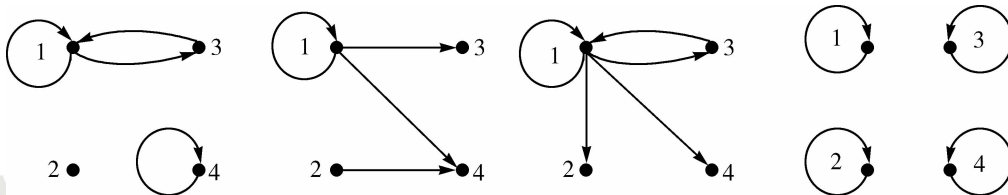
$R$  在  $A$  上是反对称的  $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \in A) \wedge (y \in A) \wedge (\langle x, y \rangle \in R) \wedge (\langle y, x \rangle \in R) \rightarrow (x = y)) = 1$

$R$  在  $A$  上不是对称的  $\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)((x \in A) \wedge (y \in A) \wedge (\langle x, y \rangle \in R) \wedge (\langle y, x \rangle \notin R)) = 1$

$R$  在  $A$  上不是反对称的  $\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)((x \in A) \wedge (y \in A) \wedge (\langle x, y \rangle \in R) \wedge (\langle y, x \rangle \in R) \wedge (x \neq y)) = 1$

设  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , 定义  $A$  上的关系  $R, S, T$  和  $V$  如下:

- (1)  $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$ ;
- (2)  $S = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle\}$ ;
- (3)  $T = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 1, 4 \rangle\}$ ;
- (4)  $V = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$



设  $R, S$  和  $T$  的关系矩阵分别为  $M_R, M_S, M_T$  和  $M_V$ , 则:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) 存在既不是对称也不是反对称的关系;
- 2) 存在既是对称也是反对称的关系;
- 3) 关系  $R$  是对称的  $\Leftrightarrow$  关系图中任何一对结点之间, 要么有方向相反的两条边, 要么无任何边;
- 4) 关系  $R$  是反对称的  $\Leftrightarrow$  关系图中任何一对结点之间, 至多有一条边;
- 5) 关系  $R$  是对称的  $\Leftrightarrow R$  的关系矩阵为对称矩阵;
- 6) 关系  $R$  是反对称的  $\Leftrightarrow R$  的关系矩阵满足

$$r_{ij} \cdot r_{ji} = 0, i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j.$$

### 3. 传递性

设  $R$  是集合  $A$  上的关系。对任意  $x, y, z \in A$ , 如果  $\langle x, y \rangle \in R$  且  $\langle y, z \rangle \in R$ , 那么  $\langle x, z \rangle \in R$ , 则称关系  $R$  是传递的 (Transitive), 或称  $R$  具有传递性 (Transitivity)。

$R$  在  $A$  上是传递的  $\Leftrightarrow$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \in A) \wedge (y \in A) \wedge (z \in A) \wedge (\langle x, y \rangle \in R) \wedge (\langle y, z \rangle \in R) \rightarrow (\langle x, z \rangle \in R)) = 1.$$

$R$  在  $A$  上不是传递的  $\Leftrightarrow$

$$(\exists x)(\exists y)(\exists z)((x \in A) \wedge (y \in A) \wedge (z \in A) \wedge (\langle x, y \rangle \in R) \wedge (\langle y, z \rangle \in R) \wedge (\langle x, z \rangle \notin R)) = 1.$$

设  $A = \{1, 2, 3\}$ , 定义  $A$  上的关系  $R, S, T$  和  $V$  如下:

$$(1) R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle \};$$

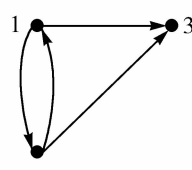
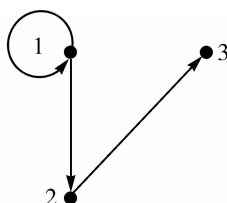
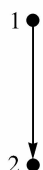
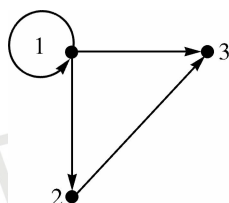
$$(2) S = \{ \langle 1, 2 \rangle \};$$

$$(3) T = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle \};$$

$$(4) V = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \}.$$

设  $R, S$  和  $T$  的关系矩阵分别为  $M_R, M_S, M_T$  和  $M_V$ , 则:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



	自反	反自反	对称	反对称	传递
定义	$\langle x, x \rangle \in R$	$\langle x, x \rangle \notin R$	$\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R$	$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \Rightarrow x = y$	$\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R$
关系图	每个结点都有环	每个结点都无环	每对结点间或有方向相反的两条边,或无任何边	每对结点间至多有一条边存在	任三个结点 $x, y, z$ , 若从 $x$ 到 $y$ 有边, 从 $y$ 到 $z$ 有边, 则从 $x$ 到 $z$ 一定有边
关系矩阵	对角线上全为 1	对角线上全为 0	对称矩阵	$r_{ij} \cdot r_{ji} = 0, i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$	如 $r_{ij} = 1$ 且 $r_{jk} = 1$ 则 $r_{ik} = 1$

## 4. 关系的性质证明方法总结

## 1) 自反

任取  $x \in A$ ,

中间过程

 $\langle x, x \rangle \in R。$ 

## 2) 反自反

任取  $x \in A$ ,

中间过程

 $\langle x, x \rangle \notin R。$ 

## 3) 对称

任取  $x, y \in A$ ,  
假设  $\langle x, y \rangle \in R$ ,

中间过程

 $\langle y, x \rangle \in R。$ 

## 4) 反对称

任取  $x, y \in A$ , 假设  
 $\langle x, y \rangle \in R, \langle y, x \rangle \in R$ ,

中间过程

 $y = x$ 

或者

任取  $x, y \in A, x \neq y$   
假设  $\langle x, y \rangle \in R$ ,

中间过程

 $\langle y, x \rangle \notin R。$ 

## 5) 传递

任取  $x, y, z \in A$ , 假设  
 $\langle x, y \rangle \in R, \langle y, z \rangle \in R$ 

中间过程

 $\langle x, z \rangle \in R。$ 

## 知识点 3 关系的闭包运算:

## 1. 关系闭包的定义

设  $R$  是定义在  $A$  上的关系, 若存在  $A$  上的另一个关系  $R'$ , 满足:1)  $R'$  是自反的(对称的、或传递的);2) 对任何自反的(对称的、或传递的)关系  $R''$ , 如果  $R \subseteq R''$ , 就有  $R' \subseteq R''$ ;则称为  $R$  的自反闭包(对称闭包、或传递闭包), 分别记为  $r(R)$  ( $s(R)$  或  $t(R)$ )。

注意:关系的闭包是增加最少元素,使其具备所需性质的扩充。

## 2. 关系闭包运算法则

设  $R$  是集合  $A$  上的二元关系,则:

$$(1) r(R) = R \cup I_A。$$

$$(2) s(R) = R \cup R^{-1}。$$

$$(3) t(R) = \bigcup_{i=1}^{\alpha} R^i, \text{若 } |A| = n, \text{则 } t(R) = \bigcup_{i=1}^n R^i$$

利用关系图求关系  $R$  闭包的方法:

- 1) 检查  $R$  的关系图,在没有环的结点处加上环,可得  $r(R)$  的关系图;
- 2) 检查  $R$  的关系图,将每条单向边全部改成双向边,可得  $s(R)$  的关系图;
- 3) 检查  $R$  的关系图,从每个结点出发,找到其终点,如果该结点到其终点没有边相连,就加上此边,可得  $t(R)$  的关系图。

## 二、真题举例

### 一、判断题

设  $R$  是非空集合  $A$  上的关系, $R$  是反对称关系当且仅当  $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$ . ( )

### 二、选择题

设  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $R$  是  $P(A)$  上的关系,且  $R = \{ \langle a, b \rangle \mid a \cap b \neq \phi \}$ ,  $R$  具有下列哪种性质( )

- A. 对称性      B. 自反性      C. 传递性      D. 反自反性

## 三、本讲小结

本讲主要讲解了二元关系的概念和表示,关系的复合运算、逆运算和幂运算,关系性质的定义、判定以及证明,关系的自反、对称、和传递闭包的概念及计算;

重点讲解了关系的复合运算、逆运算,关系性质的定义、判定以及证明(多半结合等价或偏序关系进行考试);

常考题型多为判断题、选择题、证明题。

应试方法主要是熟记概念及解题套路。

## 四、课后习题

1. 设  $R$  是集合  $A$  上的一个二元关系,  $|A| = n$ , 则存在  $0 \leq s < t \leq 2^{n \times n}$ , 使得  $R^s = R^t$
3. 设  $R$  是  $A$  上的关系,若  $R$  是自反的和传递的,则  $R \circ R = R$ . 其逆命题为真吗?

# 第3讲 等价关系

## 一、考点讲解:

- 1) 等价关系的概念、等价关系的证明、等价类、商集的定义与计算



## 2) 集合划分的定义, 等价关系与集合划分的关系

## 知识点1 等价关系

定义: 设  $R$  是定义在非空集合  $A$  上的关系, 如果  $R$  是自反的、对称的、传递的, 则称  $R$  为  $A$  上的等价关系。

由定义知:

- (1) 关系  $R$  是等价关系当且仅当  $R$  同时具备自反性、对称性和传递性;
- (2) 关系  $R$  不是等价关系当且仅当  $R$  不具备自反性或对称性或传递性。

例1 判定下列关系是否是等价关系?

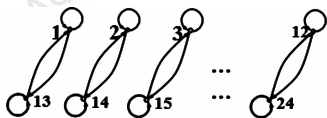
- 1) 幂集上定义的“ $\subseteq$ ”关系;
- 2) 整数集上定义的“ $<$ ”关系;
- 3) 全体中国人所组成的集合上定义的“同性别”关系。

例2 在时钟集合  $A = \{1, \dots, 24\}$  上定义整除关系:  $R = \{ \langle x, y \rangle \mid \{x, y \in A\} \wedge ((x - y) \text{ 被 } 12 \text{ 所整除}) \}$ 。

- (1) 写出  $R$  中的所有元素;
- (2) 画出  $R$  的关系图;
- (3) 证明  $R$  是一个等价关系。

解: (1)  $R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \dots, \langle 24, 24 \rangle, \langle 1, 13 \rangle, \langle 13, 1 \rangle, \langle 2, 14 \rangle, \langle 14, 2 \rangle, \dots, \langle 11, 23 \rangle, \langle 23, 11 \rangle, \langle 12, 24 \rangle, \langle 24, 12 \rangle \}$

(2) 此等价关系的关系图:



- 1) 对  $\forall x \in A$ , 有  $(x - x)$  被 12 所整除, 所以  $\langle x, x \rangle \in R$ , 即  $R$  是自反的。
- 2) 对  $\forall x, y \in A$ , 若  $\langle x, y \rangle \in R$ , 有  $(x - y)$  被 12 整除, 则  $(y - x) = -(x - y)$  被 12 整除, 所以,  $\langle y, x \rangle \in R$ , 即  $R$  是对称的。
- 3) 对  $\forall x, y, z \in A$ , 若  $\langle x, y \rangle \in R$  且  $\langle y, z \rangle \in R$ , 有  $(x - y)$  被 12 所整除且  $(y - z)$  被 12 所整除, 所以  $(x - z) = (x - y) + (y - z)$  被 12 所整除, 所以,  $\langle x, z \rangle \in R$ , 即  $R$  是传递的。

由 1, 2, 3 知  $R$  是等价关系。

由上例可以看出

关系  $R$  将集合  $A$  分成了如下的 12 个子集:

$\{1, 13\}, \{2, 14\}, \{3, 15\}, \{4, 16\}, \{5, 17\}, \{6, 18\}, \{7, 19\}, \{8, 20\}, \{9, 21\}, \{10, 22\}, \{11, 23\}, \{12, 24\}$ 。

这 12 个  $A$  的子集具有如下特点:

- (1) 在同一个子集中的元素之间都有关系  $R$ ;
- (2) 不同子集的元素之间无关系  $R$ 。

**例题**  $R$  是  $Z$  上关系  $\{ \langle x, y \rangle, \text{满足 } n \mid (x - y), x, y, n \in Z \}$ , 证明  $R$  是  $Z$  上的等价关系。

**证明:**

(1) 对  $\forall x \in Z$ , 有  $n \mid (x - x)$ , 所以  $\langle x, x \rangle \in R$ , 即  $R$  是自反的。

(2) 对  $\forall x, y \in Z$ , 若  $\langle x, y \rangle \in R$ , 即  $n \mid (x - y)$ , 所以  $n \mid (y - x)$ , 所以,  $\langle y, x \rangle \in R$ , 即  $R$  是对称的。

(3) 对  $\forall x, y, z \in Z$ , 若  $\langle x, y \rangle \in R$  且  $\langle y, z \rangle \in R$ , 有  $n \mid (x - y)$  且  $n \mid (y - z)$ , 所以由  $(x - z) = (x - y) + (y - z)$  得  $n \mid (x - z)$ , 所以,  $\langle x, z \rangle \in R$ , 即  $R$  是传递的。

由(1)、(2)、(3)知,  $R$  是  $Z$  上的等价关系。

以  $n$  为模的同余关系

上述  $R$  称为  $Z$  上以  $n$  为模的同余关系, 记  $xRy$  为  $x = y \pmod{n}$

称为同余式。如用  $res_n(x)$  表示  $x$  除以  $n$  的余数, 则

$$x = y \pmod{n} \Leftrightarrow res_n(x) = res_n(y)$$

此时,  $R$  将  $Z$  分成了如下  $n$  个子集:

$$\{\dots, -3n, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \dots\}$$

$$\{\dots, -3n+1, -2n+1, -n+1, 1, n+1, 2n+1, 3n+1, \dots\}$$

$$\{\dots, -3n+2, -2n+2, -n+2, 2, n+2, 2n+2, 3n+2, \dots\}$$

...

$$\{\dots, -2n-1, -n-1, -1, n-1, 2n-1, 3n-1, 4n-1, \dots\}$$

说明: 同样地, 这  $n$  个  $Z$  的子集具有如下特点:

1. 在同一个子集中的元素之间都有关系  $R$ ;
2. 不同子集的元素之间没有关系  $R$ ;
3. 不同子集的交集是空集;
4. 所有这些子集的并集就构成集合  $Z$ 。(称为集合  $Z$  的一个划分)

## 知识点2 集合的划分

定义: 给定非空集合  $A$ , 设有集合  $S = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_m\}$ . 如果满足

$$S_i \subseteq A \text{ 且 } S_i \neq \Phi, i = 1, 2, \dots, m;$$

$$S_i \cap S_j = \Phi, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, m;$$

$$\bigcup_{i=1}^m S_i = A$$

则集合  $S$  称作集合  $A$  的一个划分 (Partition), 而  $S_1, S_2, \dots, S_m$  叫做这个划分的块 (Block) 或类 (Class)。

**例题** 设  $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9\}$ ,

(1) 写出  $R$  是  $A$  上的以 4 为模的同余关系  $R$  的所有元素;

(2) 求分别与元素 1, 2, 3, 4 有关系  $R$  的所有元素所作成的集合。

**解:**

$$(1) R = \{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \}$$

$$\langle 8, 8 \rangle, \langle 9, 9 \rangle, \langle 0, 4 \rangle, \langle 4, 0 \rangle, \langle 4, 8 \rangle, \langle 8, 4 \rangle, \langle 0, 8 \rangle, \}$$

$\langle 8,0 \rangle, \langle 1,5 \rangle, \langle 5,1 \rangle, \langle 1,9 \rangle, \langle 9,1 \rangle, \langle 5,9 \rangle, \langle 9,5 \rangle$ .

显然,  $R$  是  $A$  的一个等价关系。

(2) 与元素 1 有关系  $R$  的所有元素所作成的集合  $\{1,5,9\}$ ;

与元素 2 有关系  $R$  的所有元素所作成的集合  $\{2\}$ ;

与元素 4 有关系  $R$  的所有元素所作成的集合  $\{0,4,8\}$ .

集合  $\{1,5,9\}$  称为元素 1 关于等价关系  $R$  的等价类, 记为  $[1]_R$ , 即  $[1]_R = \{1,5,9\}$ ;  $[2]_R = \{2\}$ ,

$[4]_R = \{0,4,8\}$ .

### 知识点 3 等价类与商集

定义: 设  $R$  是非空集合  $A$  上的等价关系, 对任意  $x \in A$ , 称集合

$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R\}$

为  $x$  关于  $R$  的等价类 (equivalence class), 或叫作由  $x$  生成的一个  $R$  等价类, 其中  $x$  称为  $[x]_R$  的生成元 (或叫代表元, 或典型元) (generator)。

由定义可以看出:

(1) 等价类产生的前提是  $A$  上的关系  $R$  必须是等价关系;

(2)  $A$  中所有与  $x$  有关系  $R$  的元素  $y$  构成了  $[x]_R$ ;

(3)  $A$  中任意一个元素一定对应一个由它生成的等价类;

(4)  $R$  具有自反性意味着对  $\forall x \in A, [x]_R \neq \Phi$ ;

(5)  $R$  具有对称性意味着对任意  $x, y \in A$ , 若有  $y \in [x]_R$ , 则一定有  $x \in [y]_R$ 。

例题 设  $A = \{0,1,2,4,5,8,9\}$ ,  $R$  是  $A$  上的以 4 为模的同余关系。求

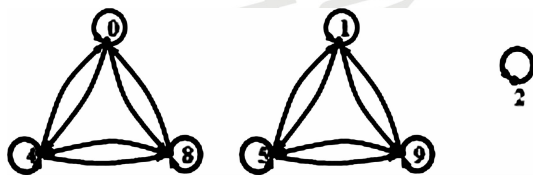
(1)  $R$  的所有等价类; (2) 画出  $R$  的关系图。

解:

(1)  $[1]_R = \{1,5,9\} = [5]_R = [9]_R$ ;  $[2]_R = \{2\}$ ;

$[4]_R = \{0,4,8\} = [0]_R = [8]_R$ 。

(2)



定理: 设  $R$  是非空集合  $A$  上的等价关系, 则下面的结论成立:

1) 对  $\forall x \in A, [x]_R \neq \Phi$ ;

2) 对  $\forall x, y \in A$ ,

a) 如果  $y \in [x]_R$ , 则有  $[x]_R = [y]_R$ ,

b) 如果  $y \notin [x]_R$ , 则有  $[x]_R \cap [y]_R = \Phi$ 。

3)  $\bigcup_{x \in A} [x]_R = A$ ;

商集定义:设  $R$  是非空集合  $A$  上的等价关系,由  $R$  确定的一切等价类的集合,称为集合  $A$  上关于  $R$  的商集(QuotientSet),记为  $A/R$ ,即  $A/R = \{[x]_R \mid (x \in A)\}$

例 设集合  $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9\}$ ,  $R$  为  $A$  上以 4 为模的同余关系。求  $A/R$ 。

解:显然,商集  $A/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\} = \{\{0, 4, 8\}, \{1, 5, 9\}, \{2\}\}$ 。

计算商集  $A/R$  的通过程:

(1) 任选  $A$  中一个元素  $a$ , 计算  $[a]_R$ ;

(2) 如果  $[a]_R \neq A$ , 任选一个元素  $b \in A - [a]_R$ , 计算  $[b]_R$ ;

(3) 如果  $[a]_R \cup [b]_R \neq A$ , 任选一个元素  $c \in A - [a]_R - [b]_R$ , 计算  $[c]_R$ ;

以此类推,直到  $A$  中所有元素都包含在计算出的等价类中。

#### 知识点 4 等价关系与划分

定理:设  $R$  是非空集合  $A$  上的等价关系,则  $A$  对  $R$  的商集  $A/R$  是  $A$  的一个划分,称之为由  $R$  所导出的等价划分。

定理:给定集合  $A$  的一个划分  $\Pi = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ , 则由该划分确定的关系

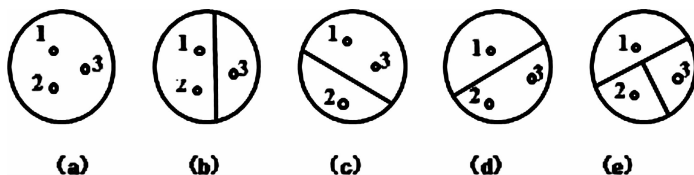
$$R = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \dots \cup (A_n \times A_n)$$

是  $A$  上的等价关系。称该关系  $R$  为由划分  $\Pi$  所导出的等价关系。

## 二、真题举例

例 设  $A = \{1, 2, 3\}$ , 求  $A$  上所有的等价关系及其对应的商集。

解:只有 1 个划分块的划分为  $S_1$ , 见图(a); 具有 2 个划分块的划分为  $S_2, S_3$  和  $S_4$ , 见图(b)、(c) 和 (d); 具有 3 个划分块的划分为  $S_5$ , 见图(e)。



## 三、本讲小结

本讲主要讲解了等价关系、等价类、商集以及集合的划分的概念和对应的计算方法;

重点讲解了等价关系的证明;集合划分与等价关系;计算等价类和商集;

常考题型多为判断题、选择题、证明题和计算题。

应试方法主要是熟记概念及解题套路。

## 第 4 讲 偏序关系

### 一、考点讲解:

1) 偏序关系、拟序关系、全序关系和良序关系的定义



2) 偏序关系的哈斯图表示, 偏序关系的八个特殊元。

## 知识点1 拟序关系

定义: 设  $R$  是非空集合  $A$  上的关系, 如果  $R$  是反自反和传递的, 则称  $R$  是  $A$  上的拟序关系 (Quasi-Order Relation), 简称拟序, 记为 “ $<$ ”, 读作 “小于”, 并将 “ $\langle a, b \rangle \in <$ ” 记为 “ $a < b$ ”。序偶  $\langle A, < \rangle$  称为拟序集 (Quasi-Order Set)。

由定义知,

- (1)  $R$  是拟序关系  $\Leftrightarrow R$  同时具有反自反性和传递性;
- (2)  $R$  不是拟序关系  $\Leftrightarrow R$  不具有反自反性或者传递性;
- (3) 拟序 “ $<$ ” 的逆关系 “ $<^{-1}$ ” 也是拟序, 用 “ $>$ ” 表示, 读作 “大于”。

例 判断下列关系是否为拟序关系

- (1) 集合  $A$  的幂集  $P(A)$  上定义的 “ $\subset$ ”;
- (2) 实数集  $R$  上定义的 “小于” 关系 “ $<$ ”;

解:

- (1) 集合  $A$  的幂集  $P(A)$  上定义的 “ $\subset$ ” 具有反自反性和传递性, 所以  $\langle P(A), \subset \rangle$  是拟序集。
- (2) 实数集  $R$  上定义的 “小于” 关系 “ $<$ ” 具有反自反性和传递性, 所以  $\langle R, < \rangle$  是拟序集。

## 知识点2 偏序关系

定义: 设  $R$  是非空集合  $A$  上的关系, 如果  $R$  是自反的、反对称的和传递的, 则称  $R$  是  $A$  上的偏序关系 (Partial Order Relation), 简称偏序, 记为 “ $\leq$ ”, 读作 “小于等于”, 并将 “ $\langle a, b \rangle \in \leq$ ” 记为 “ $a \leq b$ ”。序偶  $\langle A, \leq \rangle$  称为偏序集 (Partial Order Set)。

由定义知

- (1)  $R$  是偏序关系  $\Leftrightarrow R$  同时具有自反性、反对称性和传递性;
- (2)  $R$  不是偏序关系  $\Leftrightarrow R$  不具备自反性或反对称性或传递性;
- (3) 偏序 “ $\leq$ ” 的逆关系 “ $\leq^{-1}$ ” 也是一个偏序, 我们用 “ $\geq$ ” 表示, 读作 “大于等于”;
- (4) (“ $\leq$ ” -  $I_A$ ) 为  $A$  上的拟序关系, (“ $<$ ”  $\cup I_A$ ) 为  $A$  上的偏序关系。

例 试判断下列关系是否为偏序关系

- (1) 集合  $A$  的幂集  $P(A)$  上的包含关系 “ $\subset$ ”;
- (2) 实数集  $R$  上的小于等于关系 “ $\leq$ ”;
- (3) 自然数集合  $N$  上的模  $m$  同余关系;
- (4) 正整数集合  $N$  上的整除关系 “ $|$ ”;

## 知识点3 哈斯图

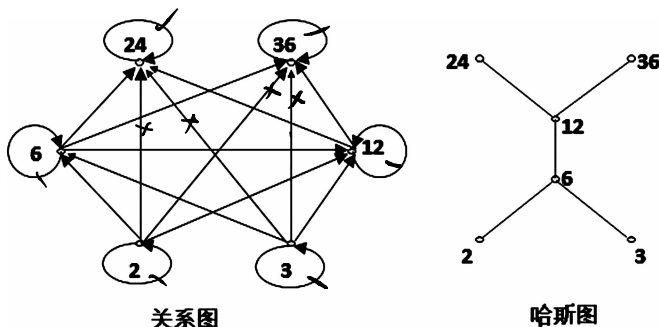
- (1) 用小圆圈或点表示  $A$  中的元素, 省掉关系图中所有的环; (自反性)
- (2) 对任意  $x, y \in A$ , 若  $x < y$ , 则将  $x$  画在  $y$  的下方, 可省掉关系图中所有边的箭头; (反对称性)
- (3) 对任意  $x, y \in A (x \neq y)$ , 若  $x \leq y$ , 且  $x$  与  $y$  之间不存在  $z \in A$ , 使得  $x \leq z, z \leq y$ , 则  $x$  与  $y$  之间用一条线相连, 否则无线相连。 (传递性)

例 设  $A = \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$ , “ $\leq$ ”是  $A$  上的整除关系  $R$ , 画出其一般的关系图和哈斯图。

解:由题意可得

$$R = \{ \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 2, 12 \rangle, \langle 2, 24 \rangle, \langle 2, 36 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 3, 12 \rangle, \langle 3, 24 \rangle, \langle 3, 36 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 6, 12 \rangle, \langle 6, 24 \rangle, \langle 6, 36 \rangle, \langle 12, 12 \rangle, \langle 12, 24 \rangle, \langle 12, 36 \rangle, \langle 24, 24 \rangle, \langle 36, 36 \rangle \},$$

从而得出该偏序集  $\langle A, \leq \rangle$  的一般关系图和哈斯图如下:



#### 知识点4 特殊元素

定义:设  $\langle A, \leq \rangle$  是偏序集,  $B$  是  $A$  的任何一个子集, 若存在元素  $b \in B$ , 使得对  $x \in B$ ,

- (1) 都有  $x \leq b$ , 则称  $b$  为  $B$  的最大元素, 简称最大元;
- (2) 都有  $b \leq x$ , 则称  $b$  为  $B$  的最小元素, 简称最小元;
- (3) 满足  $b \leq x \Rightarrow x = b$ , 则称  $b$  为  $B$  的极大元素, 简称极大元;
- (4) 满足  $x \leq b \Rightarrow x = b$ , 则称  $b$  为  $B$  的极小元素, 简称极小元。

注意:

(1)  $B$  的最大元、最小元、极大元和极小元如果存在, 一定在  $B$  中;

(2)  $b$  是  $B$  的最大元  $\Leftrightarrow B$  中所有的元素都比  $b$  小;

$b$  是  $B$  的最小元  $\Leftrightarrow B$  中所有的元素都比  $b$  大;

$b$  是  $B$  的极大元  $\Leftrightarrow B$  中没有比  $b$  大的元素;

$b$  是  $B$  的极小元  $\Leftrightarrow B$  中没有比  $b$  小的元素。

定义:设  $\langle A, \leq \rangle$  是偏序集,  $B$  是  $A$  的任何一个子集。若存在元素  $a \in A$ , 使得

- (1) 对任意  $x \in B$ , 都有  $x \leq a$ , 则称  $a$  为  $B$  的上界;
- (2) 对任意  $x \in B$ , 都有  $a \leq x$ , 则称  $a$  为  $B$  的下界;

(3) 若元素  $a' \in A$  是  $B$  的上界, 元素  $a \in A$  是  $B$  的任何一个上界, 若均有  $a' \leq a$ , 则称  $a'$  为  $B$  的最小上界或上确界。记  $a' = \text{Sup } B$ ;

(4) 若元素  $a' \in A$  是  $B$  的下界, 元素  $a \in A$  是  $B$  的任何一个下界, 若均有  $a \leq a'$ , 则称  $a'$  为  $B$  的最大下界或下确界。记  $a' = \text{Inf } B$ 。

由定义知,

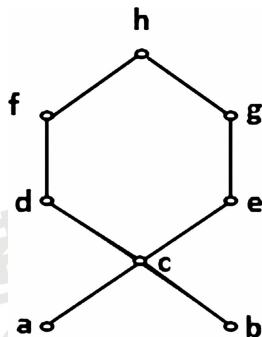
子集合  $B$  的上、下界和上、下确界可在集合  $A$  中寻找;

一个子集合  $B$  的上、下界不一定存在, 如果存在, 可以不唯一的;

一个子集合  $B$  的上、下确界不一定存在,如果存在,一定唯一;

一个子集合  $B$  有上(下)确界,一定有上(下)界,反之不然。

例 设集合  $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ , 对应的哈斯图见图。令  $B_1 = \{a, b\}$ ,  $B_2 = \{c, d, e\}$ 。求出  $B_1$ ,  $B_2$  的最大元、最小元、极大元、极小元、上界、下界、上确界、下确界。



解:  $B_1$  和  $B_2$  的各种特殊元素见下表。

集合	最大元	最小元	极大元	极小元	上界	下界	上确界	下确界
$B_1$	无	无	$a, b$	$a, b$	$c, d, e, f, g, h$	无	$c$	无
$B_2$	无	$c$	$d, e$	$c$	$h$	$c, a, b$	$h$	$c$

结论:

(设  $\langle A, \leq \rangle$  是一偏序集,  $B$  是  $A$  的子集)

(1) 若  $b$  是  $B$  的最大元, 则  $b$  一定是  $B$  的极大元, 上界和上确界, 反之, 则不然;

(2) 若  $b$  是  $B$  的最小元, 则  $b$  一定是  $B$  的极小元, 下界和下确界, 反之, 则不然。

定理: 设  $\langle A, \leq \rangle$  是一偏序集,  $B$  是  $A$  的子集。则:

(1) 若  $b$  是  $B$  的最大元  $\Rightarrow b$  是  $B$  的极大元、上界、上确界;

(2) 若  $b$  是  $B$  的最小元  $\Rightarrow b$  是  $B$  的极小元、下界、下确界;

(3) 若  $a$  是  $B$  的上确界, 且  $a \in B \Rightarrow a$  是  $B$  的最大元;

(4) 若  $a$  是  $B$  的下确界, 且  $a \in B \Rightarrow a$  是  $B$  的最小元。

定理: 设  $\langle A, \leq \rangle$  是一偏序集,  $B$  是  $A$  的子集。则:

(1) 若  $B$  存在最大元, 则  $B$  的最大元是惟一的;

(2) 若  $B$  存在最小元, 则  $B$  的最小元是惟一的;

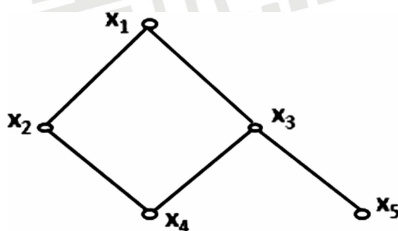
(3)  $b$  是  $B$  的最大元  $\Leftrightarrow b$  是  $B$  的惟一极大元;

(4)  $b$  是  $B$  的最小元  $\Leftrightarrow b$  是  $B$  的惟一极小元;

(5) 若  $B$  存在上确界, 则  $B$  的上确界是惟一的;

(6) 若  $B$  存在下确界, 则  $B$  的下确界是惟一的。

例 设集合  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  上的偏序关系如下图所示, 求  $X$  的最大元、最小元、极大元、极小元。求子集  $A = \{x_2, x_3, x_4\}$ ,  $B = \{x_3, x_4, x_5\}$ ,  $C = \{x_1, x_3, x_5\}$  的上界、下界、最小上界、最大下界、最大元、最小元、极大元和极小元。



解:  $x_1, x_2$  和  $x_3$  的各种特殊元见下表。

集合	最大元	最小元	极大元	极小元	上界	下界	上确界	下确界
$A$	无	$x_4$	$x_2, x_3$	$x_4$	$x_1$	$x_4$	$x_1$	$x_4$
$B$	$x_3$	无	$x_3$	$x_4, x_5$	$x_1, x_3$	无	$x_3$	无
$C$	$x_1$	$x_5$	$x_1$	$x_5$	$x_1$	$x_5$	$x_1$	$x_5$

### 知识点5 全序关系

定义: 设  $\langle A, \leq \rangle$  是一个偏序关系, 若对任意  $x, y \in A$ , 总有  $x \leq y$  或  $y \leq x$ , 二者必居其一, 则称关系 “ $\leq$ ” 为全序关系 (Total Order Relation), 简称全序, 或者线序关系, 简称线序。称  $\langle A, \leq \rangle$  为全序集 (Total Order Set), 或者线序集, 或者链 (Chain)。

从定义可以看出:

全序关系是偏序关系, 反之则不然。

例 试判断下列关系是否为全序关系, 如果是, 请画出其哈斯图。

(1) 设集合  $A = \{a, b, c\}$ , 其上的关系 “ $\leq$ ” =  $\{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle \}$ ;

(2) 实数集  $R$  上定义的小于等于关系 “ $\leq$ ”;

(3) 实数集  $R$  上定义的小于关系 “ $<$ ”;

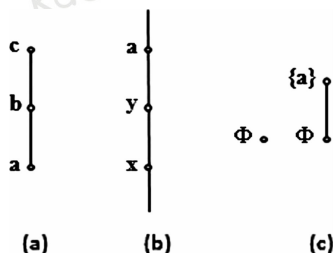
(4) 集合  $A$  的幂集  $P(A)$  上定义的包含关系 “ $\subseteq$ ”。

解: (1)  $\langle A, \leq \rangle$  是全序集, 其哈斯图见图 (a);

(2)  $\langle R, \leq \rangle$  是全序集, 其哈斯图是数轴, 见图 (b), 其中  $x, y, z \in R$ ;

(3) 不是全序关系;

(4) 当  $|A| < 2$  时,  $P(A)$  上定义的 “ $\subseteq$ ” 是全序关系,  $\langle P(A), \subseteq \rangle$  是全序集, 其哈斯图见图 (c); 当  $|A| \geq 2$ , 则  $\langle P(A), \subseteq \rangle$  不是全序集。



### 知识点6 良序关系

定义: 设  $\langle A, \leq \rangle$  是一偏序集, 若  $A$  的任何一个非空子集都有最小元素, 则称 “ $\leq$ ” 为良序关系, 简



称良序,此时  $\langle A, \leq \rangle$  称为良序集。

从定义可以看出:

- (1)  $R$  是良序关系  $\Leftrightarrow R$  是偏序关系和  $A$  的任何非空子集都有最小元;
- (2) 良序关系一定是偏序关系,反之则不然;
- (3) 良序关系一定是全序关系,反之则不然。

## 二、真题举例

例 计算机科学中常用的字典排序如下:

设  $\Sigma$  是一有限的字母表。 $\Sigma$  上的字母组成的字母串叫  $\Sigma$  上的字; $\Sigma^*$  是包含空字“ $\varepsilon$ ”的所有字组成的集合,建立  $\Sigma^*$  上的字典次序关系  $L$ :

设  $x = x_1x_2\cdots x_n, y = y_1y_2\cdots y_m$ , 其中  $x_i, y_j \in \Sigma (i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,m)$ , 则  $x, y \in \Sigma^*$ 。

- (1) 当  $x_1 \neq y_1$  时,若  $x_1 \leq y_1$ , 则  $xLy$ ; 若  $y_1 \leq x_1$ , 则  $yLx$ 。
- (2) 若存在最大的  $k$  且  $k < \min(n, m)$ , 使  $x_i = y_i (i=1,2,\cdots,k)$ , 而  $x_{k+1} \neq y_{k+1}$ , 若  $x_{k+1} \leq y_{k+1}$ , 则  $xLy$ ; 若  $y_{k+1} \leq x_{k+1}$ , 则  $yLx$ 。
- (3) 若存在最大的  $k$  且  $k = \min(n, m)$ , 使  $x_i = y_i (i=1,2,3,\cdots,k)$ , 此时,若  $n \leq m$ , 则  $xLy$ ; 若  $m \leq n$ , 则  $yLx$ 。

证明  $L$  是  $\Sigma^*$  上的一个偏序关系且是一个全序关系。

证明:首先证明  $L$  是偏序关系。

(1)  $L$  是自反的。

对任意  $x \in \Sigma^*$ , 令  $x = x_1x_2\cdots x_n$ , 其中  $x_i \in \Sigma$ , 显然有  $x_i \leq x_i (i=1,2,\cdots,n)$ , 从而有  $xLx$ ;

(2)  $L$  是反对称的。

对任意  $x, y \in \Sigma^*$ , 令  $x = x_1x_2\cdots x_n, y = y_1y_2\cdots y_m$ ,

其中  $x_i, y_j \in \Sigma (i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,m)$ 。若  $xLy$  且  $yLx$ , 根据  $L$  的定义有  $x = y$ ;

(3)  $L$  是传递的。

对任意  $x, y, z \in \Sigma^*$ , 令  $x = x_1x_2\cdots x_n, y = y_1y_2\cdots y_m, z = z_1z_2\cdots z_p$ , 其中  $x_i, y_j, z_k \in \Sigma (i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,m; k=1,2,\cdots,p)$ 。若  $xLy$  且  $yLz$ ,

根据  $L$  的定义和“ $\leq$ ”的传递性,有  $xLz$ 。

综上所述,  $L$  是  $\Sigma^*$  上的一个偏序关系。

对任意的  $x, y \in \Sigma^*$ , 由  $x$  和  $y$  的表示形式知,  $x_i$  和  $y_i (i=1,2,\cdots,n)$  总能进行比较,

所以一定有  $xLy$  和  $yLx$  之一成立,从而  $L$  是  $\Sigma^*$  上的一个全序关系。

## 三、本讲小结

本讲主要讲解了偏序关系、拟序关系、全序关系和良序关系的定义,它们之间的异同;哈斯图的画法;八个特殊元的定义和基本性质;

重点讲解了偏序关系的判定;八个特殊元的定义和基本性质;

常考题型多为判断题、选择题、证明题、计算题。

应试方法主要是熟记概念及解题套路。

#### 四、课后习题

1. 设  $A$  是非空集合,  $B$  是  $A$  上的一切二元关系的集合. 任取  $R_1, R_2 \in B$ , 如果对  $x, y \in A$ , 有  $xR_1y = > xR_2y$ , 那么  $R_1 \leq R_2$ , 证明  $\langle B, \leq \rangle$  是一个偏序集.

## 第5讲 函 数

### 一、考点讲解:

1. 函数的概念, 定义域、值域等基本概念, 单射函数、满射函数、双射函数。
2. 复合函数、逆函数的概念, 复合函数与关系复合的联系与区别, 逆函数与逆关系的联系与区别。

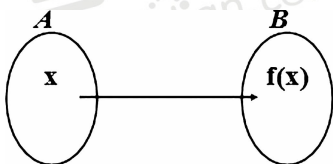
#### 知识点1 函数的定义

定义: 设  $f$  是集合  $A$  到  $B$  的关系, 如果对每个  $x \in A$ , 都存在惟一的  $y \in B$ , 使得  $\langle x, y \rangle \in f$ , 则称关系  $f$  为  $A$  到  $B$  的函数(Function) (或映射(Mapping)、变换(Transform)), 记为  $f: A \rightarrow B$ 。

$A$  为函数  $f$  的定义域, 记为  $\text{dom } f = A$ ;

$f(A)$  为函数  $f$  的值域, 记为  $\text{ran } f$ 。

函数定义的示意图见图。



结论:

- (1)  $\langle x, y \rangle \in f \Leftrightarrow y = f(x)$ ;
- (2)  $\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in f \Rightarrow y = z$ ;
- (3)  $|f| = |A|$ ;
- (4)  $f(x)$  表示一个变值,  $f$  代表一个集合, 因此  $f \neq f(x)$ 。

如果关系  $f$  具备下列两种情况之一, 那么  $f$  就不是函数:

- (1) 存在元素  $a \in A$ , 在  $B$  中没有象;
- (2) 存在元素  $a \in A$ , 有两个及两个以上的象。

**例题** 设  $A = \{a, b\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ , 请分别写出  $A$  到  $B$  的不同关系和不同函数。

**解:** 因为  $|A| = 2$ ,  $|B| = 2$ , 所以  $|A \times B| = |A| \times |B| = 4$ , 即  $A \times B = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle \}$ , 此时从  $A$  到  $B$  的不同的关系有  $2^4 = 16$  个。

分别如下:

$$R_0 = \Phi; R_1 = \{ \langle a, 1 \rangle \}, R_2 = \{ \langle a, 2 \rangle \}, R_3 = \{ \langle b, 1 \rangle \},$$

$$R_4 = \{ \langle b, 2 \rangle \}, R_5 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle \}, R_6 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle \},$$

$$R_7 = \{ \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle \}, R_8 = \{ \langle a, 2 \rangle, \langle b, 2 \rangle \},$$

$$R_9 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle \}, R_{10} = \{ \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle \},$$

$$R_{11} = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle \}, R_{12} = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 2 \rangle \},$$

$$R_{13} = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle \}, R_{14} = \{ \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle \},$$

$$R_{15} = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle \}.$$

从  $A$  到  $B$  的不同的函数仅有  $2^2 = 4$  个。分别如下:

$$f_1 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle \}, f_2 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle \},$$

$$f_3 = \{ \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle \}, f_4 = \{ \langle a, 2 \rangle, \langle b, 2 \rangle \}.$$

函数与关系的差别

函数是一种特殊的关系,它与一般关系比较具备如下差别:

1) 从  $A$  到  $B$  的不同的关系有  $2^{|A| \times |B|}$  个;但从  $A$  到  $B$  的不同的函数却仅有  $|B|^{|A|}$  个。(个数差别)

2) 关系的第一个元素可以相同;函数的第一元素一定是互不相同的。

(序偶的第一个元素存在差别)

3) 每一个函数的基数都为  $|A|$  个 ( $|f| = |A|$ ),但关系的基数却为从零一直到  $|A| \times |B|$ 。(集合基数的差别)

## 知识点2 函数的类型

定义:设  $f$  是从  $A$  到  $B$  的函数,对任意  $x_1, x_2 \in A$ ,如果  $x_1 \neq x_2$ ,有  $f(x_1) \neq f(x_2)$ ,则称  $f$  为从  $A$  到  $B$  的单射(不同的  $x$  对应不同的  $y$ );

如果  $\text{ran } f = B$ ,则称  $f$  为从  $A$  到  $B$  的满射;

若  $f$  是满射且是单射,则称  $f$  为从  $A$  到  $B$  的双射。

若  $A = B$ ,则称  $f$  为  $A$  上的函数;当  $A$  上的函数  $f$  是双射时,称  $f$  为一个变换。

将定义的描述数学化为

(1)  $f: A \rightarrow B$  是单射当且仅当对  $x_1, x_2 \in A$ ,若  $x_1 \neq x_2$ ,则  $f(x_1) \neq f(x_2)$ ;

(2)  $f: A \rightarrow B$  是满射当且仅当对  $y \in B$ ,一定存在  $x \in A$ ,使得  $f(x) = y$ ;

(3)  $f: A \rightarrow B$  是双射当且仅当  $f$  既是单射,又是满射;

(4)  $f: A \rightarrow B$  是变换当且仅当  $f$  是双射且  $A = B$ 。

例 确定下列函数的类型。

(1) 设  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{a, b, c, d\}$ 。 $f: A \rightarrow B$  定义为:

$$\{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, c \rangle, \langle 3, b \rangle, \langle 4, a \rangle, \langle 5, d \rangle \};$$

(2) 设  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{a, b, c, d\}$ 。 $f: A \rightarrow B$  定义为:  $f = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, c \rangle, \langle 3, b \rangle \}$ ;

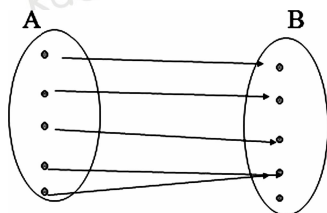
(3) 设  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ 。 $f: A \rightarrow B$  定义为:  $f = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle \}$ ;

结论:设  $A, B$  为有限集合,  $f$  是从  $A$  到  $B$  的函数,则:

$f$  是单射的必要条件为  $|A| \leq |B|$ ;

$f$  是满射的必要条件为  $|B| \leq |A|$ ;

$f$  是双射的必要条件为  $|A| = |B|$ 。



定理: 设  $A, B$  是有限集合, 且  $|A| = |B|$ ,  $f$  是  $A$  到  $B$  的函数, 则  $f$  是单射当且仅当  $f$  是满射。

证明必要性( $\Rightarrow$ ):

设  $f$  是单射。因为  $f$  是单射, 故  $|A| = |f(A)|$ 。又因为  $|f(A)| = |B|$ , 且  $f(A) \subseteq B$ , 得  $f(A) = B$ , 故  $f$  是  $A$  到  $B$  的满射。

充分性( $\Leftarrow$ ):

设  $f$  是满射。任取  $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$ , 假设  $f(x_1) = f(x_2)$ , 由于  $f$  是  $A$  到  $B$  的满射, 所以  $f$  也是  $A - \{x_1\}$  到  $B$  的满射, 故  $|A - \{x_1\}| \geq |B|$ , 即  $|A| - 1 \geq |B|$ , 这与  $|A| = |B|$  矛盾。因此  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 故  $f$  是  $A$  到  $B$  的单射。

例 设  $A = B = R$  (实数集)。试判断下列函数的类型。

(1)  $f_1 = \{ \langle x, x^2 \rangle \mid x \in R \}$ ;

(2)  $f_2 = \{ \langle x, x+1 \rangle \mid x \in R \}$ ;

(3)  $f_3 = \{ \langle x, e^x \rangle \mid x \in R \}$ ;

解: (1)  $f_1$  仅是一般函数;

(2)  $f_2$  是双射函数;

(3)  $f_3$  是单射函数。

小结:

1. 函数( $f: A \rightarrow B$ )的定义

(1)  $f$  是集合  $A$  到  $B$  的关系,

(2) 对每个  $x \in A$ , 都存在惟一的  $y \in B$ , 使得  $\langle x, y \rangle \in f$ 。

2. 函数与关系的区别与联系

3. 函数( $f: A \rightarrow B$ )的类型

(1)  $f$  是单射  $\Leftrightarrow$  对  $x_1, x_2 \in A$ , 若  $x_1 \neq x_2$ , 则  $f(x_1) \neq f(x_2)$

(2)  $f$  是满射  $\Leftrightarrow$  对  $y \in B$ , 一定存在  $x \in A$ , 使得  $f(x) = y$ ;

(3)  $f$  是双射  $\Leftrightarrow f$  既是单射, 又是满射;

(4)  $f$  是变换  $\Leftrightarrow f$  是双射且  $A = B$ 。

几个常见的特殊函数

定义:

(1) 如果  $A = B$ , 且对  $\forall x \in A$ , 都有  $f(x) = x$ , 则称  $f$  为  $A$  上的恒等函数, 记为  $I_A$ 。



(2) 如果  $\exists b \in B$ , 且对  $\forall x \in A$ , 都有  $f(x) = b$ , 则称  $f$  为常值函数。

(3) 设  $A$  是全集  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  的一个子集, 则子集  $A$  的特征函数

$$\text{定义为从 } U \text{ 到 } \{0, 1\} \text{ 的一个函数, 且 } f_A(u_i) = \begin{cases} 1 & u_i \in A \\ 0 & u_i \notin A \end{cases}$$

(4) 对有理数  $x$ ,  $f(x)$  为大于等于  $x$  的最小的整数, 则称  $f(x)$  为上取整函数(强取整函数), 记为  $f(x) = \lceil x \rceil$ ;

(5) 对有理数  $x$ ,  $f(x)$  为小于等于  $x$  的最大的整数, 则称  $f(x)$  为下取整函数(弱取整函数), 记为  $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ;

(6) 如果  $f(x)$  是集合  $A$  到集合  $B = \{0, 1\}$  上的函数, 则称  $f(x)$  为布尔函数。

例 设  $A_n = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  是  $n$  个元素的有限集,  $B_n = \{b_1 b_2 b_3 \dots b_n \mid b_i \in \{0, 1\}\}$ , 试建立  $P(A_n)$  到  $B_n$  的一个双射。

解:  $P(A_n)$  到  $B_n$  可以按照如下的方式建立关系:

对任意  $S \in P(A_n)$ , 令  $f(S) = b_1 b_2 b_3 \dots b_n$ ,

$$\text{其中: } b_i = \begin{cases} 1, & a_i \in S \\ 0, & a_i \notin S \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(2) 证明  $f$  是双射。

1) 证  $f$  是映射。显然,  $f$  是  $P(A_n)$  到  $B_n$  的映射。

2) 证  $f$  是单射。任取  $S_1, S_2 \in P(A_n)$ ,  $S_1 \neq S_2$ , 则存在元素  $a_j (1 \leq j \leq n)$ , 使得  $a_j \in S_1, a_j \notin S_2$  或  $a_j \in S_2, a_j \notin S_1$ 。

从而  $f(S_1) = b_1 b_2 b_3 \dots b_n$  中必有  $b_j = 1$ ,

$f(S_2) = c_1 c_2 c_3 \dots c_n$  必有  $c_j = 0$

或  $f(S_1) = b_1 b_2 b_3 \dots b_n$  中必有  $b_j = 0$ ,

$f(S_2) = c_1 c_2 c_3 \dots c_n$  必有  $c_j = 1$ 。所以

$f(S_1) \neq f(S_2)$ , 即  $f$  是单射。

3) 证  $f$  是满射。

任取二进制数  $b_1 b_2 \dots b_n \in B_n$ ,

建立对应的集合

$$S \subseteq A_n, S = \{a_i \mid \text{若 } b_i = 1\}$$

(即若  $b_i = 1$ , 令  $a_i \in S$ , 否则  $a_i \notin S$ ),

则  $S \in P(A_n)$ ,

从而  $f(S) = b_1 b_2 b_3 \dots b_n$ , 故  $f$  是满射。

由 1) 、2) 和 3) 知,  $f$  是双射。

例如:  $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ , 则有:

$$\Phi \mapsto 000, \{a_1\} \mapsto 100, \{a_2\} \mapsto 010, \{a_3\} \mapsto 001,$$

$\{a_1, a_2\} \mapsto 110, \{a_1, a_3\} \mapsto 101, \{a_2, a_3\} \mapsto 011, \{a_1, a_2, a_3\} \mapsto 111。$

### 知识点3 函数的运算

#### 函数的复合运算

定义: 设  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$  是两个函数, 则  $f$  与  $g$  的复合运算  $f \circ g = \{ \langle x, z \rangle \mid x \in A \text{ 且 } z \in C \text{ 且 } (\exists y) (y \in B \text{ 且 } xfy \text{ 且 } ygz) \}$

是从  $A$  到  $C$  的函数, 记为  $f \circ g: A \rightarrow C$ , 称为函数  $f$  与  $g$  的复合函数。

注意:

(1) 函数  $f$  和  $g$  可以复合  $\Leftrightarrow \text{ran } f = \text{dom } g$ ;

(2)  $\text{dom}(f \circ g) = \text{dom } f, \text{ran}(f \circ g) = \text{ran } g$ ;

(3) 对任意  $x \in A$ , 有  $f \circ g(x) = g(f(x))$ 。

例 设  $f: R \rightarrow R, g: R \rightarrow R, h: R \rightarrow R$ , 满足  $f(x) = 2x, g(x) = (x+1)^2, h(x) = x/2$ 。计算:

(1)  $f \circ g, g \circ f$ ;

(2)  $(f \circ g) \circ h, f \circ (g \circ h)$ ;

(3)  $f \circ h, h \circ f$ 。

函数的复合不满足交换律, 但满足结合律。

定理:

设  $f$  和  $g$  分别是  $A$  到  $B$  和从  $B$  到  $C$  的函数, 则:

如  $f, g$  是满射, 则  $f \circ g$  也是从  $A$  到  $C$  满射;

如  $f, g$  是单射, 则  $f \circ g$  也是从  $A$  到  $C$  单射;

如  $f, g$  是双射, 则  $f \circ g$  也是从  $A$  到  $C$  双射。

证: “如  $f, g$  是满射, 则  $f \circ g$  也是从  $A$  到  $C$  满射”。

证明:

1) 对  $\forall c \in C$ ,

由于  $g$  是满射, 所以存在  $b \in B$ , 使得  $g(b) = c$ 。

对于  $b \in B$ ,

又因  $f$  是满射, 所以存在  $a \in A$ , 使得  $f(a) = b$ 。

从而有  $f \circ g(a) = g(f(a)) = g(b) = c$ 。

即存在  $a \in A$ , 使得  $f \circ g(a) = c$ ,

所以  $f \circ g$  是满射。

证: “如  $f, g$  是单射, 则  $f \circ g$  也是从  $A$  到  $C$  单射”

证明: 2) 对任意  $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ ,

由于  $f$  是单射, 所以  $f(a_1) \neq f(a_2)$ 。令  $b_1 = f(a_1), b_2 = f(a_2)$ ,

由于  $g$  是单射, 所以  $g(b_1) \neq g(b_2)$ , 即  $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$ 。

从而有  $f \circ g(a_1) \neq f \circ g(a_2)$ ,

所以  $f \circ g$  是单射。

3) 是 1)、2) 的直接结果。

#### 知识点 4 函数的逆运算

定义: 设  $f: A \rightarrow B$  的函数。如果  $f^{-1} = \{ \langle y, x \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \wedge \langle x, y \rangle \in f \}$

是从  $B$  到  $A$  的函数, 则称  $f^{-1}: B \rightarrow A$  的逆函数。

由定义可以看出, 一个函数的逆运算也是函数。即逆函数  $f^{-1}$  存在当且仅当  $f$  是双射。

定理: 设  $f$  是  $A$  到  $B$  的双射函数, 则:

$$f^{-1} \circ f = I_B = \{ \langle b, b \rangle \mid b \in B \};$$

$$f \circ f^{-1} = I_A = \{ \langle a, a \rangle \mid a \in A \};$$

$$I_A \circ f = f \circ I_B = f.$$

若  $f$  是  $A$  到  $B$  的双射, 则  $f$  的逆函数  $f^{-1}$  也是  $B$  到  $A$  的双射。

证明: (1) 证明  $f^{-1}$  是满射。

因为  $\text{ran } f^{-1} = \text{dom } f = A$ , 所以  $f^{-1}$  是  $B$  到  $A$  的满射。

(2)  $f^{-1}$  是单射。

对任意  $b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2$ ,

假设  $f^{-1}(b_1) = f^{-1}(b_2)$ , 即存在  $a \in A$ , 使得

$$\langle b_1, a \rangle \in f^{-1}, \langle b_2, a \rangle \in f^{-1}, \text{ 即 } \langle a, b_1 \rangle \in f, \langle a, b_2 \rangle \in f,$$

这与  $f$  是函数矛盾, 因此  $f^{-1}(b_1) \neq f^{-1}(b_2)$ , 故  $f^{-1}$  是  $B$  到  $A$  的单射。

综上,  $f^{-1}$  是  $B$  到  $A$  的双射。

例 假设  $f$  是的定义如下表。

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
D	E	S	T	I	N	Y	A	B	C	F	G	H
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
J	K	L	M	O	P	Q	R	U	V	W	X	Z

即  $f(A) = D, f(B) = E, f(C) = S, \dots$  等等。

试找出给定密文“QAIQORSFDOOBUIPQKJBYAQ”对应的明文。

解: 由表知,  $f^{-1}$  如下表所示。

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
H	I	J	A	B	K	L	M	E	N	O	P	Q
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
F	R	S	T	U	C	D	V	W	X	Y	G	Z

将密文“QAIQORSFDOOBUIPQKJBYAQ”中的每一个字母在  $f^{-1}$  中找出其对应的象就可得出对应的明文: “THETRUCKARRIVESTONIGHT”。

### 知识点5 置换函数

当  $A$  是有限集合时,有限集合上的双射函数在数学、计算机科学和物理学中有着非常广泛的应用。

定义:设  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  是有限集合。从  $A$  到  $A$  的双射函数称为  $A$  上的置换或排列 (Permutation), 记为  $P: A \rightarrow A, n$  称为置换的阶 (Order)。

例 等边三角形如图所示。求经过旋转和翻转能使之重合的所有置换函数。

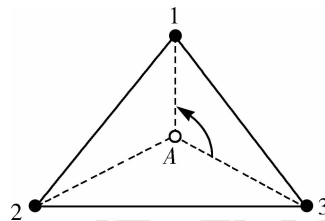
解:能使三角形重合的置换有 6 个:

(1) 三角形绕中心  $A$  反时针旋转  $120^\circ$ 、 $240^\circ$  和  $360^\circ$  对应的置换分别为:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) 绕中线  $1A, 2A, 3A$  翻转对应的置换分别为:

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



### 二、本讲小结

本讲主要讲解了函数的概念。注意函数与关系的区别和联系;单射、满射和双射函数的概念,数学描述形式;函数的复合运算,逆运算及运算性质;

重点讲解了单射、满射和双射函数的概念;

常考题型多为证明题、计算题。

应试方法主要是熟记概念及解题套路。

### 三、课后练习

1. 设  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ , 是两个函数, 证明

(1) 若  $f \circ g$  是满射且  $g$  是单射, 则  $f$  是满射;

(2) 若  $f \circ g$  是单射且  $f$  是满射, 则  $g$  是单射。

2. 设  $f: A \rightarrow B$  是  $A$  到  $B$  的函数, 并定义一个函数

$g: B \rightarrow P(A)$ . 对于任意  $b \in B$ , 有

$$g(b) = \{x \mid (x \in A) \wedge (f(x) = b)\}.$$

证明: 若  $f$  是  $A$  到  $B$  的满射, 则  $g$  是  $B$  到  $P(A)$  的单射。



## 第四章 图 论

### 第1讲 图的概念与性质

#### 一、考点讲解:

- 1) 图的基本概念: 图的定义、表示、操作、分类以及邻接点与邻接边定义;
- 2) 图的基本性质: 结点度数、图的基本定理(握手定理)、图的同构、完全图、补图、子图、真子图、生成子图、导出子图的概念;

#### 知识点1 图的基本概念

一个图(Graph)是一个序偶  $\langle V, E \rangle$ , 记为  $G = \langle V, E \rangle$ , 其中:

①  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  是有限非空集合,  $v_i$  称为结点(Nodal Point), 简称点(Point),  $V$  称为结点集(Nodal Set)。

②  $E$  是有限集合, 称为边集(Frontier Set)。 $E$  中的每个元素都有  $V$  中的结点对与之对应, 称之为边(Edge)。

定义中结点对即可以是无序的, 也可以是有序的。

③ 若边  $e$  与无序结点对  $(u, v)$  相对应, 则称  $e$  为无向边, 记为  $e = (u, v) = (v, u)$ , 这时称  $u, v$  是边  $e$  的两个端点。

④ 若边  $e$  与有序结点对  $\langle u, v \rangle$  相对应, 则称  $e$  为有向边(Directed Point)(或弧), 记为  $e = \langle u, v \rangle$ , 这时称  $u$  为  $e$  的始点(Initial Point)(或弧尾),  $v$  为  $e$  的终点(terminal Point)(或弧头), 统称为  $e$  的端点。

#### 知识点2 图的表示

对于一个图  $G$ , 如果将其记为  $G = \langle V, E \rangle$ , 并写出  $V$  和  $E$  的集合表示, 这称为图的集合表示。

用小圆圈表示  $V$  中的结点, 用由  $u$  指向  $v$  的有向线段或曲线表示有向边  $\langle u, v \rangle$ , 无向线段或曲线表示无向边  $(u, v)$ , 这称为图的图形表示。

用集合描述图的优点是精确, 但抽象不易理解;

用图形表示图的优点是形象直观, 但当图中的结点和边的数目较大时, 使用这种方法是很不方便的, 甚至是不可能的。

图的矩阵表示: 设图  $G = \langle V, E \rangle$ , 其中  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 并假定结点已经有了从  $v_1$  到  $v_n$  的次序, 则  $n$  阶方阵  $A_G = (a_{ij})_{n \times n}$  称为  $G$  的邻接矩阵(Adjacency Matrix), 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } (v_i, v_j) \in E \text{ 或 } \langle v_i, v_j \rangle \in E \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n$$

### 知识点3 图的操作

设图  $G = \langle V, E \rangle$ 。

1. 设  $e \in E$ , 用  $G - e$  表示从  $G$  中去掉边  $e$  得到的图, 称为删除边  $e$ 。又设  $E' \subseteq E$ , 用  $G - E'$  表示从  $G$  中删除  $E'$  中所有边得到的图, 称为删除  $E'$ 。

2. 设  $v \in V$ , 用  $G - v$  表示从  $G$  中去掉结点  $v$  及  $v$  关联的所有边得到的图, 称为删除结点  $v$ 。又设  $V' \subset V$ , 用  $G - V'$  表示从  $G$  中删除  $V'$  中所有结点及关联的所有边得到的图, 称为删除  $V'$ 。

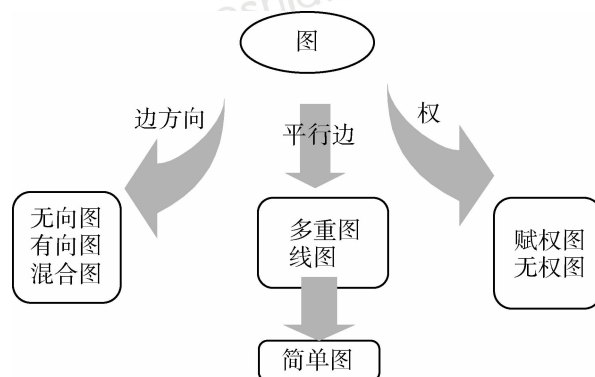
3. 设  $e = (u, v) \in E$ , 用  $G \setminus e$  表示从  $G$  中删除  $e$ , 将  $e$  的两个端点  $u, v$  用一个新的结点  $w$  代替, 使  $w$  关联除  $e$  外的  $u$  和  $v$  关联的一切边, 称为边  $e$  的收缩。一个图  $G$  可以收缩为图  $H$ , 是指  $H$  可以从  $G$  经过若干次边的收缩而得到。

4. 设  $u, v \in V$  ( $u, v$  可能相邻, 也可能不相邻), 用  $G \cup (u, v)$  表示在  $u, v$  之间加一条边  $(u, v)$ , 称为加新边。

### 知识点4 邻接点与邻接边

在图  $G = \langle V, E \rangle$  中, 若两个结点  $v_i$  和  $v_j$  是边  $e$  的端点, 则称  $v_i$  与  $v_j$  互为邻接点 (Adjacent Point), 否则  $v_i$  与  $v_j$  称为不邻接的; 具有公共结点的两条边称为邻接边 (Adjacent Edge); 两个端点相同的边称为环 (Ring) 或自回路 (Self-Loop); 图中不与任何结点相邻接的结点称为孤立结点 (Isolated Point); 仅由孤立结点组成的图称为零图 (Null Graph); 仅含一个结点的零图称为平凡图 (Trivial Graph); 含有  $n$  个结点,  $m$  条边的图, 称为  $(n, m)$  图。

### 知识点5 图的分类

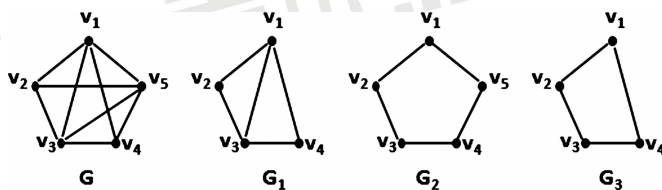


### 知识点6 子图与补图

设有图  $G = \langle V, E \rangle$  和图  $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ 。

1. 若  $V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E$ , 则称  $G_1$  是  $G$  的子图 (Subgraph), 记为  $G_1 \subseteq G$ 。
2. 若  $G_1 \subseteq G$ , 且  $G_1 \neq G$  (即  $V_1 \subset V$  或  $E_1 \subset E$ ), 则称  $G_1$  是  $G$  的真子图 (Proper Subgraph), 记为  $G_1 \subset G$ 。
3. 若  $V_1 = V, E_1 \subseteq E$ , 则称  $G_1$  是  $G$  的生成子图 (Spanning Subgraph)。
4. 设  $V_2 \subseteq V$  且  $V_2 \neq \Phi$ , 以  $V_2$  为结点集, 以两个端点均在  $V_2$  中的边的全体为边集的  $G$  的子图, 称为  $V_2$  导出的  $G$  的子图, 简称  $V_2$  的导出子图 (Induced Subgraph)。

例 判断下图中, 图  $G_1, G_2$  和  $G_3$  是否是图  $G$  的子图、真子图、生成子图、导出子图?



解:  $G_1$ 、 $G_2$  和  $G_3$  都是图  $G$  的子图、真子图;  $G_2$  是图  $G$  的生成子图;  $G_1$  是图  $G$  的  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  的导出子图。

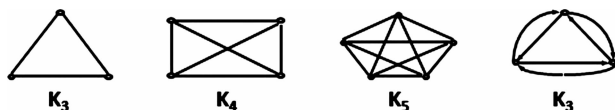
注: 每个图都是它自身的子图、生成子图和导出子图。

定义: 设  $G = \langle V, E \rangle$  为一个具有  $n$  个结点的无向简单图, 如果  $G$  中任意两个结点间都有边相连, 则称  $G$  为无向完全图 (Undirected Complete Graph), 简称  $G$  为完全图 (Complete Graph), 记为  $K_n$ 。

设  $G = \langle V, E \rangle$  为一个具有  $n$  个结点的有向简单图, 如果  $G$  中任意两个结点间都有两条方向相反的有向边相连, 则称  $G$  为有向完全图 (Directed Complete Graph), 在不发生误解的情况下, 也记为  $K_n$ 。

对于完全图来说, 其邻接矩阵除主对角元为 0 外, 其它元素均为 1。

例



无向完全图  $K_n$  的边数为  $C(n, 2) = \frac{1}{2}n(n-1)$

有向完全图  $K_n$  的边数为  $P(n, 2) = n(n-1)$

定义: 设  $G = \langle V, E \rangle$  为简单图,  $G' = \langle V, E_1 \rangle$  为完全图, 则称  $G_1 = \langle V, E_1 - E \rangle$  为  $G$  的补图 (Complement of Graph), 记为  $\bar{G}$ 。

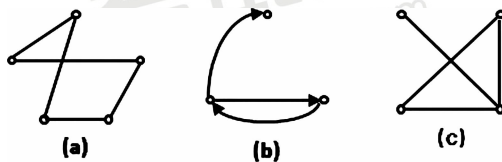
注: 当  $G$  为有向图时, 则  $G'$  为有向完全图; 当  $G$  为无向图时, 则  $G'$  为无向完全图。

$G$  的补图也可理解为从结点集  $V$  的完全图中删除  $G$  中的边剩下的图, 即  $G$  与其补图的结点集是相同的, 边集是相对于完全图的边集为全集的补集。

显然, 若  $G_1 = \bar{G}$ , 则  $G = \bar{G}_1$ , 即它们互为补图。

$K_n$  的补图为  $n$  个结点的零图。

例 求下图图中图 (a)、(b)、(c) 的补图。



【详见课程视频】

利用邻接矩阵描述补图

若设简单图  $G$  的邻接矩阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , 则它的补图  $\bar{G}$  的邻接矩阵  $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n \times n}$  有:

$$\bar{a}_{ij} = \begin{cases} 1 - a_{ij}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n$$

证明:在任意 6 个人的集会上,总会有 3 个人相互认识或者有 3 个人互相不认识(假设认识是相互的)。

分析:把 6 个人作为结点,相互认识的人之间连边,这个问题就转化图的问题。可以利用图及其补图来解这个问题。

证明:把参加集会的人作为结点,相互认识的人之间连边,得到图  $G$ ,  $\bar{G}$  设为  $G$  的补图,这样问题就转化为证明  $G$  或  $\bar{G}$  中至少有一个完全子图  $K_3$ 。

考虑完全图  $K_6$ , 结点  $v_1$  与其余 5 个结点各有一条边相连,这 5 条边一定有 3 条在  $G$  或  $\bar{G}$  中,不妨设有 3 条边在  $G$  中,设这 3 条边为  $(v_1, v_2)$ 、 $(v_1, v_3)$ 、 $(v_1, v_4)$ 。

考虑结点  $v_2, v_3, v_4$ 。若  $v_2, v_3, v_4$  在  $G$  中无边相连,则  $v_2, v_3, v_4$  相互不认识;若  $v_2, v_3, v_4$  在  $G$  中至少有一条边相连,例如  $(v_2, v_3)$ , 则  $v_1, v_2, v_3$  就相互认识。因此,总会有 3 个人相互认识或者有 3 个人互相不认识。

### 知识点 7 结点的度数与握手定理

定义:(1)图  $G = \langle V, E \rangle$  中以结点  $v \in V$  为端点的边数(有环时计算两次)称为结点  $v$  的度数(Degree),简称度,记为  $\deg(v)$ 。

(2)有向图  $G = \langle V, E \rangle$  中以结点  $v$  为始点的边数称为  $v$  的出度(Out-Degree),记为  $\deg^+(v)$ ;以结点  $v$  为终点的边数称为  $v$  的入度(In-Degree),记为  $\deg^-(v)$ 。显然: $\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$ 。

(3)对于图  $G = \langle V, E \rangle$ , 度数为 1 的结点称为悬挂结点(Hanging Point),以悬挂结点为端点的边称为悬挂边(Hanging Edge)。

利用邻接矩阵描述

设图  $G = \langle V, E \rangle$ ,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  的邻接矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

若  $G$  是无向图,则  $A$  中第  $i$  行元素是由结点  $v_i$  所关联的边所决定,其中为 1 的元素数目等于  $v_i$  的度数,即

$$\deg(v_i) = \sum_{k=1}^n a_{ik} + a_{ii} \quad \deg(v_i) = \sum_{k=1}^n a_{ki} + a_{ii}$$

若  $G$  是有向图,则  $A$  中第  $i$  行元素是由结点  $v_i$  为始点的边所决定,其中为 1 的元素数目等于  $v_i$  的

出度,即  $\deg^+(v_i) = \sum_{k=1}^n a_{ik}$

$A$  中第  $i$  列元素是由结点  $v_i$  为终点的边所决定,其中为 1 的元素数目等于  $v_i$  的入度,即  $\deg^-(v_i) = \sum_{k=1}^n a_{ki}$

握手定理:图中结点度数的总和等于边数的二倍,



即设图  $G = \langle V, E \rangle$ , 则有  $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$

分析: 由定义知, 结点  $v$  的度数等于以  $v$  为端点的边数, 而 1 条边有 2 个端点 (环的 2 个端点相同), 因此 1 条边贡献 2 度。

证明: 因为每条边都有两个端点 (环的两个端点相同), 所以加上一条边就使得各结点的度数之和增加 2, 因此结论成立。

这个结果是图论的第一个定理, 它是由欧拉于 1736 年最先给出的。欧拉曾对此定理给出了这样一个形象论断: 如果许多人在见面时握了手, 两只手握在一起, 被握过手的总次数为偶数。故此定理称为图论的基本定理或握手定理。

推论: 图中度数为奇数的结点个数为偶数。

分析: 考虑  $2|E|$  为偶数, 奇数个奇数之和为奇数, 偶数个奇数之和为偶数。

证明: 设图  $G = \langle V, E \rangle$ ,  $V_1 = \{v | v \in V \text{ 且 } \deg(v) \text{ 为奇数}\}$ ,  $V_2 = \{v | v \in V \text{ 且 } \deg(v) \text{ 为偶数}\}$ 。

显然,  $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ , 且  $V_1 \cup V_2 = V$ , 于是  $\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v) = 2|E|$

式中  $2|E|$  和  $\sum_{v \in V_2} \deg(v)$  (偶数之和为偶数) 均为偶数, 因而  $\sum_{v \in V_1} \deg(v)$  也为偶数。于是  $|V_1|$  为偶数, 即度数为奇数的结点个数为偶数。

今后常称度数为奇数的结点为奇度数结点 (Odd Degree Point), 度数为偶数的结点为偶度数结点 (Even Degree Point)。

定理: 有向图中各结点的出度之和等于各结点的入度之和, 等于边数, 即设有向图  $G = \langle V, E \rangle$ , 则有  $\sum_{v \in V} \deg^+(v) = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = |E|$

分析: 利用握手定理, 考虑一条边贡献一个出度和一个入度即可。

证明: 因为每条有向边具有一个始点和一个终点 (环的始点和终点是同一个结点), 因此, 每条有向边对应一个出度和一个入度。图  $G$  中有  $|E|$  条有向边, 则  $G$  中必产生  $|E|$  个出度, 这  $|E|$  个出度即为各结点的出度之和,  $G$  中也必产生  $|E|$  个入度, 这  $|E|$  个入度即为各结点的入度之和。因而, 在有向图中, 各结点的出度之和等于各结点的入度之和, 都等于边数  $|E|$ 。

例题:

(1)  $(3, 5, 1, 4)$ ,  $(1, 2, 3, 4, 5)$  能成为图的度数序列吗? 为什么?

(2) 已知图  $G$  中有 15 条边, 2 个度数为 4 的结点, 4 个度数为 3 的结点, 其余结点的度数均小于等于 2, 问  $G$  中至少有多少个结点? 为什么?

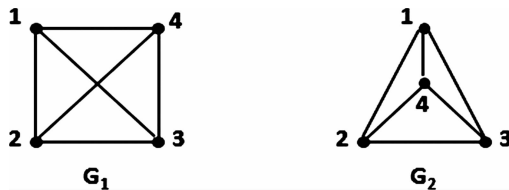
#### 知识点 8 图的同构

设两个图  $G = \langle V, E \rangle$  和  $G' = \langle V', E' \rangle$ , 如果存在双射函数  $g: V \rightarrow V'$ , 使得对于任意的  $e = (v_i, v_j)$  (或者  $\langle v_i, v_j \rangle \in E$  当且仅当  $e' = (g(v_i), g(v_j))$  (或者  $\langle g(v_i), g(v_j) \rangle \in E'$ , 并且  $e$  与  $e'$  的重数相同, 则称  $G$  与  $G'$  同构 (Isomorphism), 记为  $G \cong G'$ 。

对于同构, 形象地说, 若图的结点可以任意挪动位置, 而边是完全弹性的, 只要在不拉断的条件下, 一个图可以变形为另一个图, 那么这两个图是同构的。

两个图同构的必要条件

- (1) 结点数目相同;
- (2) 边数相同;
- (3) 度数相同的结点数相同。



## 二、本讲小结

本讲主要讲解了图的定义、表示、操作、分类以及邻接点与邻接边定义;结点度数、图的基本定理(握手定理)、图的同构、完全图、补图、子图、真子图、生成子图、导出子图的概念。

重点讲解了图的定义、结点度数、图的基本定理(握手定理);其中握手定理是图论的基本定理,很多理论都是以它为基础的,必须熟练掌握,并能灵活运用。

常考题型多为判断题、选择题、证明题和计算题。

应试方法主要是熟记概念及解题套路。

## 三、课后习题

1. 设  $G$  为 9 个结点的无向图,每个结点的度数不是 5 就是 6,试证明  $G$  中至少有 5 个度数为 6 的结点或者至少有 6 个度数为 5 的结点。

# 第 2 讲 通路与回路

## 一、考点讲解:

1) 通路与回路:简单(基本)通路与简单(基本)回路、通路与回路长度、结点的距离、可达性判定及矩阵表示。

2) 图的连通性:无向连通图与连通分支、强(单向、弱)连通图及其对应的连通分支定义等。

定义:给定图  $G = \langle V, E \rangle$  中结点和边相继交错出现的序列  $\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_k v_k$ 。

1) 若  $\Gamma$  中边  $e_i$  的两端点是  $v_{i-1}$  和  $v_i$  ( $G$  是有向图时要求  $v_{i-1}$  与  $v_i$  分别是  $e_i$  的始点和终点),  $i = 1, 2, \dots, k$ , 则称  $\Gamma$  为结点  $v_0$  到结点  $v_k$  的通路(Entry)。  $v_0$  和  $v_k$  分别称为此通路的始点和终点,统称为通路的端点。通路中边的数目  $k$  称为此通路的长度(Length)。当  $v_0 = v_k$  时,此通路称为回路(Circuit)。

2) 若通路中的所有边互不相同,则称此通路为简单通路(Simple Entry)或一条迹;若回路中的所有边互不相同,则称此回路为简单回路(Simple Circuit)或一条闭迹。

3) 若通路中的所有结点互不相同(从而所有边互不相同),则称此通路为基本通路(Basic Entry)

或者初级通路、路径;若回路中除  $v_0 = v_k$  外的所有结点互不相同(从而所有边互不相同),则称此回路为基本回路(Basic Circuit)或者初级回路、圈。

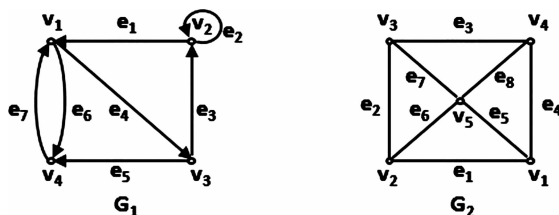
说明:

1) 回路是通路的特殊情况。因而,说某条通路,它可能是回路。但当说一基本通路时,一般是指它不是基本回路的情况。

2) 基本通路(回路)一定是简单通路(回路),但反之不真。因为没有重复的结点肯定没有重复的边,但没有重复的边不能保证一定没有重复的结点。

3) 在不会引起误解的情况下,一条通路  $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_n v_n$  也可以用边的序列  $e_1 e_2 \cdots e_n$  来表示,这种表示方法对于有向图来说较为方便。在线图中,一条通路  $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_n v_n$  也可以用结点的序列  $v_0 v_1 v_2 \cdots v_n$  来表示。

例 判断下图  $G_1$  中的回路  $v_3 e_5 v_4 e_7 v_1 e_4 v_3$ 、 $v_3 e_3 v_2 e_2 v_1 e_4 v_3$ 、 $v_3 e_3 v_2 e_1 v_1 e_4 v_3$  是否是简单回路、基本回路? 图  $G_2$  中的通路  $v_1 e_1 v_2 e_6 v_5 e_7 v_3 e_2 v_2 e_6 v_5 e_8 v_4$ 、 $v_1 e_5 v_5 e_7 v_3 e_2 v_2 e_6 v_5 e_8 v_4$ 、 $v_1 e_1 v_2 e_6 v_5 e_7 v_3 e_3 v_4$  是否是简单通路、基本通路? 并求其长度。



说明:

在图  $G_1$  中,简单回路  $v_3 e_5 v_4 e_7 v_1 e_4 v_3$  既可以用边的序列  $e_3 e_2 e_1 e_4$  来表示,也可以用结点的序列  $v_3 v_2 v_1 v_3$  来表示;

在图  $G_2$  中,简单通路  $v_1 e_5 v_5 e_7 v_3 e_2 v_2 e_6 v_5 e_8 v_4$  既可以用边的序列  $e_5 e_7 e_2 e_6 e_8$  来表示,也可以用结点的序列  $v_1 v_5 v_3 v_2 v_5 v_4$  来表示。

定理:

设  $G = \langle V, E \rangle$  为线图,  $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ ,  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  为  $G$  的邻接矩阵,  $A^m = (a_{ij}^{(m)})_{n \times n}$ 。则

$a_{ij}^{(m)}$  为从结点  $v_i$  到结点  $v_j$  长度为  $m$  的通路数目;

$a_{ii}^{(m)}$  为结点  $v_i$  到自身的长度为  $m$  的回路数目;

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(m)}$  为  $G$  中长度为  $m$  的通路(含回路)总数。

证明:对  $m$  用数学归纳法。

(1) 当  $m = 1$  时,显然成立。

(2) 设  $m = k$  时,定理成立。

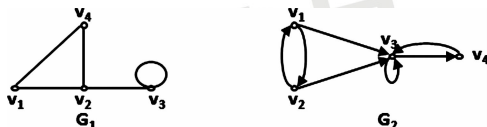
(3) 证明  $m = k + 1$  时定理成立。

因为  $(a_{ij}^{(k+1)})_{n \times n} = A^{k+1} = A \cdot A^k = \left( \sum_{p=1}^n a_{ip} \cdot a_{pj}^{(k)} \right)_{n \times n}$ ,

$$故 a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{p=1}^n a_{ip} \cdot a_{pj}^{(k)},$$

而  $a_{ip}$  是结点  $v_i$  到  $v_p$  长度为 1 的通路数目,  $a_{pj}^{(k)}$  是结点  $v_p$  到  $v_j$  长度为  $k$  的通路数目, 故  $a_{ip} \cdot a_{pj}^{(k)}$  是从结点  $v_i$  经过  $v_p$  到结点  $v_j$  的长度为  $k+1$  的通路数目, 那么  $\sum_{p=1}^n a_{ip} \cdot a_{pj}^{(k)}$  是从结点  $v_i$  到结点  $v_j$  的长度为  $k+1$  的通路数目。

**例** 求下图图中  $G_1$  和  $G_2$  的从结点  $v_1$  到结点  $v_3$  长度为 2 和 3 的通路数目及所有长度为 2 和 3 的通路数目。



**分析:** 利用定理, 求图中长度为  $m$  的通路数目, 只需要先写出图的邻接矩阵, 然后计算邻接矩阵的  $m$  次方即可。

**【详见课程视频】**

**定义:** 在图  $G = \langle V, E \rangle$  中,  $v_i, v_j \in V$ 。

1) 如果从  $v_i$  到  $v_j$  存在通路, 则称  $v_i$  到  $v_j$  是可达的, 否则称  $v_i$  到  $v_j$  不可达。规定: 任何结点到自己都是可达的。

2) 如果  $v_i$  到  $v_j$  可达, 则称长度最短的通路为从  $v_i$  到  $v_j$  的短程线 (Geodesic);

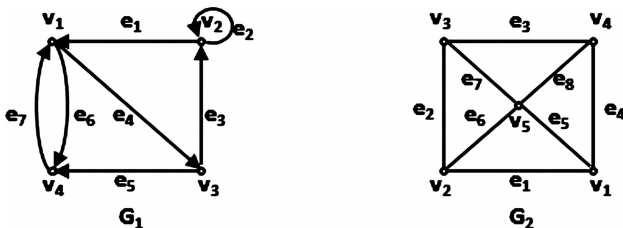
3) 从  $v_i$  到  $v_j$  的短程线的长度称为从  $v_i$  到  $v_j$  的距离 (Distance), 记为  $d(v_i, v_j)$ 。如果  $v_i$  到  $v_j$  不可达, 则通常记为  $d(v_i, v_j) = \infty$ 。

**说明:**  $d(v_i, v_j)$  满足下列性质:

$$(1) d(v_i, v_j) \geq 0;$$

$$(2) d(v_i, v_i) = 0;$$

$$(3) d(v_i, v_k) + d(v_k, v_j) \geq d(v_i, v_j)。$$



对于无向图, 一定有若  $v_i$  到  $v_j$  可达, 则  $v_j$  到  $v_i$  可达; 也有  $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$ 。

对于有向图,  $v_i$  到  $v_j$  可达, 不一定有  $v_j$  到  $v_i$  可达; 也不一定有  $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$ 。

例如在上图  $G_1$  中,  $d(v_1, v_2) = 2, d(v_2, v_1) = 1, d(v_4, v_1) = d(v_1, v_4) = 1, d(v_2, v_4) = 2, d(v_4, v_2) = 3$ ;  
在上图  $G_2$  中,  $d(v_1, v_3) = 2, d(v_3, v_4) = 1, d(v_2, v_4) = 2$ 。

**定理:**

在一个具有  $n$  个结点的图中, 如果从结点  $v_i$  到结点  $v_j (v_i \neq v_j)$  存在一条通路, 则从  $v_i$  到  $v_j$  存在一条长度不大于  $n-1$  的通路。



分析:路的长度为序列中的结点数减1,如果结点不重复,最多 $n$ 个,因此通路长度最多 $n-1$ ;如果结点有重复,则在重复的结点间构成一条回路,删除这条回路,剩下的仍然是从结点 $v_i$ 到结点 $v_j$ 的通路。一直删下去,直到无重复结点为止,这样定理就得证了。

证明:设 $v_{i_0}v_{i_1}\cdots v_{i_k}$ 为从 $v_i$ 到 $v_j$ 的长度为 $k$ 的一条通路,

其中 $v_{i_0} = v_i, v_{i_k} = v_j$ ,此通路上有 $k+1$ 个结点。若 $k \leq n-1$ ,这条通路即为所求。若 $k > n-1$ ,则此通路上的结点数 $k+1 > n$ ,由鸽笼原理知,必存在一个结点在此通路中不止一次出现,设 $v_{i_s} = v_{i_t}$ ,其中 $0 \leq s < t \leq k$ 。去掉 $v_{i_s}$ 到 $v_{i_t}$ 中间的通路,至少去掉一条边,得通路 $v_{i_0}, v_{i_1}, \cdots, v_{i_s}, v_{i_{t+1}}, \cdots, v_{i_k}$ ,此通路比原通路的长度至少少1。如此重复进行下去,必可得一条从 $v_i$ 到 $v_j$ 的长度不大于 $n-1$ 的通路。

几个结论:

推论:在一个具有 $n$ 个结点的图中,如果从结点 $v_i$ 到结点 $v_j$  ( $v_i \neq v_j$ ) 存在一条通路,则从 $v_i$ 到 $v_j$ 存在一条长度不大于 $n-1$ 的基本通路。

定理:在一个具有 $n$ 个结点的图中,如果存在经过结点 $v_i$ 回路,则存在一条经过 $v_i$ 的长度不大于 $n$ 的回路。

推论:在一个具有 $n$ 个结点的图中,如果存在经过结点 $v_i$ 回路,则存在一条经过 $v_i$ 的长度不大于 $n$ 的基本回路。

利用邻接矩阵判断可达:

利用定理和推论,可以通过计算图的邻接矩阵及其幂的方法来判断从 $v_i$ 到 $v_j$ 是否可达,以及从 $v_i$ 到 $v_j$ 的距离。

设矩阵 $B_n = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^n$

则 $B^n$ 中的元素

$$b_{ij}^{(n)} = a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \cdots + a_{ij}^{(n)} = \sum_{m=1}^n a_{ij}^{(m)}$$

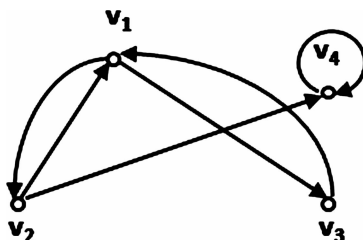
表示图 $G$ 中从结点 $v_i$ 到结点 $v_j$ 的长度小于等于 $n$ 的通路总数,若 $i=j$ ,  $b_{ij}^{(n)}$ 为 $G$ 中结点 $v_i$ 到自身的长度小于等于 $n$ 的回路总数。

定理:

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为线图,  $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ ,  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 $G$ 的邻接矩阵,  $A^m = (a_{ij}^{(m)})_{n \times n}$ ,  $m = 1, 2, \cdots, n$ ;  $B^n = (b_{ij}^{(n)})_{n \times n} = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^n$ 。则有:如果 $b_{ij}^{(n)} > 0$ ,那么从 $v_i$ 到 $v_j$ 可达,否则不可达;并且

$$d(v_i, v_j) = \begin{cases} \infty, & \text{如果所有 } a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \cdots, a_{ij}^{(n)} \text{ 均为 } 0 \\ k, & \text{否则, } k = \min \{m \mid a_{ij}^{(m)} \neq 0, m = 1, 2, \cdots, n\} \end{cases}$$

例 判断右图中图 $G$ 中结点之间的可达关系,并求任两结点间的距离。



分析:利用定理,先写出图的邻接矩阵  $A$ ,然后计算  $A$  的幂即可。

【详见课程视频】

定义:设  $G = \langle V, E \rangle$  是一个线图,其中  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,并假定结点已经有了从  $v_1$  到  $v_n$  的次序,称  $n$  阶方阵  $P = (p_{ij})_{n \times n}$  为图  $G$  的可达性矩阵 (Accessibility Matrix), 其中

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 至少存在一条非零长度的通路} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

$$i, j = 1, 2, 3, \dots, n$$

说明:

无向图的可达性矩阵是对称的,而有向图的可达性矩阵则不一定对称。

与邻接矩阵不同,可达性矩阵不能给出图的完整信息,但由于它简便,在应用上还是很重要的。

如果知道矩阵  $B_n$ ,则只需将其中的非零元素写成 1,就可得到可达性矩阵,即

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & b_{ij}^{(n)} \neq 0 \\ 0, & b_{ij}^{(n)} = 0 \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n$$

上例中图的可达性矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

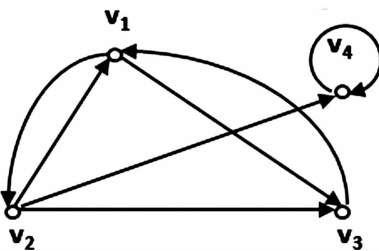
定理:

设  $G = \langle V, E \rangle$  为线图,  $A, P$  分别是  $G$  的邻接矩阵和可达性矩阵,则有

$$P = A \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \vee \dots \vee A^{(n)} = \bigvee_{i=1}^n A^{(i)}$$

这里,  $A^{(i)}$  表示做矩阵布尔乘法的  $i$  次幂。

例 求右图中图  $G$  中的可达性矩阵。



分析:直接利用定理,先计算图的邻接矩阵  $A$  布尔乘法的 2、3、4 次幂,然后做布尔加即可。

解:在图中,  $G$  的邻接矩阵及其 2、3、4 次布尔乘法幂分别为:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = A \odot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = A^{(2)} \odot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(4)} = A^{(3)} \odot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是该图的可达性矩阵为:

$$P = A^{(1)} \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \vee A^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

这与利用  $B_4$  求得的结果完全一致。

无向图的连通性

定义:若无向图  $G$  中的任何两个结点都是可达的,则称  $G$  是连通图(Connected Graph),否则称  $G$  是非连通图(Unconnected Graph)或分离图(Separated Graph)。

无向完全图  $K_n (n \geq 1)$  都是连通图,而多于一个结点的零图都是非连通图。

利用邻接矩阵  $A$  和可达性矩阵  $P$ ,显然有:

非平凡无向线图  $G$  是连通图当且仅当它的可达性矩阵  $P$  的所有元素均为 1。

定理:

无向图  $G = \langle V, E \rangle$  中结点之间的可达关系  $R$  定义如下:

$$R = \{ \langle u, v \rangle \mid u, v \in V, u \text{ 到 } v \text{ 可达} \},$$

则  $R$  是  $V$  上的等价关系。

分析:利用等价关系的定义,很容易证明  $R$  是自反、对称、传递的。

说明:

利用等价关系的特点,即等价关系可以导致集合的划分,因此对于任何无向图的结点集都存在一种划分,使得每个划分块中的结点都彼此可达,而两个不同划分块中的结点都不可达。

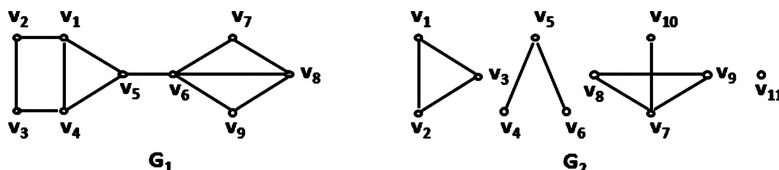
定义:

无向图  $G = \langle V, E \rangle$  中结点之间的可达关系  $R$  的每个等价类导出的子图都称为  $G$  的一个连通分

支(Connected Component)。用  $p(G)$  表示  $G$  中的连通分支个数。

显然,无向图  $G$  是连通图当且仅当  $p(G) = 1$ ;每个结点和每条边都在且仅在一个连通分支中。

例:判断下图中图  $G_1$  和  $G_2$  的连通性,并求其连通分支个数。



分析:本题中图很简单,并且给出了图形,很容易看出  $G_1$  是连通图,  $G_2$  是非连通图。容易看出,  $G_2$  中可达关系的等价类为  $\{v_1, v_2, v_3\}$ ,  $\{v_4, v_5, v_6\}$ ,  $\{v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ ,  $\{v_{11}\}$ , 它们导出的子图即为  $G_2$  的 4 个连通分支。

解:在上图中,  $G_1$  是连通图, 所以  $p(G_1) = 1$ 。  $G_2$  是非连通图, 且  $p(G_2) = 4$ 。

有向图的连通性

定义:设  $G = \langle V, E \rangle$  是一个有向图,

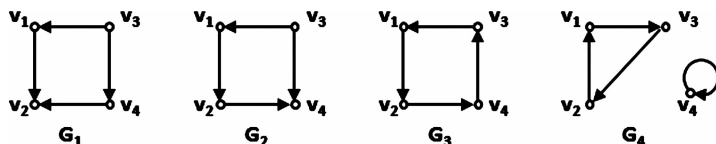
1) 略去  $G$  中所有有向边的方向得无向图  $G'$ , 若无向图  $G'$  是连通图, 则称有向图  $G$  是连通图或称为弱连通图(Weakly Connected Graph)。否则称  $G$  是非连通图;

2) 若  $G$  中任何一对结点之间至少有一个结点到另一个结点是可达的, 则称  $G$  是单向连通图(Unilaterally Connected Graph);

3) 若  $G$  中任何一对结点之间都是相互可达的, 则称  $G$  是强连通图(Strongly Connected Graph)。

若有向图  $G$  是强连通图, 则它必是单向连通图; 若有向图  $G$  是单向连通图, 则它必是(弱)连通图。但是上述二命题的逆均不成立。

例:判断下图中 4 个图的连通性。



解:在上图中,  $G_1$  是弱连通图,  $G_2$  是单向连通图(当然它也是弱连通图),  $G_3$  是强连通图(当然它也是单向连通图和弱连通图),  $G_4$  是非连通的有向图。

定理:有向图  $G$  是强连通图的充分必要条件是  $G$  中存在一条经过所有结点的回路。

分析:只需要利用回路中的任二点相互可达和强连通的定义即可证明。

证明:充分性:如果  $G$  中存在一条经过所有结点的回路  $C$ , 则  $G$  中任意二结点均在回路  $C$  上, 所以  $G$  中任二结点都是相互可达的, 因而  $G$  是强连通图。

必要性:设  $G$  是强连通图, 那么  $G$  中任二结点均是相互可达的。不妨设  $G$  中的结点为  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , 因为  $v_i$  到  $v_{i+1}$  是可达的,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , 且  $v_n$  到  $v_1$  是可达的, 所以  $v_i$  到  $v_{i+1}$  存在通路,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , 且  $v_n$  到  $v_1$  存在通路。让这些连通首尾相接, 则得一回路  $C$ 。显然所有结点均在该回路中出现。

利用  $A$  和  $P$  判断有向图的连通性

1) 有向线图  $G$  是强连通图当且仅当它的可达性矩阵  $P$  的所有元素均为 1;



2) 有向线图  $G$  是单向连通图当且仅当它的可达性矩阵  $P$  及其转置矩阵  $P^T$  经过布尔并运算后所得的矩阵  $P' = P \vee P^T$  中除主对角元外其余元素均为 1;

3) 有向线图  $G$  是弱连通图当且仅当它的邻接矩阵  $A$  及其转置矩阵  $A^T$  经布尔并运算所得的矩阵  $A' = A \vee A^T$  作为邻接矩阵而求得的可达性矩阵  $P'$  中所有元素均为 1。

定义: 在有向图  $G = \langle V, E \rangle$  中, 设  $G'$  是  $G$  的子图, 如果

(1)  $G'$  是强连通的 (单向连通的、弱连通的);

(2) 对任意  $G'' \subseteq G$ , 若  $G' \subset G''$ , 则  $G''$  不是强连通的 (单向连通的、弱连通的);

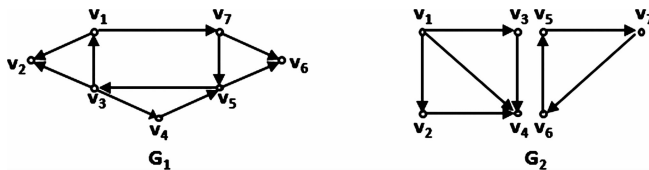
那么称  $G'$  为  $G$  的强连通分支 (单向连通分支、弱连通分支), 或称为强分图 (单向分图、弱分图)。

注:

1) 如果不考虑边的方向, 弱连通分支对应相应的无向图的连通分支。

2) 注意把握 (强、单向、弱) 连通分支的极大性特点, 即任意增加一个结点或一条边就不是 (强、单向、弱) 连通的了。

例 求下面 2 个图的强、单向和弱连通分支。



分析: 由定义从某个结点开始逐渐增加结点, 看它们导出的子图是否是强 (单向或弱) 分图。

一个关系

若在有向图  $G = \langle V, E \rangle$  的结点集  $V$  上定义二元关系  $R$  为:  $\langle v_i, v_j \rangle \in R$  当且仅当  $v_i$  和  $v_j$  在同一强 (弱) 连通分支中,  $v_i, v_j \in V$ 。显然,  $R$  是一个等价关系。

因为每一个结点  $v_i$  和自身总在在同一强 (弱) 连通分支中, 所以  $R$  是自反的; 若结点  $v_i$  和  $v_j$  在同一强 (弱) 连通分支中, 显然  $v_j$  和  $v_i$  也在同一强 (弱) 连通分支中, 所以  $R$  是对称的; 又若结点  $v_i$  和  $v_j$  在同一强 (弱) 连通分支中, 结点  $v_j$  和  $v_k$  在同一强 (弱) 连通分支中, 则  $v_i$  和  $v_j$  相互可达,  $v_j$  和  $v_k$  相互可达, 因而  $v_i$  和  $v_k$  相互可达, 故  $v_i$  和  $v_k$  在同一强 (弱) 连通分支中, 所以  $R$  是传递的。

这种等价关系把结点分成等价类, 等价类的集合是  $V$  上的一个划分, 每一个等价类的结点导出一个强 (弱) 连通分支。

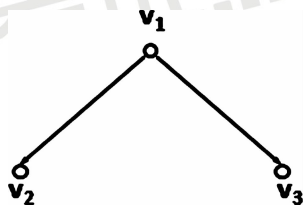
三个定理:

定理: 在有向图  $G = \langle V, E \rangle$  中, 它的每一个结点位于且仅位于一个强 (弱) 连通分支中。

定理: 在有向图  $G = \langle V, E \rangle$  中, 它的每一个结点至少位于一个单向连通分支中。

定理 0 在有向图  $G = \langle V, E \rangle$  中, 它的每一条边至多在一个强连通分支中; 至少在一个单向连通分支中; 在且仅在一个弱连通分支中。

例: 对于“两结点在同一单向连通分支中”这一关系, 虽然它是自反的, 对称的, 但它不是传递的。



上图中, $v_2$ 和 $v_1$ 在同一单向连通分支中, $v_1$ 和 $v_3$ 在同一单向连通分支中,但 $v_2$ 和 $v_3$ 不在同一单向连通分支中。

**例** 一个摆渡人要把一只狼、一只羊和一捆菜运过河去。由于船很小,每次摆渡人至多只能带一样东西。另外,如果人不在旁时,狼就要吃羊,羊就要吃菜。问这人怎样才能将它们运过河去?

【详见课程视频】

## 二、本讲小结

本讲主要讲解了简单(基本)通路、简单(基本)回路、通路、回路长度、结点的距离、可达性判定及矩阵表示;无向连通图与连通分支、强(单向、弱)连通图及其对应的连通分支定义等。

重点讲解了利用邻接矩阵计算通路、回路,以及利用可达性矩阵判断可达性;连通分支的概念。

常考题型多为计算题。

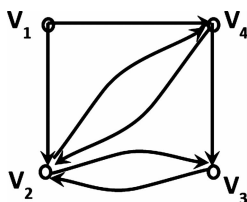
应试方法主要是熟记概念及解题套路。

## 三、课后习题

1. 设 $A$ 是有向图 $G$ 的邻接矩阵, $A^k$ 是邻接矩阵 $A$ 的 $k$ 次幂

(1) 证明: $A^k$ 中第 $i$ 行第 $j$ 列元素 $a_{ij}^{(k)}$ 等于 $G$ 中结点 $v_i$ 和 $v_j$ 之间长度为 $k$ 的通路的条数

(2) 求出下图所示的有向图中长度小于等于4的通路、回路分别有几条?



## 第3讲 树

### 一、考点讲解:

1) 与树相关的概念:树、森林、根树、根、叶、分支点、生成树、最小生成树、 $k$ 元树、 $k$ 元完全树子树、有序树、祖先与后代、父亲与儿子、最优树等;

2) 树的基本性质: $m = n - 1$ 等;

3) 树的算法:求生成树与最小生成树的算法、求最优树的算法、二元树遍历的算法、根树与二元树相互转化的算法等;

## 4) 树的应用。

**知识点1 树的定义**

连通而不含回路的无向图称为无向树(Undirected Tree),简称树(Tree),常用 $T$ 表示树。

树中度数为1的结点称为叶(Leaf);度数大于1的结点称为分支点(Branch Point)或内部结点(Interior Point)。

每个连通分支都是树的无向图称为森林(Forest)。

平凡图称为平凡树(Trivial Tree)。

树中没有环和平行边,因此一定是简单图

在任何非平凡树中,都无度数为0的结点。

**知识点2 树的性质**

定理.: 设无向图  $G = \langle V, E \rangle$ ,  $|V| = n$ ,  $|E| = m$ , 下列各命题是等价的:

- 1)  $G$  连通而不含回路(即  $G$  是树);
- 2)  $G$  中无回路, 且  $m = n - 1$ ;
- 3)  $G$  是连通的, 且  $m = n - 1$ ;
- 4)  $G$  中无回路, 但在  $G$  中任二结点之间增加一条新边, 就得到惟一的一条基本回路;
- 5)  $G$  是连通的, 但删除  $G$  中任一条边后, 便不连通; ( $n \geq 2$ )
- 6)  $G$  中每一对结点之间有惟一一条基本通路。( $n \geq 2$ )

注意:

在结点给定的无向图中,

树是边数最多的无回路图

树是边数最少的连通图

由此可知, 在无向图  $G = (n, m)$  中,

若  $m < n - 1$ , 则  $G$  是不连通的

若  $m > n - 1$ , 则  $G$  必含回路

定理: 任意非平凡树  $T = (n, m)$  都至少有两片叶。

分析: 利用握手定理和  $m = n - 1$  即可。

证明: 因树  $T$  是连通的, 从而  $T$  中各结点的度数均大于等于1。设  $T$  中有  $k$  个度数为1的结点(即  $k$  片叶), 其余的结点度数均大于等于2。于是由握手定理

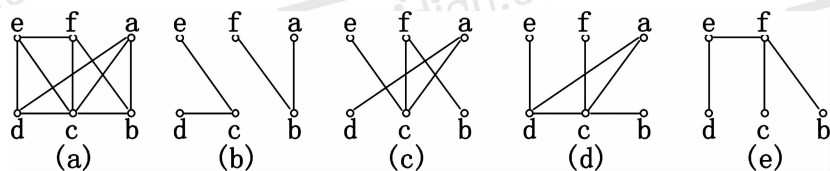
$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq k + 2(n - k) = 2n - k$$

由于树中有  $m = n - 1$ , 于是  $2(n - 1) \geq 2n - k$ , 因此可得  $k \geq 2$ , 这说明  $T$  中至少有两片叶。

**知识点3 生成树**

定义: 给定图  $G = \langle V, E \rangle$ , 若  $G$  的某个生成子图是树, 则称之为  $G$  的生成树(Spanning Tree), 记为  $T_G$ 。生成树  $T_G$  中的边称为树枝(Branch);  $G$  中不在  $T_G$  中的边称为弦(Chord);  $T_G$  的所有弦的集合称为生成树的补(Complement)。

例 判断下图中的图(b)、(c)、(d)、(e)是否是图(a)的生成树。



分析:判断是否是生成树,根据定义,首先看它是否是树,然后再看它是否是生成子图。由于图(b)和(d)不是树,图(e)不是生成子图,因此它们都不是图(a)的生成树,而图(c)既是树,又是生成子图,因此是生成树。

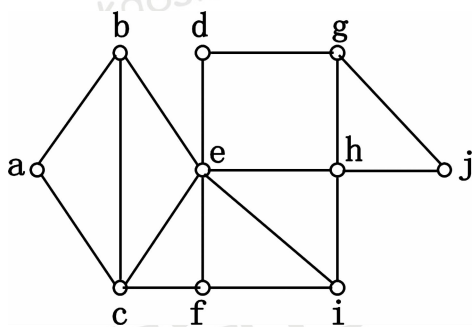
解:图(b)、(d)和(e)不是图(a)的生成树,图(c)是图(a)的生成树,其中边(a,c)、(a,d)、(b,f)、(c,f)、(c,e)是树枝,而(a,b)、(b,c)、(c,d)、(d,e)、(e,f)是弦。

#### 知识点4 生成树构造方法

求连通图  $G = \langle V, E \rangle$  的生成树的广度优先搜索算法:

- (1) 任选  $s \in V$ , 将  $s$  标记为 0, 令  $L = \{s\}$ ,  $V = V - \{s\}$ ,  $k = 0$ ;
- (2) 如果  $V = \Phi$ , 则转(4), 否则令  $k = k + 1$ ;
- (3) 依次对  $L$  中所有标记为  $k - 1$  的结点  $v$ , 如果它与  $V$  中的结点  $w$  相邻接, 则将  $w$  标记为  $k$ , 指定  $v$  为  $w$  的前驱, 令  $L = L \cup \{w\}$ ,  $V = V - \{w\}$ , 转(2);
- (4)  $E_G = \{(v, w) | w \in L - \{s\}, v \text{ 为 } w \text{ 的前驱}\}$ , 结束。

例 利用广度优先搜索算法求下图的生成树。



#### 知识点5 最小生成树

定义: 设  $G = \langle V, E \rangle$  是连通的赋权图,  $T$  是  $G$  的一棵生成树,  $T$  的每个树枝所赋权值之和称为  $T$  的权(Weight), 记为  $w(T)$ 。  $G$  中具有最小权的生成树称为  $G$  的最小生成树(Minimal Spanning Tree)。

一个无向图的生成树不是惟一的, 同样地, 一个赋权图的最小生成树也不一定是惟一的。

算法: Kruskal 算法

- (1) 在  $G$  中选取最小权边  $e_1$ , 置  $i = 1$ 。
- (2) 当  $i = n - 1$  时, 结束, 否则转(3)。
- (3) 设已选取的边为  $e_1, e_2, \dots, e_i$ , 在  $G$  中选取不同于  $e_1, e_2, \dots, e_i$  的边  $e_{i+1}$ , 使  $\{e_1, e_2, \dots, e_i, e_{i+1}\}$  中无回路且  $e_{i+1}$  是满足此条件的最小权边。

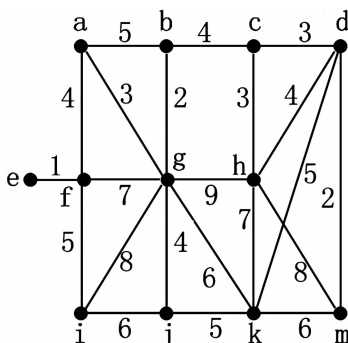


(4) 置  $i = i + 1$ , 转(2)。

要点: 在与已选取的边不构成回路的边中选取最小者。

在 Kruskal 算法的步骤 1 和 3 中, 若满足条件的最小权边不止一条, 则可从中任选一条, 这样就会产生不同的最小生成树。

例: 用 Kruskal 算法求图中赋权图的最小生成树。



【详见课程视频】

算法: Prim 算法

(1) 在  $G$  中任意选取一个结点  $v_1$ , 置  $V_T = \{v_1\}$ ,  $E_T = \Phi$ ,  $k = 1$ ;

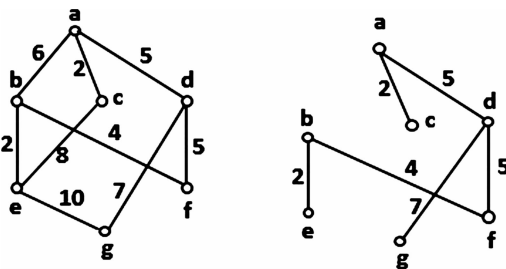
(2) 在  $V - V_T$  中选取与某个  $v_i \in V_T$  邻接的结点  $v_j$ , 使得边  $(v_i, v_j)$  的权最小, 置  $V_T = V_T \cup \{v_j\}$ ,  $E_T = E_T \cup \{(v_i, v_j)\}$ ,  $k = k + 1$ ;

(3) 重复步骤 2, 直到  $k = |V|$ 。

要点: 从任意结点开始, 每次增加一条最小权边构成一棵新树。

在 Prim 算法的步骤 2 中, 若满足条件的最小权边不止一条, 则可从中任选一条, 这样就会产生不同的最小生成树。

例 用 Prim 算法求图中赋权图的最小生成树。



解:  $n = 7$ , 按算法要执行  $n - 1 = 6$  次,  $w(T) = 25$ 。

由 Prim 算法可以看出, 每一步得到的图一定是树, 故不需要验证是否有回路, 因此它的计算工作量较 Kruskal 算法要小。

无向树的难点

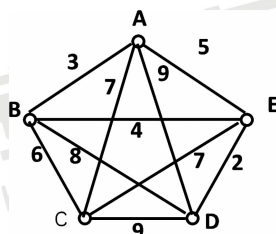
1) 树是不含回路的连通图。注意把握树的性质, 特别是树中叶结点的数目及边数与结点数之间的关系:  $m = n - 1$ ;

2) 生成树是无向连通图, 是树的生成子图。注意把握所有连通图都有生成树, 知道生成树的树枝

与弦及其数目,会使用避圈法、破圈法和广度优先搜索算法求生成树;

3) 最小生成树是赋权连通图的权值之和最小的生成树。会使用 *Kruskal* 算法和 *Prim* 算法求最小生成树。

**例** 假设有 5 个信息中心  $A, B, C, D, E$ , 它们之间的距离(以百公里为单位)如图所示。要交换数据,我们可以在任意两个信息中心之间通过光纤连接,但是费用的限制要求铺设尽可能少的光纤线路。重要的是每个信息中心能和其它中心通信,但并不需要在任意两个中心之间都铺设线路,可以通过其它中心转发。



分析:这实际上就是求赋权连通图的最小生成树问题,可用 *Prim* 算法或 *Kruskal* 算法求解。

【详见课程视频】

#### 知识点 6 根树

根树的定义与分类

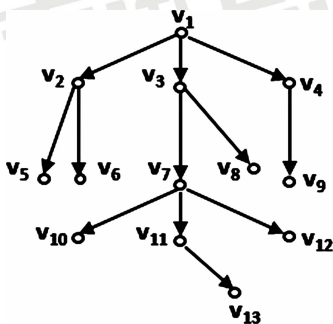
定义:一个有向图,若略去所有有向边的方向所得到的无向图是一棵树,则这个有向图称为有向树(Directed Tree)。

一棵非平凡的有向树,如果恰有一个结点的入度为 0,其余所有结点的入度均为 1,则称之为根树(Root Tree)或外向树(Outward Tree)。

入度为 0 的结点称为根(Root);出度为 0 的结点称为叶(Leaf);入度为 1,出度大于 0 的结点称为内点(Interior Point);又将内点和根统称为分支点(Branch Point)。

在根树中,从根到任一结点  $v$  的通路长度,称为该结点的层数(Layer Number);称层数相同的结点在同一层上;所有结点的层数中最大的称为根树的高(Height)。

**例** 判断下图所示的图是否是根树?若是根树,给出其根、叶和内点,计算所有结点所在的层数和高。



【详见课程视频】

家族关系

定义:在根树中,若从结点  $v_i$  到  $v_j$  可达,则称  $v_i$  是  $v_j$  的祖先(Ancessor), $v_j$  是  $v_i$  的后代(Descendant);

又若  $\langle v_i, v_j \rangle$  是根树中的有向边, 则称  $v_i$  是  $v_j$  的父亲 (Father),  $v_j$  是  $v_i$  的儿子 (Son); 如果两个结点是同一个结点的儿子, 则称这两个结点是兄弟 (Brother)。

定义: 如果在根树中规定了每一层上结点的次序, 这样的根树称为有序树 (Ordered Tree)。

一般地, 在有序树中同一层中结点的次序为从左至右。有时也可以用边的次序来代替结点的次序。

定义:

在根树  $T$  中,

若每个分支点至多有  $k$  个儿子, 则称  $T$  为  $k$  元树 ( $k$ -ary Tree);

若每个分支点都恰有  $k$  个儿子, 则称  $T$  为  $k$  元完全树 ( $k$ -ary Complete Tree);

若  $k$  元树  $T$  是有序的, 则称  $T$  为  $k$  元有序树 ( $k$ -ary Ordered Tree);

若  $k$  元完全树  $T$  是有序的, 则称  $T$  为  $k$  元有序完全树 ( $k$ -ary Ordered Complete Tree)。

### 知识点7 子树

在根树  $T$  中, 任一结点  $v$  及其所有后代导出的子图  $T'$  称为  $T$  的以  $v$  为根的子树 (Subtree)。

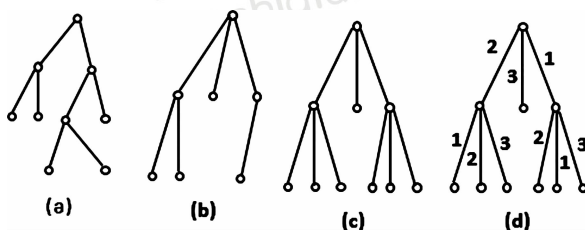
当然,  $T'$  也可以有自己的子树。

二元有序树的每个结点  $v$  至多有两个儿子, 分别称为  $v$  的左儿子 (Left Son) 和右儿子 (Right Son)。

二元有序树的每个结点  $v$  至多有两棵子树, 分别称为  $v$  的左子树 (Left Subtree) 和右子树 (Right Subtree)。

注意区分以  $v$  为根的子树和  $v$  的左 (右) 子树,  $v$  为根的子树包含  $v$ , 而  $v$  的左 (右) 子树不包含  $v$ 。

例 判断下图所示的几棵根树是什么树?



$k$  元完全树中分支点与叶结点数目之间的关系

定理: 在  $k$  元完全树中, 若叶数为  $t$ , 分支点数为  $i$ , 则下式成立:  $(k-1) \times i = t - 1$

证明: 由假设知, 该树有  $i+t$  个结点。由定理知, 该树的边数为  $i+t-1$ 。由握手定理知, 所有结点的出度之和等于边数。而根据  $k$  元完全树的定义知, 所有分支点的出度为  $k \times i$ 。因此有  $k \times i = i + t - 1$

即  $(k-1) \times i = t - 1$

例 假设有一台计算机, 它有一条加法指令, 可计算 3 个数的和。如果要求 9 个数  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$  之和, 问至少要执行几次加法指令?

解: 用 3 个结点表示 3 个数, 将表示 3 个数之和的结点作为它们的父结点。这样本问题可理解为求一个三元完全树的分支点问题。把 9 个数看成叶。由定理知, 有  $(3-1)i = 9-1$ , 得  $i=4$ 。所以至少要执行 4 次加法指令。

例 设  $T$  为任意一棵二元完全树,  $m$  为边数,  $t$  为叶数, 试证明:  $m = 2t - 2$ 。这里  $t \geq 2$ 。

证明:

方法一:设  $T$  中的结点数为  $n$ , 分支点数为  $i$ 。根据二元完全树的定义, 容易知道下面等式均成立:

$$n = i + t, m = 2i, m = n - 1$$

解关于  $m, n, i$  的三元一次方程组得

$$m = 2t - 2。$$

方法二:在二元完全树中, 除树叶外, 每个结点的出度为 2; 除根结点外, 每个结点的入度均为 1。

设  $T$  中的结点数为  $n$ , 由握手定理可知:

$$\begin{aligned} 2m &= \sum_{i=1}^n \deg v_i = \sum_{i=1}^n \deg^+ v_i + \sum_{i=1}^n \deg^- v_i \\ &= 2(n - t) + n - 1 = 3n - 2t - 1 = 3(m + 1) - 2t - 1 \end{aligned}$$

$$\text{故 } m = 2t - 2。$$

### 知识点 8 根树的遍历

对于根树, 一个十分重要的问题是要找到一些方法, 能系统地访问树的结点, 使得每个结点恰好访问一次, 这就是根树的遍历(Ergode)问题。

$k$  元树中, 应用最广泛的是二元树。由于二元树在计算机中最易处理, 下面先介绍二元树的 3 种常用的遍历方法, 然后再介绍将任意根树转化为二元树。

算法 1: 二元树的先根次序遍历算法:

- 1) 访问根;
- 2) 按先根次序遍历根的左子树;
- 3) 按先根次序遍历根的右子树。

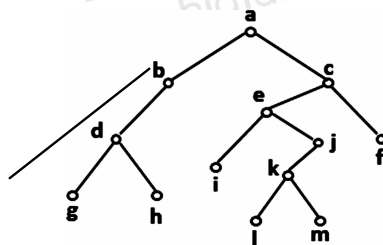
算法 2: 二元树的中根次序遍历算法:

- 1) 按中根次序遍历根的左子树;
- 2) 访问根;
- 3) 按中根次序遍历根的右子树。

算法 3: 二元树的后根次序遍历算法:

- 1) 按后根次序遍历根的左子树;
- 2) 按后根次序遍历根的右子树;
- 3) 访问根。

例 写出对图中二元树的 3 种遍历方法得到的结果。



分析: 按遍历方法容易写出, 只要先将该树分解为根、左子树、右子树三部分, 然后再对子树作分解, 直到叶为止。

解: 先根遍历次序为 ABDGHCEIJKLMF;



中根遍历次序为  $GDHBAIE\overline{L}KMJCF$ ;

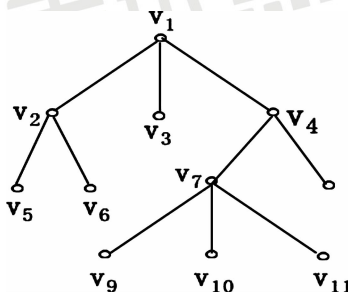
后根遍历次序为  $GHDBILMKJE\overline{F}CA$ 。

根树转化为二元树算法:

- 1) 从根开始, 保留每个父亲同其最左边儿子的连线, 撤销与别的儿子的连线。
- 2) 兄弟间用从左向右的有向边连接。
- 3) 按如下方法确定二元树中结点的左儿子和右儿子: 直接位于给定结点下面的结点, 作为左儿子, 对于同一水平线上与给定结点右邻的结点, 作为右儿子, 依此类推。

转化的要点: 弟弟变右儿子

例 将下图转化为一棵二元树。

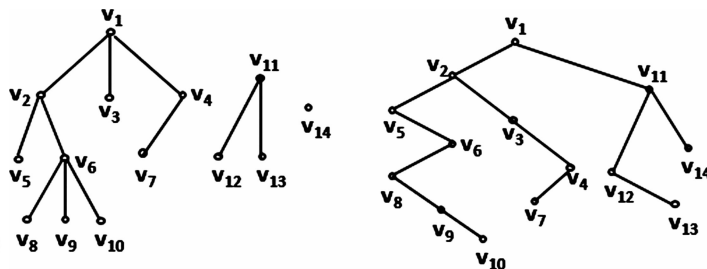


反过来, 也可以还原。要点: 右儿子变弟弟

算法: 有序森林转化为二元树算法:

- 1) 先把森林中的每一棵树都表示成二元树;
- 2) 除第一棵二元树外, 依次将剩下的每棵二元树作为左边二元树的根的右子树, 直到所有的二元树都连成一棵二元树为止。

例 将图所示的森林转化成一棵二元树。



将二元树转化为森林, 要点是“先将根的右子树变为新二元树, 再将这些二元树还原为根树”。

#### 知识点9 最优树及哈夫曼编码

定义: 设有一棵二元树, 若对其所有的  $t$  片树叶赋以权值  $W_1, W_2, \dots, W_t$ , 则称之为赋权二元树; 若权为  $W_i$  的树叶的层数为  $L(W_i)$ , 则称

$$WT = \sum_{i=1}^t W_i \times L(W_i)$$

为该赋权二元树的权; 而在所有赋权  $W_1, W_2, \dots, W_t$  的二元树中,  $W(T)$  最小的二元树称为最优树。

哈夫曼算法

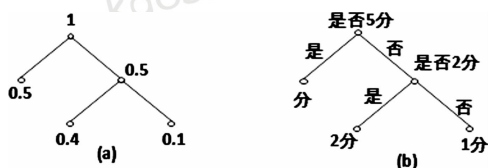
假设  $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_t$ 。1952 年哈夫曼给出了求最优树的方法。该方法的关键是: 从带权为  $w_1 + w_2, w_3, \dots, w_t$  的最优树  $T'$  中得到带权为  $w_1, w_2, \dots, w_t$  的最优树。

算法的具体步骤如下:

- 1) 初始:令  $S = \{W_1, W_2, \dots, W_i\}$ ;
- 2) 从  $S$  中取出两个最小的权  $W_i$  和  $W_j$ , 画结点  $v_i$ , 带权  $W_i$ , 画结点  $v_j$ , 带权  $W_j$ 。画  $v_i$  和  $v_j$  的父亲  $v$ , 连接  $v_i$  和  $v$ ,  $v_j$  和  $v$ , 令  $v$  带权  $W_i + W_j$ ;
- 3) 令  $S = (S - \{W_i, W_j\}) \cup \{W_i + W_j\}$ ;
- 4) 判断  $S$  是否只含一个元素? 若是, 则停止, 否则转 2)。

**例** 用机器分辨一些币值为 5 分、2 分、1 分的硬币, 假设各种硬币出现的概率分别为 0.5、0.4、0.1。问如何设计一个分辨硬币的算法, 使所需的时间最少(假设每作一次判别所用的时间相同, 以此为一个时间单位)?

**解:** 实际上该问题归结为求带权 0.1、0.4、0.5 的最优树问题; 利用哈夫曼算法, 答案的图示见图 a 或图 b。所需时间为  $2 \times 0.1 + 2 \times 0.4 + 1 \times 0.5 = 1.5$



## 二、本讲小结

本讲主要讲解了树的概念: 树、森林、根数、根、叶结点、分支点、生成树、最小生成树等; 树的基本性质:  $m = n - 1$ ; 与根数相关的概念: 祖先与后代、父亲与儿子、 $k$  元树、 $k$  元完全树、最优树; 以及树的算法: 广度优先搜索算法、Kruskal 算法、Prim 算法、哈夫曼算法、根数的遍历算法等。

重点讲解了树的基本概念相关计算和证明, 最小生成树构造, 哈夫曼编码等。

常考题型多为证明题、计算题(特别是哈夫曼算法)。

应试方法主要是熟记概念及解题套路。

## 三、课后习题

1. 试证明: 无向图  $G$  是森林, 则  $G$  中无回路并且  $m = n - p$ ,  $m, n, p$  分别是  $G$  中的结点数、边数和连通分支数。
2. 求带权 2、3、5、7、8、11 的最优树。
3. 已知字母 A、B、C、D、E、F 出现的频率如下: A - 30%, B - 25%, C - 20%, D - 10%, E - 10%, F - 5% 构造一个表示 A、B、C、D、E、F 的前缀码, 使得传输的二进制位最少。

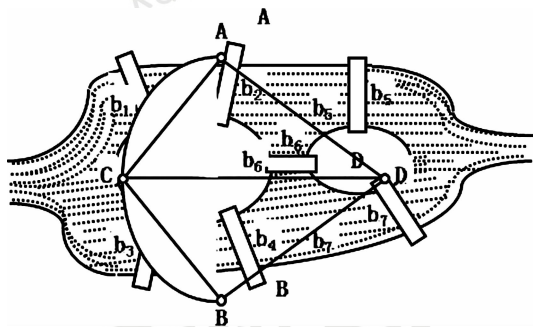
## 第 4 讲 欧拉图与哈密尔顿图

### 一、考点讲解:

- 1) 欧拉图、哈密尔顿图的概念;
- 2) 欧拉图、哈密尔顿图的判定定理;
- 3) 欧拉图、哈密尔顿图的应用。

### 知识点1 欧拉图

#### 哥尼斯堡七桥问题



设  $G$  是无孤立结点的图,若存在一条通路(回路),经过图中每边一次且仅一次,则称此通路(回路)为该图的一条欧拉通路(回路)(Eulerian Entry/Circuit)。具有欧拉回路的图称为欧拉图(Eulerian Graph)。

规定:平凡图为欧拉图。

以上定义既适合无向图,又适合有向图。

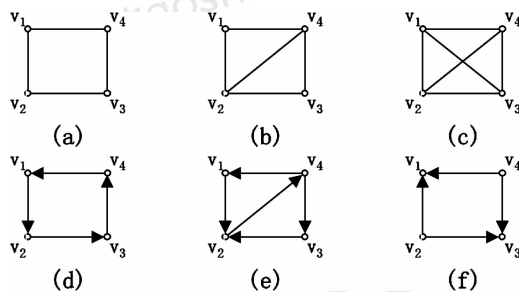
注意:

欧拉通路是经过图中所有边的通路中长度最短的通路,即为通过图中所有边的简单通路;

欧拉回路是经过图中所有边的回路中长度最短的回路,即为通过图中所有边的简单回路。

如果仅用边来描述,欧拉通路和欧拉回路就是图中所有边的一种全排列。

例 判断下面的 6 个图中,是否是欧拉图? 是否存在欧拉通路?



### 知识点2 欧拉图的判定

定理:无向图  $G = \langle V, E \rangle$  具有一条欧拉通路,当且仅当  $G$  是连通的,且仅有零个或两个奇度数结点。

推论:无向图  $G = \langle V, E \rangle$  具有一条欧拉回路,当且仅当  $G$  是连通的,并且所有结点的度数均为偶数。

定理:有向图  $G$  具有一条欧拉通路,当且仅当  $G$  是连通的,且除了两个结点以外,其余结点的入度等于出度,而这两个例外的结点中,一个结点的入度比出度大 1,另一个结点的出度比入度大 1。

推论:有向图  $G$  具有一条欧拉回路,当且仅当  $G$  是连通的,且所有结点的入度等于出度。

### 知识点3 欧拉通路与欧拉回路判别准则

对任意给定的无向连通图,只需通过对图中各结点度数的计算,就可知它是否存在欧拉通路及欧

拉回路,从而知道它是否为欧拉图;对任意给定的有向连通图,只需通过对图中各结点出度与入度的计算,就可知它是否存在欧拉通路及欧拉回路,从而知道它是否为欧拉图。

利用这项准则,很容易判断出哥尼斯堡七桥问题是无解的,因为它所对应的图中所有4个结点的度数均为奇数。

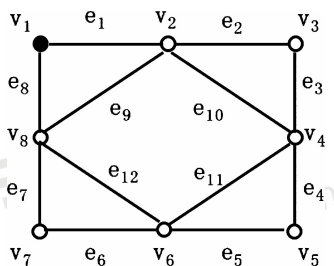
设  $G = \langle V, E \rangle$ ,  $e \in E$ , 如果  $p(G - e) > p(G)$ , 称  $e$  为  $G$  的桥(Bridge)或割边(Cut edge)。显然所有的悬挂边都是桥。

#### 知识点4 Fleury 算法

算法:求欧拉图  $G = \langle V, E \rangle$  的欧拉回路的 Fleury 算法:

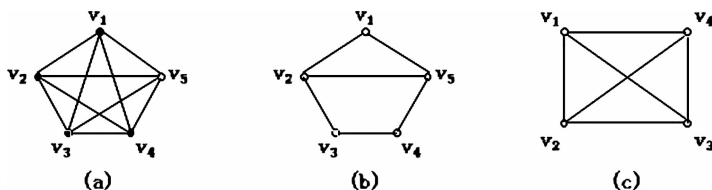
- (1) 任取  $v_0 \in V$ , 令  $P_0 = v_0, i = 0$ ;
- (2) 按下面的方法从  $E - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$  中选取  $e_{i+1}$ :
  - a.  $e_{i+1}$  与  $v_i$  相关联;
  - b. 除非无别的边可选取, 否则  $e_{i+1}$  不应该为  $G' = G - \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$  中的桥;
- (3) 将边  $e_{i+1}$  加入通路  $P_0$  中, 令  $P_0 = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_i v_i e_{i+1} v_{i+1}, i = i + 1$ ;
- (4) 如果  $i = |E|$ , 结束, 否则转(2)。

例 用 Fleury 算法求欧拉图的一条欧拉回路。



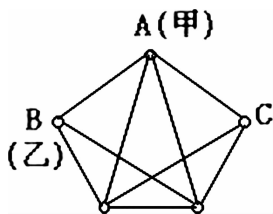
【详见课程视频】

例 图中的三个图能否一笔画? 为什么?



解: 因为图(a)和(b)中分别有0个和2个奇数度结点, 所以它们分别是欧拉图和存在欧拉通路, 因此能够一笔画, 并且在(a)中笔能回到出发点, 而(b)中笔不能回到出发点。图c中有4个度数为3的结点, 所以不存在欧拉通路, 因此不能一笔画。

例 甲、乙两只蚂蚁分别位于图的结点A、B处, 并设图中的边长度相等。甲、乙进行比赛: 从它们所在的结点出发, 走过图中所有边最后到达结点C处。如果它们的速度相同, 问谁先到达目的地?



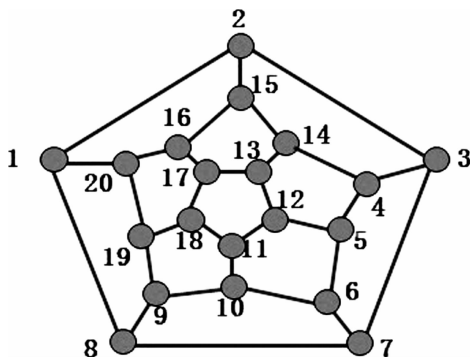
解: 图中仅有两个度数为奇数的结点B、C, 因而存在从B到C的欧拉通路, 蚂蚁乙走到C只要走



一条欧拉通路,边数为9条,而蚂蚁甲要想走完所有的边到达C,至少要先走一条边到达B,再走一条欧拉通路,因而它至少要走10条边才能到达C,所以乙必胜。

### 知识点5 哈密顿图

邮差问题

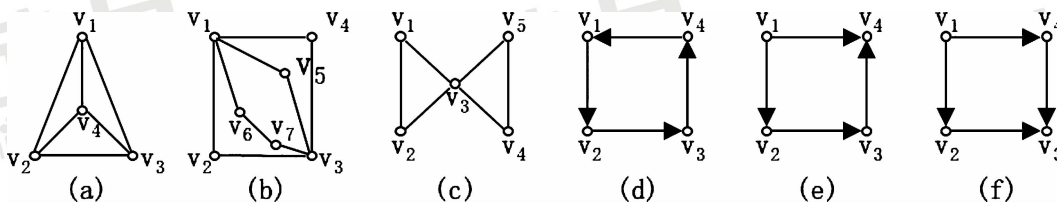


定义:经过图中每个结点一次且仅一次的通路(回路)称为哈密顿通路(回路)(Hamiltonian Entry/circuit)。存在哈密顿回路的图称为哈密顿图(Hamiltonian Graph)。

规定:平凡图为哈密顿图。

以上定义既适合无向图,又适合有向图。

例 判断下面的6个图中,是否是哈密顿图? 是否存在哈密顿通路?



### 知识点6 哈密顿图的判定

定理:设无向图  $G = \langle V, E \rangle$  是哈密顿图,  $V_1$  是  $V$  的任意非空子集, 则  $p(G - V_1) \leq |V_1|$

其中  $p(G - V_1)$  是从  $G$  中删除  $V_1$  后所得图的连通分支数。

分析:考察  $G$  的一条哈密顿回路  $C$ , 显然  $C$  是  $G$  的生成子图, 从而  $C - V_1$  也是  $G - V_1$  的生成子图, 且有  $p(G - V_1) \leq p(C - V_1)$ , 故只需要证明  $p(C - V_1) \leq |V_1|$  即可。

证明:设  $C$  是  $G$  中的一条哈密顿回路,  $V_1$  是  $V$  的任意非空子集。下面分两种情况讨论:

(1)  $V_1$  中结点在  $C$  中均相邻, 删除  $C$  上  $V_1$  中各结点及关联的边后,  $C - V_1$  仍是连通的, 但已非回路, 因此  $p(C - V_1) = 1 \leq |V_1|$ 。

(2)  $V_1$  中结点在  $C$  上存在  $r (2 \leq r \leq |V_1|)$  个互不相邻, 删除  $C$  上  $V_1$  中各结点及关联的边后, 将  $C$  分为互不相连的  $r$  段, 即

$$p(C - V_1) = r \leq |V_1|。$$

一般情况下,  $V_1$  中的结点在  $C$  中既有相邻的, 又有不相邻的, 因此总有  $p(C - V_1) \leq |V_1|$ 。

又因  $C$  是  $G$  的生成子图, 从而  $C - V_1$  也是  $G - V_1$  的生成子图, 故有  $p(G - V_1) \leq p(C - V_1) \leq |V_1|$

推论:

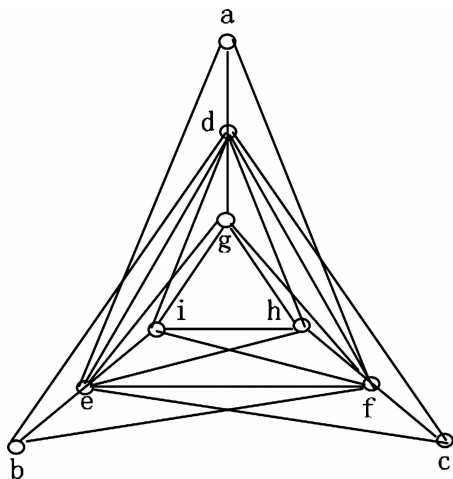
设无向图  $G = \langle V, E \rangle$  中存在哈密顿通路, 则对  $V$  的任意非空子集  $V_1$ , 都有

$$p(G - V_1) \leq |V_1| + 1$$

注意: 定理给出的是哈密顿图的必要条件, 而不是充分条件。

定理在应用中它本身用处不大, 但它的逆否命题却非常有用。经常利用定理的逆否命题来判断某些图不是哈密顿图, 即: 若存在  $V$  的某个非空子集  $V_1$  使得  $p(G - V_1) > |V_1| + 1$ , 则  $G$  不是哈密顿图。

例 证明图中不存在哈密顿回路。



分析: 利用定理的逆否命题, 寻找  $V$  的某个非空子集  $V_1$  使得  $p(G - V_1) > |V_1| + 1$ , 则  $G$  不是哈密顿图。找到  $V_1 = \{d, e, f\}$  满足要求。

证明: 在图中, 删除结点子集  $\{d, e, f\}$ , 得新图, 它的连通分支为 4 个, 由定理知, 该图不是哈密顿图, 因而不会存在哈密顿回路。

定理:

设  $G = \langle V, E \rangle$  是具有  $n$  个结点的简单无向图。如果对任意两个不相邻的结点  $u, v \in V$ , 均有

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n - 1$$

则  $G$  中存在哈密顿通路。

证明:

首先证明满足上述条件的  $G$  是连通图。用反证法: 假设  $G$  有两个或更多连通分支。设一个连通分支有  $n_1$  个结点, 另一个连通分支有  $n_2$  个结点。这二个连通分支中分别有两个结点  $v_1, v_2$ 。显然,  $\deg(v_1) \leq n_1 - 1, \deg(v_2) \leq n_2 - 1$ 。从而  $\deg(v_1) + \deg(v_2) \leq n_1 + n_2 - 2 \leq n - 2$  与已知矛盾, 故  $G$  是连通的。

其次, 证明  $G$  中存在哈密顿通路。

设  $P = v_1 v_2 \cdots v_k$  为  $G$  中用“延长通路法”得到的“极大基本通路”, 即  $P$  的始点  $v_1$  与终点  $v_k$  不与  $P$  外的结点相邻, 显然  $k \leq n$ 。

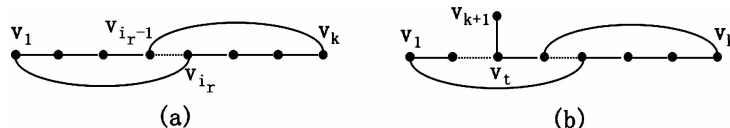
(1) 若  $k = n$ , 则  $P$  为  $G$  中经过所有结点的通路, 即为哈密顿通路。

(2) 若  $k < n$ , 说明  $G$  中还有在  $P$  外的结点, 但此时可以证明存在仅经过  $P$  上所有结点的基本回路, 证明如下:

(a) 若在  $P$  上  $v_1$  与  $v_k$  相邻, 则  $v_1 v_2 \cdots v_k v_1$  为仅经过  $P$  上所有结点的基本回路。

(b) 若在  $P$  上  $v_1$  与  $v_k$  不相邻, 假设  $v_1$  在  $P$  上与  $v_{i_1} = v_2, v_{i_2}, v_{i_3}, \dots, v_{i_j}$  相邻 ( $j$  必定大于等于 2,

否则  $\deg(v_1) + \deg(v_k) \leq 1 + k - 2 < n - 1$ , 此时  $v_k$  必与  $vi_2, vi_3, \dots, vi_j$  相邻的结点  $vi_2 - 1, vi_3 - 1, \dots, vi_j - 1$  至少之一相邻 (否则  $\deg(v_1) + \deg(v_k) \leq j + k - 2 - (j - 1) = k - 1 < n - 1$ )。设  $v_k$  与  $v_{ir-1}$  ( $2 \leq r \leq j$ ) 相邻, 如图所示。在  $P$  中添加边  $(v_1, v_{ir})$ 、 $(v_k, v_{ir-1})$ , 删除边  $(v_{ir-1}, v_{ir})$  得基本回路  $C = v_1 v_2 \cdots v_{ir-1} v_k v_{k-1} \cdots v_{ir} v_1$ 。



(3) 证明存在比  $P$  更长的通路。

因为  $k < n$ , 所以  $V$  中还有一些结点不在  $C$  中, 由  $G$  的连通性知, 存在  $C$  外的结点与  $C$  上的结点相邻, 不妨设  $v_{k+1} \in V - V(C)$  且与  $C$  上结点  $v_t$  相邻, 在  $C$  中删除边  $(v_{t-1}, v_t)$  而添加边  $(v_t, v_{k+1})$  得到通路  $P' = v_{t-1} \cdots v_1 v_{ir} \cdots v_k v_{k+1}$ 。

显然,  $P'$  比  $P$  长 1, 且  $P'$  上有  $k+1$  个不同的结点。

对  $P'$  重复 (1) ~ (3), 得到  $G$  中的哈密顿通路或比  $P'$  更长的基本通路, 由于  $G$  中结点数有限, 故在有限步内一定得到  $G$  中的一条哈密顿通路。

推论:

设  $G = \langle V, E \rangle$  是具有  $n$  个结点的简单无向图。如果对任意两个不相邻的结点  $u, v \in V$ , 均有  $\deg(u) + \deg(v) \geq n$

则  $G$  中存在哈密顿回路。

推论:

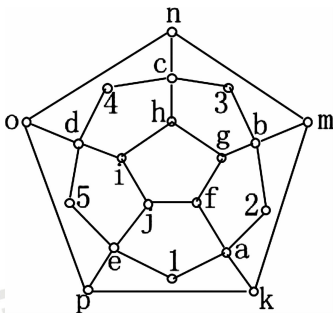
设  $G = \langle V, E \rangle$  是具有  $n$  个结点的简单无向图,  $n \geq 3$ 。如果对任意  $v \in V$ , 均有  $\deg(v) \geq n/2$ , 则  $G$  是哈密顿图。

需要注意, 定理给出的是哈密顿图的充分条件, 而不是必要条件。在六边形中, 任两个不相邻的结点的度数之和都是  $4 < 6$ , 但六边形是哈密顿图。

**例** 某地有 5 个风景点, 若每个风景点均有 2 条道路与其他点相通。问游人可否经过每个风景点恰好一次而游完这 5 处?

**解:** 将 5 个风景点看成是有 5 个结点的无向图, 两风景点间的道路看成是无向图的边, 因为每处均有两条道路与其他结点相通, 故每个结点的度数均为 2, 从而任意两个不相邻的结点的度数之和等于 4, 正好为总结点数减 1。故此图中存在一条哈密顿通路, 因此游人可以经过每个风景点恰好一次而游完这 5 处。

**例** 判断下图是否存在哈密顿回路。

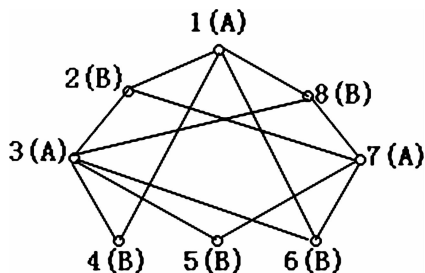




解:方法一:在图中,删除结点子集 $\{a, b, c, d, e\}$ ,得到的图有7个连通分支,由定理知,该图不是哈密顿图,因而不会存在哈密顿回路。

方法二:若图中存在哈密顿回路,则该回路组成的图中任何结点的度数均为2。因而结点1、2、3、4、5所关联的边均在回路中,于是在结点 $a, b, c, d, e$ 处均应将不与1、2、3、4、5关联的边删除,而要删除与结点 $a, b, c, d, e$ 关联的其它边,得到右上图,它不是连通图,因而图中不存在哈密顿回路。

例:证明下图没有哈密顿通路。



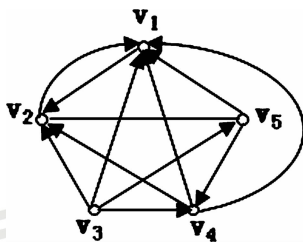
证明:任取一结点如1用A标记,所有与它邻接的结点用B标记。继续不断地用A标记所有邻接于B的结点,用B标记所有邻接于A的结点,直到所有结点都标记完毕。

如果图中有一条哈密顿通路,那么它必交替通过结点A和B,故而标记A的结点与标记B的结点数目或者相同,或者相差1个。然而图中有3个结点标记为A,5个结点标记为B,它们相差两个,所以该图不存在哈密顿通路。

定理:

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是有 $n(n \geq 2)$ 个结点的一些简单有向图。如果忽略 $G$ 中边的方向所得的无向图 $G_n$ 中含生成子图 $K_n$ ,则有向图 $G$ 中存在哈密顿通路。

在右图中,它所对应的无向图 $G_n$ 中含完全图 $K_5$ ,由定理知,图中含有哈密顿通路。事实上,通路 $v_3 v_5 v_4 v_2 v_1$ 为一条哈密顿通路。



## 二、本讲小结

本讲主要讲解了欧拉图、哈密顿图的概念、判定定理以及应用等。

重点讲解了欧拉图、哈密顿图的概念、判定定理的证明过程及其应用等。

常考题型多为判断、选择、证明和计算题。

应试方法主要是熟记概念及解题套路。

## 三、课后习题

### 1. 判断对错

设 $G$ 是 $n(n \geq 3)$ 阶哈密顿图,则 $G$ 中任一两个不相邻的顶点度数之和均不小于 $n$ 。( )



## 第5讲 二分图与平面图

### 一、考点讲解：

- 1) 偶图、平面图的概念；
- 2) 偶图、平面图的判定定理；
- 3) 偶图的匹配, 偶图、平面图的应用。

#### 知识点1 偶图

定义：

若无向图  $G = \langle V, E \rangle$  的结点集  $V$  能够划分为两个子集  $V_1, V_2$ , 满足  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , 且  $V_1 \cup V_2 = V$ , 使得  $G$  中任意一条边的两个端点, 一个属于  $V_1$ , 另一个属于  $V_2$ , 则称  $G$  为偶图 (Bipartite Graph) 或二分图 (Bigraph)。  $V_1$  和  $V_2$  称为互补结点子集, 偶图通常记为  $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$ 。

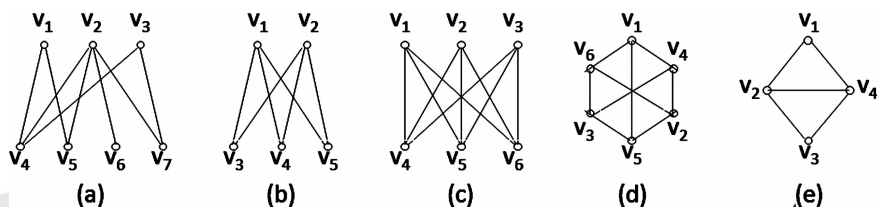
偶图没有自回路。

平凡图和零图可看成特殊的偶图。

定义：

在偶图  $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$  中, 若  $V_1$  中的每个结点与  $V_2$  中的每个结点都有且仅有一条边相关联, 则称偶图  $G$  为完全偶图 (Complete Bipartite Graph) 或完全二分图 (Complete Bigraph), 记为  $K_{i,j}$ , 其中,  $i = |V_1|, j = |V_2|$ 。

例 判断图中的几个图, 那些是偶图? 那些是完全偶图?



#### 知识点2 偶图的判定

定理: 无向图  $G = \langle V, E \rangle$  为偶图的充分必要条件是  $G$  的所有回路的长度均为偶数。

证明: 必要性: 设图  $G$  是偶图  $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$ , 令  $C = v_0 v_1 v_2 \cdots v_k v_0$  是  $G$  的一条回路, 其长度为  $k + 1$ 。

不失一般性, 假设  $v_0 \in V_1$ , 由偶图的定义知,  $v_1 \in V_2, v_2 \in V_1$ 。由此可知,  $v_{2i} \in V_1$  且  $v_{2i+1} \in V_2$ 。

又因为  $v_0 \in V_1$ , 所以  $v_k \in V_2$ , 因而  $k$  为奇数, 故  $C$  的长度为偶数。

充分性:

设  $G$  中每条回路的长度均为偶数, 若  $G$  是连通图, 任选  $v_0 \in V$ , 定义  $V$  的两个子集如下:

$$V_1 = \{v_i \mid d(v_0, v_i) \text{ 为偶数} \},$$

$$V_2 = V - V_1.$$

现证明  $V_1$  中任两结点间无边存在。

假若存在一条边  $(v_i, v_j) \in E$ , 其中  $v_i, v_j \in V_1$ , 则由  $v_0$  到  $v_i$  间的短程线 (长度为偶数) 以及边  $(v_i, v_j)$ , 再加上  $v_j$  到  $v_0$  间的短程线 (长度为偶数) 所组成的回路的长度为奇数, 与假设矛盾。

同理可证  $V_2$  中任两结点间无边存在。

故  $G$  中每条边  $(v_i, v_j)$ , 必有  $v_i \in V_1, v_j \in V_2$  或  $v_i \in V_2, v_j \in V_1$ , 因此  $G$  是具有互补结点子集  $V_1$  和  $V_2$  的偶图。

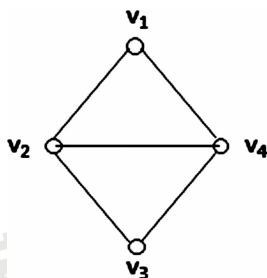
若  $G$  中每条回路的长度均为偶数, 但  $G$  不是连通图, 则可对  $G$  的每个连通分支重复上述论证, 并可得到同样的结论。

定理的用途:

在实际应用中, 定理本身使用不多, 常使用它的逆否命题来判断一个图不是偶图:

无向图  $G$  不是偶图的充分必要条件是  $G$  中存在长度为奇数的回路。

例如, 下图中存在长度为 3 的回路  $v_1 v_2 v_4 v_1$ , 所以它不是偶图。



### 知识点 3 匹配

定义: 在偶图  $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$  中,  $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ , 若存在  $E$  的子集  $E' = \{(v_1, v_1'), (v_2, v_2'), \dots, (v_q, v_q')\}$ , 其中  $v_1', v_2', \dots, v_q'$  是  $V_2$  中的  $q$  个不同的结点, 则称  $G$  的子图  $G' = \langle V_1, E', V_2 \rangle$  为从  $V_1$  到  $V_2$  的一个完全匹配 (Complete Matching), 简称匹配。

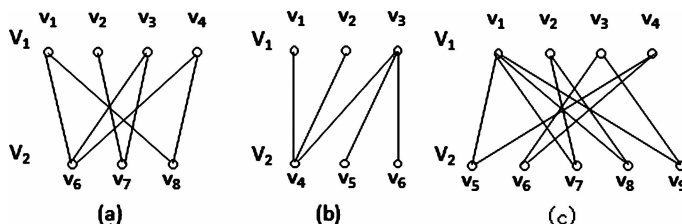
必要条件:

在偶图  $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$  中, 若存在  $V_1$  到  $V_2$  的单射  $f$ , 使得对任意  $v \in V_1$ , 都有  $(v, f(v)) \in E$ , 则存在  $V_1$  到  $V_2$  的匹配。

由单射的性质知, 不是所有的偶图都有匹配, 存在匹配的 necessary 条件是  $|V_1| \leq |V_2|$ 。

然而, 这个条件并不是充分条件。

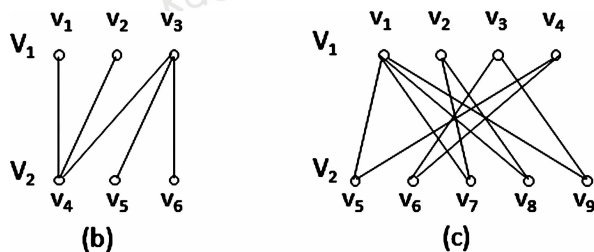
例 下面的 3 个偶图哪些存在  $V_1$  到  $V_2$  匹配? 对存在匹配的偶图给出一个匹配。



定理: (霍尔定理) 偶图  $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$  中存在从  $V_1$  到  $V_2$  的匹配的充分必要条件是  $V_1$  中任意  $k$  个结点至少与  $V_2$  中的  $k$  个结点相邻,  $k = 1, 2, \dots, |V_1|$ 。

定理中的条件通常称为相异性条件(Diversity Condition)。

例



(b)  
不满足相异性条件,  
故没有匹配。

(c)  
满足相异性条件,  
故存在匹配

定理: 设  $G = \langle V_1, E, V_2 \rangle$  是一个偶图。如果满足条件

(1)  $V_1$  中每个结点至少关联  $t$  条边;

(2)  $V_2$  中每个结点至多关联  $t$  条边;

则  $G$  中存在从  $V_1$  到  $V_2$  的匹配。其中  $t$  为正整数。

证明: 由条件(1)知,  $V_1$  中  $k$  个结点至少关联  $t_k$  条边 ( $1 \leq k \leq |V_1|$ ), 由条件(2)知, 这  $t_k$  条边至少与  $V_2$  中  $k$  个结点相关联, 于是  $V_1$  中的  $k$  个结点至少与  $V_2$  中的  $k$  个结点相邻接, 因而满足相异性条件, 所以  $G$  中存在从  $V_1$  到  $V_2$  的匹配。

定理中的条件通常称为  $t$  条件( $t$ -Condition)。

判断  $t$  条件非常简单, 只需要计算  $V_1$  中结点的最小度数和  $V_2$  中结点的最大度数即可。

例 现有三个课外小组: 物理组, 化学组和生物组, 有五个学生  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$ 。

(1) 已知  $s_1, s_2$  为物理组成员;  $s_1, s_3, s_4$  为化学组成员;  $s_3, s_4, s_5$  为生物组成员。

(2) 已知  $s_1$  为物理组成员;  $s_2, s_3, s_4$  为化学组成员;  $s_2, s_3, s_4, s_5$  为生物组成员。

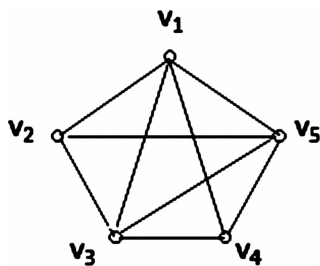
(3) 已知  $s_1$  即为物理组成员, 又为化学组成员;  $s_2, s_3, s_4, s_5$  为生物组成员。

在以上三种情况的每一种情况下, 在  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$  中选三位组长, 不兼职, 问能否办到?

【详见课程视频】

#### 知识点4 平面图

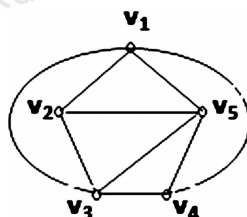
平面图的定义: 在一张纸上画几何模型时常常会发现, 不仅需要允许各边在结点处相交, 而且还应该允许各边在某些非结点处相交, 这样的点称为交叉点(Cross Point); 而相交的边, 称为交叉边(Cross Edge)。



定义: 如果能把一个无向图  $G$  的所有结点和边画在平面上, 使得任何两边除公共结点外没有其他

交叉点,则称  $G$  为平面图(Plane Graph),否则称  $G$  为非平面图(Nonplanar Graph)。

当且仅当一个图的每个连通分支都是平面图时,这个图是平面图。



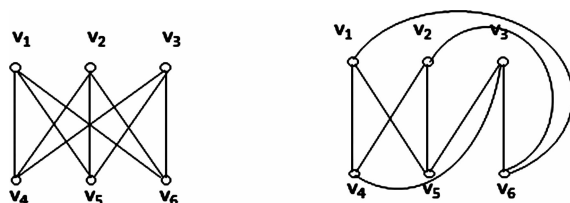
平面图的平面表示

应当注意:有些图从表面上看它的某些边是相交的,但是不能就此肯定它不是平面图。

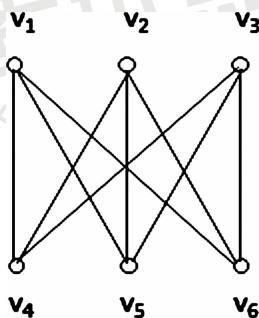
非平面图:

有些图形不论如何改画,除去结点外,总有边相交。

即不管怎样改画,至少有一条边与其他边相交,故它是非平面图。



例 图  $K_{3,3}$  为非平面图。



定义:在平面图  $G$  的一个平面表示中,

由边所包围的其内部不包含图的结点和边的区域,称为  $G$  的一个面(Surface),

包围该面的诸边所构成的回路称为这个面的边界(Bound),面  $r$  的边界的长度称为该面的次数(Degree),记为  $D(r)$ 。

区域面积有限的面称为有限面(Finite Surface),区域面积无限的面称为无限面(Infinite Surface)。

平面图有且仅有一个无限面。

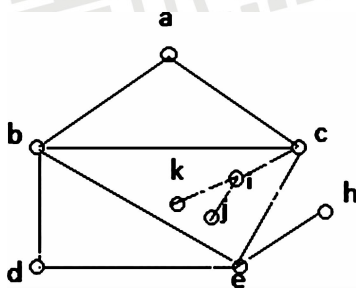
面的形象描述:

假设把一个平面图的平面表示画在平面上,然后用一把小刀,沿着图的边切开,那么平面就被切成许多块,每一块就是图的一个面。

更确切地说,平面图的一个面就是平面的一块,它用边作边界线,且不能再分成子块。

例 考察下图所示平面图的面、边界和次数。





解:平面图把平面分成4个面:

$r_0$ , 边界为  $abdehca$ ,  $D(r_0) = 7$

$r_1$ , 边界为  $abca$ ,  $D(r_1) = 3$

$r_2$ , 边界为  $becb$ ,  $D(r_2) = 9$

$r_3$ , 边界为  $bdeb$ ,  $D(r_3) = 3$

$r_1$ 、 $r_2$  和  $r_3$  是有限面,  $r_0$  是无限面。

注意:对于平面图的不同平面表示,虽然面的数目相同,但各面的边界和次数会不同。

定理:平面图中所有面的次数之和等于边数的二倍。

证明:因任何一条边,或者是两个面边界的公共边,或者是在一个面中作为边界被重复计算两次,故平面图所有面的次数之和等于其边数的二倍。

1750年,欧拉发现,任何一个凸多面体,若有  $n$  个顶点、 $m$  条棱和  $r$  个面,则有  $n - m + r = 2$ 。这个公式可以推广到平面图上来,称之为欧拉公式。

#### 知识点5 欧拉公式

定理:设  $G = \langle V, E \rangle$  是连通平面图,若它有  $n$  个结点、 $m$  条边和  $r$  个面,则有  $n - m + r = 2$

证明:对  $G$  的边数  $m$  进行归纳。

若  $m = 0$ , 由于  $G$  是连通图,故必有  $n = 1$ , 这时只有一个无限面,即  $r = 1$ 。所以  $n - m + r = 1 - 0 + 1 = 2$

定理成立。

证明:若  $m = 1$ , 这时有两种情况:

(1) 该边是自回路, 则有  $n = 1, r = 2$ , 这时  $n - m + r = 1 - 1 + 2 = 2$

(2) 该边不是自回路, 则有  $n = 2, r = 1$ , 这时  $n - m + r = 2 - 1 + 1 = 2$

所以  $m = 1$  时, 定理也成立。

假设对少于  $m$  条边的所有连通平面图, 欧拉公式成立。现考虑  $m$  条边的连通平面图, 设它有  $n$  个结点。分以下两种情况:

(1) 若  $G$  是树, 那么  $m = n - 1$ , 这时  $r = 1$ 。所以  $n - m + r = n - (n - 1) + 1 = 2$

(2) 若  $G$  不是树, 则  $G$  中必有回路, 因此有基本回路, 设  $e$  是某基本回路的一条边, 则  $G' = \langle V, E - \{e\} \rangle$  仍是连通平面图, 它有  $n$  个结点,  $m - 1$  条边和  $r - 1$  个面, 按归纳假设知

$$n - (m - 1) + (r - 1) = 2$$

整理得:  $n - m + r = 2$

所以对  $m$  条边时, 欧拉公式也成立。

推论: 设  $G$  是一个  $(n, m)$  简单连通平面图, 若  $m > 1$ , 则有  $m \leq 3n - 6$

证明: 设  $G$  有  $k$  个面, 因为  $G$  是简单图, 所以  $G$  的每个面至少由 3 条边围成, 所以  $G$  所有面的次数之和

$$\sum_{i=1}^k \deg(r_i) \geq 3k$$

代入欧拉公式有  $2 = n - m + k \leq n - m + 2m/3$

即  $2 \leq n - m/3$

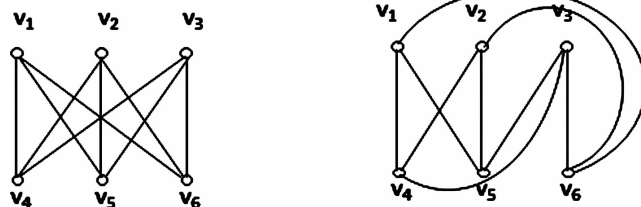
整理得  $m \leq 3n - 6$

由定理知,  $2m \geq 3k$ , 即  $k \leq 2m/3$ ,

说明: 推论本身可能用处不大, 但它的逆否命题却非常有用, 可以用它来判定某些图是非平面图。即

一个简单连通图, 若不满足  $m \leq 3n - 6$ , 则一定是非平面图。

但需要注意, 满足不等式  $m \leq 3n - 6$  的简单连通图未必是平面图。例如图  $K_{3,3}$ ,  $n = 6, m = 9$ , 虽然满足不等式  $m \leq 3n - 6$ , 但是已知它是一个非平面图。



证明: 5 个结点的完全图  $K_5$  是非平面图。

分析: 因为  $K_5$  是简单连通图, 可以验证  $m \leq 3n - 6$  不成立, 因此它不是平面图。

证明: 因为  $K_5$  是简单连通图,  $n = 5, m = 10$ , 因此  $m > 3n - 6 = 3 \times 5 - 6 = 9$ , 故不满足  $m \leq 3n - 6$ , 因此它不是平面图。

推论: 设  $G$  是一个  $(n, m)$  简单连通平面图, 若每个面的次数至少为  $k (k \geq 3)$ , 则有  $m \leq \frac{k}{k-2}(n -$

2)

证明: 设  $G$  共有  $r$  个面, 各面的次数之和为  $T$ ,

由条件可知  $T \geq k \times r$

又由定理知  $T = 2 \times m$

利用欧拉公式解出面数  $r = 2 - n + m$

由此得出下式成立  $2 \times m \geq k \times (2 - n + m)$

从而有  $(k - 2) \times m \leq k \times (n - 2)$

由于  $k \geq 3$ , 因而结论成立

说明:推论本身可能用处不大,但它的逆否命题却非常有用,可以用它来判定某些图是非平面图。即

一个简单连通图,若每个面的次数至少为  $k(k \geq 3)$ , 若不满足  $m \leq \frac{k}{k-2}(n-2)$ , 则一定是非平面图。

证明图  $K_{3,3}$  是一个非平面图。

证明:利用推论可以判断。事实上,假设  $K_{3,3}$  是一个平面图,那么它的每个面的次数均不能小于等于 3, 即每个面的次数均大于等于  $k(k \geq 4)$ , 由推论,有  $9 \leq \frac{k}{k-2}(6-2)$

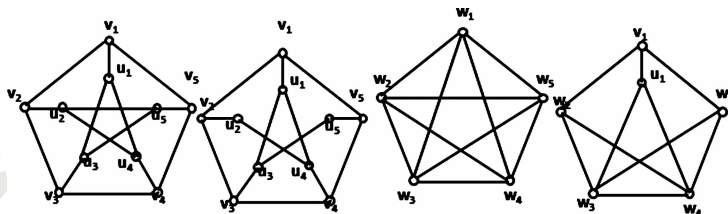
注意到:在  $k=4$  时取最大值 2, 因而  $9 \leq 8$ , 这是矛盾的。

库拉托夫斯基定理:一个图是平面图的充分必要条件是它的任何子图都不可能收缩为  $K_5$  或  $K_{3,3}$ 。

推论:一个图是非平面图的充分必要条件是它存在一个能收缩为  $K_5$  或  $K_{3,3}$  的子图。

将  $K_5$  和  $K_{3,3}$  称为库拉托夫斯基图(Kuratowski Graph)。

下图所示的彼得森图是一个非平面图。



证明:方法一:收缩边  $(v_i, u_i)$ , 用  $w_i$  代替,  $i=1, 2, 3, 4, 5$ , 得到图即为  $K_5$ 。

方法二:找到子图,

收缩边  $(v_i, u_i)$ , 用  $w_i$  代替,  $i=2, 3, 4, 5$ , 得到图即为  $K_{3,3}$ 。

## 二、本讲小结

本讲主要讲解了偶图、平面图的概念、判定定理以及应用等。

重点讲解了偶图、平面图的概念、判定定理的证明过程及其应用等。

常考题型多为判断、选择、证明和计算题。

应试方法主要是熟记概念及解题套路。

## 三、课后习题

### 1. 选择题

(1) 设  $G$  是完全二分图  $K_{2,3}$ 。下面命题中为真的是( )

- A.  $G$  为欧拉图
- B.  $G$  为汉密尔顿图
- C.  $G$  为平面图
- D.  $G$  为无向完全图

(2) 设连通平面图  $G$  有 7 个顶点 15 条边, 则  $G$  的面数是( )

- A. 12
- B. 10
- C. 2
- D. 4

2. 证明:每个面至少有 4 条边围成的任何连通简单平面图中,  $m \leq 2n - 4$ , 其中  $n$  为结点数,  $m$  为边数。

## 第五章 代数系统

### 第1讲 代数系统概念、运算律

#### 一、考点讲解:

- 1) 代数运算的定义,代数运算的封闭性,代数系统的概念,子代树的观念
- 2) 二元运算律:结合律、交换律、吸收律、分配率、幂等律、可消去律
- 3) 代数系统中的特殊元素:幺元(单位元)定义和性质

定义:设  $A, B, C$  是非空集合,从  $A \times B$  到  $C$  的一个映射(或函数)  $o: A \times B \rightarrow C$  称为一个  $A \times B$  到  $C$  的二元代数运算,简称二元运算。

一个二元运算就是一个特殊的映射,该映射能够对  $a \in A$  和  $b \in B$  进行运算,得到  $C$  中的一个元  $c$ ,即  $o(a, b) = c$ .

中缀方法表示为  $aob = c$

例 判别下面的映射或表是否是二元运算:

(1) 设  $A = \{0, 1\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ ,  $C = \{\text{奇}, \text{偶}\}$ , 定义映射  $*$ :  $A \times B \rightarrow C$ , 其中

$*(0, 1) = \text{奇}$ ,  $*(0, 2) = \text{偶}$ ,

$*(1, 1) = \text{偶}$ ,  $*(1, 2) = \text{奇}$ 。

分析:“ $*$ ”是一个  $A \times B$  到  $C$  的映射,因此,按定义知,则“ $*$ ”是一个  $A \times B$  到  $C$  的运算。

(2) 一架自动售货机,能接受五角和一元硬币,而所对应的商品是纯净水、矿泉水、橘子水,当人们投入上述硬币中的任何两枚时,自动售货机供应出相应的商品(右表)。

$*$	五角	一元
五角	纯净水	矿泉水
一元	矿泉水	橘子水

分析:设集合  $A = \{\text{五角}, \text{一元}\}$ , 集合  $C = \{\text{纯净水}, \text{矿泉水}, \text{橘子水}\}$ , 则表实质上是  $A \times A \rightarrow C$  的映射,也就是  $A \times A$  到  $C$  的一个运算“ $*$ ”。

解:(1)、(2)中定义的映射是二元运算。

当集合  $A$  和  $B$  有限时,一个  $A \times B$  到  $C$  的代数运算,可以借用一个表,称为运算表(乘法表)来说明。

设“ $*$ ”是  $A \times A \rightarrow C$  的运算,  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ , 则运算“ $*$ ”可用下表说明。



运算表

$*$	$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_m$
$a_1$	$a_1 * b_1$	$a_1 * b_2$	$\dots$	$a_1 * b_m$
$a_2$	$a_2 * b_1$	$a_2 * b_2$	$\dots$	$a_2 * b_m$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$a_n$	$a_n * b_1$	$a_n * b_2$	$\dots$	$a_n * b_m$

设  $A_1, A_2, \dots, A_n, A$  是非空集合,  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  到  $A$  的一个映射 (或函数)  $*$ :  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow A$  称为一个  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  到  $A$  的  $n$  元代数运算, 简称  $n$  元运算。当  $n=1$  时, 称为一元运算。

1 元代数运算表

当元素有限时, 一元运算也可以用运算表来说明。

设“ $*$ ”是  $A$  到  $A$  的一元运算, 其中  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , 则一元运算“ $*$ ”可以用右表说明。

1 元运算表	
$a$	$*(a)$
$a_1$	$*(a_1)$
$a_2$	$*(a_2)$
$\dots$	$\dots$
$a_n$	$*(a_n)$

代数运算: 封闭性

定义: 如果“ $*$ ”是  $A \times A$  到  $A$  的二元运算, 则称运算“ $*$ ”对集合  $A$  是封闭的, 或者称“ $*$ ”是  $A$  上的二元运算。

定义: 设“ $*$ ”是一个  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  到  $A$  的  $n$  元代数运算, 如果  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ , 则称代数运算“ $*$ ”对集合  $A$  是封闭的, 或者称是  $A$  上的  $n$  元代数运算。

说明:

一般通常用大写的英文字母表示集合, 用符号“ $+$ ”、“ $-$ ”、“ $*$ ”、“ $/$ ”、“ $\cap$ ”、“ $\cup$ ”、“ $\wedge$ ”、“ $\vee$ ”、“ $\neg$ ”、“ $\star$ ”、“ $\star$ ”、“ $\circ$ ”、“ $\oplus$ ”、“ $+$ ”、“ $\times$ ”、“ $\div$ ”等抽象的符号来表示一个抽象的运算。

### 知识点 1 代数系统定义

设  $A$  是非空集合,  $*_1, *_2, \dots, *_m$  分别是定义在  $A$  上  $k_1, k_2, \dots, k_m$  元封闭运算,  $k_i$  是正整数,  $i = 1, 2, \dots, m$ 。称集合  $A$  和  $*_1, *_2, \dots, *_m$  所组成的系统称为代数系统, 简称代数, 记为  $\langle A, *_1, *_2, \dots, *_m \rangle$ 。

当  $A$  是有限集合时, 该代数系统称为有限代数系统, 否则称为无限代数系统。

注意: 判断集合  $A$  和其上的代数运算是否是代数系统, 关键是判断两点: 一是集合  $A$  非空, 二是这

些运算关于  $A$  是否满足封闭性。

例 (1)  $R$  上的“+”、“ $\times$ ”运算;

解:构成一个代数系统  $\langle R, +, \times \rangle$ ;

(2)  $p(S)$  上的“ $\cap$ ”、“ $\cup$ ”、“ $-$ ”运算;

解:构成代数系统  $\langle p(S), \cap, \cup, - \rangle$ , 称集合代数;

(3) 含有  $n$  个命题变元的命题集合  $A$  与  $A$  上的“ $\wedge$ ”、“ $\vee$ ”、“ $\neg$ ”运算;

解:构成代数系统  $\langle A, \wedge, \vee, \neg \rangle$ , 称之为命题代数。

同类型代数系统

定义:设  $\langle A, *1, *2, \dots, *m \rangle$  和  $\langle B, o_1, o_2, \dots, o_m \rangle$  是两个代数系统,若“ $o_i$ ”和“ $*i$ ”都是  $k_i$  元运算,  $i=1, 2, \dots, m$ , 则称这两个代数同类型。

如:代数系统  $\langle Z, + \rangle, \langle Z, \times \rangle, \langle R, + \rangle, \langle p(S), \cap \rangle, \langle p(S), \cup \rangle$  都是同类型的代数系统。

代数系统  $\langle I, +, \times \rangle, \langle R, +, \times \rangle, \langle p(S), \cap, \cup \rangle$  都是同类型的代数系统。

定义:设  $\langle A, *1, *2, \dots, *m \rangle$  是代数系统, 如果:

(1)  $B \subseteq A$  并且  $B \neq \emptyset$ ;

(2)  $*1, *2, \dots, *m$  都是  $B$  上的封闭运算。

则  $\langle B, *1, *2, \dots, *m \rangle$  也是一个代数系统,称之为  $\langle A, *1, *2, \dots, *m \rangle$  的子代数系统,简称子代数。又若  $B \subset A$ , 则称  $\langle B, *1, *2, \dots, *m \rangle$  是  $\langle A, *1, *2, \dots, *m \rangle$  的真子代数。

注意:子代数是抽象代数学中一个非常重要的概念,通过研究子代数的结构和性质,可以得到原代数系统的某些重要性质。

如在群论中,通过研究子群可得群的某些性质。

例 在代数系统  $\langle Z, + \rangle$  中,令

$$Q = \{5z \mid z \in Z\},$$

证明  $\langle Q, + \rangle$  是  $\langle Z, + \rangle$  的子代数。

分析:根据定义,只需证明两点:

(1)  $Q$  是非空子集;

(2) “+”对集合  $Q$  封闭。

显然,集合  $Q$  非空。对任意的  $5z_1, 5z_2 \in Q$ , 有

$$5z_1 + 5z_2 = 5(z_1 + z_2) \in Q,$$

因此“+”对集合  $Q$  封闭。

证明:略。

## 知识点2 运算律

### 1. 结合律

定义:设  $\langle A, * \rangle$  是二元代数系统,如果对任意的  $a, b, c \in A$ , 都有  $(a * b) * c = a * (b * c)$

则称“ $*$ ”在  $A$  上是可结合的,或称满足结合律。

## 2. 交换律

定义: 设  $\langle A, * \rangle$  是二元代数系统, 如果对任意的  $a, b \in A$ , 都有  $a * b = b * a$  则称“ $*$ ”在  $A$  上是可交换的, 或称满足交换律。

## 3. 消去律

定义: 设  $\langle A, * \rangle$  是二元代数系统, 元素  $a \in A$ ,

(1) 对任意  $x, y \in A$ , 都有

如果  $a * x = a * y$ , 那么  $x = y$ ,

则称  $a$  在  $A$  中关于“ $*$ ”是左可消去元;

(2) 对任意  $x, y \in A$ , 都有

如果  $x * a = y * a$ , 那么  $x = y$ ,

则称  $a$  在  $A$  中关于“ $*$ ”是右可消去元;

(3) 如果  $a$  既是  $A$  左可消去元又是右可消去元, 则称  $a$  是  $A$  的可消去元;

(4) 若  $A$  中所有元素都是可消去元, 则称“ $*$ ”在  $A$  上可消去, 或称“ $*$ ”满足消去律。

## 4. 幂等率

定义: 设  $\langle A, * \rangle$  是二元代数系统, 若元素  $a \in A$ , 满足  $A * a = a$ ,

则称  $a$  是  $A$  中关于“ $*$ ”的一个幂等元, 简称  $a$  为幂等元。若  $A$  中的每一个元素都是幂等元, 则称“ $*$ ”在  $A$  中是幂等的, 或称“ $*$ ”满足幂等律。

设“ $*$ ”是集合  $A$  上的二元运算,  $a \in A$ , 则  $a * a \in A, a * a * a \in A, \dots$ , 由此, 可以归纳定义  $a$  的正整数幂方:

$$a^1 = a, a^2 = a * a, a^3 = a^2 * a, \dots, a^n = a^{n-1} * a, \dots$$

对任意的正整数  $n, m$ , 有以下等式:

$$a^n * a^m = a^{n+m}, (a^n)^m = a^{nm}。$$

## 5. 分配率

定义: 设“ $*$ ”、“ $\circ$ ”是集合  $A$  上的二元运算,  $\langle A, *, \circ \rangle$  是一个代数系统, 对  $\forall a, b, c \in S$ , 有

$$(1) a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c),$$

则称运算“ $\circ$ ”对“ $*$ ”在  $S$  上满足左分配律(或第一分配律);

$$(2) (b * c) \circ a = (b \circ a) * (c \circ a),$$

则称运算“ $\circ$ ”对“ $*$ ”在  $S$  上满足右分配律(或第二分配律);

(3) 如果“ $\circ$ ”对“ $*$ ”既满足左分配律又满足右分配律, 则称“ $\circ$ ”对“ $*$ ”在  $S$  上满足分配律。

## 6. 吸收律

定义: 设“ $*$ ”、“ $\circ$ ”是集合  $A$  上的二元运算,  $\langle A, *, \circ \rangle$  是一个代数系统, 如果对任意的  $x, y \in A$ , 都有

$$x * (x \circ y) = x, x \circ (x * y) = x,$$

则称“ $*$ ”和“ $\circ$ ”满足吸收律

## 知识点3 特殊元

在代数系统中, 有些元素有特殊性质, 叫特殊元。

例如在代数系统  $\langle N, + \rangle$ , 其中  $N$  是自然数, “+”是普通加法,  $0 \in N$ , 并且对任意的自然数  $x \in N$ , 有  $x + 0 = x + 0 = x$

1. 幺元(单位元)

定义: 设  $\langle A, * \rangle$  是二元代数系统,

(1) 若存在  $e \in A$ , 对任意  $a \in A$ , 都有  $a * e = e * a = a$ ,

则称  $e$  是  $A$  中关于运算“\*”的一个幺元(单位元)

(2) 若存在  $e_l \in A$ , 使得对任意  $a \in A$ , 都有  $e_l * a = a$ ,

则称  $e_l$  是  $A$  中关于运算“\*”的一个左幺元(左单位元)

(3) 若存在  $e_r \in A$ , 使得对任意  $a \in A$ , 都有  $a * e_r = a$ ,

称  $e_r$  是  $A$  中关于运算“\*”的一个右幺元(右单位元)

例 下列代数系统是否存在幺元(左幺元或右幺元), 如果存在计算之。

(1)  $\langle R, + \rangle$ ,  $R$  是实数集, “+”是加法运算;

(2)  $\langle R^+, + \rangle$ ,  $R^+$  是正实数集, “+”是加法运算;

(3)  $\langle P(A \times A), \circ \rangle$ , 其中  $P(A \times A)$  表示集合  $A$  上的所有二元关系集合, 运算“ $\circ$ ”表示关系的复合;

(4)  $\langle A, *, \circ, \wedge \rangle$ , 其中  $A = \{a, b, c\}$ , 二元运算“\*”, “ $\circ$ ”, “ $\wedge$ ”如表 1、表 2 和表 3 分别所示。

表 1

*	$a$	$b$	$c$
$A$	$a$	$b$	$c$
$B$	$a$	$b$	$c$
$C$	$c$	$b$	$c$

表 2

$\circ$	$a$	$b$	$c$
$A$	$b$	$a$	$a$
$B$	$b$	$b$	$b$
$C$	$a$	$c$	$c$

表 3

$\wedge$	$a$	$b$	$c$
$A$	$a$	$b$	$c$
$b$	$b$	$a$	$c$
$c$	$c$	$a$	$c$

解: (1) 设  $x$  是  $\langle R, + \rangle$  的幺元, 则由定义, 对任意的  $a \in R$ , 有  $x + a = a$ , 让  $a = 1$ , 有  $x + 1 = 1$ , 则  $x = 0, x \in R$ 。



这说明,如果  $\langle R, + \rangle$  的幺元存在,那么幺元必是 0。

对任意的  $a \in R, 0 + a = a + 0 = a$ , 即验证可得, 0 是  $\langle R, + \rangle$  的幺元。

(2) 设  $x$  是  $\langle R^+, + \rangle$  的幺元, 对任意的  $a \in R^+$ , 有  $x + a = a$ ,

让  $a = 1$ , 有  $x + 1 = 1$ , 则  $x = 0$ , 但  $0 \notin R^+$ 。

这说明  $\langle R^+, + \rangle$  不存在幺元。同理, 左、右幺元也不存在。

(3) 设  $X$  是  $\langle P(A \times A), o \rangle$  的幺元, 对任意的  $Y \in P(A \times A)$ , 有  $XoY = Y$ ,

让  $Y = I_A$ , 则  $XoI_A = I_A$ , 又  $XoI_A = X$ , 因此  $X = I_A$ 。

这说明, 如果  $\langle P(A \times A), o \rangle$  的幺元存在, 则幺元必是  $I_A$ 。

对任意的  $Y \in P(A \times A), I_A o Y = Y o I_A = Y$ ,

即验证可得  $I_A$  是  $\langle P(A \times A), o \rangle$  的幺元。

表 1

*	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	c	b	c

表 2

o	a	b	c
a	b	a	a
b	b	b	b
c	a	c	c

表 3

$\wedge$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	a	c

(4) 由于给出了运算表, 因此可以根据运算表直接观察可得。

$\langle A, *, o, \wedge \rangle$  中关于运算“\*”有左幺元  $a$  和  $b$ , 但无右幺元, 因此无幺元, 关于运算“o”无左幺元, 但有右幺元  $b$  和  $c$ , 因此无幺元; 关于运算“ $\wedge$ ”有幺元  $a$ 。

结论: (1) 计算幺元可根据定义直接进行, 即首先假设幺元存在, 并根据定义计算, 然后进行验证。

(2) 可以直接从运算表中看出运算是否有左幺元或右幺元。具体方法是:

① 如果元素  $x$  所在的行上的元素与行表头完全相同, 则  $x$  是一个左幺元;

②如果元素  $x$  所在的列上的元素与列表头完全相同,则  $x$  是一个右幺元;

③同时满足①和②。

定理:设  $\langle A, * \rangle$  是二元代数系统,

(1) 如果  $\langle A, * \rangle$  存在幺元,则幺元唯一;

(2) 如果  $\langle A, * \rangle$  存在幺元,则该幺元一定是左、右幺元;

(3) 如果  $\langle A, * \rangle$  存在左、右幺元,则该左、右幺元相等,且是幺元。

证明:(1)(反证法)设  $\langle S, * \rangle$  存在两个以上的幺元,不妨假设  $e_1, e_2$  是  $\langle S, * \rangle$  的两个幺元,

则对  $\forall x \in S, x * e_1 = e_1 * x = x$ , 此时,取  $x = e_2$ , 有  $e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_2$  ——①

则对  $\forall x \in S$ , 有  $x * e_2 = e_2 * x = x$ , 此时,取  $x = e_1$ ,

有  $e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_1$  ——②

由①、②可知  $e_1 = e_2$ ,

即  $\langle S, * \rangle$  的幺元是唯一的。

(2) 显然成立

(3) 若  $e_l, e_r$  是  $\langle S, * \rangle$  的左、右幺元,

则对  $\forall x \in S$ , 有  $e_l * x = x$ , 此时,取  $x = e_r$ , 有  $e_l * e_r = e_r$  ——①

则对  $\forall x \in S$ , 有  $x * e_r = x$ , 此时,取  $x = e_l$ , 有  $e_l * e_r = e_l$  ——②

由①、②可知

$e_l = e_r$ ,

即左、右幺元相等;显然可得  $e = e_l$ 。

## 二、本讲小结

本讲主要讲解了代数运算的定义,代数运算的封闭性,代数系统的概念,子代树的概念、六种运算律的定义和特殊元单位元的概念。

重点讲解了代数的定义、六种运算律以及单位元的定义和计算方法

常考题型多为判断、选择、证明和计算题。

应试方法主要是熟记概念及解题套路。

## 三、课后习题

### 1. 选择题

(1) 设  $R$  是实数集,定义  $*$  运算如下: $a * b = a + b + ab$ ,则  $*$  运算不满足( )

A. 结合律                      B. 交换律                      C. 有幺元                      D. 幂等率

(2) 设  $A = \{1, -1\}$ , 则  $A$  关于下面哪两种运算是封闭的( )

A. 普通加法和普通除法                      B. 普通减法和普通乘法  
C. 普通乘法和普通除法                      D. 普通除法和普通减法

## 第2讲 特殊元、同态与同构

### 一、考点讲解：

- 1) 代数系统中的特殊元素：零元、逆元、幂等元的一些基本性质；
- 2) 同态与同构的概念、基本性质以及判定

#### 知识点1 特殊元

##### 1. 零元

定义：设  $\langle A, * \rangle$  是一个二元代数系统，

(1) 若存在  $\theta \in A$ ，使得对任意  $a \in A$ ，都有  $a * \theta = \theta * a = \theta$ ，则称  $\theta$  是  $A$  中关于运算“ $*$ ”的一个零元；

(2) 若存在  $\theta_l \in A$ ，使得对任意  $a \in A$ ，都有  $\theta_l * a = \theta_l$ ，则称  $\theta_l$  是  $A$  中关于运算“ $*$ ”的一个左零元；

(3) 若存在  $\theta_r \in A$ ，使得对任意  $a \in A$ ，都有  $a * \theta_r = \theta_r$ ，则称  $\theta_r$  是  $A$  中关于运算“ $*$ ”的一个右零元。

##### 2. 逆元

定义：设  $\langle A, * \rangle$  是二元代数系统， $e$  是幺元， $a \in A$ ，若存在一个元素  $b \in A$ ，

(1) 使得： $a * b = b * a = e$ ，则称  $a$  可逆，并称  $b$  是  $a$  的一个逆元，记为  $a^{-1}$ ；

(2) 使得： $b * a = e$ ，则称  $a$  左可逆，并称  $b$  是  $a$  的一个左逆元，记为  $a_l^{-1}$ ；

(3) 使得： $a * b = e$ ，则称  $a$  右可逆，并称  $b$  是  $a$  的一个右逆元，记为  $a_r^{-1}$ 。

定理：

设  $\langle A, * \rangle$  是一个代数系统，“ $*$ ”满足结合律， $a \in A$ ， $a$  可逆，则  $a$  是可消去元。

证明：记幺元为  $e$ ， $a$  的逆元为  $a^{-1}$ ，设  $x, y$  是  $A$  中的任意元素，

假设  $A * x = a * y$ 。

由  $a * x = a * y$ ，有  $a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * (a * y)$ ，

又结合律成立，所以有  $(a^{-1} * a) * x = (a^{-1} * a) * y$ ，

即  $e * x = e * y$ ，可得  $x = y$

定理：

设  $\langle S, * \rangle$  是二元代数系统，

(1) 如果  $\langle A, * \rangle$  存在零元，则零元唯一；

(2) 如果  $\langle A, * \rangle$  存在零元，则该零元一定是左、右零元；

(3) 如果  $\langle A, * \rangle$  存在左、右零元，则该左、右零元相等，且是零元。

定理：

设  $\langle A, * \rangle$  是二元代数系统，“ $*$ ”满足结合律且设  $e$  是幺元，则对任意的  $a \in A$ ，

(1) 如果  $a$  存在逆元，则逆元唯一；

(2) 如果  $a$  存在逆元, 则该逆元一定是左、右逆元;

(3) 如果  $a$  存在左、右逆元, 则该左、右逆元相等, 且是逆元。

证明: (1) (反证法) 设  $a \in A$  存在逆元, 且不唯一, 不妨设  $a_1, a_2$  都是  $a$  的逆元, 则有

$$a * a_1 = a_1 * a = e,$$

$$a * a_2 = a_2 * a = e,$$

由于“ $*$ ”满足结合律, 所以有

$$a_1 = a_1 * e = a_1 * (a * a_2) = (a_1 * a) * a_2 = e * a_2 = a_2, \text{ 即 } a_1 = a_2$$

即  $a$  的逆元唯一;

(2) 由逆元、左逆元和右逆元的定义直接可得;

(3) 设  $a \in A$  的左、右逆元分别是  $a_l^{-1}$  和  $a_r^{-1}$ , 则有

$$a_l^{-1} * a = e, a * a_r^{-1} = e,$$

“ $*$ ”满足结合律, 所以有

$$a_r^{-1} = e * a_r^{-1} = (a_l^{-1} * a) * a_r^{-1} = a_l^{-1} * (a * a_r^{-1}) = a_l^{-1} * e = a_l^{-1},$$

$$\text{所以 } a^{-1} = a_r^{-1} = a_l^{-1}$$

推论:

设  $\langle A, * \rangle$  是二元代数系统, “ $*$ ”满足结合律,  $a, b \in A$ ,

(1) 如果  $a, b$  分别有逆元  $a^{-1}, b^{-1}$ , 则  $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ ;

(2) 如果  $a$  是左(获右)可逆的元素, 则  $a$  是左(右)可消去的元素;

(3) 如果  $a$  是可逆的元素, 则  $a$  是可消去的元素。

分析: (1) 根据逆元的定义, 只需证明

$$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = (b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = e;$$

同理, (2) 和 (3) 可以直接根据消去元的定义证明。

证明: (1) 由于“ $*$ ”满足结合律, 所以有

$$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1})$$

$$= a * (b * b^{-1}) * a^{-1}$$

$$= a * e * a^{-1} = a * a^{-1} = e,$$

$$(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b)$$

$$= b^{-1} * (a^{-1} * a) * b$$

$$= b^{-1} * e * b = b^{-1} * b = e, \text{ 即}$$

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}。$$

(2) 若  $a$  是左可逆的元素, 设左逆元为  $a_l^{-1}$ , 则对任意的  $x, y \in A$ , 如有  $a * x = a * y$ , 则

$$a_l^{-1} * (a * x) = a_l^{-1} * (a * y),$$

$$\text{即 } (a_l^{-1} * a) * x = (a_l^{-1} * a) * y,$$

$$e * x = e * y, \text{ 所以 } x = y$$



则  $a$  是左可消去元。

同样可证, 如果  $a$  是右可逆的, 则  $a$  是右可消去元。

(3) 由(2)和定理直接可证。

例 设  $G = \{f_{a,b}(x) = ax + b \mid a \neq 0, a, b \in R\}$ , 其中  $R$  是实数, “ $\circ$ ” 是  $G$  上关于函数的复合运算。

(1) 验证  $\langle G, \circ \rangle$  是代数系统;

(2) 如有么元计算之;

(3) 如有零元计算之;

(4) 如有幂等元, 计算出这些幂等元;

(5) 说明  $G$  中的那些元有逆元, 并计算这些元的逆元。

分析: 封闭性

(1) 要说明  $\langle G, \circ \rangle$  是代数系统, 只需要说明“ $\circ$ ”对  $G$  封闭, 即说明对任意  $f_{a,b}, f_{c,d} \in G$ ,

$$f_{a,b} \circ f_{c,d} \in G,$$

$$\text{又 } (f_{a,b} \circ f_{c,d})(x) = f_{c,d}(f_{a,b}(x))$$

$$= f_{c,d}(ax + b) = c(ax + b) + d$$

$$= cax + bc + d = f_{ca, bc+d}(x), \text{ 即}$$

$$f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{ca, bc+d},$$

显然  $ca \neq 0$ , 故

$$f_{ca, bc+d} \in G,$$

所以“ $\circ$ ”对  $G$  是封闭的, 即  $\langle G, \circ \rangle$  是代数系统。

么元

(2) 不妨假设么元是  $f_{c,d} \in G$ , 则对  $f_{a,b} \in G$ , 有  $f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{a,b}$ ,

$$\text{又 } f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{ca, bc+d},$$

$$\text{则 } f_{a,b} = f_{ca, bc+d},$$

因此,  $\forall x \in R$ , 有  $f_{a,b}(x) = ax + b = f_{ca, bc+d}(x) = cax + bc + d$ ,

特别取  $x = 0, x = 1$ , 可得  $bc + d = b, ca = a$ 。

由于  $f_{a,b}$  是  $G$  中的任意元, 取  $a = 1, b = 2$ , 可得  $c = 1, d = 0$ 。

上面的分析说明, 如果  $\langle G, \circ \rangle$  有么元, 则此么元必是  $f_{1,0}$ , 所以需进一步验证  $f_{1,0}$  就是么元。

即对任意的  $f_{a,b} \in G$ , 验证等式

$$f_{a,b} \circ f_{1,0} = f_{1,0} \circ f_{a,b} = f_{a,b}$$

显然此等式成立, 所以  $f_{1,0}$  是么元。

零元

(3) 按同样的思路, 不妨假设零元是  $f_{c,d} \in G$ , 由零元的定义,  $\forall f_{a,b} \in G$ , 有

$$f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{c,d},$$

$$f_{a,b} \circ f_{c,d}(x) = cax + bc + d = f_{c,d}(x) = cx + d,$$

取  $x=0$ , 有  $bc=0$ ,

又  $f_{a,b}$  是任意的, 取  $b=1$ , 可得  $c=0$ ,

又  $f_{c,d} \in G$ , 则  $c \neq 0$ , 矛盾, 故  $fc, d$  是零元不成立, 故代数系统  $\langle G, o \rangle$  没有零元。

### 幂等元

(4) 不妨假设幂等元是  $f_{c,d} \in G$ , 有

$$f_{c,d} o f_{c,d} = f_{c,d},$$

$$f_{c,d} o f_{c,d}(x) = c2x + cd + d = f_{c,d}(x) = cx + d,$$

取  $x=0$ , 有  $cd=0$ , 又  $c \neq 0$ , 则  $d=0$ ,

取  $x=1$ , 有  $c^2 + cd + d = c + d$ , 又  $d=0, c \neq 0$ , 则

$c=1$ 。因此,

$$f_{c,d} = f_{1,0}, \text{ 又}$$

$$f_{1,0} o f_{1,0} = f_{1,0}, \text{ 所以 } f_{1,0} \text{ 是唯一幂等元。}$$

### 逆元

(5) 对  $\forall f_{a,b} \in G$ , 不妨假设它的逆元为  $f_{c,d}$ , 当然  $f_{c,d} \in G$ , 有

$$f_{a,b} o f_{c,d} = f_{1,0},$$

$$f_{a,b} o f_{c,d}(x) = cax + bc + d = f_{1,0}(x) = x,$$

特别取  $x=0, x=1$ , 可得  $bc + d = 0, ca = 1$ ,

因为  $a \neq 0$ , 显然  $c = 1/a, d = -b/a$ , 故  $f_{c,d} = f_{1/a, -b/a}$ ,

同理, 上面分析说明, 如果  $f_{a,b}$  有逆元, 则此逆元是  $f_{1/a, -b/a}$ , 因此还需验证  $f_{1/a, -b/a}$  是  $f_{a,b}$  逆元, 即验证等式

$$f_{a,b} o f_{1/a, -b/a} = f_{1/a, -b/a} o f_{a,b} = f_{1,0},$$

显然此等式成立, 所以  $f_{1/a, -b/a}$  是  $f_{a,b}$  的逆元。

由  $f_{a,b}$  的任意性, 可得  $G$  中的任何一个元都有逆元。

结论: (1)  $\langle G, \rangle$  是代数系统;

(2) 么元是  $f_{1,0}$ ;

(3)  $\langle G, \rangle$  中没有零元;

(4)  $\langle G, \rangle$  中唯一幂等元是  $f_{1,0}$ ;

(5)  $\langle G, \rangle$  中任意元  $f_{a,b}$  的逆元是  $f_{1/a, -b/a}$ 。

计算么元、零元、幂等元、逆元等特殊元时, 首先可以假设这些元存在, 然后根据定义直接得到方程, 解这个方程就可以计算出这些元, 如果方程无解, 则特殊元不存在, 如果方程存在解, 则根据特殊元的定义还需要进一步验证所求解是否是对应的特殊元。

### 知识点2 同态与同构

在现实社会中, 存在着很多代数系统, 但仔细分析这些众多的代数系统发现, 有些代数系统, 他们之间表面上似乎不相同, 但他们实际上“相同”。

如有两个代数系统  $\langle \{\text{奇,偶}\}, * \rangle$  和  $\langle \{\text{正,负}\}, \circ \rangle$ , 其运算“ $*$ ”和“ $\circ$ ”分别定义如下表

表 1

$*$	奇	偶
奇	奇	偶
偶	偶	偶

表 2

$\circ$	正	负
正	正	负
负	负	负

定义:

设  $\langle A, * \rangle$  和  $\langle B, \circ \rangle$  为两个二元代数系统,  $\psi$  是  $A$  到  $B$  的映射。对任意  $x, y \in A$ , 都有

$$\psi(x * y) = \psi(x) \circ \psi(y), \quad (1)$$

则称  $\psi$  是从  $\langle A, * \rangle$  到  $\langle B, \circ \rangle$  的同态映射, 称  $\psi(A)$  为同态象, 其中  $\psi(A) = \{\psi(x) | x \in A\}$ 。

如果存在一个从  $\langle A, * \rangle$  到  $\langle B, \circ \rangle$  的同态映射, 则称  $\langle A, * \rangle$  与  $\langle B, \circ \rangle$  同态, 记为  $\langle A, * \rangle \sim \langle B, \circ \rangle$ 。

当  $A = B$  时, 称其同态为自同态。

当同态映射  $\psi$  分别是单射、满射、双射时, 分别称  $\psi$  是单一同态映射、满同态映射、同构映射。

如果存在一个从  $\langle A, * \rangle$  到  $\langle B, \circ \rangle$  的同构映射 (单一同态映射、满同态映射), 则称代数系统  $\langle A, * \rangle$  与  $\langle B, \circ \rangle$  同构 (单一同态、满同态)。

用  $\langle A, * \rangle \cong \langle B, \circ \rangle$  表示  $\langle A, * \rangle$  与  $\langle B, \circ \rangle$  同构。

同态与同构:

同态与同构是代数系统中一个非常重要的概念, 它体现了两个代数系统之间的某种联系, 后面章节将会学习半群、群、格、布尔代数等典型的代数系统, 那么将同态与同构的概念应用到这些典型的代数系统, 就会得到半群、群、格、布尔代数的同态与同态。

例 设代数系统  $\langle Z, + \rangle$  和  $\langle E, + \rangle$  中,  $Z, E$  分别是整数集和偶数集, “ $+$ ”是加法, 证明  $\langle Z, + \rangle \cong \langle E, + \rangle$ 。

分析: 证明两个代数系统同构, 关键是找出同构映射。假设  $f$  是  $\langle Z, + \rangle$  到  $\langle E, + \rangle$  的同构映射, 根据同构映射的定义, 有  $x, y \in Z, f(x + y) = f(x) + f(y)$ ,

特别取  $x = 0, y = 0$ , 有  $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ , 可得  $f(0) = 0$ 。

$\forall n \in Z, f(n) = f(n - 1 + 1) = f(n - 1) + f(1)$ , 可得递推公式如下:  $f(n) = f(n - 1) + f(1)$ ,

如果  $f(1) > 0$ , 则  $f(n)$  是递增函数,  $0 = f(0) < f(1) < f(2)$ ,

而  $f$  又是  $Z$  到  $E$  的双射, 因此此时必有  $f(1) = 2$ ,

同理,如果 $f(1) < 0$ ,可得 $f(1) = -2$ 。

根据以上分析可知,

$$\forall n \in Z, f(n) = 2n \text{ 或 } f(n) = -2n,$$

以上说明,如果 $f$ 是同构映射,则

$$f(n) = 2n \text{ 或 } f(n) = -2n,$$

因此需进一步验证 $f(n) = 2n$ 或 $f(n) = -2n$ 是否是同构映射。

证明: $\forall n \in Z$ ,令 $f(n) = 2n$ ,则显然 $f$ 是 $Z$ 到 $E$ 的双射,又对 $x, y \in Z$ ,有

$$f(x+y) = 2(x+y) = 2x+2y = f(x) + f(y),$$

因此 $f$ 是同构映射,同理可证 $f(n) = -2n$ 也是同构映射。故有 $\langle Z, + \rangle \cong \langle E, + \rangle$ 。

结论:证明两个代数系统的同态与同构关键是构造出同态与同构映射,构造同态与同构映射没有一个通用的方法,但一般思路如下:首先可以假设 $f$ 就是同态或同构映射,然后利用同态与同构的定义,导出 $f$ 的一些性质,并利用这些性质来构造同态与同构映射。

定理:设 $\psi$ 是 $\langle A, * \rangle$ 到 $\langle B, o \rangle$ 的同态映射,那么 $\langle \psi(A), o \rangle$ 是 $\langle B, o \rangle$ 的子代数。

分析:需证 $\psi(A)$ 非空,且运算“ $o$ ”对 $\psi(A)$ 封闭。

证明:由于 $A$ 非空,所以显然 $\psi(A)$ 为 $B$ 的非空子集。

对任意 $x, y \in \psi(A)$ ,存在 $a, b \in A$ ,使得

$$\psi(a) = x, \psi(b) = y, \text{ 有}$$

$$xoy = \psi(a) o \psi(b) = \psi(aob),$$

因为 $aob \in A$ ,所以 $\psi(aob) \in \psi(A)$ ,即

$$xoy \in \psi(A),$$

故“ $o$ ” $\psi(A)$ 对封闭,得证。

定理:

设 $\psi$ 是二元代数系统 $\langle A, * \rangle$ 到 $\langle B, o \rangle$ 的满同态,则:

- (1)若“ $*$ ”可交换,则“ $o$ ”也可交换;
- (2)若“ $*$ ”可结合,则“ $o$ ”也可结合;
- (3)若 $e$ 是 $\langle A, * \rangle$ 的么元,则 $\psi(e)$ 是 $\langle B, o \rangle$ 的么元;
- (4)若 $\theta$ 是 $\langle A, * \rangle$ 的零元,则 $\psi(\theta)$ 是 $\langle B, o \rangle$ 的零元;
- (5)若 $a$ 是 $\langle A, * \rangle$ 的幂等元,则 $\psi(a)$ 是 $\langle B, o \rangle$ 的幂等元;
- (6)若 $x^{-1}$ 是 $x$ 在 $\langle A, * \rangle$ 中的逆元,则 $\psi(x^{-1})$ 是 $\psi(x)$ 在 $\langle B, o \rangle$ 中的逆元;
- (7)若 $a$ 是 $\langle A, * \rangle$ 的(左、右)可消去元,则 $\psi(a)$ 是 $\langle B, o \rangle$ 的(左、右)可消去元。

证明:(1)对任意的 $x, y \in B$ ,因为 $\psi$ 是满射,所以存在 $a, b \in A$ ,使得

$$\psi(a) = x, \psi(b) = y,$$

因为运算“ $*$ ”在 $A$ 中可交换,则有 $a * b = b * a$ ,

$$\text{于是 } xoy = \psi(a) o \psi(b) = \psi(a * b) = \psi(b * a) = \psi(b) o \psi(a) = yox,$$



所以运算“ $\circ$ ”在  $B$  中满足交换律。

(2) 类似(1), 略。

(3) 对  $\forall x \in B$ , 因为  $\psi$  是满射, 所以存在  $a \in B$ , 使得  $\psi(a) = x$ , 又  $e$  是  $\langle A, * \rangle$  的幺元, 则有  $a * e = e * a = a$ ,

于是  $x \circ \psi(e) = \psi(a) \circ \psi(e) = \psi(a * e) = \psi(a) = x$ ,

$\psi(e) \circ x = \psi(e) \circ \psi(a) = \psi(e * a) = \psi(a) = x$ ,

所以有  $x \circ \psi(e) = \psi(e) \circ x = x$ ,

由  $x$  的任意性, 可知  $\psi(e)$  是  $\langle B, \circ \rangle$  的幺元。

其它类似(3), 略。

定理:

设  $\psi$  是代数系统  $\langle A, *_1, *_2 \rangle$  到  $\langle B, \circ_1, \circ_2 \rangle$  的满同态, 这里  $*_i$  和  $\circ_i (i = 1, 2)$  均为二元运算, 那么有

(1) 若运算“ $*_1$ ”对“ $*_2$ ”在  $A$  中满足分配律, 则“ $\circ_1$ ”对“ $\circ_2$ ”在  $B$  中也满足分配律;

(2) 若运算“ $*_1$ ”和“ $*_2$ ”在  $A$  中满足吸收律, 则“ $\circ_1$ ”和“ $\circ_2$ ”在  $B$  中也满足吸收律。

证明: 定理的证明类似与定理

同构关系:

令  $P = \{x \mid x \text{ 是代数系统}\}$ ,  $\cong = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in P, \text{ 且 } x \text{ 与 } y \text{ 同构} \}$ , 则很容易证明  $\cong$  是  $P$  上等价关系, 由该等价关系可以得到等价类, 在同一个等价类的两个代数系统同构, 它们在同构的意义下可以看作是相同的代数系统, 具有完成相同的代数性质。称“ $\cong$ ”为同构关系。

## 二、本讲小结

本讲主要讲解了零元、逆元、幂等元的定义及求解方法, 同态与同构的概念。

重点讲解了几个特殊元的定义和计算方法, 同态与同构的定义(同态与同构在群论里结合函数关系容易出一些大题)

常考题型多为判断、选择、证明和计算题。

应试方法主要是熟记概念及解题套路。

## 第3讲 半群、群的定义

### 一、考点讲解:

1) 广群、半群、独异点、循环半群的概念及性质;

2) 群的定义

#### 知识点1 半群与含么半群

定义: 在二元代数  $\langle S, * \rangle$  中, 若二元运算“ $*$ ”满足结合律, 则称  $\langle S, * \rangle$  为半群; 特别地, 若半

群  $\langle S, * \rangle$  中的二元运算“ $*$ ”满足交换律,则称  $\langle S, * \rangle$  为可交换半群。

定义:设  $\langle S, * \rangle$  为半群,若  $S$  中存在关于运算“ $*$ ”的幺元  $e$ ,则称此半群为独异点(或含幺半群),有时也记为  $\langle S, *, e \rangle$ ;

若独异点  $\langle S, *, e \rangle$  中运算“ $*$ ”满足交换律,则称  $\langle S, *, e \rangle$  为可交换独异点(可交换含幺半群)。

例 设  $n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , 定义  $n$  上的运算  $+_n$  如下:

$$x, y \in \underline{n}, x +_n y = x + y \pmod{n}$$

(即  $x + y$  除以  $n$  的余数)。

证明  $\langle \underline{n}, +_n \rangle$  是含幺半群。

证明:封闭性:  $x, y \in \underline{n}$ , 令  $k = x + y \pmod{n}$ , 则

$$0 \leq k < n, \text{ 即 } k \in \underline{n},$$

所以封闭性成立;

结合律:  $x, y, z \in \underline{n}$ , 有

$$(x +_n y) +_n z = x + y + z \pmod{n} = x +_n (y +_n z)$$

所以结合律成立。

单位元:  $x \in \underline{n}$ , 显然有

$$0 +_n x = x +_n 0 = x$$

所以  $0$  是单位元。故  $\langle \underline{n}, +_n \rangle$  是含幺半群。

## 知识点2 子半群和子含幺半群

将子代数应用于半群,可得下面的定义:

定义:如果  $\langle S, * \rangle$  是半群,  $T$  是  $S$  的非空子集,且运算“ $*$ ”对  $T$  封闭,则称  $\langle T, * \rangle$  是半群  $\langle S, * \rangle$  的子半群;

如果  $\langle S, *, e \rangle$  是含幺半群,  $T$  是  $S$  的非空子集,  $e \in T$ 。且运算“ $*$ ”对  $T$  封闭,则称  $\langle T, *, e \rangle$  是含幺半群  $\langle S, *, e \rangle$  的子含幺半群。

例 设  $\langle S, * \rangle$  是含幺半群,

$$M = \{a \mid a \in S, \forall x \in S \text{ 有 } a * x = x * a\},$$

则  $\langle M, * \rangle$  是  $\langle S, * \rangle$  的子含幺半群。

分析:需证明两点:幺元存在,运算“ $*$ ”封闭。

证明:(1) 设  $e$  是半群  $\langle S, * \rangle$  的幺元,则  $\forall x \in S$ , 显然有  $e * x = x * e$ ,

因此,  $e \in M$ 。进而  $M$  是  $S$  的非空子集。

(2) 对任意  $a, b \in M$ , 由  $M$  的定义知,  $\forall x \in S$ , 有

$$a * x = x * a, b * x = x * b,$$

又运算“ $*$ ”满足结合律,则

$$(a * b) * x = a * (b * x)$$

$$= a * (x * b) = (a * x) * b$$

$$= (x * a) * b = x * (a * b),$$

$$\text{即 } \forall x \in S, (a * b) * x = x * (a * b),$$

因此,  $(a * b) \in M$ 。

由(1)、(2)可知:  $\langle M, * \rangle$  是的一个子含么半群。

### 知识点3 半群同态

利用代数系统中同态与同构概念,得到半群(含么半群)的同态与同构。

设  $\langle S, o \rangle$  和  $\langle T, * \rangle$  是两个半群,映射  $f: S \rightarrow T$ , 对任意元素  $a, b \in S$ , 都有

$$f(aob) = f(a) * f(b),$$

则映射  $f$  就是半群  $\langle S, o \rangle$  到半群  $\langle T, * \rangle$  的同态映射。

如果半群  $\langle S, o \rangle$  和  $\langle T, * \rangle$  是含么半群, 其中  $e, 1$  分别是  $\langle S, o \rangle$  和  $\langle T, * \rangle$  的么元, 而且映射  $f$  满足:

$$\forall a, b \in S, f(aob) = f(a) * f(b), \text{ 且 } f(e) = 1.$$

则映射  $f$  就是含么半群  $\langle S, o, e \rangle$  到  $\langle T, *, 1 \rangle$  的同态映射。

当  $f$  是单射、满射、双射时, 相应的同态为单同态、满同态、同构。

例 设映射  $f: N \rightarrow \underline{6}$ , 且  $x \in N$ ,

$$f(x) = x \pmod{6}, \text{ 则}$$

(1)  $f$  是半群  $\langle N, + \rangle$  到  $\langle \underline{6}, +_6 \rangle$  的同态映射;

(2)  $f$  是含么半群  $\langle N, +, 0 \rangle$  到  $\langle \underline{6}, +_6, 0 \rangle$  的同态映射。

分析: (1) 需证明  $\forall a, b \in N$ , 有  $f(a+b) = f(a) +_6 f(b)$ ;

(2) 在(1)的基础上, 还需说明  $f(0) = 0$ 。

证明: (1)  $\forall a, b \in N$ , 有

$$f(a+b) = (a+b) \pmod{6}$$

$$= (a \pmod{6} + b \pmod{6}) \pmod{6}$$

$$= a \pmod{6} +_6 b \pmod{6}$$

$$= f(a) +_6 f(b),$$

所以  $f$  是同态映射。

(2) 根据  $f$  的定义, 显然有  $f(0) = 0$ , 又根据(1), 则  $f$  是含么半群  $\langle N, +, 0 \rangle$  到  $\langle \underline{6}, +_6, 0 \rangle$  的同态映射。

结论: 设  $f$  是二元代数  $\langle A, \rangle$  到  $\langle B, * \rangle$  的满同态, 则根据同态的性质, 容易得到如下结论:

(1) 若  $\langle A, o \rangle$  是半群, 则  $\langle B, * \rangle$  也是半群;

(2) 若  $\langle A, o \rangle$  含么半群, 则  $\langle B, * \rangle$  也是含么半群。

### 知识点4 元素的幂

设  $\langle S, * \rangle$  是一个半群, 对  $\forall x \in S$ , 可定义:

$$\begin{aligned}x^1 &= x, x^2 = x * x, \\x^3 &= x * x^2 = x^2 * x = x * x * x, \\&\dots\dots\end{aligned}$$

$$x^n = x^{n-1} * x = x * x^{n-1} = x * x * x * \dots\dots * x。$$

.....

如果 $\langle S, * \rangle$ 有单位元 $e$ ,可以定义: $x^0 = e$

由于结合律的满足,同样有如下的公式: $a^x * a^y = a^{x+y} \quad (a^x)^y = a^{xy}$

例 (1) 设 $\langle S, * \rangle$ 是半群, $a \in S, M = \{a^n | n \in \mathbb{Z}^+\}$ ,则 $\langle M, * \rangle$ 是 $\langle S, * \rangle$ 的子半群;

(2) 设 $\langle S, *, e \rangle$ 是含幺半群, $a \in S, M = \{a^n | n \in \mathbb{N}\}$ ,

则 $\langle M, * \rangle$ 是 $\langle S, * \rangle$ 的子含幺半群;

分析:(1) $M$ 是非空子集,运算“ $*$ ”封闭。

(2)还需说明幺元 $e$ 在 $M$ 中。

证明:(1) $a = a^1 \in M$ ,所以 $M$ 是非空集合。

对 $\forall n \in \mathbb{Z}^+, a^n \in S$ ,因此 $M$ 是 $S$ 的非空子集。

对 $\forall a_n, a_m \in M, n, m \in \mathbb{Z}^+$ ,则

$$a^n * a^m = a^{n+m},$$

$$n+m \in \mathbb{Z}^+, a^n * a^m \in M。$$

故运算“ $*$ ”封闭。 $\langle M, * \rangle$ 是 $\langle S, * \rangle$ 的子半群。

(2) 幺元 $e = a^0 \in M$ ,即幺元在 $M$ 中。类似(1),同理可证 $\langle M, * \rangle$ 是 $\langle S, * \rangle$ 的子含幺半群。

### 知识点5 循环半群

定义:(1)在半群 $\langle S, * \rangle$ 中,若存在一个元素 $a \in S$ ,使得对任意 $x \in S$ ,都有

$$x = a^n, \text{其中 } n \in \mathbb{Z}^+,$$

则称 $\langle S, * \rangle$ 为循环半群,并称 $a$ 为该循环半群的一个生成元, $M = \{a | (a \in S) \text{ 且 } a \text{ 是 } S \text{ 的生成元}\}$ 称为该循环半群的生成集;

(2)在含幺半群 $\langle S, *, e \rangle$ 中,若存在一个元素 $a \in S$ ,使得对任意 $x \in S$ ,都有 $x = a^n$ ,其中 $n \in \mathbb{N}$ ,则称此循环含幺半群为循环含幺半群(或循环独异点),并称 $a$ 为该循环含幺半群的一个生成元, $M = \{a | (a \in S) \text{ 且 } a \text{ 是 } S \text{ 的生成元}\}$ 称为该循环含幺半群的生成集。

例 判断含幺半群 $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ 是否是一个循环含幺半群?

分析:根据定义,判别含幺半群(或半群)是循环含幺半群(循环半群)的关键是计算生成元。

如何计算生成元呢?

首先假设生成元存在,然后根据定义得到方程,通过解这个方程来计算生成元。

解:由于存在元素 $1 \in \mathbb{N}$ ,使得对任意 $n \in \mathbb{N}$ ,都有:

$$n = (n-1) + 1 = 1 + (n-1)$$

$$= 1 + 1 + 1 + \dots\dots + 1 = 1^n,$$



特别对幺元  $0 \in N$ , 有  $0 = 10$ 。

所以, “1” 是生成元。

因此, 该半群一定是循环含幺半群。

定理:

循环半群都是可交换半群。

分析: 由于循环半群中的每个元素都可以表示为生成元的方幂形式, 可以使用这种表示形式来证明。

证明: 设  $a \in S$  是循环半群  $\langle S, * \rangle$  的生成元。则对  $\forall x, y \in S$ , 存在  $m, n \in \mathbb{Z}^+$ , 使得

$x = a^m, y = a^n$ , 所以

$$x * y = a^m * a^n = a^{m+n} = a^{n+m} = a^n * a^m = y * x,$$

故运算 “ $*$ ” 是可交换的, 即  $\langle S, * \rangle$  是可交换半群。

推论: 循环含幺半群都是可交换含幺半群。

例 判断含幺半群  $\langle \underline{6}, +_6 \rangle$  是否是循环含幺半群? 若是, 请求出其所有的生成元。

分析:  $\underline{6} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , 共有 6 个元素, 则可以判别每一个元素是否是生成元。

解: 由于  $\underline{6} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , 0 是幺元, 则 0 肯定不是生成元, 对其他元, 有:

$$\textcircled{1} 1^0 = 0, 1^1 = 1, 1^2 = 2, 1^3 = 3, 1^4 = 4, 1^5 = 5,$$

所以 “1” 是  $\langle \underline{6}, +_6 \rangle$  的生成元;

$$\textcircled{2} 2^0 = 0, 2^1 = 2, 2^2 = 0, 2^3 = 2, \dots,$$

所以 “2” 不是  $\langle \underline{6}, +_6 \rangle$  的生成元;

$$\textcircled{3} 3^0 = 0, 3^1 = 3, 3^2 = 0, 3^3 = 3, \dots,$$

所以 “3” 不是  $\langle \underline{6}, +_6 \rangle$  的生成元;

$$\textcircled{4} 4^0 = 0, 4^1 = 4, 4^2 = 2, 4^3 = 0, \dots,$$

所以 “4” 不是  $\langle \underline{6}, +_6 \rangle$  的生成元;

$$\textcircled{5} 5^0 = 0, 5^1 = 5, 5^2 = 4, 5^3 = 3, 5^4 = 2, 5^5 = 1,$$

所以 “5” 是  $\langle \underline{6}, +_6 \rangle$  的生成元。

因此, 含幺半群  $\langle \underline{6}, +_6 \rangle$  有两个生成元 “1”、“5”, 则  $\langle \underline{6}, +_6 \rangle$  是循环含幺半群。

另解: 不妨设  $a \in \underline{6}$  是生成元, 则

$$x \in \underline{6}, \exists m \in \mathbb{N}, \text{ 有 } x = a^m = ma \pmod{6},$$

特别地, 当  $x = 1$  时, 有  $1 = ma \pmod{6}$ , 即

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \text{ 使得 } ma = 6k + 1, \text{ 即 } ma + (-k)6 = 1.$$

因此,  $(a, 6) = 1$ , 即  $a$  与 6 的最大共因子为 1。

反之, 对  $\forall a \in \underline{6}$ , 如果  $(a, 6) = 1$ , 则

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \text{ 使得 } 1 = ma + 6k,$$

因此, 对  $\forall x \in \underline{6}$ , 有

$$x = (xm)a + 6(xk), xm, xk \in Z,$$

根据“ $+_6$ ”的定义,则

$$x = a^{xm}, xm \in Z,$$

因此, $a$ 是生成元。

综上所述, $a \in \underline{6}$ 是生成元的充分必要条件是 $(a, 6) = 1$ 。

考虑集合 $\underline{6}$ 中,可得“1”、“5”是 $\langle \underline{6}, +_6 \rangle$ 的生成元,则 $\langle \underline{6}, +_6 \rangle$ 是循环含么半群。

计算生成元方法:

首先假设生成元存在,然后根据定义得到方程,通过解这个方程来计算生成元。

推广:

- (1)  $\langle \underline{n}, +_n \rangle$ 是循环含么半群;
- (2) 对 $\forall a \in \underline{n}$ ,若 $(a, n) = 1$ ,则 $a$ 是 $\langle \underline{n}, +_n \rangle$ 的生成元;
- (3) 当 $n$ 是素数时, $\underline{n}$ 中除么元“0”以外,其他一切元素都是生成元。

定理:在每个有限循环半群中,至少有一个幂等元存在。

推论:设 $\langle S, * \rangle$ 为一个有限半群,则 $\langle S, * \rangle$ 中至少存在一个幂等元。

#### 知识点6 群的定义

定义:设 $\langle G, * \rangle$ 为二元代数系统,满足如下性质:

- (1) “ $*$ ”在 $G$ 中满足结合律,即 $\forall a, b, c \in G$ ,有 $(a * b) * c = a * (b * c)$ ;
- (2)  $G$ 中存在关于“ $*$ ”的么元 $e$ ,即 $\exists e \in G$ ,使得

$$\forall a \in G, e * a = a * e = a;$$

- (3)  $G$ 中每个元素 $a$ 都有逆元 $a^{-1}$ ,即 $\forall a \in G$ ,都

概括:群是满足结合律、有么元,每个元有逆元的二元代数系统为群

定义:

在群 $\langle G, * \rangle$ 中,

- (1) 若运算“ $*$ ”满足交换律,即 $\forall a, b \in G$ ,都有 $a * b = b * a$ ,则称 $\langle G, * \rangle$ 为可换群或阿贝尔( Abel )群;

(2) 集合 $G$ 的基数称为群 $G$ 的阶( Order ),记为 $|G|$ 。若群 $\langle G, * \rangle$ 的阶有限,则称之为有限群,否则称为无限群。

例 证明 $\langle \underline{n}, +_n \rangle$ 是群,其中 $n$ 是正整数。

分析:需要证明4点:封闭性;结合律;么元存在;逆元存在。

证明:(1)封闭性: $\forall x, y \in \underline{n}$ ,令

$$k = x + y \pmod{n},$$

$$0 \leq k < n - 1, \text{即 } k \in \underline{n},$$

所以封闭性成立。

(2) 结合律:  $\forall x, y, z \in \underline{n}$ , 有

$$(x +_n y) +_n z = x + y + z \pmod{n}$$

$$= x +_n (y +_n z),$$

所以结合律成立。

(3) 幺元:  $\forall x \in \underline{n}$ , 显然有

$$0 +_n x = x +_n 0,$$

因此, 0 是幺元。

(4) 逆元存在:  $\forall x \in \underline{n}$ , 如果  $x = 0$ , 显然  $0^{-1} = 0$ , 如果  $x \neq 0$ , 则有  $n - x \in \underline{n}$ ,

$$\text{显然 } x +_n (n - x) = (n - x) +_n x = 0,$$

$$\text{所以 } x^{-1} = (n - x),$$

因此,  $\forall x \in \underline{n}$ ,  $x$  有逆元。

综上,  $\langle \underline{n}, +_n \rangle$  是群。

例 设  $X$  是任意集合,  $S = \{f: X \rightarrow X \mid f \text{ 是双射函数}\}$ ,

运算“ $\circ$ ”是函数的复合运算, 证明  $\langle S, \circ \rangle$  是群。

证明: (1) 封闭性:  $\forall f, g \in S$ ,  $f, g$  是双射, 则  $f \circ g$  也是双射,

即  $f \circ g \in S$ 。故封闭性成立。

(2) 结合律: 由于函数的复合运算“ $\circ$ ”满足结合律, 因此, 在集合  $S$  也满足结合律。

(3) 幺元存在: 恒等映射  $I_X \in G$ , 且  $\forall f \in S$ , 有  $I_X \circ f = f \circ I_X = f$ ,

因此, 恒等映射  $I_X$  是幺元。

(4) 逆元存在:  $\forall f \in S$ ,  $f$  是双射, 则  $f^{-1} \in S$ , 且有

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I_X,$$

因此,  $f^{-1}$  就是  $f$  关于“ $\circ$ ”的逆元。

由(1)、(2)、(3)和(4)可知,  $\langle S, \circ \rangle$  是群。

说明:  $\langle S, \circ \rangle$  被称为变换群, 如果  $X$  是有限集合, 设  $|X| = n$ , 此时称  $\langle S, \circ \rangle$  为  $n$  阶置换群。变换群在几何学中有十分广泛的应用。

定理:

在群  $\langle G, * \rangle$  中, 有:

(1) 群  $G$  中每个元素都是可消去的, 即运算满足消去律;

(2) 群  $G$  中除幺元  $e$  外无其他幂等元;

(3) 阶大于 1 的群  $G$  不可能有零元;

(4)  $\forall a, b \in G$ , 都有  $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ ;

(5) 群  $\langle G, * \rangle$  的运算表中任意一行(列)都没有两个相同的元素。

分析: 由于可逆元就是可消去元, 因此(1)显然可证。

(2)和(3)分别是证明唯一性和存在性问题, 通常采用反证法证明。

(4)显然。

(5)采用反证法证明。

证明:(1)由于可逆元就是可消去元,而群  $G$  中每个元素都是可逆元,则  $G$  中的任何元素都是可消去的,即运算满足消去律。

(2)对么元  $e$ ,由于  $e * e = e$ ,所以  $e$  是幂等元。现假设  $a$  是群  $G$  中的幂等元,即  $a * a = a$ ,则  $a * a = a * e$ ,使用消去律,则有  $a = e$ 。

因此,么元  $e$  是  $G$  的唯一幂等元。

(3)假设群  $G$  的阶大于 1 且有零元  $\theta$ ,则  $\theta * \theta = \theta$ ,即  $\theta$  是幂等元,因此由(2)有  $\theta = e$ ,

由于  $|G| > 1$ ,则  $\exists x \in G, x \neq \theta$ ,由  $\theta$  是零元,有  $x * \theta = \theta$ ,

又  $\theta = e$  是么元,则有

$x * \theta = x * e = x$ ,则  $\theta = x$ ,这与  $x \neq \theta$  矛盾。因此,  $G$  中无零元。

注意:如果  $|G| = 1$ ,则有  $G = \{e\}$ ,此时  $e$  既是么元又是零元。

(4)由于群  $G$  中的运算满足结合律,且每个元素都有逆元,有推论 12.3.1 知,结论成立。

(5)假设群  $G$  的运算表中某一行(列)有两个相同的元素,设为  $a$ ,并设它们所在的行表头元素为  $b$ ,列表头元素分别为  $c_1, c_2$ ,这时显然有  $c_1 \neq c_2$ 。而

$a = b * c_1 = b * c_2$ ,由消去律可得

$c_1 = c_2$ ,矛盾。

例  $Z_n = \{[0], [2], \dots, [n-1]\}$  是整数  $Z$  上以  $n$  为模的同余等价关系的商集,  $\forall [i], [j] \in Z_n$ ,

$[i] + [j] = [i+j]$ ,证明  $\langle Z_n, + \rangle$  是群。

证明:(1)封闭性:  $\forall [i], [j] \in Z_n$ ,设  $i+j = kn+r$ ,其中  $0 \leq r \leq n-1$ ,有  $[i] + [j] = [i+j] = [r] \in Z_n$ ,

故封闭性成立。

(2)结合律:  $\forall [i], [j], [k] \in Z_n$ ,有

$([i] + [j]) + [k] = [i+j+k] = [i] + ([j] + [k])$ ,

故结合律成立。

(3)么元:  $[0] \in Z_n, \forall [i] \in Z_n$ ,有

$[0] + [i] = [i] + [0] = [i]$ ,

故  $[0]$  是么元。

(4)逆元:  $\forall [i] \in Z_n$ ,设  $i = kn+r$ ,其中  $0 \leq r \leq n-1$ ,有

$[i] + [n-r] = [n-r] + [i]$

$= [n-r+i]$

$= [n-r+kn+r]$

$= [kn]$

$= [0]$ ,



因此,  $[n-r]$  是  $[i]$  的逆元。

由(1)、(2)、(3)、(4)可知,  $\langle Z_n, + \rangle$  是群。

## 二、本讲小结

本讲主要讲解了广群、半群、独异点、元素的幂、循环半群和群的定义及性质。

重点讲解了半群和群的定义和证明方法, 元素的幂以及循环半群的性质

常考题型多为判断、选择、证明和计算题。

应试方法主要是熟记概念及解题套路。

## 第4讲 子群、群同态与同构

### 一、考点讲解:

1) 子群的概念及判定方法;

2) 群中元素的周期;

3) 群同态与同构的定义;

#### 知识点1 群中元素的周期

设  $e$  是群  $\langle G, * \rangle$  的幺元,  $a \in G$ ,

(1) 使得  $a^n = e$  成立的最小正整数  $n$  称为  $a$  的周期或为元素  $a$  的阶, 记为  $|a|$ ;

(2) 若不存在这样的正整数  $n$ , 使得  $a^n = e$ , 则称  $a$  的周期无限, 即对  $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ , 都有  $a^n \neq e$ 。

显然, 群  $\langle G, * \rangle$  中幺元  $e$  的周期为 1

定理:

设  $a$  是群  $\langle G, * \rangle$  中的元素, 则:

(1) 如果  $a$  的周期为  $n$ , 则对任意的整数  $i$ , 有

$$a^i \in \{a^1, a^2, \dots, a^n\},$$

且对任意的  $p, q \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $p \neq q$ , 有

$$a^p \neq a^q;$$

(2) 如果  $a$  的周期无限, 则对任意的整数  $p, q, p \neq q$ , 有

$$a^p \neq a^q;$$

(3)  $a$  和它的逆元  $a^{-1}$  的周期相同。

例 计算实数加群  $\langle \mathbb{R}, + \rangle$  中元素的周期。

分析: 在  $\langle \mathbb{R}, + \rangle$  中幺元为“0”, 所以有  $0^1 = 0$ ,

而对  $\forall a \in \mathbb{R}$ , 且  $a \neq 0$ , 及  $\forall n \in \mathbb{Z}^+$  有

$$a^n = a^{n-1} + a = a + a^{n-1} = a + a + \dots + a = na \neq 0,$$

因此, 此时仅有“0”有周期“1”, 而其余元素的周期无限。

结论:在实数加群  $\langle \mathbb{R}, + \rangle$  中, 0 的周期为 1, 而其余实数的周期无限。

定理:

设  $\langle G, * \rangle$  是一个群,  $\forall a \in G$ , 若  $a$  的周期为  $m$ , 则  $a^n = e$  当且仅当  $m \mid n$ 。

分析:  $a$  的周期为  $m$ , 则根据以前的分析, 序列

$$\cdots, a^{-n}, \cdots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \cdots, a^n, \cdots,$$

的最小正周期为  $m$ , 因此, 当  $m \mid n$  时, 就有  $a^n = e$ 。

反之, 由于在一个周期  $\{a^1, a^2, \cdots, a^m\}$  中只有  $a^m = e$ , 因此, 如果  $a^n = e$  那么一定有  $m \mid n$ 。

证明: “ $\Rightarrow$ ” (反证法): 设  $a^n = e$ ,

若  $m$  不整除  $n$ , 则  $\exists q \in \mathbb{Z}$ , 使得

$$n = mq + r (1 \leq r \leq m-1),$$

由  $a$  的周期为  $m$ , 且  $a^n = e$ , 有:

$$a^n = a^{mq+r} = a^{mq} * a^r = (a^m)^q * a^r = e^q * a^r = a^r = e,$$

由于  $1 \leq r \leq m-1$ , 这就与  $a$  的周期为  $m$  矛盾, 所以有  $m \mid n$ 。

“ $\Leftarrow$ ”: 设  $m \mid n$ 。则  $\exists k \in \mathbb{Z}$ , 使得  $n = mk$ , 于是有:

$$a^n = a^{mk} = (a^m)^k = e^k = e,$$

总结: 如果证明形如  $m \mid n$  这样的结论, 可以采用反证法, 即假设  $m$  不能整除  $n$ , 则  $\exists q \in \mathbb{Z}$ , 使得  $n = mq + r (1 \leq r \leq m-1)$ 。

例 设  $\langle G, * \rangle$  是一个群, 对  $a, b \in G$ , 若  $a$  的周期为 3,  $b$  的周期为 5, 且有:  $a * b = b * a$ , 则  $a * b$  的周期为 15。

证明: 设  $a * b$  的周期为  $n$ , 由于  $a * b = b * a$ , 且运算 “ $*$ ” 满足结合律, 所以有:

$$(a * b)^{15} = a^{15} * b^{15} = e * e = e,$$

由定理可知:  $n \mid 15$ , 即  $n$  可能是 1, 3, 5, 15。

当  $n = 1, 3, 5$ , 有:  $(a * b)^{(1)} = a * b \neq e$

(若  $a * b = e$ , 则  $a = b^{-1}$ , 故  $b^{-1}$  的周期为 3, 则  $b$  的周期也为 3, 矛盾),

$$(a * b)^3 = a^3 * b^3 = e * b^3 = b^3 \neq e \text{ (因 } b \text{ 的周期为 5)},$$

$$(a * b)^5 = a^5 * b^5 = a^5 * e = a^5 \neq e \text{ (因 } a \text{ 的周期为 3)},$$

$n = 15$  时, 才有  $(a * b)^n = e$ 。故  $a * b$  的周期为 15。

另证: 设  $a * b$  的周期为  $n$ , 由  $a * b = b * a$  有

$$(a * b)^n = a^n * b^n = e,$$

$$\text{所以有 } ((a * b)^n)^3 = a^{3n} * b^{3n} = e^3 = e,$$

又  $a$  的周期为 3, 则由上式可得

$$a^{3n} * b^{3n} = e * b^{3n} = e, \text{ 即 } b^{3n} = e,$$

由  $b$  的周期是 5, 则根据定理, 有  $5 \mid 3n$ ,

因为  $(5, 3) = 1$ , 所以可得  $5 \mid n$ ,

同理,由 $((a*b)^n)^5 = a^{5n} * b^{5n} = a^{5n} * e = a^{5n} = e$ ,

且 $a$ 的周期为3,可得 $3|5n$ ,

即是 $3|n$ ,

由 $3|n, 5|n$ ,且 $(3,5)=1$ ,则 $15|n$ ,

又因为 $(a*b)^{15} = a^{15} * b^{15} = e * e = e$ ,

而 $n$ 是周期,则 $n|15$ ,

由 $15|n, n|15$ ,且 $n$ 是正整数,可得 $n=15$ 。故 $a*b$ 的周期为15。

推广:

设 $\langle G, * \rangle$ 是一个群,对 $a, b \in G$ ,若 $a$ 的周期为 $n$ , $b$ 的周期为 $m$ ,且有 $a*b=b*a$ ,则:

(1)若 $(n,m)=1$ ,则 $a*b$ 的周期为 $nm$ ;

(2)若 $(n,m) \neq 1$ ,则 $a*b$ 的周期为 $[n,m]$  ( $[n,m]$ 表示 $n$ 与 $m$ 的最小公倍数)。

定理:

有限群 $\langle G, * \rangle$ 中每个元素的周期都有限,且不大于群 $G$ 的阶。

证明:对 $\forall a \in G$ ,构造 $a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots$

由运算“ $*$ ”的满足封闭性知: $a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots \in G$ ,

因为 $|G|$ 是有限的,所以 $a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots$ 中必有相同的元素,不妨假设: $a^x = a^y$  ( $y >$

$x$ )——①,

在①式的左右两端同时作用一个 $a^{-x}$ ,有: $a^x * a^{-x} = a^y * a^{-x} = e$ ,

即有: $a^{y-x} = e$  ( $y-x > 0$ ),

由周期定义可知:元素 $a$ 的周期一定小于等于 $(y-x)$ ,所以 $a$ 的周期有限。

如果 $(y-x)$ 大于群 $G$ 的阶,类似可找到小于 $G$ 的阶的 $n$ ,使得 $a^n = e$

## 知识点2 子群

定义:设 $\langle G, * \rangle$ 是群,如果

(1) $S$ 是 $G$ 的非空子集;

(2) $S$ 在运算“ $*$ ”下也是群,即 $\langle S, * \rangle$ 是群。

则称 $\langle S, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群。

对任意的群 $\langle G, * \rangle$ , $\langle \{e\}, * \rangle$ 和 $\langle G, * \rangle$ 是群 $G$ 的子群。由于任何群 $\langle G, * \rangle$ 都有这两个子群,故称之为平凡子群,将 $\langle G, * \rangle$ 的非平凡子群称为真子群。

引理:

设 $\langle G, * \rangle$ 是一个群, $\langle S, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群,则:

(1)子群 $\langle S, * \rangle$ 的幺元 $e_s$ 也是 $\langle G, * \rangle$ 的幺元 $e_G$ ;

(2)对 $\forall a \in S$ , $a$ 在 $S$ 中的逆元 $a_s^{-1}$ 就是 $a$ 在 $G$ 中的逆元 $a_G^{-1}$ 。

证明:(1) $e_s$ 是 $\langle S, * \rangle$ 的幺元,则 $e_s^2 = e_s$ ,

又 $S \subseteq G$ ,则 $e_s \in G$ ,由上式可知 $e_s$ 也是群 $\langle G, * \rangle$ 的一个幂等元。所以有: $e_s = e_G$ 。

(2) 对  $\forall a \in S, a$  在  $S$  中的逆元为  $a_s^{-1} \in S$ , 则有  $a * a_s^{-1} = a_s^{-1} * a = e_s = e_G$ ,

由于  $S \subseteq G$ , 所以  $a, a_s^{-1} \in G$ , 有  $a_s^{-1} = a_G^{-1}$ 。

引理说明, 如果  $S$  是  $G$  的子群, 则  $S$  的幺元就是  $G$  的幺元,  $S$  中任意元  $a$  在  $S$  中的逆元也是  $a$  在  $G$  中的逆元。

如何判别一个子集是子群?

定理 1: 设  $S$  是群  $\langle G, * \rangle$  的非空子集,  $S$  是群  $G$  的子群的充分必要条件是:

(1) 对  $a, b \in S$ , 都有  $a * b \in S$ ;

(2) 对  $a \in S$ , 都有  $a^{-1} \in S$ 。

定理 2: 设  $S$  是群  $\langle G, * \rangle$  的非空子集,  $S$  是子群的充分必要条件是:

对  $a, b \in S$ , 都有  $a * b^{-1} \in S$ 。

如果  $S$  是群  $\langle G, * \rangle$  的有限非空子集, 则  $S$  还有更弱的判断定理:

定理 3: 设  $S$  是群  $\langle G, * \rangle$  的有限非空子集, 则  $S$  是子群的充分必要条件是

$a, b \in S$ , 有  $a * b \in S$ 。

根据子群的定义, 要证明以下 5 点:

①  $S$  非空子集;

② 运算对  $S$  的封闭性;

③ 运算在  $S$  上结合律成立;

④  $S$  上存在幺元;

⑤  $S$  中的每个元都存在逆元。

判别定理 1 将 5 点减少为 3 点:

①  $S$  非空子集;

② 运算对  $S$  的封闭性;

③  $S$  中的每个元的逆元都在  $S$  中。

判别定理 2 将后两点融合, 并将以上 3 点进一步减少为 2 点:

①  $S$  非空子集;

② 对  $\forall a, b \in S$ , 有  $a * b^{-1} \in S$ 。

如果  $S$  是有限子集, 根据定理 3, 则此时只需证明 2 点:

①  $S$  非空子集;

② 运算对  $S$  的封闭性。

在具体应用中, 一般都使用判别定理, 特别是定理 1 和 2 来证明一个非空子集是子群。

例 设  $\langle G, * \rangle$  是一个交换群, 令  $S = \{a \mid a \in G \text{ 且 } a = a^{-1}\}$ ,

证明:  $\langle S, * \rangle$  是  $\langle G, * \rangle$  的一个子群。

分析: 用定理 2 证明, 即只需证明两点: ①  $S$  非空子集; ② 对  $\forall a, b \in S$ , 有  $a * b^{-1} \in S$ 。

对幺元  $e$ , 有  $e = e^{-1}$ , 因此,  $e \in S$ , 所以  $S$  非空。



另一方面,要证明  $a * b^{-1} \in S$ , 即是证明

$$(a * b^{-1}) = (a * b^{-1})^{-1},$$

又  $(a * b^{-1})^{-1} = b * a^{-1}$ , 因此, 只需证明

$$a * b^{-1} = b * a^{-1},$$

又  $a, b \in S$ , 可得  $a = a^{-1}, b = b^{-1}$ 。

则只需证明  $a * b = b * a$ ,

由于  $\langle G, * \rangle$  是交换群, 故  $a * b = b * a$  成立。

证明略。

设  $G$  是  $n \times n$  可逆实矩阵集合, “ $\times$ ” 是矩阵乘法运算, 则  $\langle G, \times \rangle$  是群,

令  $S = \{A | A \in G \text{ 且 } |A| = 1\}$ ,

证明:  $\langle S, \times \rangle$  是群  $\langle G, \times \rangle$  的一个子群。

分析: 首先应该知道群  $\langle G, \times \rangle$  中的幺元和逆元。不难得到, 幺元是单位矩阵  $I$ , 任意  $A \in G$  的逆元就是  $A$  的逆矩阵  $A^{-1}$ 。再根据定理证明。

证明: (1) 非空性: 单位矩阵  $I \in G$ , 且  $|I| = 1$ , 所以  $I \in S$ , 即  $S$  是非空集合。

(2) 封闭性:  $A, B \in S, |A| = 1, |B| = 1$ , 有  $|A \times B| = |A| \times |B| = 1 \times 1 = 1$ ,

且  $A \times B$  是可逆矩阵, 因此有  $A \times B \in S$ 。

(3) 逆元存在:  $A \in S, |A| = 1$ , 则  $A$  的逆矩阵  $A^{-1}$  满足  $|A^{-1}| = 1/|A| = 1$ , 故  $A^{-1} \in S$ 。

由(1)、(2)、(3)知:  $\langle S, \times \rangle$  作成  $\langle G, \times \rangle$  的子群。

例 设  $\langle G, * \rangle$  是一个群,  $H_1, H_2$  是  $G$  的两个子群, 证明  $H = H_1 \cap H_2$  是  $G$  的子群。

分析: 根据定理, 需要证明 3 点:

①  $H$  非空子集;

② 运算对  $H$  的封闭性;

③  $H$  中的每个元的逆元都在  $H$  中。

证明: (1) 非空性: 由于  $H_1, H_2$  是  $G$  的两个子群, 所以有  $e \in H_1, e \in H_2$ , 即有  $e \in H_1 \cap H_2$ , 故  $H$  非空。

(2) 封闭性: 对  $a, b \in H$ , 有  $a, b \in H_1 \cap H_2$ , 即  $a, b \in H_1, a, b \in H_2$ ,

由  $H_1, H_2$  是子群, 有  $a * b \in H_1, a * b \in H_2$ , 即有  $a * b \in H_1 \cap H_2$ 。

(3) 逆元存在: 对  $a \in H$ , 有  $a \in H_1 \cap H_2$ , 即  $a \in H_1, a \in H_2$ 。由  $H_1, H_2$  是子群, 有  $a^{-1} \in H_1, a^{-1} \in H_2$ ,

即有  $a^{-1} \in H_1 \cap H_2$ 。

由(1)、(2)、(3)知:  $\langle H, * \rangle$  可作成  $\langle G, * \rangle$  的子群。

推广: 设  $\langle G, * \rangle$  是一个群,  $H_1, H_2, \dots, H_n$  是  $G$  的  $n$  个子群, 则有  $H = H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n$  是  $G$  的子群。

### 知识点3 群的同态

设  $\langle G, * \rangle$  和  $\langle H, \circ \rangle$  是两个群, 映射  $\psi: G \rightarrow H$ , 且  $a, b \in G$ , 有  $\psi(a * b) = \psi(a) \circ \psi(b)$ ,

则  $\psi$  就是从  $\langle G, * \rangle$  到  $\langle H, \circ \rangle$  的群同态映射。

当  $\psi$  是单射、满射和双射, 群同态分别称为单一群同态、满群同态和群同构。

定理:

设  $\psi$  是  $\langle G, * \rangle$  到  $\langle H, o \rangle$  的群同态, 则

(1) 若  $e$  是群  $G$  的幺元, 则  $\psi(e)$  是群  $H$  的幺元;

(2)  $\forall a \in G$ , 有  $\psi(a^{-1}) = (\psi(a))^{-1}$ 。

证明: (1) 由于  $e * e = e$ ,  $\psi$  又是同态映射, 则  $\psi(e) = \psi(e * e) = \psi(e) * \psi(e)$ ,

可见  $\psi(e)$  是群  $H$  中的幂等元, 所以  $\psi(e)$  是群  $H$  的幺元。

(2) 由  $\psi$  是同态映射, 可得

$$\psi(a) o \psi(a^{-1}) = \psi(a * a^{-1}) = \psi(e),$$

$$\psi(a^{-1}) o \psi(a) = \psi(a^{-1} * a) = \psi(e),$$

$\psi(e)$  是群  $H$  的幺元, 因此有  $\psi(a^{-1}) = (\psi(a))^{-1}$ 。

此定理说明, 群同态映射将幺元映射为幺元, 逆元映射为逆元。

两个定理:

定理: 设  $\psi$  是  $\langle G, o \rangle$  到  $\langle H, * \rangle$  的群同态, 则  $\langle G, o \rangle$  在  $\psi$  下的同态象  $\langle \psi(G), * \rangle$  是  $\langle H, * \rangle$  的子群。

定理: 设  $\langle G, o \rangle$  是一个群,  $\langle H, * \rangle$  是一个代数系统, 若存在从  $\langle G, o \rangle$  到  $\langle H, * \rangle$  满同态, 则  $\langle H, * \rangle$  是群。

#### 知识点4 群同构

同构的群可以看作是相同的群。

对有限群  $\langle G, * \rangle$  而言, 其运算“ $*$ ”可以通过运算表给出, 设  $G = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n\}$ 。

根据定理, 运算表中每行的元素应互不相同, 每列的元素也应互不相同, 因此当  $n=3$  时, 则运算表只能是下表:

$*$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x_1$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x_2$	$x_2$	$x_3$	$x_1$
$x_3$	$x_3$	$x_1$	$x_2$

所以当  $n=3$  时, 在同构的意义下只有一个群。

当  $n=4$  时, 其运算表如下:

表 1					表 2				
$*$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$*$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$x_1$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_1$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$x_2$	$x_2$	$x_1$	$x_4$	$x_3$	$x_2$	$x_2$	$x_1$	$x_4$	$x_3$
$x_3$	$x_3$	$x_4$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_3$	$x_4$	$x_2$	$x_1$
$x_4$	$x_4$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$x_4$	$x_4$	$x_3$	$x_1$	$x_2$

表 3					表 4				
$*$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$*$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$x_1$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_1$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$x_2$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_1$	$x_2$	$x_2$	$x_4$	$x_1$	$x_3$
$x_3$	$x_3$	$x_4$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_3$	$x_1$	$x_4$	$x_2$
$x_4$	$x_4$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_4$	$x_3$	$x_2$	$x_1$

其中,表 2,3 和 4 同构,所以 4 元群在同构意义下有两个。

通过讨论可以得到如下结论:

- (1) 若  $|G| \leq 3$ , 则群  $G$  在同构的意义之下只有唯一的一个;
- (2) 若  $|G| = 4$ , 则群  $G$  在同构的意义之下只有两个。

## 二、本讲小结

本讲主要讲解了子群的定义及判定定理,元素的性质以及群同态与同构。

重点讲解了子群判定定理,元素的周期

常考题型多为判断、选择、证明和计算题。

应试方法主要是熟记概念及解题套路。

## 三、课后习题:

1. 证明:在有限群中周期大于 2 的元素的个数必定是偶数。

# 第 5 讲 特殊群、陪集与拉氏定理、正规子群

## 一、考点讲解:

- 1) 交换群、循环群等特殊群的概念及性质
- 2) 陪集和拉格朗日定理
- 3) 正规子群和商群的概念和性质

### 知识点 1 交换群(阿贝尔群)

若群  $\langle G, * \rangle$  中的运算“ $*$ ”满足交换律,则称  $\langle G, * \rangle$  是一个交换群(阿贝尔(Abel)群)。

由于加法运算“ $+$ ”满足交换律,因此群  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle, \langle \mathbb{R}, + \rangle, \langle \mathbb{Q}, + \rangle, \langle \mathbb{C}, + \rangle$  都是交换群。

定理:

设  $\langle G, * \rangle$  是一个群,则  $\langle G, * \rangle$  是交换群的充分必要条件是:

对  $a, b \in G$ , 有  $(a * b)^2 = a^2 * b^2$ 。

证明:必要性:对  $a, b \in G$ , 由于“ $*$ ”可交换, 所以有

$$\begin{aligned} (a * b)^2 &= (a * b) * (a * b) = a * (b * a) * b \\ &= a * (a * b) * b = (a * a) * (b * b) \\ &= a^2 * b^2. \end{aligned}$$

充分性:对  $a, b \in G$ , 若有  $(a * b)^2 = a^2 * b^2$ , 则

$$(a * b)^2 = (a * b) * (a * b) = (a * a) * (b * b),$$

因此,  $a * (b * a) * b = a * (a * b) * b$ ,

由消去律知:  $b * a = a * b$ ,

所以,运算“ $*$ ”满足交换律,即 $\langle G, * \rangle$ 是交换群。

## 知识点2 循环群

定义:在群 $\langle G, * \rangle$ 中,若存在元素 $g \in G$ ,使得对 $a \in G$ ,都有:

$$a = g_i (i \in \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \text{ 为整数集合}),$$

则称 $\langle G, * \rangle$ 为循环群,记为 $G = \langle g \rangle$  (或 $\langle G, * \rangle = \langle g \rangle$ ),并称 $g$ 为该循环群的一个生成元。 $G$ 的所有生成元的集合称为 $G$ 的生成集。

计算群的生成元是判别一个群是否是循环群的关键。

定理:每个循环群都是阿贝尔群。

证明:设 $g \in G$ 是循环群 $\langle G, * \rangle$ 的生成元,对 $n, m \in G$ ,存在 $x, y \in \mathbb{Z}$ ,有

$$n = g^x, m = g^y,$$

$$\text{则 } n * m = g^x * g^y = g^{x+y} = g^{y+x} = g^y * g^x = m * n,$$

所以,循环群 $\langle G, * \rangle$ 是阿贝尔群。

例 证明整数加法群 $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ 是循环群,并求其所有的生成元。

分析:不妨设 $a \in \mathbb{Z}$ 是生成元,则由生成元的定义,对 $n \in \mathbb{Z}$ ,存在 $k \in \mathbb{Z}$ ,使得 $n = a^k = ka$ ,

特别取 $n = 1$ ,则有 $1 = ak$ ,

又 $a, k$ 都是整数,所以必然有 $a = 1$ ,或 $a = -1$ 。

以上说明,如果 $a$ 是生成元,则 $a$ 必须是1或者-1,因此,还需进一步验证 $\pm 1$ 是否是 $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ 的生成元。

证明:因为对 $n \in \mathbb{Z}$ ,有

$$n = 1 + 1 + \cdots + 1 = 1^n,$$

$$n = 1 + 1 + \cdots + 1 = (-1)^{-1} + (-1)^{-1} + \cdots + (-1)^{-1} = ((-1)^{-1})^n = (-1)^{(-n)},$$

所以-1是生成元,故 $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ 是循环群,其生成集为 $\{-1, 1\}$ 。

结论:判别群是否是循环群主要就是计算生成元,而计算生成元有两步:

①假设生成元存在,并根据定义计算它;

②验证计算的结果是否是生成元,如果是,则该群是循环群。

证明:群 $\langle \mathbb{Z}_n, +_n \rangle (n \in \mathbb{Z}^+)$ 是循环群,并求出生成集。

证明:设 $a$ 是生成元,则对 $m \in \mathbb{Z}_n$ ,存在 $k \in \mathbb{Z}$ ,使得 $m = a^k = ka \pmod{n}$ ,

特别取 $m = 1$ ,则有 $1 = ka \pmod{n}$ ,

即存在 $s \in \mathbb{Z}$ ,使得 $ns + ka = 1$ ,

所以有 $(a, n) = 1$ ,即 $a$ 与 $n$ 互质。

这说明,如果 $a$ 是生成元,则有 $a$ 与 $n$ 互质。

反之,如果 $(a, n) = 1$ ,则 $\exists s, t \in \mathbb{Z}$ ,

有 $ns + ta = 1$ ,即 $1 = ta \pmod{n}$ ,

所以有 $1 = a^t (t \in \mathbb{Z})$ ,



则对  $m \in n$ , 有  $m = 1^m = (a')^m = a^{tm} (tm \in Z)$ ,

故  $a$  是生成元。

因此  $a$  是生成元的充要条件是  $(a, n) = 1$ 。

群  $\langle \underline{n}, +_n \rangle$  的生成集为  $M = \{a \mid (a \in \underline{n}) \wedge ((n, a) = 1)\}$ ,

显然  $1 \in M$ , 所以  $1$  是  $\langle \underline{n}, +_n \rangle$  的生成元, 即对  $m \in \underline{n}, m = 1^m$ ,

故  $\langle \underline{n}, +_n \rangle$  是循环群。

结论:

(1) 群  $\langle \underline{n}, +_n \rangle$  是一个循环群, 其生成集为  $M = \{a \mid (a \in \underline{n}) \wedge ((n, a) = 1)\}$ ;

(2) 素数阶的循环群  $\langle \underline{n}, +_n \rangle$ , 除幺元以外的一切元素都是群  $\langle \underline{n}, +_n \rangle$  的生成元。

定理: 两类循环群

$G = \langle g \rangle$  是循环群, 根据生成元  $g$  的周期, 可得两类循环群:

(1) 当  $g$  的周期无限时,  $\langle g \rangle$  是无限阶循环群, 则

$$\langle g \rangle = \{g^k \mid k \in Z; \text{若 } i \neq j, \text{ 则 } g^i \neq g^j\};$$

(2) 当  $g$  的周期有限时,  $\langle g \rangle$  是有限阶循环群, 若  $g$  的周期为  $n$ , 则有

$$\langle g \rangle = \{e, g, g^2, g^3, \dots, g^{n-1}\}.$$

定理:

设  $\langle G, * \rangle$  是以  $g$  为生成元的循环群, 则

(1) 若  $G$  是无限集, 则  $G$  与整数加法群  $\langle Z, + \rangle$  同构;

(2) 若  $|G| = n$ , 则  $G$  与  $n$  阶剩余类加群  $\langle \underline{n}, +_n \rangle$  同构。

结论:

(1) 无限循环群有且仅有两个生成元;

(2) 阶为素数的循环群除幺元以外的一切元素都是  $G$  的生成元;

(3) 阶为正整数  $n$  的循环群  $G = \langle a \rangle$ , 对  $y = a^x \in G$ , 只要  $(n, x) = 1$ , 则  $y$  一定是  $G$  的生成元;

(4) 循环群的子群一定是循环群;

(5) 若  $G = \langle a \rangle$  是一个  $n$  阶的循环群, 则由  $n$  的一切因子  $d$  都可对应产生一个且仅一个  $d$  阶子群, 该  $d$  阶循环子群的生成元为  $a^x$ , 其中  $x = n/d$ ;

(6) 阶为素数  $p$  的循环群  $G = \langle a \rangle$  不含有非平凡的真子群。

定理:

设  $a \in G$  是群  $\langle G, * \rangle$  中的任意元素, 令

$$S = \{a^n \mid n \in Z, Z \text{ 是整数}\},$$

证明  $\langle S, * \rangle$  是  $\langle G, * \rangle$  的循环子群。

证明: 略。

定理说明, 群中每个元素的整数方幂集合是该群的循环子群。

知识点: 陪集与拉格朗日定理

定义:设  $\langle G, * \rangle$  是群,  $\langle H, * \rangle$  是  $\langle G, * \rangle$  的任意子群, 对  $a, b \in G$ , 如果有  $a * b^{-1} \in H$ , 则称  $a, b$  为模  $H$  同余关系, 此时记为  $a \equiv b \pmod{H}$ 。

定理:

设  $\langle H, * \rangle$  是  $\langle G, * \rangle$  的任一个子群, 证明模  $H$  同余关系是  $G$  上的等价关系。

证明:(1) 自反性: 对  $a \in G$ , 有  $a^{-1} \in G$ , 所以

$$a * a^{-1} = e \in H,$$

$$\text{即 } a \equiv a \pmod{H},$$

所以模  $H$  同余关系是自反关系。

(2) 对称性:  $a, b \in G$ , 如有  $a \equiv b \pmod{H}$ , 即  $a * b^{-1} \in H$ ,

因  $H$  是一个群, 所以有

$$b * a^{-1} = (b^{-1})^{-1} * a^{-1} = (a * b^{-1})^{-1} \in H, \text{ 即}$$

$$b \equiv a \pmod{H},$$

所以模  $H$  同余关系是对称关系。

(3) 传递性:  $a, b, c \in G$ , 如有  $a \equiv b \pmod{H}$ ,  $b \equiv c \pmod{H}$ , 则

$$a * b^{-1} \in H, b * c^{-1} \in H,$$

因  $H$  是一个群, 所以有  $a * c^{-1} = (a * b^{-1}) * (b * c^{-1}) \in H$ , 即  $a \equiv c \pmod{H}$ ,

所以模  $H$  同余关系是传递关系。

由(1)、(2)、(3)得证。

陪集和拉式定理

考虑其等价类: 对  $\forall a \in G$ , 有:

$$[a]_R = \{x \mid (\text{一切 } x \in G) \wedge (x \equiv a \pmod{H})\}$$

$$= \{x \mid (\text{一切 } x \in G) \wedge (h = x * a^{-1} \in H)\}$$

$$= \{h * a \mid (\text{一切 } h \in H)\}$$

$$\text{记 } Ha = \{h * a \mid (\text{一切 } h \in H)\} = [a]_R,$$

称  $Ha$  为  $H$  在  $\langle G, * \rangle$  中的一个右陪集。

同理, 可定义  $\langle G, * \rangle$  的左陪集。

定理:

设  $\langle H, * \rangle$  是群  $\langle G, * \rangle$  的子群,  $a$  是  $G$  中任意元素, 称

(1)  $aH = \{a * h \mid h \in H\}$  为子群  $H$  在群  $G$  中的一个左陪集;

(2)  $Ha = \{h * a \mid h \in H\}$  为子群  $H$  在群  $G$  中的一个右陪集。

$a$  称为左陪集  $aH$  (或右陪集  $Ha$ ) 的代表元。

例 计算群  $\langle 6, +_6 \rangle$  的子群  $\langle \{0, 2, 4\}, +_6 \rangle$  的一切左、右陪集。

解: 令  $H = \{0, 2, 4\}$ , 则所有的右陪集有:

$$H0 = \{0, 2, 4\} \quad 0 = \{0, 2, 4\},$$

$$H1 = \{0, 2, 4\} 1 = \{1, 3, 5\},$$

$$H2 = \{0, 2, 4\} 2 = \{2, 4, 0\},$$

$$H3 = \{0, 2, 4\} 3 = \{3, 5, 1\},$$

$$H4 = \{0, 2, 4\} 4 = \{4, 0, 2\},$$

$$H5 = \{0, 2, 4\} 5 = \{5, 1, 3\},$$

$$\text{即 } H0 = H2 = H4, H1 = H3 = H5, H0 \cup H1 = 6;$$

同理,所有的左陪集有

$$0H = 0\{0, 2, 4\} = \{0, 2, 4\},$$

$$1H = 1\{0, 2, 4\} = \{1, 3, 5\},$$

$$2H = 2\{0, 2, 4\} = \{2, 4, 0\},$$

$$3H = 3\{0, 2, 4\} = \{3, 5, 1\},$$

$$4H = 4\{0, 2, 4\} = \{4, 0, 2\},$$

$$5H = 5\{0, 2, 4\} = \{5, 1, 3\},$$

$$\text{有: } 0H = 2H = 4H, 1H = 3H = 5H, 0H \cup 1H = 6。$$

例 设  $G = \langle Z, + \rangle, H = \{km \mid k \in Z\}$ , 则  $H$  是  $G$  的子群, 计算  $H$  的左、右陪集。

解: 根据定义, 所有的左、右陪集为:

$$0H = H0 = H = \{km \mid k \in Z\},$$

$$1H = H1 = \{km + 1 \mid k \in Z\},$$

.....

$$(m-1)H = H(m-1) = \{km + m - 1 \mid k \in Z\}。$$

设  $\langle H, * \rangle$  是群  $\langle G, * \rangle$  的子群,  $e$  是么元,  $a, b \in G$ , 则

$$(1) eH = H = He;$$

$$(2) Ha = H \Leftrightarrow a \in H (aH = H \Leftrightarrow a \in H);$$

$$(3) a \in Hb \Leftrightarrow Ha = Hb \Leftrightarrow a * b^{-1} \in H (a \in bH \Leftrightarrow aH = bH \Leftrightarrow a^{-1} * b \in H)。$$

### 知识点3 求陪集的方法

设  $H$  是有限群  $G$  的一个子群, 求  $H$  的左、右陪集:

(1) 首先  $H$  本身是  $G$  的一个左、右陪集;

(2) 任取  $a \in G$ , 但  $a \notin H$ , 求  $aH, Ha$ , 此时有:

$$H \cap aH = \Phi, H \cap Ha = \Phi; \text{又得一个左、右陪集;}$$

(3) 任取  $b \in G$ , 但  $b \notin H \cup Ha$ , 求  $bH, Hb$ , 此时

$$H \cap aH \cap bH = \Phi, H \cap Ha \cap Hb = \Phi;$$

又得一个左、右陪集;

(4) 反复上述过程, 有:

$$G = H \cup aH \cup bH \cup \dots = H \cup Ha \cup Hb \cup \dots。$$

性质:设  $\langle H, * \rangle$  是群  $\langle G, * \rangle$  的子群, 则

(1) 对  $a \in G$ , 有  $|Ha| = |H| = |aH|$ ;

(2) 对  $b \in G$ , 有  $|Hb| = |H| = |bH|$ ;

(3) 对  $a, b \in G$ , 有  $|aH| = |bH| = |Ha| = |Hb|$ 。

证明:略。

#### 知识点4 拉格朗日定理

有限群  $\langle G, * \rangle$  的阶  $n$  一定被它的任意子群  $\langle H, * \rangle$  的阶  $m$  所等分, 即  $k = |G|/|H| = n/m$  是整数, 称  $k$  为  $G$  内  $H$  的指数,  $k$  正好是关于  $H$  的一切不同左(右)陪集的个数。

证明:令所有不同的左陪集有  $k$  个, 设为  $S = \{a_1H, a_2H, \dots, a_kH\}$ , 则  $S$  就是  $G$  的一个划分, 此时有

$$n = |G| = \left| \bigcup_{i=1}^k Ha_i \right| = \sum_{i=1}^k |Ha_i| = km$$

即子群  $H$  的阶  $m$  整除群  $G$  的阶  $n$ , 而且其整除的倍数就是不相同的左陪集的个数(同样, 如果使用右陪集, 会得到同样的结果)。

结论:

结论1:设  $H$  是有限群  $G$  的子群, 则  $H$  的阶整除  $G$  的阶, 即  $|H| \mid |G|$ 。

证明:略。

结论2:素数阶有限群  $\langle G, * \rangle$  只有平凡子群, 而无真子群。

证明:设  $\langle H, * \rangle$  是  $G$  的任意子群, 则  $|G|/|H|$  是整数, 因为  $|G|$  是素数, 则  $|H| = 1$  或  $|H| = |G|$ ,

所以  $H$  只能是  $G$  的平凡子群, 进而  $G$  没有真子群。

结论3:有限群  $\langle G, * \rangle$  中任意元素  $a$  的周期都整除群的阶。

证明:设  $G$  的阶为  $n$ ,  $a$  的周期为  $m$ , 则集合  $H = \{a, a^2, \dots, a^m\}$  是  $G$  的子群, 由拉格朗日定理, 有  $k = |G|/|H|$  是整数, 即  $m$  整除  $n$ 。

结论4:阶为  $n$  的有限群  $\langle G, * \rangle$  中, 对  $a \in G$ , 有  $a^n = e$ 。

结论5:阶为  $n$  的有限群  $\langle G, * \rangle$  都有循环子群存在, 该子群的生成元的周期均能整除  $n$ 。

结论6:素数阶有限群  $G$  都是循环群, 并且除幺元以外的其他元素都是其生成元。

证明:设  $G$  的阶为  $p$ , 则  $p > 1$ , 任意取定  $a \in G$ , 且  $a \neq e$ , 则  $a$  的周期  $m$  必大于1, 由  $a$  生成的循环子群:  $H = \{a, a^2, \dots, a^m\}$ ,

的阶为  $m$ , 由拉格朗日定理知:  $m \mid p$ ,

由于  $p$  是素数, 且  $m > 1$ , 所以  $m = p$ ,

又  $H$  是  $G$  的子集, 且  $G$  是有限集, 所以有  $G = H$ 。

$H$  是循环群, 所以  $G$  是循环群, 且任意的非幺元  $a$  也是  $G$  的生成元。

#### 知识点5 正规子群(不变子群)

定义:设  $\langle H, * \rangle$  是群  $\langle G, * \rangle$  的子群, 如果对  $\forall a \in G$ , 都有  $aH = Ha$ ,

则称  $H$  是  $G$  的正规子群(或称为不变子群), 此时左陪集和右陪集简称为陪集。



显然,两个平凡子群 $\langle G, * \rangle$ 和 $\langle \{e\}, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的正规子群。

例 设 $\langle H_1, * \rangle$ 和 $\langle H_2, * \rangle$ 是群 $\langle G, * \rangle$ 的正规子群,证明 $\langle H_1 \cap H_2, * \rangle$ 也是正规子群。

【详见课程视频】

定理:设 $\langle H, * \rangle$ 是群 $\langle G, * \rangle$ 的子群,则 $H$ 是 $G$ 的正规子群的充分必要条件是:

对 $\forall a \in G, h \in H$ ,都有 $a * h * a^{-1} \in H$ 。

证明:必要性:若 $H$ 是 $G$ 的正规子群,则 $a \in G, h \in H$ ,有 $a * h \in aH = Ha$ ,即存在 $h_1 \in H$ ,使得

$a * h = h_1 * a$ ,于是 $a * h * a^{-1} = h_1 \in H$ ,故 $a * h * a^{-1} \in H$ 。

充分性: $\forall a * h \in aH$ ,因 $a * h * a^{-1} \in H$ ,所以,存在 $h_1 \in H$ ,使得 $a * h * a^{-1} = h_1$ ,

于是 $a * h = h_1 * a$ ,从而 $aH \subseteq Ha$ 。

又 $\forall h * a \in Ha$ ,则 $a^{-1} * h * (a^{-1})^{-1} = a^{-1} * h * a \in H$ ,

所以,存在 $h_2 \in H$ ,使得 $a^{-1} * h * a = h_2$ ,

于是 $h * a = a * h_2$ ,从而 $Ha \subseteq aH$ 。故对

$\forall a \in G$ ,都有 $aH = Ha$ 。即 $H$ 是 $G$ 的正规子群。

推论:交换群的任何子群是正规子群。

## 二、本讲小结

本讲主要讲解了交换群、循环群等特殊群的概念及性质、陪集和拉格朗日定理、正规子群和商群的概念和性质

重点讲解了两类循环群,拉格朗日定理以及商群的概念

常考题型多为判断、选择、证明和计算题。

应试方法主要是熟记概念及解题套路。

## 第6讲 环和域、偏序格与代数格

### 一、考点讲解:

1) 环、域的定义及性质

2) 格的概念

3) 偏序格与代数格的等价关系

#### 知识点1 环的定义

设 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 是一个代数系统,如果满足:

(1)  $\langle R, + \rangle$ 是阿贝尔群;

(2)  $\langle R, \cdot \rangle$ 是半群;

(3) 运算 $\cdot$ 对于运算 $+$ 是可分配的

则称 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 是环。

即:  $a, b \in R$

$$1) a + b = b + a,$$

$$2) a + (b + c) = (a + b) + c,$$

$$3) R \text{ 中有一个元素 } 0, \text{ 适合 } a + 0 = a,$$

$$4) \text{ 对于 } R \text{ 中任意 } a, \text{ 有 } -a, \text{ 适合 } a + (-a) = 0,$$

$$5) a(bc) = (ab)c,$$

$$6) a(b+c) = ab+ac, (a+b)c = ac+bc。$$

例 证明  $(Z, \otimes, \theta)$  是环, 其中  $Z$  是整数集, 运算  $\otimes, \theta$  定义如下:

$$a\theta b = a + b - 1, a \otimes b = a + b - ab$$

证明 (1) 证  $(Z, \theta)$  是交换群.

$$\forall a, b, c \in Z,$$

$$(a\theta b)\theta c = (a + b - 1)\theta c = a + b + c - 2$$

$$a\theta(b\theta c) = a\theta(b + c - 1) - 1 = a + b + c - 2$$

$$\therefore (a\theta b)\theta c = a\theta(b\theta c)$$

显然有  $a\theta b = b\theta a$

又  $1\theta a = a = a\theta 1$ , 即 1 是运算  $\theta$  的单位元

$$\forall a \in Z, 2 - a \in Z, \text{ 有 } a\theta(2 - a) = a + (2 - a) - 1 = 1 \text{ (单位元)}$$

即  $2 - a$  是  $a$  关于运算  $\theta$  的逆元.

所以,  $(Z, \theta)$  是交换群.

(2) 证  $(Z, \otimes)$  是半群.

$$\forall a, b, c \in Z,$$

$$(a \otimes b) \otimes c = (a + b - ab) \otimes c = a + b - ab + c - (a + b - ab)c$$

$$= a + b + c - ac - bc + abc$$

$$a \otimes (b \otimes c) = a \otimes (b + c - bc) = a + (b + c - bc) - a(b + c - bc)$$

$$= a + (b + c - bc) - a(b + c - bc)$$

$$\therefore (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$$

所以运算  $\otimes$  是可结合的. 那么  $(Z, \otimes)$  是半群.

(3) 证运算  $\otimes$  对  $\theta$  适合分配律.

$$\forall a, b, c \in Z$$

$$(a\theta b) \otimes c = (a + b - 1) \otimes c = a + b - 1 + c - (a + b - 1)c$$

$$= a + b + 2c - ac - bc - 1$$

$$a \otimes c\theta b \otimes c = (a + c - ac)\theta(b + c - bc) = a + 2c + b - ac - bc - 1$$

$$\therefore (a\theta b) \otimes c = a \otimes c\theta b \otimes c$$

$$c \otimes (a\theta b) = c \otimes (a + b - 1) = c + (a + b - 1) - c(a + b - 1)$$

$$= a + b + 2c - bc - ac - 1$$

$$c \otimes a\theta c \otimes b = (c + a - ca)\theta(c + b - cb) = a + b + 2c - ac - bc - 1$$

$$\therefore c \otimes (a\theta b) = c \otimes a\theta c \otimes b$$

故运算  $\otimes$  对  $\theta$  适合分配律.

综上所述,  $(Z, \otimes, \theta)$  是环.

## 知识点 2 环的性质

定理设  $\langle R, +, \cdot \rangle$  是一个环, 则对任意  $a, b, c \in R$  有

$$(1) a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c;$$

$$(2) (b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a;$$

$$(3) a \cdot \theta = \theta \cdot a = \theta;$$

$$(4) a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b);$$

$$(5) (-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

零因子和无零因子环

定义: 设  $\langle R, +, \cdot \rangle$  是环, 对  $a, b \in R, a \neq 0, b \neq 0$ , 但  $a \cdot b = 0$ , 则称  $a$  是  $R$  中的一个左零因子,  $b$  是  $R$  中的一个右零因子; 若一个元素既是左零因子, 又是右零因子, 则称它是一个零因子。

定义: 设  $R$  是一个环, 对于任意的  $a, b \in R$ , 若  $a \cdot b = 0$ , 则  $a = 0$  或者  $b = 0$ , 就称  $R$  是一个无零因子环。

定理: 设  $\langle R, +, \cdot \rangle$  是环,  $R$  是无零因子环的充分必要条件是: 在  $R$  中乘法适合消去律。即对任意  $a, b, c \in R, a \neq 0$ , 若有  $a \cdot b = a \cdot c$  (或者  $b \cdot a = c \cdot a$ ), 则有  $b = c$ 。

定义: 设  $\langle R, +, \cdot \rangle$  是环, 如果  $\langle R, +, \cdot \rangle$  是可交换的, 则称  $\langle R, +, \cdot \rangle$  是可交换环。

### 知识点3 整环、除环和域

定义: 设  $\langle A, +, \cdot \rangle$  是一个代数系统, 若满足:

- (1)  $\langle A, + \rangle$  是阿贝尔群;
- (2)  $\langle A, \cdot \rangle$  是可交换的独异点, 且无零因子, 即对任意  $a, b \in A, a \neq \theta, b \neq \theta$ , 必有  $a \cdot b \neq \theta$ ;
- (3) 运算  $\cdot$  对  $+$  是可分配的。

则称  $\langle A, +, \cdot \rangle$  是整环。

### 知识点4 整环、除环和域

定义: 设  $\langle R, +, \cdot \rangle$  是一个环, 且  $|R| \geq 2$ ,

- (1)  $R$  有么元;
- (2) 每个非零元有逆元。

则称  $\langle R, +, \cdot \rangle$  是除环。

如果一个除环是可以交换的, 称之为域。

### 知识点5 格的定义(偏序格与代数格)

设  $\langle L, \leq \rangle$  是一个偏序集, 如果对任意  $a, b \in L, \{a, b\}$  都有最大下界和最小上界存在, 则称  $\langle L, \leq \rangle$  是格, 简称  $L$  是格。若  $L$  为有限集, 则称格  $\langle L, \leq \rangle$  为有限格。

暂且把由偏序关系定义的格称为偏序格。

#### 保交与保联

在格  $\langle L, \leq \rangle$  中, 任取  $a, b \in G$ , 则  $\{a, b\}$  的最大下界和最小上界都是惟一存在的, 且均属于  $L$ 。

用  $a \wedge b$  表示  $\{a, b\}$  的最大下界, 称为  $a$  与  $b$  的保交, 用  $a \vee b$  表示  $\{a, b\}$  的最小上界, 称为  $a$  与  $b$  的保联, 即

$$a \wedge b = GLB\{a, b\}, a \vee b = LUB\{a, b\}$$

也可用  $\cap$  和  $\cup$ 、 $\cdot$  和  $+$ 、 $*$  和  $\oplus$  分别表示保交和保联

判断一个偏序集  $\langle L, \leq \rangle$  是否是格, 要对  $L$  的所有 2 元素子集看它是否都有最大下界和最小上界:

(1) 考虑偏序集  $\langle Z^+, D \rangle$ , 其中  $Z^+$  是正整数,  $D$  是一个整除关系, 问此偏序集  $\langle Z^+, D \rangle$  是否是一个格?

(2) 设  $A$  是一个集合,  $P(A)$  是  $A$  的幂集, 是集合上的包含关系, 问此偏序集  $\langle P(A), \supseteq \rangle$  是否是一个格?

(3) 考虑偏序集  $\langle S_n, D \rangle$ , 其中  $D$  是一个整除关系,  $S_n$  是  $n$  的所有因子的集合, 问此偏序集  $\langle S_n, D \rangle$  是否是一个格?

(4) 所有的全序集  $\langle L, \leq \rangle$  都是格?

例(1) 考虑偏序集  $\langle Z^+, D \rangle$ , 其中  $Z^+$  是正整数,  $D$  是一个整除关系, 问此偏序集  $\langle Z^+, D \rangle$  是否是一个格?

解: 对  $a, b \in Z^+$ , 有

$$a \wedge b = GLB\{a, b\} = GCD\{a, b\} \in Z^+$$

$GCD$  表示  $\{a, b\}$  的最大公因子。

$$a \vee b = LUB\{a, b\} = LCM\{a, b\} \in Z^+$$

$LCM$  表示  $\{a, b\}$  的最小公倍数。

所以,  $\langle Z^+, D \rangle$  是一个格。

例(2) 设  $A$  是一个集合,  $P(A)$  是  $A$  的幂集, 是集合上的包含关系, 问此偏序集  $\langle P(A), \supseteq \rangle$  是否是一个格?

解: 对  $S_1, S_2 \in P(S)$ , 有

$$S_1 \wedge S_2 = GLB\{S_1, S_2\} = S_1 \cap S_2 \in P(S)$$

$$S_1 \vee S_2 = LUB\{S_1, S_2\} = S_1 \cup S_2 \in P(S)$$

所以,  $\langle P(S), \cap, \cup \rangle$  是一个格。

例(3) 考虑偏序集  $\langle S_n, D \rangle$ , 其中  $D$  是一个整除关系,  $S_n$  是  $n$  的所有因子的集合, 问此偏序集  $\langle S_n, D \rangle$  是否是一个格?

解: 由(1)可知:  $\langle S_n, D \rangle$  一定是一个格。

举例, 当  $n=6$  和  $n=24$  时, 有  $\langle S_6, D \rangle$  和  $\langle S_{24}, D \rangle$  是格。

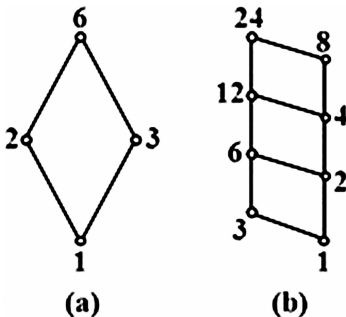
此时  $S_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ ,  $S_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ ,

对  $a, b \in S_6$  (或  $S_{24}$ ), 有

$$a \wedge b = GLB\{a, b\} = GCD\{a, b\} \in S_6 \text{ (或 } S_{24})$$

$$a \vee b = LUB\{a, b\} = LCM\{a, b\} \in S_6 \text{ (或 } S_{24})$$

对应的 Hasse 图如图(a)和图(b)所示。





例(4) 所有的全序集  $\langle L, \leq \rangle$  都是格?

解: 因为在全序集  $\langle L, \leq \rangle$  中, 对任意  $a, b \in L$ , 都有

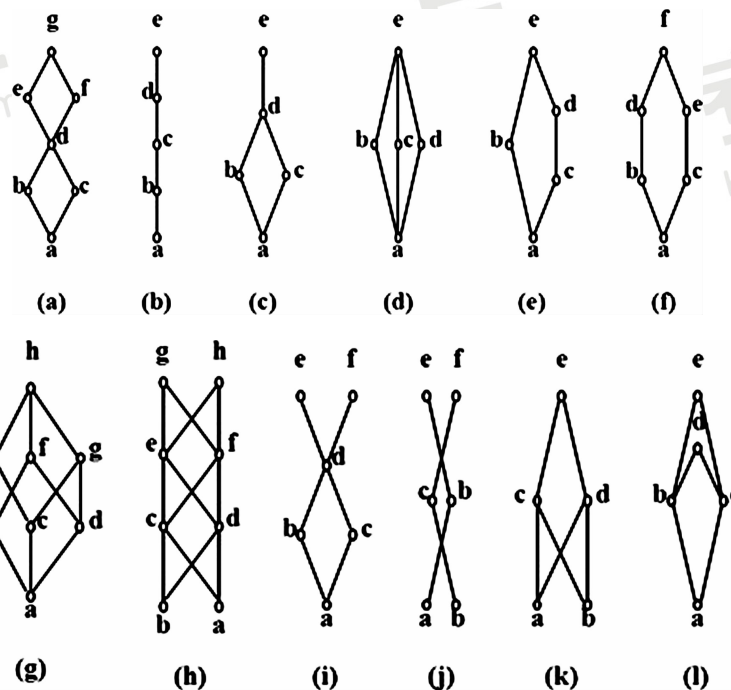
$a \leq b$  或  $b \leq a$  成立。

若  $a \leq b$  成立, 则  $\{a, b\}$  有最大下界为  $a$ , 最小上界为  $b$ ;

若  $b \leq a$  成立, 则  $\{a, b\}$  有最大下界为  $b$ , 最小上界为  $a$ ;

故  $\langle L, \leq \rangle$  是一个格。

例 判断哈斯图如下图所示的几个偏序集是否是格。



#### 知识点6 代数格

定义: 设  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  是具有两个二元运算的代数系统, 如果运算  $\wedge$  和  $\vee$  满足交换律、结合律和吸收律, 则称  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  为格。

把由代数系统定义的格称为代数格。

例 设  $A$  是一个集合,  $P(A)$  是  $A$  的幂集,  $\cap$  和  $\cup$  分别是集合的交和并运算, 试证明代数系统  $\langle P(A), \cap, \cup \rangle$  是一个格。

证明: 由集合的运算性质知, 交和并运算都满足交换律、结合律和吸收律, 因此由定义知,  $\langle P(A), \cap, \cup \rangle$  是一个格。

定理: 偏序格与代数格是等价的。

证明: 先证偏序格是代数格。

设  $\langle L, \leq \rangle$  是一个格,  $*$  和  $\oplus$  分别是  $L$  上的保交和保联。对任意  $a, b \in L$ , 由最小上界和最大下界的惟一性知,

$$a * b = b * a, a \oplus b = b \oplus a$$

即  $*$  和  $\oplus$  都满足交换律。

对任意  $a, b, c \in L$ , 因为  $(a * b) * c \leq a * b \leq b, (a * b) * c \leq c$ , 所以

$$(a * b) * c \leq b * c$$

又因为  $(a * b) * c \leq a * b \leq a$ , 于是有

$$(a * b) * c \leq a * (b * c)$$

同样有,  $a * (b * c) \leq (a * b) * c$ 。故

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

即  $*$  满足结合律。

同理可证,  $\oplus$  满足结合律。

对任意  $a, b \in L$ , 因为  $a \leq a, a \leq a \oplus b$ , 所以

$$a \leq a * (a \oplus b)$$

显然  $a * (a \oplus b) \leq a$ , 故

$$a * (a \oplus b) = a$$

同理可证,  $a \oplus (a * b) = a$ 。

故  $*$  与  $\oplus$  满足吸收律。

综上,  $\langle L, *, \oplus \rangle$  是一个代数格。

再证一个代数格是一个偏序格。

设代数系统  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  一个格, 在  $L$  上定义一种关系“ $\leq$ ”如下: 对任意  $a, b \in L$ , 有

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \quad (1)$$

分下面 3 步证明。

(1) 证明  $\leq$  是偏序关系。

对任意  $a \in L$ , 由吸收律有

$$a \wedge a = a \wedge (a \vee (a \wedge a)) = a$$

故  $a \leq a$ , 即关系  $\leq$  是自反的。

对任意  $a, b \in L$ , 若  $a \leq b, b \leq a$ , 有:

$$a \wedge b = a, a \wedge b = b$$

所以  $a = b$ , 即关系  $\leq$  是反对称的。

对任意  $a, b, c \in L$ , 若  $a \leq b, b \leq c$ , 有

$$a \wedge b = a, b \wedge c = b$$

由结合律知

$$a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$$

所以  $a \leq c$ , 即关系  $\leq$  是传递的。

故  $\leq$  是偏序关系, 即  $\langle L, \leq \rangle$  是偏序集。

(2) 证明: 对任意  $a, b \in L$ , 有

$$a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$$

事实上,若有  $a \wedge b = a$ ,则由吸收律

$$a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b$$

反之,若  $a \vee b = b$ ,再由吸收律

$$a \wedge b = a \wedge (a \vee b) = a$$

因此,  $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$ 。

(3) 证明:对任意  $a, b \in L$ ,  $\{a, b\}$  存在最大下界和最小上界。

由吸收律

$$a \wedge (a \vee b) = a \Leftrightarrow a \leq a \vee b$$

$$b \wedge (a \vee b) = b \Leftrightarrow b \leq a \vee b$$

因此,  $a \vee b$  是  $\{a, b\}$  的一个上界。

设  $c \in L$  是  $\{a, b\}$  的任意一个上界,即  $a \leq c, b \leq c$ ,于是有

$$a \vee c = c, b \vee c = c$$

由结合律知

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) = a \vee c = c$$

故有  $a \vee b \leq c$ ,即  $a \vee b$  是  $\{a, b\}$  的最小上界。

同理,  $a \wedge b$  是  $\{a, b\}$  的最大下界。

故  $\langle L, \leq \rangle$  是一个格。且有

$$a * b = a \wedge b, a \oplus b = a \vee b$$

注意:偏序格与代数格等价,今后就不再区分偏序格与代数格了,而把它们统称为格。

#### 知识点7 自然运算与自然偏序

任何偏序格  $\langle L, \leq \rangle$  都存在两个二元运算——保交( $*$ )和保联( $\oplus$ ),称之为格  $\langle L, \leq \rangle$  的自然运算;

代数格  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  都可以得到一个偏序关系  $\leq$ ,称之为格  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  的自然偏序。

#### 知识点8 对偶格

对于集合  $L$  的任何偏序关系“ $\leq$ ”,其逆关系“ $\geq$ ”也是集合  $L$  上的偏序关系;

对  $L$  的任意子集  $T$ ,  $T$  在偏序集  $\langle L, \leq \rangle$  中的最大下界和最小上界分别是  $\langle L, \geq \rangle$  中的最小上界和最大下界。

因此偏序集  $\langle L, \leq \rangle$  是格当且仅当  $\langle L, \geq \rangle$  是格,我们称此两个格为对偶格;

格  $\langle L, \leq \rangle$  的保联运算与保交运算分别是对偶格  $\langle L, \geq \rangle$  的保交运算和保联运算。

#### 知识点9 对偶原理

对于格  $\langle L, \leq \rangle$  的任何命题,将保联运算与保交运算分别换成对偶格  $\langle L, \geq \rangle$  的保交运算和保联运算,将命题中的“ $\leq$ ”换成对偶格  $\langle L, \geq \rangle$  中的“ $\geq$ ”,得到的一个关于对偶格  $\langle L, \geq \rangle$  中的命题,称这个命题为对偶命题。

容易证明,关于格  $\langle L, \leq \rangle$  的任何真命题,其对应的对偶命题在对偶格  $\langle L, \geq \rangle$  中也是真命题,

把这个原理称为对偶原理。

性质:设  $\langle L, \leq \rangle$  是格,“ $\geq$ ”是“ $\leq$ ”的逆关系。则对任意  $a, b, c, d \in L$ , 有

$$(1) \text{自反性: } a \leq a; a \geq a$$

$$(2) \text{反对称性: } a \leq b \text{ 且 } b \leq a \Rightarrow a = b$$

$$a \geq b \text{ 且 } b \geq a \Rightarrow a = b$$

$$(3) \text{传递性: } a \leq b \text{ 且 } b \leq c \Rightarrow a \leq c;$$

$$a \geq b \text{ 且 } b \geq c \Rightarrow a \geq c$$

$$(4) a \wedge b \leq a; a \vee b \geq a$$

$$(5) c \leq a \text{ 且 } c \leq b \Rightarrow c \leq a \wedge b; c \geq a \text{ 且 } c \geq b \Rightarrow c \geq a \vee b$$

$$(6) \text{交换律: } a \wedge b = b \wedge a; a \vee b = b \vee a。$$

$$(7) \text{结合律: } (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c);$$

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$$

$$(8) \text{吸收律: } a \wedge (a \vee b) = a; a \vee (a \wedge b) = a$$

$$(9) \text{幂等律: } a \wedge a = a; a \vee a = a$$

性质(9)由性质(8)得到:

$$a \wedge a = a \wedge (a \vee (a \wedge a)) = a,$$

$$a \vee a = a \vee (a \wedge (a \vee a)) = a。$$

$$(10) a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$$

性质(10)由最大下界和最小上界的定义直接得到

$$(11) a \leq b \text{ 且 } c \leq d \Rightarrow a \wedge c \leq b \wedge d; a \leq b \text{ 且 } c \leq d \Rightarrow a \vee c \leq b \vee d$$

性质(11):因  $a \wedge c \leq a, a \wedge c \leq c$ , 由假设  $a \leq b, c \leq d$ , 利用传递性得  $a \wedge c \leq b, a \wedge c \leq d$ , 由性质(5)

得  $a \wedge c \leq b \wedge d$ ; 同理可证,  $a \vee c \leq b \vee d$ 。

$$(12) \text{保序性: } a \leq b \Rightarrow a \wedge c \leq b \wedge c; a \leq b \Rightarrow a \vee c \leq b \vee c$$

$$(13) \text{分配不等式: } a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c); a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$(14) \text{模不等式: } a \leq c \Leftrightarrow a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$$

性质(13):因  $a \wedge b \leq a, a \wedge c \leq a$ ,

$$\text{所以 } (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a$$

$$\text{由于 } a \wedge b \leq b, a \wedge c \leq c,$$

$$\text{由性质(11)得 } (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq b \vee c$$

$$\text{故 } (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c), \text{ 即 } a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

## 二、本讲小结

本讲主要讲解了环和域的概念及性质、格的定义、格的代数定义以及偏序定义,及其两者等价证明;格的性质

重点讲解了格的定义及性质

常考题型多为判断、选择、证明和计算题。

应试方法主要是熟记概念及解题套路。



## 第7讲 特殊格与布尔代数

## 一、考点讲解:

- 1) 各种特殊格、布尔代数的概念与判断
- 2) 子格与子布尔代数、格同态与布尔同态的概念与证明

## 知识点1 子格

(代数格角度) 设代数系统  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  是一个格,  $S \subseteq L$ , 若  $S$  满足:

(1)  $S \neq \Phi$ ;

(2) 运算  $\wedge$  和  $\vee$  对子集  $S$  都是封闭的; 则称  $\langle S, \wedge, \vee \rangle$  是  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  的子格, 简称  $S$  是  $L$  的子格。

(偏序格角度) 设  $\langle L, \leq \rangle$  是一个格,  $S \subseteq L$ , 若  $S$  满足:

(1)  $S \neq \Phi$ ;

(2) 对任意  $a, b \in S$ ,  $\langle L, \leq \rangle$  的保交和保联运算都有

$$a \wedge b = GLB\{a, b\} \in S,$$

$$a \vee b = LUB\{a, b\} \in S,$$

则称  $\langle S, \leq \rangle$  是  $\langle L, \leq \rangle$  的一个子格, 简称  $S$  是  $L$  的子格。

例 在正整数集合  $Z^+$  中规定  $\wedge, \vee$  为: 对任意  $a, b \in P$ ,

$$a \wedge b = [a, b], \text{ 其中 } [a, b] \text{ 表示 } a, b \text{ 的最小公倍数}$$

$$a \vee b = (a, b), \text{ 其中 } (a, b) \text{ 表示 } a, b \text{ 的最大公因数}$$

则  $\wedge, \vee$  是  $Z^+$  上的二元运算, 且满足交换律、结合律、吸收律和等幂律, 于是  $\langle Z^+, \wedge, \vee \rangle$  是一个格。  $S = \{3k | k \in Z^+\} \subseteq Z^+$ ,

试证明:  $\langle S, \wedge, \vee \rangle$  是  $\langle Z^+, \wedge, \vee \rangle$  的子格。

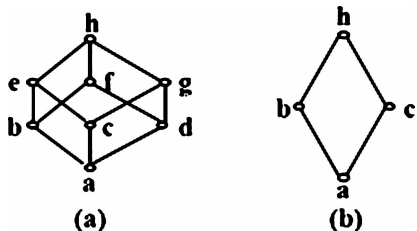
证明: 显然  $S \neq \Phi$ 。因为对任意  $3m, 3n \in S$ , 都有

$$3m \vee 3n = [3m, 3n] = 3[m, n] \in S,$$

$$3m \wedge 3n = (3m, 3n) = 3(m, n) \in S$$

所以,  $\langle S, \wedge, \vee \rangle$  是  $\langle Z^+, \wedge, \vee \rangle$  的子格。

在如下图(a)所示的偏序格  $\langle L, \leq \rangle$  中, 考虑如下子集:  $B_1 = \{a, b, g, h\}$ ,  $B_2 = \{a, b, c, d\}$ ,  $B_3 = \{a, b, d, h\}$ , 问  $B_1, B_2, B_3$  中那些是  $\langle L, \leq \rangle$  的子格?



分析:显然  $B_1, B_2, B_3$  都是  $L$  的非空子集,  $B_1$  是  $L$  的子格;  $B_2$  的 2 元素子集  $\{b, c\}$  的最小上界  $e$  不在  $B_2$  中, 因此  $B_2$  不是  $L$  的子格;  $B_3$  的 2 元素子集  $\{b, c\}$  的最小上界  $e$  不在  $B_3$  中, 因此  $B_3$  不是  $L$  的子格。

注意, 偏序集  $\langle B_3, \leq \rangle$  的哈斯图如上图(b)所示, 因此  $\langle B_3, \leq \rangle$  是格。即存在子集关于偏序能构成格, 但不是子格, 主要原因是它们的保交或保联运算不一样。

解:  $B_1$  是  $L$  的子格,  $B_2, B_3, B_4$  都不是  $L$  的子格。

例 设  $\langle L, \leq \rangle$  是一个格,  $a \in L$ , 令  $S = \{x \mid x \in L, x \leq a\}$ , 则  $S$  是  $L$  的子格。

证明: 因为  $a \leq a$ , 所以  $a \in S$ , 即  $S$  是非空子集。

对任意  $x, y \in S$ , 由  $x \leq a, y \leq a$ , 可知

$x \wedge y = GLB\{x, y\} \leq a$ , 即  $x \wedge y = GLB\{x, y\} \in S$

$x \vee y = LUB\{x, y\} \leq a$ , 即  $x \vee y = LUB\{x, y\} \in S$

故  $S$  是  $L$  的子格。

### 知识点2 格同态与同构

设  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  和  $\langle S, *, \oplus \rangle$  是两个格,  $f$  是  $L$  到  $S$  的映射。如果对任意  $x, y \in L$ , 都有

$f(x \wedge y) = f(x) * f(y), f(x \vee y) = f(x) \oplus f(y)$

则称  $f$  为从格  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  到格  $\langle S, *, \oplus \rangle$  的格同态映射, 简称格同态。

如果  $f$  是格同态, 当  $f$  分别是单射、满射和双射时,  $f$  分别称为单一格同态、满格同态和格同构。

### 知识点3 保序定理

设  $\langle L_1, \wedge_1, \vee_1 \rangle$  和  $\langle L_2, \wedge_2, \vee_2 \rangle$  是两个格, 对应的偏序关系为  $\leq_1, \leq_2$ , 则有:

(1) 如  $f: L_1 \rightarrow L_2$  是格同态, 则对任意  $a, b \in L_1, a \leq_1 b \Rightarrow f(a) \leq_2 f(b)$ ;

(2) 如  $f: L_1 \rightarrow L_2$  是格同构, 则对任意  $a, b \in L_1, a \leq_1 b \Leftrightarrow f(a) \leq_2 f(b)$ 。

证明: (1) 对任意  $a, b \in L_1$ , 若  $a \leq_1 b$ , 则有  $a \wedge_1 b = a$ ,

由同态式知:  $f(a) \wedge_2 f(b) = f(a \wedge_1 b) = f(a)$

所以  $f(a) \leq_2 f(b)$ 。

(2) “ $\Rightarrow$ ”: 若  $f$  是格同构, 则  $f$  是格同态。由(1)知: 对任意  $a, b \in L_1, a \leq_1 b \Rightarrow f(a) \leq_2 f(b)$ 。

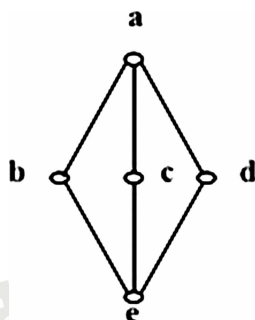
“ $\Leftarrow$ ”: 对任意  $a, b \in L_1$ , 有  $f(a) \leq_2 f(b) \Rightarrow f(a) \wedge_2 f(b) = f(a)$

于是, 由同态式知  $f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b) = f(a)$

因  $f$  是单射, 故有  $a \wedge_1 b = a$ , 所以,  $a \leq_1 b$ 。

例 设  $\langle L, \leq \rangle$  是格, 其中  $L = \{a, b, c, d, e\}$ , 它的 Hasse 图如右图所示。  $\langle P(L), \subseteq \rangle$  也是一个格。作映射  $f: L \rightarrow P(L)$ , 使得对任意  $x \in L$ , 有  $f(x) = \{y \mid y \in L, y \leq x\}$

试证明:  $f$  是保序映射, 但不是格同态。



分析:要证明 $f$ 是保序映射,必须验证:对任意 $x, y \in L, x \leq y, f(x) \subseteq f(y)$ 。而证明 $f$ 不是格同态,只需要找到一对 $x, y \in L$ ,使得 $f(x \vee y) \neq f(x) \cup f(y)$ 。

证明:容易验证 $f$ 是保序映射。

对于 $b, d \in L$ ,有 $b \vee d = a, f(b \vee d) = f(a) = L$ ,而 $f(b) \cup f(d) = \{b, e\} \cup \{d, e\} = \{b, d, e\}$

所以, $f(b \vee d) \neq f(b) \cup f(d)$ ,即 $f$ 不是格同态。

#### 知识点4 分配格

设 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 是一个格,如果对任意 $a, b, c \in L$ ,都有

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$

即运算满足分配律,则称 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 是一个分配格。

例 (1) 设 $A$ 为任意一个集合,格 $\langle P(A), \cap, \cup \rangle$ 是否是分配格?

(2) 设 $P$ 为命题公式集合, $\wedge$ 与 $\vee$ 分别是命题公式的合取与析取运算,格 $\langle P, \wedge, \vee \rangle$ 是否是分配格?

解:(1) 因集合的交、并运算满足分配律,所以,格 $\langle P(A), \cap, \cup \rangle$ 是一个分配格。

(2) 因命题公式的析取、合取运算满足分配律,所以,格 $\langle P, \wedge, \vee \rangle$ 是分配格。

定理:所有链都是分配格。

证明:设 $\langle L, \leq \rangle$ 是链,因此 $\langle L, \leq \rangle$ 是格,任取 $a, b, c \in L$ ,只有以下两种情况:

(1)  $a$ 是三者中最大的,即 $b \leq a, c \leq a$ ;

(2)  $a$ 不是三者中最大的,即 $a \leq b$ 或 $a \leq c$ 。

在情况(1)中, $b \vee c \leq a$ ,故 $a \wedge (b \vee c) = b \wedge c$ 。显然, $a \wedge b = b$ ,

$a \wedge c = c$ 。所以

$$a \wedge (b \vee c) = b \vee c = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)。$$

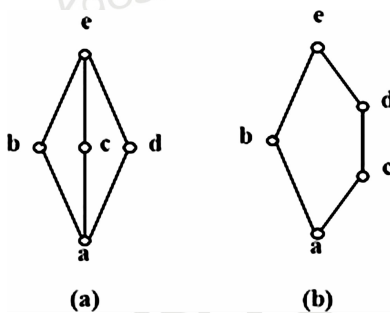
在情况(2)中, $a \leq b \vee c$ ,而 $a \wedge b = a$ 或 $a \wedge c = a$ ,从而

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a, \text{ 所以}$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a = a \wedge (b \vee c)$$

所以 $\langle L, \leq \rangle$ 是分配格。

例 右图所示的两个格都不是分配格。



分析:由于链是分配格,因此在同一条链上的元素都满足分配等式,最有可能不满足分配等式的

元素不在同一条链上。选取  $b, c, d$  来验证即可。

解:取图中  $b, c, d$  三个元素验证。在图(a)中,

$$b \wedge (c \vee d) = b \wedge a = b, \text{ 而}$$

$$(b \wedge c) \vee (b \wedge d) = e \vee e = e。$$

在图(b)中,

$$b \wedge (c \vee d) = b \wedge a = b, \text{ 而}$$

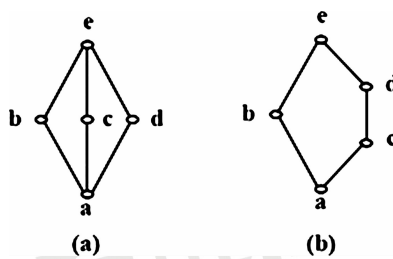
$$(b \wedge c) \vee (b \wedge d) = e \vee d = d。$$

因此,在图(a)和(b)中都有,

$$b \wedge (c \vee d) \neq (b \wedge c) \vee (b \wedge d)$$

故它们都不是分配格。

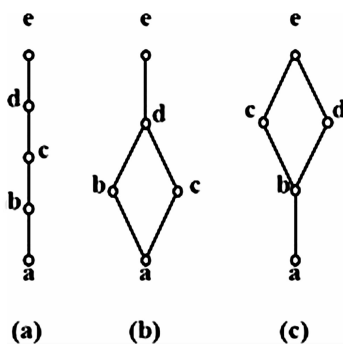
定理:一个格是分配格的充分必要条件是该格中没有任何子格与下图中的两个五元素格中的任何一个同构。



性质:

(1) 四个元素以下的格都是分配格;

(2) 五个元素的格仅有两个格是非分配格(图(a)和(b)),其余三个格(右图(a),(b)和(c))都是分配格。



定理:设  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  是分配格,对于任何  $a, x, y \in L$ ,如果  $a \wedge x = a \wedge y$  且  $a \vee x = a \vee y$ ,则  $x = y$ 。

证明: $x = x \wedge (a \vee x)$  (吸收律)

$$= x \wedge (a \vee y) \text{ (已知 } a \vee x = a \vee y \text{)}$$

$$= (x \wedge a) \vee (x \wedge y) \text{ (分配律)}$$

$$= (a \wedge y) \vee (x \wedge y) \text{ (已知 } a \wedge x = a \wedge y \text{)}$$

$$= y \wedge (a \vee x) \text{ (交换律,分配律)}$$



$$= y \wedge (a \vee y) \quad (\text{已知 } a \vee x = a \vee y)$$

$$= y \quad (\text{吸收律})$$

### 知识点5 模格

设  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  是格, 如果对任意  $a, b, c \in L$ , 有

$$a \leq b \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c) \quad (\text{模律})$$

$$a \geq b \Rightarrow a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$$

则称  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  为模格, 也称为戴德金格

定理: 分配格是模格。

证明: 设  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  是分配格, 对任意  $a, b, c \in L$ , 如果  $a \leq b$ ,

那么  $a \vee b = b$ , 由分配律得

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = b \wedge (a \vee c)$$

故是  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  模格。

### 知识点6 有界格

设  $\langle L, \leq \rangle$  是一个格, 若存在元素  $a \in L$ , 使得对任意  $x \in L$ , 都有:  $a \leq x$  (或  $x \leq a$ ),

则称  $a$  为格  $\langle L, \leq \rangle$  的全下界 (或全上界), 分别记为  $0$  (或  $1$ ), 具有全上界和全下界的格称为有界格。

显然, 对任意  $x \in L$ , 有

$$1 \wedge x = x \wedge 1 = x, 1 \vee x = x \vee 1 = 1$$

$$0 \wedge x = x \wedge 0 = 0, 0 \vee x = x \vee 0 = x$$

有限格与有界格

若  $\langle L, \leq \rangle$  是有限格, 设  $L = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , 由于运算“ $\wedge$ ”和“ $\vee$ ”满足结合律, 所以有

$$((a_1 \wedge a_2) \wedge \dots \wedge a_n) = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$$

$$((a_1 \vee a_2) \vee \dots \vee a_n) = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$$

此时,  $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$  和  $a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$  分别是格  $L$  的全下界和全上界, 即有

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = 0$$

$$a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n = 1$$

所以, 有限格一定是有界格。

在格  $\langle L, \leq \rangle$  中, 全下界和全上界分别是集合  $L$  的最小元和最大元, 由于最大元和最小元的惟一性, 有下面的定理:

定理: 设  $\langle L, \leq \rangle$  是一个格, 若格  $\langle L, \leq \rangle$  的全上界和全下界存在, 则必惟一。

### 知识点7 有补格

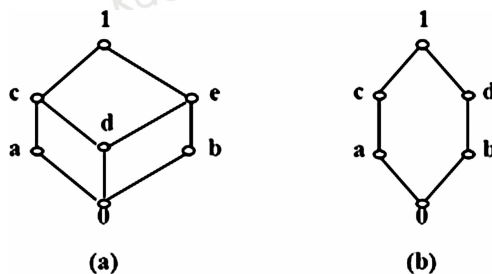
设  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  为有界格,  $1$  和  $0$  分别为它的全上界和全下界,  $a \in L$ 。如果存在  $b \in L$ , 使得

$$a \wedge b = 0, a \vee b = 1,$$

则称  $b$  为  $a$  的补元, 记为  $a'$ 。若有界格  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  中的所有元素都存在补元, 则称  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$

为有补格。

例 如下图有界格,求其所有元素的补元(如果有的话)。



解:对于图 a:  $0' = 1, 1' = 0$ ,

$$a' = e, d' = c,$$

$$c' = d, e' = a,$$

$b$  无补元。

对于图 b:  $0' = 1, 1' = 0$ ,

$$a' = d, a' = c,$$

$$b' = d, b' = c,$$

$$c' = a, c' = b,$$

$$d' = a, d' = b$$

则图 a 不是有补格,图 b 是有补格。

定理:在有界分配格(既是有界格又是分配格,简称为有界分配格)  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  中,如元素  $a \in L$  有补元存在,则此元素的补元必惟一。

证明:设  $a$  有两个补元  $b$  和  $c$ ,由补元的定义知

$$a \wedge b = 0 = a \wedge c, a \vee b = 1 = a \vee c$$

由定理知,  $b = c$ 。

推论:在有补分配格(既是有补格又是分配格,简称为有补分配格)  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  中,每个元素都存在惟一的补元。

定理:设  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  是有补分配格,“ $\leq$ ”是该格的自然偏序,则对任意  $a, b \in L$ ,都有

$$(1) (a')' = a; (\text{对合律})$$

$$(2) (a \wedge b)' = a' \vee b', (a \vee b)' = a' \wedge b'; (\text{De Morgan 律})$$

$$(3) a \leq b \Leftrightarrow b' \leq a';$$

$$(4) a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b' = 0 \Leftrightarrow a' \vee b = 1。$$

证明:(1)因  $a'$  是  $a$  的补元,反过来,  $a$  也是  $a'$  的补元,由推论得,  $(a')' = a$ 。

(2)因为

$$(a \wedge b) \wedge (a' \vee b')$$

$$= ((a \wedge b) \wedge a') \vee ((a \wedge b) \wedge b') (\text{分配律})$$

$$= ((a \wedge a') \wedge b) \vee (a \wedge (b \wedge b')) (\text{交换律,结合律})$$

$$= (0 \wedge b) \vee (a \wedge 0)$$

$$= 0 \vee 0 = 0$$

$$(a \wedge b) \vee (a' \vee b')$$

$$= (a \vee (a' \vee b')) \wedge (b \vee (a' \vee b')) \quad (\text{分配律})$$

$$= ((a \vee a') \vee b') \wedge (a' \vee (b \vee b')) \quad (\text{交换律, 结合律})$$

$$= (1 \vee b') \wedge (a' \vee 1)$$

$$= 1 \wedge 1 = 1$$

所以,  $a' \vee b'$  是  $a \wedge b$  的补元, 由补元的惟一性得,  $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ 。

同理可证,  $(a \vee b)' = a' \wedge b'$ 。

(3) “ $\Rightarrow$ ”, 由  $a \leq b$ , 可得  $a \wedge b = a$ , 则有  $(a \wedge b)' = a'$

由 De Morgan 律 (即(2)), 有  $a' \vee b' = a'$ ,

即是  $b' \leq a'$

“ $\Rightarrow$ ”, 上述过程可逆, 故成立。

(4) “ $\Leftarrow$ ” 由  $a \leq b$ , 根据(3), 有  $b' \leq a'$  则

$a \wedge b' \leq a \wedge a' = 0$ , 即是  $a \wedge b' \leq 0$ ,

又 0 是全下界, 有  $0 \leq a \wedge b'$

则根据偏序关系“ $\leq$ ”的反对称性, 有  $a \wedge b' = 0$ ,

对上式使用 De Morgan 律, 自然有  $a' \vee b = 1$

“ $\Leftarrow$ ” 如果  $a' \vee b = 1$ , 由 De Morgan 律, 有  $a \wedge b' = 0$ , 则有

$$a' \vee (a \wedge b') = a' \vee 0 = a'$$

对上式的左边使用分配律, 可得

$$a' \vee (a \wedge b') = (a' \vee a) \wedge (a' \vee b')$$

$$= 1 \wedge (a' \vee b') = a' \vee b'$$

即是  $a' \vee b' = a'$ , 所以有  $b' \leq a'$ , 由(3)可得  $a \leq b$ 。

### 知识点 8 布尔代数

称有补分配格  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  为布尔格。

在有补分配格中每个元都有补元而且补元惟一, 可以将求元素的补元作为一种一元运算, 则此布尔格  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  可记为  $\langle L, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ , 此时, 称  $\langle L, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$  为布尔代数。因此有:

定义一个布尔格  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  称为布尔代数。若一个布尔代数的元素个数是有限的, 则称此布尔代数为有限布尔代数, 否则称为无限布尔代数。

布尔代数是具有补分配格, 有补分配格  $\langle L, \wedge, \vee \rangle$  必须满足它是格、有全上界和全下界、分配律成立、每个元素都有补元存在。显然, 全上界 1 和全下界 0 可以用下面的同一律来描述:

同一律:

在  $L$  中存在两个元素 0 和 1, 使得对任意  $a \in L$ , 有  $a \wedge 1 = a, a \vee 0 = a$ 。

补元的存在可以用下面的互补律来描述。

互补律:对任意  $a \in L$ , 存在  $a' \in L$ , 使得  $a \wedge a' = 0, a \vee a' = 1$ 。

格可以用交换律、结合律、吸收律来描述。

因此,一个有补分配格就必须满足交换律、结合律、吸收律、分配律、同一律、互补律。

另外,可以证明,由交换律、分配律、同一律、互补律可以得到结合律、吸收律。所以布尔代数有下面的等价定义:

定义:设  $\langle B, \wedge, \vee \rangle$  是代数系统,其中  $\wedge, \vee$  是  $B$  中的二元运算,如果对任意  $a, b, c \in B$ , 满足

(1) 交换律:  $a \wedge b = b \wedge a, a \vee b = b \vee a$ ;

(2) 分配律:  $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ ;

(3) 同一律:在  $B$  中存在两个元素 0 和 1, 使得对任意  $a \in B$ , 有  $a \wedge 1 = a, a \vee 0 = a$ ;

(4) 互补律:对任意  $a \in B$ , 存在  $a' \in B$ , 使得  $a \wedge a' = 0, a \vee a' = 1$ 。

则称  $\langle B, \wedge, \vee \rangle$  为布尔代数。

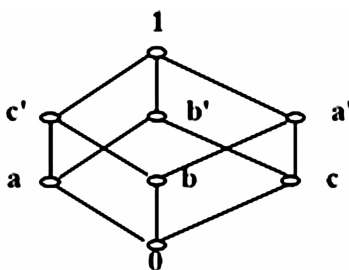
通常将布尔代数  $\langle B, \wedge, \vee \rangle$  记为  $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ 。为方便起见,也简称  $B$  是布尔代数。

#### 知识点9 子布尔代数

设  $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$  是布尔代数,  $S$  是  $B$  的非空子集, 如果运算  $\wedge, \vee$  和  $'$  都对  $S$  是封闭的, 则称  $\langle S, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$  为  $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$  的子布尔代数, 简称  $S$  为  $B$  的子布尔代数。

显然,对任意布尔代数  $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ , 子集  $\{0, 1\}$  和  $B$  总能构成  $B$  的子布尔代数, 这两个子布尔代数称为  $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$  的平凡子布尔代数。

例 考察下图所示的布尔代数  $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ 。  $S_1 = \{a, a', 0, 1\}$ ,  $S_2 = \{a, b', c, 0\}$ ,  $S_3 = \{a, b, 0, 1\}$ , 试问  $S_1, S_2, S_3$  能否构成  $B$  的子布尔代数?



分析:对集合中的所有元素验证 3 个运算  $\wedge, \vee, '$  都封闭, 且  $0, 1 \in S$  即是子布尔代数, 否则不是。

解:由于  $S_1$  对运算  $\wedge, \vee$  和  $'$  都是封闭的, 所以  $S_1$  能构成  $B$  的子布尔代数。

$S_2$  仅对运算  $\wedge$  和  $\vee$  封闭, 而对运算  $'$  不封闭, 所以  $S_2$  只能构成  $B$  的子格, 而不能构成  $B$  的子布尔代数。

由于  $S_3$  对运算  $\vee$  不是封闭的, 所以  $S_3$  既不能构成  $B$  的子格, 也不能构成  $B$  的子布尔代数。并且  $S_3$  不能构成布尔代数

#### 知识点10 布尔同态

设  $\langle B_1, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$  和  $\langle B_2, \wedge, \vee, \neg, \alpha, \beta \rangle$  是两个布尔代数,  $f$  是  $B_1$  到  $B_2$  的映射。如果对任意  $x, y \in B_1$ , 都有



$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y),$$

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

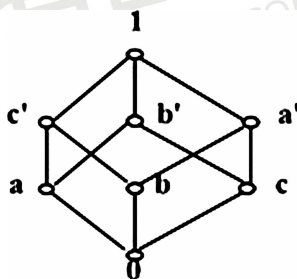
$$f(x') = \neg f(x),$$

$$f(0) = \alpha, f(1) = \beta$$

则称  $f$  为从布尔代数  $\langle B_1, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$  到  $\langle B_2, \wedge, \vee, ', \alpha, \beta \rangle$  的布尔同态映射, 简称布尔同态。

如果  $f$  是格同态, 当  $f$  分别是单射、满射和双射时,  $f$  分别称为单一布尔同态、满布尔同态和布尔同构。

例 试证明下图所示的布尔代数与集合代数  $\langle P(A), \cap, \cup, ', \Phi, A \rangle$  同构, 其中  $A = \{1, 2, 3\}$ 。



分析: 构造一个双射函数, 对集合中的所有元素验证 3 个运算  $\wedge, \vee, '$  都满足同态式。

证明: 作映射  $f: B \rightarrow P(A)$  为:

$$f(0) = \Phi, f(a) = \{1\}, f(b) = \{2\}, f(c) = \{3\}$$

$$f(a') = \{2, 3\}, f(b') = \{1, 3\}, f(c') = \{1, 2\}, f(1) = \{1, 2, 3\}$$

显然  $f$  是双射, 容易验证  $f$  对 3 个运算  $\wedge, \vee, '$  都满足同态式, 因此  $f$  是布尔同构, 即这两个布尔代数同构。

## 二、本讲小结

本讲主要讲解了特殊格和布尔代数的定义及性质、子格与子布尔代数的判定

重点讲解了特殊格的概念和布尔代数的定义

常考题型多为判断、选择、证明和计算题。

应试方法主要是熟记概念及解题套路。

## 三、课后习题

1. 某公司用信息流的格模型来控制敏感信息, 公司的每个部门都具有序偶  $\langle A, C \rangle$  表示安全类型, 其中  $A$  是权限级别,  $C$  是种类。这里, 权限级别  $A$  可以是 0 (非私有的), 1 (私有的), 2 (受限制的), 3 (注册的); 种类  $C$  是集合 {东北虎, 大熊猫, 金丝猴} 的子集 (这些作为项目的代码)。问:

(1) 信息允许从  $\langle 1, \{\text{东北虎}, \text{金丝猴}\} \rangle$  流向  $\langle 2, \{\text{金丝猴}\} \rangle$  吗?

(2) 信息允许从  $\langle 2, \{\text{东北虎}\} \rangle$  流向  $\langle 3, \{\text{东北虎}, \text{大熊猫}\} \rangle$  吗?

(3) 信息允许从  $\langle 1, \{\text{东北虎}, \text{金丝猴}\} \rangle$  流向哪些安全类型?

(4) 信息允许哪些安全类型流向  $\langle 2, \{\text{大熊猫}, \text{金丝猴}\} \rangle$  ?