高等数学 A2

浙江理工大学试题 题型汇编 期中用

（答案册）

学校：____________________

专业：____________________

班级：____________________

姓名：____________________

学号：____________________

（此试卷为 2022 级第一版）

目 录

第八章 向量代数与空间解析几何

第一部分 向量

1．-6　　2．-1

第二部分 空间直角坐标系

1．$(1,2,-3)$　　2．$(1,2,2)$　　3．$(\pm 1,2,2)$

第三部分 两向量的数量积

1．D　　2．$\arccos\frac{1}{\sqrt{15}}$　　3．C　　4．$2\sqrt{3}$

5．$\frac{7\sqrt{3}}{3}$　　6．$\frac{\pi}{3}$　　7．$\sqrt{2}$　　8．A

第四部分 两向量的向量积

1．2　　2．$\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$　　3．B

第五部分 平面及其方程

1．A　　2．$\frac{4}{\sqrt{29}}$　　3．1　　4．D

第六部分 空间直线及其方程

1．$(-7,-6,8)$（答案不唯一）　　2．A　　3．$\frac{5}{4}$　　4．C

5．$\begin{cases}x=-2t+1\\y=t+1\\z=3t+1\end{cases}$（点不唯一）　　6．C　　7．$x-3y+z+2=0$　　8．C

9．$\begin{cases}9x+8y-7z-21=0\\5x-3y+3z-9=0\end{cases}$　　10．B　　11．B　　12．C

13．A　　14．$x-1=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6}$　　15．A　　16．B

17．C　　18．$-(x-1)+16(y-2)+10(z+1)=0$　　19．A　　20．A

21．

1、解 由题意知过 L_1 上的点 $(1,2,3)$　　　　（1 分）

L_1 的方向向量为 $\bar{s}_1=(1,0,-1)$，L_2 的方向向量为 $\bar{s}_2=(2,1,1)$，设平面 π 的法向量为

$\vec{n}$，则$\vec{n}\perp\vec{s}_1$，$\vec{n}\perp\vec{s}_2$垂直 （3 分）

故可取

$$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=(1,-3,1) \qquad （6 分）$$

于是平面π的方程为$x-3y+z+2=0$ （8 分）

22．$\vec{s}_1=(6,2,-3)$， $\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=(-2,-1,-4)$， ………2 分

取平面的法向量为$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & 2 & -3\\ -2 & -1 & -4\end{vmatrix}=(-11,30,-2)$ ………2 分

所以平面方程为：$-11(x-4)+30(y+3)-(z-1)=0$，即$11x-30y+z-135=0$. …2 分

第七部分 曲面及其方程

1．A 2．A 3．D 4．B

5．

1. 解 将直线 l 的方程改写成一般式：$\begin{cases}x-y-1=0,\\ y+z-1=0.\end{cases}$过 l 的平面束方程为

$$(x-y-1)+\lambda(y+z-1)=0,\text{即}x+(\lambda-1)y+\lambda z-(1+\lambda)=0.$$

由向量$(1,\lambda-1,\lambda)$与（1，-1,2）垂直得$\lambda=-2$.从而l_0的方程为

$$\begin{cases}x-3y-2z+1=0,\\ x-y+2z-1=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x=2y,\\ z=-\frac{1}{2}(y-1).\end{cases}$$

设l_0绕 y 轴旋转一周所得的曲面为 S，(x,y,z)为 S 上的任意一点，则改点由l_0上的一点

(x_0,y_0,z_0)绕 y 轴旋而得，于是有关系：$y=y_0$，

$$x^2+z^2={x_0}^2+{z_0}^2=(2y_0)^2+[-\frac{1}{2}(y_0-1)]^2=4y^2+\frac{1}{4}(y-1)^2,$$

从而得 S 的方程为$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$.

第八部分 空间曲线及其方程

1．解：将$z=1-2x$带入第一个方程 ------------ 1 分

得到$5(x-\frac{2}{5})^2+y^2=\frac{4}{5}$ ------------ 3 分

引进参数$\begin{cases} x=\frac{2}{5}(1+\cos t) \\ y=\frac{2}{\sqrt{5}}\sin t \qquad t\in[0,2\pi]; \\ z=\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\cos t \end{cases}$ ------------ 6 分

评分标准说明：t 的范围未给出扣 1 分。

第九章 多元函数微分法及其应用

第一部分 多元函数的基本概念、n 维空间

无

第二部分 多元函数的极限、连续性、部分性质

1．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{1-e^{xy}}(\sqrt{2-e^{xy}}+1)=-1\cdot 2=-2 \qquad (8\text{ 分})$$

2．1

第三部分 一阶偏导数和高阶偏导数

考法一：求偏导数的值

1．$-\frac{1}{2}$ 2．3 3．$\frac{1}{2}$ 4．B

5．A 6．2

7．解：$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y^2$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6y$（考试记得写上过程，不要只写答案哈）

8．解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x+y}+(x^2+y^2)e^{x+y}=(x^2+2x+y^2)e^{x+y}$. ……………………（3 分）

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2ye^{x+y}+(x^2+2x+y^2)e^{x+y}=(x^2+2x+2y+y^2)e^{x+y}$. …………（7 分）

9．$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x^2+y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(2+4x^2\right)e^{x^2+y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xye^{x^2+y^2}$

10．Q $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x\Rightarrow\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=2z$

考法二：结合上一部分的内容，证明极限存在、连续、偏导存在、可微（下一部分学，可以先隔过去）

1．C　　2．D　　3．B　　4．B

5．

证明. 对于任意一个方向 (u,v)，极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(tu,tv)-f(0,0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{u^3}{u^2+v^2}=\dfrac{u^3}{u^2+v^2}$ 存在，故沿 (u,v) 的方向导数存在，第一个结论得证。特别地，分别令 $(u,v)=(1,0),(u,v)=(0,1)$ 得 $f_x(0,0)=1,f_y(0,0)=0$. 下证 f 在 $(0,0)$ 处不可微，若可微，由定义，必有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$. 代入 f,f_x,f_y 表达式，得：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3/(x^2+y^2)-x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0$$

又当 (x,y) 沿 $l=\{(x,y)|y=kx\}$ 趋近零时，有：

$$\lim_{l\ni(x,y)\to(0,0)}\frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-k^2x^3}{(1+k^2)^{3/2}|x|^3},$$

该极限当 $k\neq 0$ 时显然不存在（左右极限不等），故矛盾，故 f 在 $(0,0)$ 处不可微。 □

6.（1）因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$，所以连续。

（2）$f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$，同理 $f'_y(0,0)=0$

$\Delta z=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，若可微，

$\Delta z=f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y+o(\rho)$，而

$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{\Delta z-f'_x(0,0)\Delta x-f'_y(0,0)\Delta y}{\rho}=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 不存在，所以不可微。

7．

2.证明 （1）因 $|xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}|\le|xy|$，所以 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}f(x,y)=0=f(0,0)$，从而 f(x,y)在（0,0）处连续.因为 f(x,0)=f(0,y)=0,所以 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.

（1）当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$f_x(x,y)=y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

当点 P（x,y）沿射线 $y=|x|$ 趋于(0,0)时，

$$\lim_{(x,|x|)\to(0,0)}f_x(x,y)=\lim_{x\to 0}(|x|\sin\frac{1}{\sqrt{2}|x|}-\frac{|x|^3}{2\sqrt{2}|x|^3}\cos\frac{1}{\sqrt{2}|x|})$$

极限不存在，所以 $f_x(x,y)$ 在点(0,0)处不连续.同样可得 $f_y(x,y)$ 在点(0,0)处不连续.

（2）令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ ，则

$$\left|\frac{\Delta f-f_x(x,y)\Delta x-f_y(x,y)\Delta y}{\rho}\right|=\left|\frac{\Delta x\Delta y}{\rho}\sin\frac{1}{\rho}\right|\le|\Delta x|\xrightarrow{\rho\to 0}0,$$

所以 f(x,y)在（0,0）处可微.

8.（1）点（0，0）连续。…………2 分

（2） $f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$ ， $f_y'(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta x)-f(0,0)}{\Delta y}=0$ ，…………4 分

但不可微。 …………6 分

（第 7 题答案给的很简略，建议按照上面大题给的参考过程来）

第四部分 全微分

1． $dx+2\ln 2dy$ 2． $(2x\sin xy+y(x^2+y^2)\cos xy)dx+(2y\sin xy+x(x^2+y^2)\cos xy)dy$

3． $2dx+dy$ 4． $dz=(y+\frac{1}{y})dx+(x-\frac{x}{y^2})dy$ 5． e^2dx+2e^2dy

6． $yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy$ 7． $\dfrac{y}{1+x^2y^2}dx+\dfrac{x}{1+x^2y^2}dy$ 8．C

9．C 10． $4dx+4dy$ 11． $-e^{\cos xy}\sin xy\left(ydx+xdy\right)$

12．解： $dz\big|_{(1,2)}=\left(\dfrac{2x}{1+x^2+y^2}dx+\dfrac{2y}{1+x^2+y^2}dy\right)\Bigg|_{(1,2)}=\dfrac{1}{3}dx+\dfrac{2}{3}dy$ （6 分）

13． $u_x=\dfrac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$,……(1 分)， $u_y=\dfrac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$ ，……(2 分)， $u_z=-\dfrac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$ ，……(3 分)

$du=\dfrac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}dx+\dfrac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln xdy-\dfrac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln xdz$. ……(6 分)

第五部分 多元复合函数求导

1． $\left(f_1'+yf_2'\right)dx+\left(f_1'+xf_2'\right)dy$ 2． $4f_{11}''+\dfrac{4}{y}f_{12}''+\dfrac{1}{y^2}f_{22}''$ 3．51

4． $4dx-2dy$ 5． $z+xy$ 6．C

7．解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(f_1'\cdot y+f_2'\cdot\dfrac{1}{y})+0=yf_1'+\dfrac{1}{y}f_2'$ …………3 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_1' + y[f_{11}'' \cdot x + f_{12}'' \cdot (-\frac{x}{y^2})] - \frac{1}{y^2} f_2' + \frac{1}{y}[f_{21}'' \cdot x + f_{22}'' \cdot (-\frac{x}{y^2})] \quad \text{.........6 分}$$

$$= f_1' + xyf_{11}'' - \frac{1}{y^2} f_2' - \frac{x}{y^3} f_{22}''. \quad \text{.........7 分}$$

8.

解：$\begin{cases} y^2 - u_x v - u v_x = 0 \\ 2x - u_x + v_x = 0 \end{cases}$，（3 分）

$u_x = \dfrac{y^2 + 2xu}{u+v}$； $v_x = \dfrac{y^2 - 2xv}{u+v}$；（3 分）

$\dfrac{\partial w}{\partial x} = e^{u+v} \dfrac{2[x(u-v)+y^2]}{u+v}$。（2 分）

9.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot e^x \sin y + f_2' \cdot 2x$（3 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^x \cos y \cdot f_1' + e^x \sin y (f_{11}'' \cdot e^x \cos y + f_{12}'' \cdot 2y) + 2x(f_{21}'' \cdot e^x \cos y + f_{22}'' \cdot 2y)$$

$$= f_{11}'' \cdot e^{2x} \sin y \cos y + 2 f_{12}'' \cdot e^x (y \sin y + x \cos y) + 4 f_{22}'' \cdot xy + f_1' \cdot e^x \cos y \quad \text{（8 分）}$$

10.

版本一：解：$\dfrac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot (-1) + f_2' \cdot ye^x$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\left(f_{11}'' \cdot 1 + f_{12}'' \cdot e^x\right) + f_2' \cdot e^x + ye^x\left(f_{21}'' \cdot 1 + f_{22}'' \cdot e^x\right)$$

$$= -f_{11}'' + (y-1)e^x f_{12}'' + ye^{2x} f_{22}'' + f_2' \cdot e^x$$

版本二：解：设 $u = y - x, v = ye^x$， 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -f_u' + ye^x f_v'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-f_u' + ye^x f_v'\right)$$

$$= -f_{uu}'' - e^x f_{uv}'' + ye^x (f_{vu}'' + e^x f_{vv}'') + e^x f_v'$$

$$= -f_{uu}'' + e^x (y-1) f_{uv}'' + ye^{2x} f_{vv}'' + e^x f_v'$$

11.

解 $z_x = z_u + z_v, z_y = -2z_u + az_v, z_{xx} = z_{uu} + 2z_{uv} + z_{vv}, z_{yy} = 4z_{uu} - 4az_{uv} + a^2 z_{vv},$

$z_{xy}=-2z_{uu}+(a-2)z_{uv}+az_{vv}$. 将上述结果代入原方程，整理的

$$(10+5a)\ z_{uv}+(6+a-a^2)z_{vv}=0.$$

依题意a应满足：$,10+5a\neq 0,6+a-a^2=0$，解得$a=3$.

12. $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^4\cdot f_1'+x^2\cdot f_2'$ ……(2 分)

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=4x^3\cdot f_1'+2x\cdot f_2'+x^4\cdot y\cdot f_{11}''-y\cdot f_{22}''$ ……(6 分)

13. $z_x=2xf_1'+yf_2'+2xg'$ ………(2 分)

$z_{xy}=2x\left[f_{11}''(-2y)+f_{12}''x\right]+\left[f_{21}''(-2y)+f_{22}''x\right]y+f_2'+2xg''2y$ ………(4 分)

$=-4xyf_{11}''+2(x^2-y^2)f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'+4xyg''$ ………(6 分)

14. $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xyf_1'+x^2f_2'$, $\quad\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4x^2y^2f_{11}''+4x^3yf_{12}''+x^4f_{22}''+2xf_1'$

15. $\because f$具有二阶连续偏导数， $\quad\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'\cdot \sin x$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial(f_2'\cdot\sin x)}{\partial x}=\cos x\cdot f_2'+\sin x\cdot\frac{\partial f_2'}{\partial x}$

$\frac{\partial f_2'}{\partial x}=f_{21}''\cdot 1+f_{22}''\cdot y\cos x=f_{12}''+y\cos x\cdot f_{22}''$

$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\sin x\cdot f_{12}''+y\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot f_{22}''+\cos x\cdot f_{22}''+\cos x\cdot f_2'$

16. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_ue^y+f_x,\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=xe^{2y}f_{uu}+e^yf_{uy}+xe^yf_{xu}+f_{xy}+e^yf_u$

17. 解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f-\dfrac{y}{x}f'-\dfrac{y}{x^2}\varphi'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'+\dfrac{1}{x}\varphi'$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{y^2}{x^3}f''+\dfrac{2y}{x^3}\varphi'+\dfrac{y^2}{x^4}\varphi''$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{y}{x^2}f''-\dfrac{1}{x^2}\varphi'-\dfrac{y}{x^3}\varphi''$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{1}{x}f''+\dfrac{1}{x^2}\varphi''$

$\therefore x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

18. 解法一：方程组两边关于 x 求导，把 y、z 看作 x 的函数

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=1\cdot f+x\cdot f'\cdot\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)\\ F_x\cdot 1+F_y\cdot\dfrac{dy}{dx}+F_z\cdot\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}$$ 解得：$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{f\cdot F_y+xf'\cdot F_y-xf'\cdot F_x}{F_y+xf'\cdot F_z}$.

解法二：$z=xf\left(x+y\right)\Rightarrow dz=\left(f+xf'\right)dx+xf'dy$　（f 可微）

$F(x,y,z)=0\Rightarrow F_xdx+F_ydy+F_zdz=0$　（F 可微）

解得：$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{f\cdot F_y+xf'\cdot F_y-xf'\cdot F_x}{F_y+xf'\cdot F_z}$.

19．$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+yf_2'$　　$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xyf_{11}''+2\left(x^2+y^2\right)f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'$

证明专练

1．

证 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x[y+F(u)+xF'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}]+y[x+xF'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}]$

$=x[y+F(u)-\dfrac{y}{x}F'(u)]+y[x+F'(u)]$

$=xy+xF(u)+xy=z+xy$

2．**版本一：**

证：$\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}=\dfrac{y}{x^2+y^2}\cdot 1-\dfrac{x}{x^2+y^2}\cdot 1=\dfrac{y-x}{x^2+y^2}=\dfrac{-v}{u^2+v^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{y}{x^2+y^2}\cdot 1-\frac{x}{x^2+y^2}\cdot(-1)=\frac{y+x}{x^2+y^2}=\frac{u}{u^2+v^2}$$

$$\therefore\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}$$

版本二：

（1）$\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}=\dfrac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot 1+\dfrac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot 1=\dfrac{y-x}{x^2+y^2}=-\dfrac{v}{u^2+v^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot 1+\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot(-1)=\frac{y+x}{x^2+y^2}=\frac{u}{u^2+v^2}$$

所以，$\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{u-v}{u^2+v^2}$ 等式成立。

3．$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-a\dfrac{\partial z}{\partial u}+a\dfrac{\partial z}{\partial v}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$

$\Rightarrow a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$，因为 $a\neq 0$，所以 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$ …………………（4 分）

4．Q $z=f\left(\xi,\eta\right),\xi=x^2-y^2,\eta=2xy$，

$\therefore \dfrac{\partial f}{\partial x}=2x\dfrac{\partial f}{\partial \xi}+2y\dfrac{\partial f}{\partial \eta},\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}+8xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}+4y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}+2\dfrac{\partial f}{\partial \xi}$，

同理 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-2y\dfrac{\partial f}{\partial \xi}+2x\dfrac{\partial f}{\partial \eta},\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}-8xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}+4x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}-2\dfrac{\partial f}{\partial \xi}$，所以 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

5．证明：$\dfrac{\partial g}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}f'(\dfrac{y}{x})+f'(\dfrac{x}{y})$

$$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\dfrac{2y}{x^3}f'(\dfrac{y}{x})+\dfrac{y^2}{x^4}f''(\dfrac{y}{x})+\dfrac{1}{y}f''(\dfrac{x}{y}),$$

$$\dfrac{\partial g}{\partial y}=\dfrac{1}{x}f'(\dfrac{y}{x})+f(\dfrac{x}{y})-\dfrac{x}{y}f'(\dfrac{x}{y}),$$

$$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\dfrac{1}{x^2}f''(\dfrac{y}{x})-\dfrac{x}{y^2}f'(\dfrac{x}{y})+\dfrac{x}{y^2}f'(\dfrac{x}{y})+\dfrac{x^2}{y^3}f''(\dfrac{x}{y})=\dfrac{1}{x^2}f''(\dfrac{y}{x})+\dfrac{x^2}{y^3}f''(\dfrac{x}{y})$$

原命题成立。

6．解：方程两边分别对 x 求导，联立解出 z_x,z_y，代入即可得证。

第六部分 隐函数求导

1．-2

2．$\dfrac{-y^2}{x^2(1+y^2)}$

3．$\frac{4}{3}$　　$\frac{1}{2}$

4．$\frac{y}{1-z}$

5．$\frac{1}{1+\ln\frac{z}{x}}$ 或 $\frac{z}{y+z}$

6．D

7．$\frac{\sqrt{6}}{2}(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$

8．B

9．C

10．$2z$

1．

解 $u_x=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}, v_x=\frac{uy-xv}{x^2+y^2}, u_y=\frac{xv-yu}{x^2+y^2}, v_y=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$.（书 90 页例 3.）

2.

解. 令 $G(x,y,z)=F(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$, 由隐函数定理，$z_x=-\frac{G_x}{G_z}$, 又由复合函数求导法则，$G_x=F_1+2F_2x$, $G_z=F_1+2F_2z$. 故

$$z_x=-\frac{F_1+2F_2x}{F_1+2F_2z}.$$

3．**版本一**：解：设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3$，则 $F_x=2x,F_y=2y,F_z=2z$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{x}{z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{y}{z},\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1,1)}=-1,\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1,1)}=-1.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1,1)}=\frac{x}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1,1)}=-1.$$

版本二：解：方程两边对 x 变量求偏导，得 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}$；对 y 变量求偏导，得 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$；

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{x}{z})=\frac{xz_y}{z^2}=-\frac{xy}{z^3}$，故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1,1)}=-1$.

4．解：$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{e^z}$ ………… 3 分，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{4xy}{e^{2z}}$ …… …… 6 分

5．解：法一：方程两边同关于 x 求偏导，z 看作 x 的函数，y 看作常数。

$$2x+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-4\frac{\partial z}{\partial x}=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}$$

同理可得：$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{2-z}$

法二：令 $\begin{array}{l}F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z\\F_x=2x,F_y=2y,F_z=2z-4\end{array}$

$$\therefore\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{x}{2-z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{y}{2-z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial(\frac{x}{2-z})}{\partial y}=\frac{0-x\cdot(-\frac{\partial z}{\partial y})}{(2-z)^2}=\frac{xy}{(2-z)^3}$$

6．解：$du=f_xdx+f_zdz$ ……(2 分)，

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$ ……(3 分)， $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1-y\varphi'},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\varphi}{1-y\varphi'}$$ ……(5 分)

$$du=\left(f_x+\frac{f_z}{1-y\varphi'}\right)dx+\frac{f_z\cdot\varphi'}{1-y\varphi'}dy$$ ……(6 分)

7．解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{xz-z},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial z}{\partial x}(xz-x)-z\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}-1\right)}{(xz-x)^2}=\frac{2z(z-1)-z^3}{x^2(z-1)^3}$

8．解：**解**：方程两端同时对 y 求导可得

$\cos y+2z\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}=0,\text{则}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\cos y}{2(1-z)}$ ………… 2 分

方程两端同时对 x 求导可得

$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-2\frac{\partial z}{\partial x}=0,\text{则}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{1-z}$ ………………2 分

上式再对 x 求导

$2+2(\frac{\partial z}{\partial x})^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\text{ 则}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{1-z}+\frac{x^2}{(1-z)^3}$ …………2 分

评分标准说明：该题还可以用微分形式不变性求导，结果正确满分；

9．解：即$\frac{x}{z}=\ln z-\ln y$.

令$F(x,y,z)=\frac{x}{z}-lnz+lny$, 得：$F_x=\frac{1}{z},F_y=\frac{1}{y},F_z=-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{z}$.

$\therefore\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{\frac{1}{z}}{\frac{x}{z^2}+\frac{1}{z}}=\frac{z}{x+z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{\frac{1}{y}}{\frac{x}{z^2}+\frac{1}{z}}=\frac{z^2}{xy+yz}$

证明专练

1．

(1)解:设$F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\varphi\left(\frac{y}{z}\right)$

$F_x=\frac{1}{z}\qquad F_y=-\varphi'\frac{1}{z}\qquad F_z=-\frac{x}{z^2}+\varphi'\frac{y}{z^2}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{-z}{\varphi'y-x}\qquad \frac{\varphi z}{\varphi y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{z\varphi'}{\varphi'y-x}$

$\therefore x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2$

（勘误：将“2”改为“z”）

解(2):在(1)的基础上同时对x求偏导

$$\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial z\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y}{x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

在(1)的基础上同时对y求偏导

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial z}=\frac{\partial z}{\partial y}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$\therefore\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2$$

2．证明：因为$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_x},\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_z}{F_y},\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},$

所以$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{F_y}{F_x}\right)\cdot\left(-\frac{F_z}{F_y}\right)\cdot\left(-\frac{F_x}{F_z}\right)=-1.$

3．证：设$F(x,y,z)=xy-xf(z)-yg(z)$

$$F_x=y-f(z),F_y=x-g(z),F_z=-xf'-yg'\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{y-f(z)}{xf'+yg'},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{x-g(z)}{xf'+yg'}$$

$$\therefore\left[x-g(z)\right]\frac{\partial z}{\partial x}=\left[y-f(z)\right]\frac{\partial z}{\partial y}.$$

第七部分 多元函数微分学的应用

1．(1, 2, 3)
2．(1, 1, 2)
3．D
4．$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}$
5． $x+y+z-3=0$
6．B
7．$(1,1,2)$
8．D
9．A
10． $3x+z-1=0$
11． $2x+y-4=0$
12． $2x+y-4=0$
13．$\frac{x}{-R}=\frac{y-R}{0}=\frac{z-\frac{k}{2}\pi}{k}$
14．$4x-2y-z-2=0$
15．A
16． $2x-8y+16z-1=0$
17．$(2,-1,0)$
18．A
19．$(0,\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{15}})$
20．B
21． $x+y-2=0$
22．D

1．

解. 切线方程:

$$\begin{cases}(-2)(x-1)+4(y-1)+4(z-1)=0\\2(x-1)-3(y-1)+5(z-1)=0\end{cases}$$

即:

$$\begin{cases}-x+2y+2z=3\\2x-3y+5z=4\end{cases}$$

切线方向为 $(-1,2,2)\times(2,-3,5)=(16,9,-1)$,
故法平面为:

$$16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0.$$

2．解：设点 P 为 (x_0,y_0,z_0)

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$$

$$F_x=2x \quad F_y=2y \quad F_Z=2z$$

$\therefore$ 可取 $\vec{n}=(x_0,y_0,z_0)$

又 $\because$ $\vec{n}\,/\!/\,(1,-2,3)$

$$\begin{cases}\dfrac{x_0}{1}=\dfrac{y_0}{-2}=\dfrac{z_0}{3}\\ {x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2=14\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x_0=1\\ y_0=-2\\ z_0=3\end{cases} or \begin{cases}x_0=-1\\ y_0=2\\ z_0=-3\end{cases}$$

$\therefore P_1(1,-2,3)$ ，$\vec{n}=(1,-2,3)$

① 得?:$1\cdot(x-1)-2\cdot(y+2)+3\cdot(z-3)=0$

即 $x-2y+3z-14=0$

(?处填写为 π_1)

$P_2(-1,2,-3)$ ，$\vec{n}=(1,-2,3)$

② 得？:$1\cdot(x+1)-2\cdot(y-2)+3\cdot(z+3)=0$

即 $x-2y+3+14=0$

(?处填写为 π_2)

3．设切点 $(x_0,y_0,\frac{x_0^2+y_0^2}{2})$.

令 $F(x,y,z)=x^2+y^2-2z$，得：$F_x=2x,F_y=2y,F_z=-2$．取 $\vec{n}=(x_0,y_0,-1)$.

$$\begin{cases}6x+2y\cdot\frac{dy}{dx}+2z\cdot\frac{dz}{dx}=0\\ 4x+2y\cdot\frac{dy}{dx}-4\cdot\frac{dz}{dx}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{dy}{dx}=4\\ \frac{dz}{dx}=-1\end{cases}\Rightarrow\vec{T}=(1,-4,1).$$

$\because \vec{n}\cdot\vec{T}=0,\quad \therefore x_0=-1-4y_0.$①

又 $\because$ 切平面方程：$x_0\cdot(x-x_0)+y_0\cdot(y-y_0)-(z-\frac{x_0^2+y_0^2}{2})=0$, 且过 $(1,-1,-1)$

$\therefore x_0-x_0^2-y_0-y_0^2+1+\frac{x_0^2+y_0^2}{2}=0$ ②

由①和②解得：$\begin{cases}x_0=3\\ y_0=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=-\frac{13}{17}\\ y_0=-\frac{1}{17}\end{cases}$

$\therefore$ 切平面方程为：$3x-y-z-5=0$ 或 $13x+y+7z+5=0$

（拓展题说明：将拓展题部分的“曲线”二字改为“曲面”）

拓展题解答：

根据上面给的思路可解得：$\vec{n}=(x_0,y_0,-1)$，$\vec{T}=(1,1,2)$.

由 $\vec{n} \perp \vec{T}$ 且切平面过点 $(1,-1,-1)$ 得：$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = -1 \end{cases}$

$\therefore$ 切平面方程为：$x + y - z - 1 = 0$ 或 $3x - y - z - 5 = 0$

4．解：设切平面的切点为 $\left(x_0, y_0, \dfrac{x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2}}{2}\right)$……（1 分），则 $\vec{n} = (x_0, y_0, -1)$……（2 分），有切平面方程为：$x_0 x + y_0 y - z - \dfrac{x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2}}{2} = 0$；………（3 分）

曲线方程组两边关于 x 求导，有 $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{5x^4 - 3x}{z + 2}$，$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{6x + 5x^4 z}{2y + yz}$…（4 分）

于是有切向量 $\vec{T} = (1,1,2)$ ；……（5 分）

因为 $\vec{n} \cdot \vec{T} = 0$，即 $x_0 + y_0 - 2 = 0$………（6 分）

且 $(1,-1,-1)$ 位于切平面上，即 $x_0 - y_0 + 1 - \dfrac{x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2}}{2} = 0$，解得 $x_0 = 1, y_0 = 1$ 或 $x_0 = 3, y_0 = -1$…（7 分）

因此所求切平面方程为：$x + y - z - 1 = 0$ 或 $3x - y - z - 5 = 0$………（8 分）

5．（1）消去 z 得 $2x^2 + 2y^2 + x + y - 2 = 0.$ …………………………(1 分)

故所求投影直线为 $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + x + y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ……………………（3 分）

（2）在 $(-1,-1,2)$ 处切向量为 $\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}_{(-1,-1,2)} = (-3,3,0)$…………………（2 分）

则切线方程为：$\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{0}$ …………………（3 分）

法平面方程为：$x - y = 0$ …………………（4 分）

（3）原点到 Γ 上任一点 (x, y, z) 的距离为: $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ …………………（1 分）

引入拉格朗日函数 $L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + 2z - 2)$………（2 分）

解方程组 $\begin{cases} L_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \\ L_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \\ L_z = 2z - \lambda + 2\mu = 0 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \\ x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ …………………（3 分）

得 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases}$ …………………（4 分）

代入目标函数，比较得最大值与最小值分别为 $\sqrt{6}$ 和 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. …………………（5 分）

6.

解. 切线方程：

$$\begin{cases} (-2)(x-1)+2(y-1)+4(z-1)=0 \\ (x-1)-2(y-1)+3(z-1)=0 \end{cases}$$

………………………………………………………………… *4'*

即：

$$\begin{cases} x-y-2z=-2 \\ x-2y+3z=2 \end{cases}$$

切线方向为 $(1,-1,-2)\times(1,-2,3)=(-7,-5,-1)$, ………………………… *1'*

故法平面为：

$$-7(x-1)-5(y-1)-(z-1)=0.$$

………………………………………………………………… *1'*

□

解. 切线方程：

$$\begin{cases} 4(y-1)+4(z-1)=0 \\ (x-1)-2(y-1)+3(z-1)=0 \end{cases}$$

………………………………………………………………… *3'*

即：

$$\begin{cases} y+z=2 \\ x-2y+3z=2 \end{cases}$$

切线方向为 $(0,1,1)\times(1,-2,3)=(5,1,-1)$, ………………………… *2'*

故法平面为：

$$5(x-1)+(y-1)-(z-1)=0.$$

………………………………………………………………… *1'*

□

7．解：

设切点处坐标为 (x_0,y_0,z_0) 则该点处法向量为 $(4x_0,y_0,-1)$ ……………………………………………2 分

法向量满足 $\begin{cases} z_0=2{x_0}^2+\dfrac{{y_0}^2}{2} \\ \dfrac{4x_0}{-4}=\dfrac{y_0}{2}=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$ ……………………………………2 分

解得$(\frac{1}{2},-1,1)$ ……………………………………………2 分

故法线方程为：$\frac{x-\frac{1}{2}}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{-1}$ ……………………………………2 分

评分标准说明：坐标算错不给分

9．令$F(x,y,z)=f(x-ay,z-by)$，则$F_x'(x,y,z)=f_1',F_y'(x,y,z)=-af_1'-bf_2',F_z'(x,y,z)=f_2'$ …2 分

由于$aF_x'+F_y'+bF_z'=0$，因此曲面的切平面恒与方向数为$(l,m,n)=(a,1,b)$的直线相平行。……4 分

10．

方法 1：任意取曲面上一点(x_0,y_0,z_0)

令$F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$. .

则 $F_x=\frac{1}{2\sqrt{x}},F_y=\frac{1}{2\sqrt{y}},F_z=\frac{1}{2\sqrt{z}}$.

法向量：$\vec{n}=(\frac{1}{\sqrt{x_0}},\frac{1}{\sqrt{y_0}},\frac{1}{\sqrt{z_0}})$,

点向式写出切平面：$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$.

即 $\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}-\sqrt{a}=0$

x轴上截距：$p=\sqrt{ax_0}$，y轴上截距：$q=\sqrt{ay_0}$，z轴上截距：$r=\sqrt{az_0}$，

则$p+q+r=\sqrt{a}\cdot(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$，

得证。

方法 2：

证 设$F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$，则曲面在点（$x,y,z$）处的一个法向量

$$\vec{n}=(\frac{1}{2\sqrt{x}},\frac{1}{2\sqrt{y}},\frac{1}{2\sqrt{z}})$$

在曲面上任取一点$M(x_0,y_0,z_0)$，则曲面在点 M 处的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0$$

即$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a}$

化为截距式得

$$\frac{x}{\sqrt{ax_0}}+\frac{y}{\sqrt{ay_0}}+\frac{z}{\sqrt{az_0}}=1$$

所以截距之和为

$$\sqrt{ax_0}+\sqrt{ay_0}+\sqrt{az_0}=\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=a$$

第八部分 方向导数和梯度

1．$\frac{1}{\sqrt{4(ln2)^2+1}}(-2ln2+1)$ 2．D 3．$(1,1,1)$ 4．$(\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$

5．$2\sqrt{3}$ 6．$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{21}},\cos\beta=\frac{-4}{\sqrt{21}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{21}}$ 7．A

8．A 9．$\frac{1}{3}$; $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$ 10．$\frac{e}{\sqrt{2}}$ 11．7

12．C 13．$-\frac{2}{(x^2+y^2)^2}(x,y)$或$-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\vec{i}-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\vec{j}$ 14．$\frac{1}{2}$

15．$2\sqrt{6}$ 16．$\frac{1}{\sqrt{4(ln2)^2+1}}(1,2ln2)$ 17．$(-2,2,-2)$ 18．D

19．D 20．$\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}},0\right)$

21．解：$\overrightarrow{PQ}=(-1,1)$

$\vec{l}=\vec{e}_{\overrightarrow{PQ}}=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=(\cos\alpha,\cos\beta)$

$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,-1)}=2x|_{(1,-1)}=2,\frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,-1)}=-2y|_{(1,-1)}=2$

$\therefore\frac{\partial f}{\partial l}|_{(1,-1)}=\frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,-1)}cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,-1)}cos\beta=2\times(-\frac{1}{\sqrt{2}})+2\times(\frac{1}{\sqrt{2}})=0.$

22．**版本一**：解：

$$gradu(1,0,1)=\left(\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}},\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)\Bigg|_{(1,0,1)}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{e}_{\overrightarrow{AB}}=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{AB}}\Big|_{(1,0,1)}=gradu(1,0,1)\cdot\vec{e}_{\overrightarrow{AB}}=\frac{1}{2}$$

版本二：解：函数$u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$在点 A（1，0，1）处可微，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_A=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\Big|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2};\quad\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_A=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\Big|_{(1,0,1)}=0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_A=\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\Big|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2}$$

而$\vec{l}=\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$,所以$\vec{l}^{\circ}=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$,故在 A 点沿$\vec{l}=\overrightarrow{AB}$方向导数为:

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_A=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_A\cdot\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_A\cdot\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_A\cdot\cos\gamma=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+0\cdot(-\frac{2}{3})+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

23．解：$\vec{n}=(4,6,2)\Rightarrow\vec{e}_{\vec{n}}=\left(\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$

$$\nabla u(1,1,1)=\left(\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}},\frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}},-\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}\right)\Big|_{(1,1,1)}=\left(\frac{6}{\sqrt{14}},\frac{8}{\sqrt{14}},-\sqrt{14}\right)$$

$$\therefore\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\Big|_{(1,1,1)}=\nabla u(1,1,1)\cdot\vec{e}_{\vec{n}}=\frac{11}{7}.$$

第九部分 函数连续、偏导存在、方向导数存在、可微等等关系

1．D	2．C	3．C	4．B
5．D	6．B	7．D	8．C
9．B	10．D	11．C	12．B
13．D	14．D		

第十部分 多元函数的极值、拉格朗日乘数法

1．B	2．B	3．C	4．B
5．-5	6．D	7．$\frac{1}{\sqrt{13}}$	8．A
9．A	10．B	11．B	12．D
13．D	14．$(0,0)$		

1．

解. 考虑 Lagrange 函数 $L(x,y,z,\lambda)=x-2y+2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$. L 的临界点由下面的方程组决定:

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=1+2\lambda x=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=-2+2\lambda y=0\\ \frac{\partial L}{\partial z}=2+2\lambda z=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2+z^2-1=0.\end{cases}$$

由前三个方程得: $x=-\frac{1}{2\lambda},y=\frac{1}{\lambda},z=-\frac{1}{\lambda}$. 代入最后一个方程得: $\frac{9}{4}\frac{1}{\lambda^2}=1$. 所以 $\lambda=\pm\frac{3}{2}$. 所以可能的极值点为: $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$, $(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$. f 在这两点的取值分别为: -3 和 3. 注意该问题的几何意义是求使平面 $x-2y+2z=C$ 与单位球面相交的 C 的极值，由该几何意义知 C 有一个极大值，一个极小值，所以该条件极值问题的极大值为 3，极小值为 -3. □

2．由题意，作拉格朗日函数：

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(xy+yz+xz-6),\qquad（3 分）$$

解方程组

$$\begin{cases} yz+\lambda(y+z)=0, \\ xz+\lambda(x+z)=0, \\ xy+\lambda(y+x)=0, \end{cases}\qquad（3 分）$$

得 $x=y=z=\sqrt{2}$，这是唯一可能的极值点.因由问题本身可知最大值一定存在，所以最大值就在这个可能的极值点处取得，f 的最大值为 $V=2\sqrt{2}$.（2 分）

3．

解 方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 两端分别关于 x 和 y 求偏导数，得

$$2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0, \qquad ①$$

$$-6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0. \qquad ②$$

令 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x-3y=0, \\ -3x+10y-z=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=3y, \\ z=y. \end{cases}$

将上式代入 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$，可得

$$\begin{cases} x=9, \\ y=3, \\ z=3 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=-9, \\ y=-3, \\ z=-3. \end{cases}$$

对①两端分别关于 x 和 y 求偏导数，有 $2-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$，

$$-6-2\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0.$$

对②两端关于 y 求偏导数，有 $20-2\dfrac{\partial z}{\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，所以

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{(9,3)}=\frac{1}{6},B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{(9,3)}=-\frac{1}{2},C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_{(9,3)}=\frac{5}{3},$$

故 $AC-B^2=\dfrac{1}{36}>0$. 又 $A=\dfrac{1}{6}>0$，从而点 $(9,3)$ 是函数 $z(x,y)$ 的极小值点，极小值为 $z(9,3)=3$.

类似地，由

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{(-9,-3)}=-\frac{1}{6},B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{(-9,-3)}=\frac{1}{2},C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_{(-9,-3)}=-\frac{5}{3},$$

可知 $AC-B^2=\dfrac{1}{36}>0$. 又 $A=-\dfrac{1}{6}<0$，所以点 $(-9,-3)$ 是函数 $z(x,y)$ 的极大值点，极大值为

$$z(-9,-3)=-3.$$

4．

解. 原问题等价于求函数 $g(x,y)=x^2+y^2$ 在约束 $x+y=1$ 下的条件极值。考虑 Lagrange 函数 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1)$. ………………………… 2'
极值点 (x,y) 必满足下面的方程组：

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = & 2x+\lambda=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = & 2y+\lambda=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = & x+y-1=0 \end{cases} \tag{1}$$

…………………………………………………………………… 2'
由上面的方程组解得：$x=y=\frac{1}{2}$, 所以可能的极值点为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. 由几何意义知，该问题存在最小值，而最小值点一定为极值点，而我们求得的可能的极值点只有一个，所以 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 就是最小值点。………………………………………… 2'

5.

解：

设 $C(x,y)$, 则 $\overrightarrow{AB}=(3,-1), \overrightarrow{AC}=(x-1,y-3)$ ……1 分

三角形面积为

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ x-1 & y-3 & 0 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|3y+x-10|$$ ………………2 分

构造拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=(3y+x-10)^2+\lambda(x^2+y^2-1)$$ ………………………………1 分

求导可得

$$\begin{cases} F_x=2(3y+x-10)+2\lambda x=0 \\ F_y=6(3y+x-10)+2\lambda y=0 \\ F_\lambda=x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$ ……………………………………3 分

解得 $x=\frac{1}{\sqrt{10}}, y=\frac{3}{\sqrt{10}}$ ……………………………………………1 分

评分标准说明：直接转化为无条件极值方法也可。

6．解：

$$\begin{cases} f_x'=3x^2-6x=0 \\ f_y'=3y^2-6y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0,x=2 \\ y=0,y=2 \end{cases}$$，得驻点：$(0,0),(0,2),(2,0),(2,2)$

$$f''_{xx}=6x-6, f''_{xy}=0, f''_{yy}=6y-6$$

① $(0,0)$处：
$AC-B^2=(-6)\times(-6)-0=36>0$，有极值，$A=-6<0$，极大值，$f(0,0)=0$，
② $(0,2)$处：
$AC-B^2=(-6)\times 6-0=-36<0$，无极值，
③ $(2,0)$处：
$AC-B^2=6\times(-6)-0=-36<0$，无极值，
④ $(2,2)$处：

$AC-B^2=6\times 6-0=36>0$，有极值，$A=6>0$，极小值，$f(2,2)=-8$

7．解：

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$$ ……………………（2 分）

解得驻点为$(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2)$ ……………………（3 分）

再求二阶偏导数，

$f_{xx}(x,y)=6x+6, f_{xy}(x,y)=0, f_{yy}(x,y)=-6y+6.$ ……………………（4 分）

在点$(1,0)$处，$\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2=72>0$，且 $\mathrm{A}>0$，故$(1,0)$为极小值点。

类似地，$(-3,2)$为极大值点，$(1,2),(-3,0)$都不是极值点。 ……………………（6 分）

8．解：

$$\begin{cases} f_x=(x^2+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=0 \\ f_y=(1+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=0 \end{cases}$$

得极值点$(1,-\frac{4}{3}),(-1,-\frac{2}{3})$.

又$A=f_{xx}=(\frac{x^3}{3}+2x^2+2x+y)e^{x+y}$

$B=f_{xy}=(\frac{x^3}{3}+x^2+y+1)e^{x+y}$

$C=f_{yy}=(\frac{x^3}{3}+y+2)e^{x+y}$

① $(1,-\frac{4}{3})$， $AC-B^2>0, A>0.$ 故$(1,-\frac{4}{3})$为极小值点，极小值为$-e^{-\frac{1}{3}}$.

② $(-1,-\frac{2}{3})$， $AC-B^2<0,$ 故$(-1,-\frac{2}{3})$不是极值点。

9．

解. 问题等价于考虑函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, 在条件 $\phi(x,y,z)=(x-y)^2+z^2-1=0$ 下的条件极值问题。考虑 Lagrange 函数 $L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\phi(x,y,z)$.
……………………………………………………………………2'

由 Lagrange 乘子法，对于可能的极值点 (x,y,z) 必存在 λ, 使 (x,y,z,λ) 满足方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=2x+2\lambda(x-y)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}=2y-2\lambda(x-y)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}=2z+2\lambda z=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=(x-y)^2+z^2-1=0. \end{cases}$$

……………………………………………………………………2'

将第一个方程减去第二个方程，得 $2(x-y)(1+2\lambda)=0$, 故或者 $x=y$, 或者 $\lambda=-\frac{1}{2}$.

情况一： $x=y$, 代入第一个方程立得 $x=y=0$, 再代入第四个方程立得 $z=\pm 1$, 故可能的极值点为 $(0,0,\pm 1)$;

情况二： $\lambda=-\frac{1}{2}$, 代入第一个方程立得 $x=-y$, 代入第三个方程得 $z=0$, 再代入第四个方程立得 $x=\pm\frac{1}{2}$, $y=\mp\frac{1}{2}$, 故可能的极值点为 $(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2},0)$.

综上：可能的极值点为 $(0,0,\pm1)$, $(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2},0)$. 注意 $f(0,0,\pm1)=1$, $f(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2},0)=\frac{1}{2}$. 而 S 为由柱面 $x^2+z^2=0$ 绕 z 轴旋转并伸缩得到，由几何意义知 f 必能取到最小值点，故 f 的最小值点必为 $(0,0,\pm1)$,$(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2},0)$ 这四个点之一，故所求的最短距离为 $\sqrt{f(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2},0)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. ………………………………………………… 2'

□

10．解：令 $f_x(x,y)=2x(2+y^2)=0$, $f_y(x,y)=2x^2y+\ln y+1=0$,

得 f(x,y)的驻点为 $(0,\mathrm{e}^{-1})$。 …………………（3 分）

在 $(0,\mathrm{e}^{-1})$ 点，

$$A=f_{xx}(0,e^{-1})=2(2+y^2)|_{(0,e^{-1})}=2(2+e^{-2})$$

$$B=f_{xy}(0,e^{-1})=4xy|_{(0,e^{-1})}=0$$

$$C=f_{yy}(0,e^{-1})=(2x^2+\frac{1}{y})|_{(0,\mathrm{e}^{-1})}=e$$

由于 $AC-B^2>0, A>0$，所以 f(x,y)在 $(0,e^{-1})$ 取到极小值 $-\mathrm{e}^{-1}$。……..（7 分）

11．解：点 (x,y,z) 到平面的距离为 $d=\dfrac{|x+y+z+1|}{\sqrt{3}}$。　（2 分）

先求 d^2 在条件 $z=x^2+y^2$ 下的最小值，设

$$F(x,y,z)=\frac{1}{3}(x+y+z+1)^2+\lambda(z-x^2-y^2),\quad (4\text{ 分})$$

则

$$\begin{cases} F_x=\dfrac{2}{3}(x+y+z+1)-2\lambda x=0 \\ F_y=\dfrac{2}{3}(x+y+z+1)-2\lambda y=0 \\ F_z=\dfrac{2}{3}(x+y+z+1)+\lambda=0 \end{cases} \quad (6\text{ 分})$$

并与条件 $z=x^2+y^2$ 联立解得唯一可能极值点 $x=y=-\dfrac{1}{2},z=\dfrac{1}{2}$.　（8 分）

12．解：

解：设 $L(x,y,z)=8x^2+4yz-16z+600+\lambda(4x^2+y^2+4z^2-16)$

令 $$\begin{cases} L_x=16x+8x\lambda=0 & \Rightarrow ①x=0;\ ②\lambda=-2 \\ L_y=4z+2\lambda y=0 & \Rightarrow \lambda=\dfrac{-2z}{y} \\ L_z=4y-16+8\lambda z=0 & \Rightarrow \lambda=\dfrac{4-y}{2z} \\ L_\lambda=4x^2+y^2+4z^2-16=0 \end{cases}$$

由 $\lambda=\dfrac{-2z}{y}=\dfrac{4-y}{2z}\Rightarrow 4z^2=y^2-4y$

①$x=0$，$4z^2=y^2-4y$　代入 $4x^2+y^2+4z^2-16=0\Rightarrow y=4,y=-2$

$\Rightarrow z=0,z=\pm\sqrt{3}$　$\Rightarrow$ 拐点 $(0,4,0)$,$(0,-2,\sqrt{3})$,$(0,-2,-\sqrt{3})$

②$\lambda=-2 \Rightarrow z=y, y-4-4z=0 \quad \Rightarrow y=z=-\frac{4}{3}$ ，$x=\pm\frac{4}{3}$

$\Rightarrow$ 拐点$\left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right),\left(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$

$T_1(0,4,0)=600$

$\min: T_2(0,-2,+\sqrt{3})=600-24\sqrt{3} \qquad T_4\left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)=614.2$

$\max: T_3(0,-2,-\sqrt{3})=600+24\sqrt{3} \qquad T_5\left(+\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)=614.2$

（勘误：将 614.2 改为为 $614.\dot{2}$，即循环小数，两个都要改）

13．解：

版本一：

（1） z 在点 $M(x,y)$ 处梯度方向 gradz=$(-4x,-2y)$ 处增长率最大，最大增长率为

$\left|\mathrm{grad}\, z\right|_{\mathrm{M}}=2\sqrt{4x^2+y^2}$

（2）若记 $f(x,y)=4x^2+y^2$，则题意要求 $f(x,y)$ 在条件 $2x^2+y^2=1000$ 约束下的最大值，为此做拉格朗日函数 $F(x,y)=4x^2+y^2+\lambda(2x^2+y^2-1000)$

$$\begin{cases} F_x=8x+4\lambda x=0 \\ F_y=2y+2\lambda y=0 \\ 2x^2+y^2=1000 \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=10\sqrt{10} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=0 \\ y_2=-10\sqrt{10} \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=10\sqrt{5} \\ y_3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=-10\sqrt{5} \\ y_4=0 \end{cases}$$

$F(x_1,y_1)=F(x_2,y_2)=1000$， $F(x_3,y_3)=F(x_4,y_4)=2000$，故所求点为 $(\pm10\sqrt{5},0)$

版本二：

解：（1）函数沿梯度方向(-4x,-2y)增长率最大，最大增长率为梯度的模 $2\sqrt{4x^2+y^2}$.

(2) 构造 $L(x,y,\lambda)=4x^2+y^2+\lambda\left(2x^2+y^2-1000\right)$

$$\begin{cases} L_x=8x+4\lambda x=0 \\ L_y=2y+2\lambda y=0 \\ L_\lambda=2x^2+y^2-1000=0 \end{cases} \text{解得} \begin{matrix} \left(0,\pm10\sqrt{10}\right)\rightarrow L=1000 \\ \left(\pm10\sqrt{5},0\right)\rightarrow L=2000 \end{matrix} \quad \surd$$

所以该点为 $\left(\pm10\sqrt{5},0\right)$

14．解：利润 $R=px-cx=(p-c_0+kln x)\cdot x=[(1-ak)p+klnM-c_0]\cdot M\cdot e^{-ap}$

令 $\frac{dR}{dp}=(1-ak)\cdot M\cdot e^{-ap}-aM[(1-ak)p+k\ln M-c_0]\cdot e^{-ap}=0$

得唯一驻点：$p=\frac{-aklnM+ak-1-ac_0}{a(1-ak)}$ 即为所求。（教材 P129 例 9）

15．解：令$\begin{cases}R_x=14-8y-4x=0\\R_y=32-8x-20y=0\end{cases}$解得唯一驻点：$\left(\frac{3}{2},1\right)$

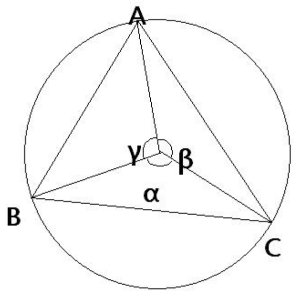
$R_{xx}=-4,R_{xy}=-8,R_{yy}=-20\Rightarrow AC-B^2>0,A<0$

所以$\left(\frac{3}{2},1\right)$为极大值点，也是最大值点，即电台广告 1.5 万元，报纸广告 1 万元。

（2）构造$L(x,y,\lambda)=15+14x+32y-8xy-2x^2-10y^2+\lambda(x+y-15)$

令$\begin{cases}L_x=14-8y-4x+\lambda\\L_y=32-8x-20y+\lambda\\L_\lambda=x+y-1.5=0\end{cases}$ 解得唯一驻点：$\left(0,\frac{3}{2}\right)$即为所求，即电台广告 0 万元，报纸广告 1.5 万元。

16．解：



$\alpha+\beta+\gamma=2\pi,0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$，半径为 R

$S_{ABC}=\frac{1}{2}R^2\left(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\right)$

构造拉格朗日函数：$L\left(\alpha,\beta,\gamma,\lambda\right)=\frac{1}{2}R^2\left(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\right)+\lambda\left(\alpha+\beta+\gamma-2\pi\right)$

由$\begin{cases}L'_\alpha=0\\L'_\beta=0\\L'_\gamma=0\\L'_\lambda=0\end{cases}$可得唯一驻点：$\alpha=\beta=\gamma=\frac{2}{3}\pi$，即为所求。

17．解：设水箱的长、宽、高分别为x,y,z，则表面积为$S=xy+2\left(x+y\right)z$且$xyz=a^3$，知：

$S=xy+2a^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right),x>0,y>0$，令$\begin{cases}\frac{\partial S}{\partial x}=y-\frac{2a^3}{x^2}=0\\\frac{\partial S}{\partial y}=x-\frac{2a^3}{y^2}=0\end{cases}$，解得唯一驻点$\left(\sqrt[3]{2}a,\sqrt[3]{2}a\right)$。

根据问题的实际意义，$S\left(x,y\right)$的最小值一定在区域D的内部取到，而函数在D内只有唯一驻点，故

$x=y=\sqrt[3]{2}a$ 也为最小值点，从而 $x=y=\sqrt[3]{2}a\left(m\right),z=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}a\left(m\right)$ 时，表面积最小。

第十章 重积分

第一部分 二重积分的概念、性质

考点：重积分对于积分区域的可加性、对称性

1．A　　2．C　　3．C　　4．A

5．B　　6．C　　7．A　　8．A

9．A　　10．C

考点：多个重积分比较大小

1．A　　2．B　　3．B　　4．$\iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,d\sigma$

第二部分 二重积分的计算

考点：交换积分次序

1．$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy$　　2．$\int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx$　　3．$\int_1^2 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$

4．$\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y} f\left(x,y\right)dx+\int_2^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{2} f\left(x,y\right)dx$　　5．$\int_1^2 dy\int_y^{y^2} f(x,y)dx$　　6．B

7．$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\mathrm{d}y$　　8．B　　9．$\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$　　10．A

11．$\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$　　12．$\int_{-1}^{0} dx\int_{-x}^{1} f\left(x,\quad y\right)dy+\int_0^1 dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1} f\left(x,\quad y\right)dy$　　13．$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{\sqrt[3]{x}}^1 f(x,y)\mathrm{d}y$

14．A　　15．$\int_1^2 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$　　16．C　　17．B

考点：二重积分的直角坐标表示和极坐标表示的转换

1．D　　2．D　　3．B　　4．C

5．A　　6．$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta\int_0^{2\sec\theta} f(\rho)\rho d\rho$　　7．B　　8．D

9．$\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{a\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

考点：计算二重积分（直角坐标和极坐标）

1．$\frac{4}{3}$　　2．2　　3．B　　4．$\frac{1}{3}$

5．C　　6．D　　7．$\frac{1}{2}$　　8．± 2

9．C　　10．C　　11．$\frac{1}{2}$　　12．$\frac{16\pi}{3}$

13．$8\pi R^2$　　14．0　　15．B　　16．A

17．$\frac{1}{2}\left(1-e^{-4}\right)$　　18．$\frac{2}{3}\pi R^3$　　19．$\frac{3}{8}$　　20．$f\left(x+t\right)-f\left(x-t\right)$

21．$\frac{\pi}{4}$

1．

解.

$$\iint\limits_{D}\frac{\sin x}{x}dxdy=\int_0^{\pi}\left(\int_{\pi-x}^{\pi}\frac{\sin x}{x}dy\right)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\sin x dx$$

$$=2.$$

2．

解 $x^2+y^2=2y\Rightarrow r=2\sin\theta$　　（2 分）

$x^2+y^2=4y\Rightarrow r=4\sin\theta$　　（2 分）

$y-\sqrt{3}x=0\Rightarrow\theta_2=\frac{\pi}{3}$

$x-\sqrt{3}y=0\Rightarrow\theta_1=\frac{\pi}{6}$　　（2 分）

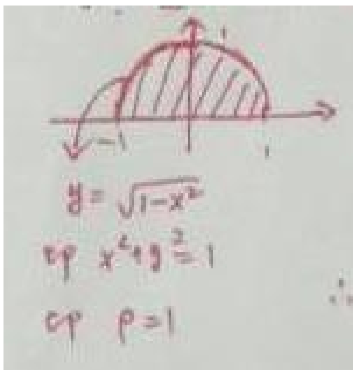
$\therefore\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}r^2\cdot rdr=15(\frac{\pi}{2}-\sqrt{3})$　　（2 分）

3．解：选用极坐标（$\because\ln(x^2+y^2+1)$ 无论关于 x 还是 y 都积不出）

①$\ln(x^2+y^2+1)=\ln(\rho^2+1)$

② $dxdy=\rho d\rho d\theta$

③D,$\begin{cases}0\le\theta\le\pi\\0\le\rho\le1\end{cases}$



$$I=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1\ln(\rho^2+1)\rho d\rho$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1\ln(\rho^2+1)d(\rho^2+1)$$
$\therefore$
$$=\frac{\pi}{2}\cdot\left[(\rho^2+1)\cdot\ln(\rho^2+1)\Big|_0^1-\int_0^1 1d(\rho^2+1)\right]$$
$$=\frac{\pi}{2}(2\ln 2-1)$$

4．解：

方法一：解：$I\overset{\text{轮换对称性}}{=}\iint\limits_D y^2dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)dxdy\overset{\text{极坐标}}{=}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^2\cdot\rho d\rho=4\pi$

方法二：D: $0\le\theta\le 2\pi\quad 0\le r\le 2$，

$\therefore\ \iint\limits_D x^2dxdy=\iint\limits_D r^3\cos^2\theta drd\theta=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^2 r^3dr=4\pi$

5．解：

设$D_1=\{0\le x\le 1,0\le y\le x\},D_2=\{0\le x\le 1,x\le y\le 1\}$，则

$$\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy=\iint\limits_{D_1}e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy+\iint\limits_{D_2}e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$$
$$=\iint\limits_{D_1}e^{x^2}dxdy+\iint\limits_{D_2}e^{y^2}dxdy=\int_0^1dx\int_0^x e^{x^2}dy+\int_0^1dy\int_0^y e^{y^2}dx$$
$$=\int_0^1 xe^{x^2}dx+\int_0^1 ye^{y^2}dy=e-1.$$

6．解：$\iint\limits_D\arctan\frac{y}{x}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^2\theta\rho d\rho d\theta=\frac{3}{64}\pi^2$……(6 分)

7．解：$\iint\limits_D\ln\left(1+x^2+y^2\right)d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\ln\left(1+\rho^2\right)\rho d\rho=\frac{\pi}{4}[2\ln 2-1]$

8．解：$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho\cdot\rho d\rho=\frac{32}{9}$

9．解：$I=\int_0^2dx\int_0^{2-x}(3x+2y)dy=\frac{20}{3}$

10．解：选用极坐标计算，$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\rho\cdot\rho d\rho=\frac{14\pi}{3}$

11．解：$\iint_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy=\iint_D\frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy\overset{\text{极坐标}}{=}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{\rho}{1+\rho^2}d\rho=\frac{\ln 2}{2}.$

12．解：在等式两边同时在 D 上取二重积分，即：

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-\iint_D\left(\frac{8}{\pi}\iint_D f(x,y)dxdy\right)dxdy$$

因此 $\iint_D f(x,y)dxdy=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{9}$，所以 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}+\frac{8}{9\pi}-\frac{2}{3}$。

13．解：

解. 由对称性，只需计算 $\iint_D xdxdy$, 下算之：

$$\begin{aligned}\iint_D xdxdy&=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xdy\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ 2'\\&=\int_0^1(x^{3/2}-x^3)dx\\&=\frac{2}{5}-\frac{1}{4}=\frac{3}{20}.\end{aligned}$$

因此，原积分值为 $\frac{3}{10}$.$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 1’

14．解：

由奇偶性及对称性可知

$\iint_D(x^2+xye^{x^2+y^2})dxdy=\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)dxdy$ ······························4 分

由极坐标可得

$\frac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2rdr=\frac{\pi}{4}$ ·····························2 分

评分标准说明：奇偶性占 2 分

15．解：$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{1+x^3}dx=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{1+x^3}dy.$

$=\int_0^1\sqrt{1+x^3}\cdot x^2dx=\left[\frac{2}{9}(1+x^3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)$ ……………………（7 分）

16．解：设$A=\iint_D f(x,y)dxdy$，则$f(x,y)=xy+A$。由题意，

$$\begin{aligned}A&=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D (xy+A)dxdy\\&=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}(xy+A)dy=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^5+Ax^2\right)dx\\&=\left[\frac{1}{12}x^6+\frac{1}{3}Ax^3\right]_0^1=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

从而，$f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$。 ……..（7 分）

17．解：$I=\int_{-6}^4 dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y}(x+y)dx-\int_{-4}^2 dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{4-y}(x+y)dx=\frac{8156}{15}$

18．解：$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho\cdot\rho d\rho=\dfrac{2\pi}{3}$ …… 6 分（也可用直角坐标做，列式对给 4 分，计算 2 分）

19．解：$\iint\limits_D e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 e^{-\rho^2}\cdot\rho d\rho=\pi\left(1-e^{-1}\right)$

20．解：$\iint\limits_D xyd\sigma=\int_1^2 dx\int_1^x xydy=\dfrac{9}{8}$

21．解：$I=\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^a\rho^2 d\rho$ ……………4 分

$=\dfrac{\pi}{6}a^3$ ………………1 分

22．答案为：$\dfrac{1}{2}\left(1-e^{-4}\right)$

23．答案为：$y=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}x\cos x$

24．解：方程 $f(x)=e^x+\int\limits_0^x tf(t)dt-x\int\limits_0^x f(t)dt$ 两边对 x 求导得

$f'(x)=e^x+xf(x)-\int\limits_0^x f(t)dt-xf(x)=e^x-\int\limits_0^x f(t)dt$，（2 分）再对 x 求导得

$f''(x)=e^x-f(x)$（4 分）…初始条件为 $f(0)=f'(0)=1$，（5 分）解此方程可得特解为

$f(x)=\dfrac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x)$（7 分）

25．解：$I=\iint\limits_{D_1}\cos(x+y)dxdy+\iint\limits_{D_2}-\cos(x+y)dxdy$ ………………..2 分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)dy-\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)dy$ ……………4 分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1+\cos x)dx=\pi-2$． ……………6 分

26．解：$\iint\limits_D ydxdy=\int_{-2}^0 dx\int_0^2 ydy-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho\sin\theta\cdot\rho d\rho=4-\dfrac{\pi}{2}.$

27．解：书本 P146 例 4　　　$V=\dfrac{16}{3}R^3.$

第三部分 三重积分

1．C	2．B	3．C	4．A
5．C	6．0	7．C	8．A

9. $\frac{4}{15}\pi$　　10. 4π　　11. $\frac{64}{3}\pi$　　12. B

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi d\varphi \int_0^1 f\left(r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi\right) r^2 dr$

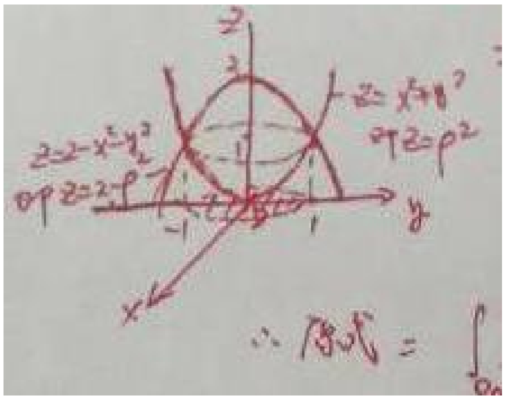
1.

解. 用平行于 xOy 平面的平面截 Ω, 可知:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_\Omega 1dxdydz \\ &= \int_1^2 (\text{直角边边长为}z\text{的直角三角形的面积})\,dz \\ &= \int_1^2 \frac{1}{2}z^2dz \\ &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

2．解：$\left.\begin{array}{l} z=x^2 \to \text{绕z轴} \to z=x^2+y^2 \\ z=2-x^2 \to \text{绕z轴} \to z=2-x^2-y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x=y\text{面投影区域：} x^2+y^2\le 1$

选用柱面坐标法，$(\sqrt{x^2+y^2}=\rho, dv=\rho d\rho d\theta dz)$



①投影：得 $D_{\rho\theta}: \rho\le 1$ 即 $\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\rho\le 1 \end{cases}$

②投影：得 z 从 $z=\rho^2$ 进，从 $z=2-\rho^2$ 出

$\therefore \rho^2 \le z \le 2-\rho^2$

$\therefore$ 原式 $= \iint\limits_{D\rho\theta} (\int_{\rho^2}^{2-\rho^2} \rho dz)\rho d\rho dv$

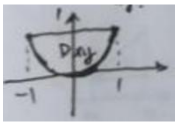
$= \int_{D\rho\theta}\int \rho^2\cdot(2-\rho^2-\rho^2)d\rho d\theta$

$= \int_0^{\partial\pi} d\theta \int_0^1 (2\rho^2-2\rho^4)d\rho$

$= 2\pi\cdot(\frac{2}{3}-\frac{2}{5})$

$= \frac{8}{15}\pi$

3．解：作图如下：



$\Rightarrow\quad I=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 dy\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz$

4.

.解 投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$. 柱面坐标

$\Omega=\{\rho^2\le z\le\sqrt{2-\rho^2},0\le\rho\le 1,0\le\theta\le 2\pi\}$, 于是

$$\iiint_\Omega z dv=\iiint_\Omega z\rho d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}zdz$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho(2-\rho^2-\rho^4)d\rho=\frac{7}{12}\pi.$$

5．解：**版本一**：解：$I=\iiint_\Omega\left(x^2+y^2\right)dV\overset{\text{截面法}}{=}\int_1^2\left(\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^2\cdot\rho d\rho\right)dz=\frac{14}{3}\pi$

版本二：$I\overset{\text{柱面坐标}}{=}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}dr\int_1^2 r^3dz+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\sqrt{2}}^2 dr\int_{\frac{1}{2}r^2}^2 r^3dz=\frac{14}{3}\pi$

6．解：**版本一**：解：$I=\iiint_\Omega\frac{dV}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}dz=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$

版本二：$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1++x+y+z)^3}$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}]dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(\frac{1}{x+1}-\frac{3-x}{4})dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$$

7．解：旋转曲面的方程为：$y^2+z^2=2x$，……(2 分)

$\iiint_\Omega(y^2+z^2)dv=\int_0^8 dx\iint_D(y^2+z^2)d\sigma$ D: $y^2+z^2\le 2x$，……(4 分)

$=\int_0^8 dx\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2x}}\rho^3 d\rho=\frac{1024}{3}\pi$ ……(6 分)

8．

解. 记该公共区域为 Ω, 使用平行于 xy 平面的平面截 Ω, 记 $\Omega_z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|(x,y,z)\in\Omega\}$, 则 Ω_z 为一个圆盘，且其面积 $\sigma(\Omega_z)=\begin{cases}\pi(R^2-(R-z)^2), & \text{if } 0\leqslant z\leqslant\frac{R}{2}\\ \pi(R^2-z^2), & \text{if } \frac{R}{2}\leqslant z\leqslant R.\end{cases}\cdots\cdot 1'$

由定义

$$V=\iiint_\Omega 1dxdydz\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1'$$
$$=\int_0^R dz\iint_{\Omega_z}1dxdy\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2'$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^R \sigma(\Omega_z)dz \\
&= 2\int_0^{R/2} \pi(R^2-(R-z)^2)dz \\
&= \pi R^3 - 2\pi\int_{R/2}^R z^2dz \\
&= \pi R^3 - \frac{2\pi}{3}(R^3-R^3/8)
\end{aligned}
$$

$$= \pi R^3(1-2/3+1/12) = \frac{5}{12}\pi R^3. \cdots\cdots\cdots 2'$$

9．解：采用柱坐标

$$\begin{cases} r^2 \le z \le 2 \\ 0 \le r \le \sqrt{2} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2 \text{分}$$

可得

原式$=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{r^2}^2 \frac{1}{1+r^2}dz = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} \frac{r(2-r^2)}{1+r^2}dr = 3\pi\ln 3 - 2\pi$ ……4 分

评分标准说明：其他方法也可

10．解：

$$V = \iiint_\Omega 1\,dV = \iint_{D_{xy}} (6-2x^2-y^2-x^2-2y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 3\iint_{D_{xy}} (2-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$$

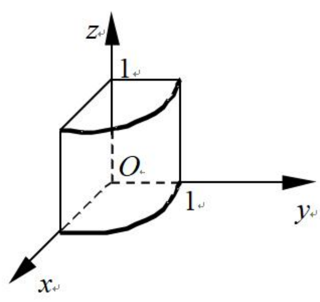
$$= 6\pi$$

11．解：把Ω投影到xOy面上得投影区域D_{xy}为由直线$x+2y=1$与两坐标轴围成的三角形 ….（2 分）

$\iiint_\Omega xdxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} dy \int_0^{1-x-2y} xdz$ ……………………（4 分）

$=\frac{1}{48}$. ……………………（6 分）

12．解：如图，选取柱面坐标系,此时 $\Omega: \begin{cases} 0 \le z \le 1, \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \le r \le 1, \end{cases}$



所以 $\iiint\limits_\Omega xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^1 r\cos\theta \cdot r\sin\theta \cdot r\mathrm{d}z$ ………3 分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=(-\frac{\cos 2\theta}{4})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{8}.$ ………3 分

13．解：$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz=\int_1^2 dx\int_0^x dy\int_0^{\frac{y}{2}} zdz=\frac{5}{32}$

14．解：原式$=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2 \rho d\rho\int_{\rho^2}^4 zdz=\frac{64}{3}\pi$

15．解：$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2 dr\int_{\frac{r^2}{2}}^2 r^3dz$（3 分）

$=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2 r^3(2-\frac{r^2}{2})dr$（5 分）

$=2\pi\cdot[\frac{r^4}{2}-\frac{r^6}{12}]\Big|_0^2=\frac{16}{3}\pi$ （6 分）

16．解：用柱面坐标得，$I=\int\limits_0^{2\pi} d\theta\int\limits_0^1 \rho d\rho\int\limits_0^{\sqrt{1-\rho^2}} zdz=\frac{\pi}{4}$（也可用球面坐标、截面法等做，列式对给 4 分，计算 2 分）

17．解：原式$\overset{截面法}{=}\int_1^2 dz\iint\limits_{D_z}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdy=\int_1^2\left[\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}\rho^2\cdot\rho d\rho\right]dz+\int_1^2 z^2\cdot S_{D_z}dz$

$=\int_1^2\frac{\pi}{2}z^2dz+\int_1^2\pi z^3dz=\frac{59}{12}\pi.$

18．解：用柱面坐标，$\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dv=\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^2\rho d\rho\int\limits_{\frac{\rho^2}{2}}^2\rho^2dz=\frac{16}{3}\pi$ ………8 分

19．解：

$I=\int_0^{\frac{R}{2}}z^2dz\iint\limits_{D_{z_1}}dxdy+\int_{\frac{R}{2}}^R z^2dz\iint\limits_{D_{z_2}}dxdy=\int_0^{\frac{R}{2}}z^2\pi\left(2Rz-z^2\right)dz+\int_{\frac{R}{2}}^R z^2\pi\left(R^2-z^2\right)dz$

$=\frac{59}{480}\pi R^5$

20．解：$\boldsymbol{\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^3dr\int_0^a dz}$ ………… (4 分)

$\boldsymbol{=\frac{\pi aR^4}{2}}$ ……………………(8 分)

21．解：$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\cdot zdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 d\rho\int_0^{2-\rho\sin\theta}\rho\cdot z\rho dz$ ………………………4 分

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\frac{1}{2}\rho^2(2-\rho\sin\theta)^2d\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}(\frac{16}{3}-8\sin\theta+\frac{16}{5}\sin\theta)d\theta$$ …………..6 分

$$=\frac{208}{15}\pi.$$ ………………………..7 分

22．解：Ω 关于 xoz 平面对称，y 关于 y 是奇函数，知 $\iiint\limits_{\Omega}ydv=0$，故

$\iiint\limits_{\Omega}(y+z)dv=\iiint\limits_{\Omega}ydv+\iiint\limits_{\Omega}zdv=\iiint\limits_{\Omega}zdv$ …………………………2 分

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi$$ ……………….6 分

$$=\frac{\pi}{8}.$$ ………………………………………7 分

第四部分 重积分的应用

1．

解. 记 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-ax\leqslant 0\}$, 则所求面积为:

$$\begin{aligned}S&=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy\\&=\iint\limits_D\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy\\&=\sqrt{2}\iint\limits_D dxdy\\&=\sqrt{2}\pi\cdot\frac{a^2}{4}.\end{aligned}$$

2．解：联立 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z^2=2x$,消去 z 得: $(x-1)^2+y^2=1$ 或 $\rho=2\cos\theta$.

围成区域 D_{xy}，$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$

所以面积 $A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{dxdy}=\iint_{D_{xy}}\sqrt{2}\,\mathrm{dxdy}=\sqrt{2}S_{D_{xy}}=\sqrt{2}\pi.$

（另一份参考答案）$D:(x-1)^2+y^2\le 1$， ………2 分

$S=\iint\limits_D\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}d\sigma=\sqrt{2}\iint\limits_D d\sigma$ ……..4 分

$= \sqrt{2}\pi$ ……………………………6 分

3．解：

记 D 为 $\{(x,y)|x^2+y^2 \leqslant a^2\}$, 则所求的曲面可视为函数 $z=xy,(x,y)\in D$ 的函数图像，因此：

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ 2' \\ &= \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy \\ &= \iint_{0\leqslant r\leqslant a, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \sqrt{1+r^2}rdrd\theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ 2' \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{1+r^2}rdr \\ &= \pi \int_0^a \sqrt{1+r^2}dr^2 \\ &= \pi\cdot\frac{2}{3}\left((1+a^2)^{3/2}-1\right). \end{aligned}$$

……………………………………………………………………………… 2'

4．解：曲面Σ的方程为$\Sigma: z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, $(x,y)\in D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 8\}$。

$\because \quad z_x = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$，$z_y = \frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$，

$\therefore \quad \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$.

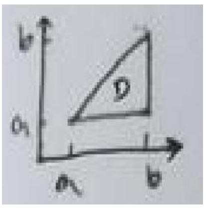
从而，$S=\iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy = \iint_D \frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}}dxdy$ ……………（4 分）

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{3}{\sqrt{9-r^2}} rdr = 12\pi$ ……………（7 分）

第五部分 证明题专练

1．证明：

处理左式：想到交换积分次序 $\Longrightarrow \int_a^b dy \int_y^b f(y)dx$



$= \int_a^b f(y)(b-y)dy$

$= \int_a^b f(x)(b-x)dx$

2．证明：

1. $\min\{f(x,y)\}\iint\limits_D g(x,y)d\sigma \le \iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma \le \max\{f(x,y)\}\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$，

即 $\min\{f(x,y)\} \le \dfrac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D g(x,y)d\sigma} \le \max\{f(x,y)\}$

从而至少存在 (ξ,η)，使得 $f(\xi,\eta)=\dfrac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma}{\iint\limits_D g(x,y)d\sigma}$.

3．证明：

$$\int_a^b dx\int_a^x (x-y)^{n-2} f(y)dy = \int_a^b dy\int_y^b (x-y)^{n-2} f(y)dx$$

$$=\frac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1} f(y)dy \quad \text{…………（3 分）}$$

4．证明：

$$\left[\int_0^a f(x)dx\right]^2 = \iint\limits_D f(x)f(y)dxdy \quad (\text{D}: 0\le x\le a, 0\le y\le a) \quad \text{………1 分}$$

$$=\iint\limits_{D_1} f(x)f(y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x)f(y)dxdy \quad \text{………3 分}$$

$$=2\iint\limits_{D_1} f(x)f(y)dxdy \quad \text{…………4 分}$$

(D_1: $0\le x\le a, x\le y\le a$, D_2: $0\le y\le a, y\le x\le a$)

5．**证明**：在球坐标与极坐标下可得

$F(t)=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_1^t f(r^2)r^2dr = 4\pi\int_1^t f(r^2)r^2dr$

$G(t)=\int_0^{2\pi} d\theta\int_1^t f(r^2)rdr = 2\pi\int_1^t f(r^2)rdr$ ………………………………2 分

$F'(t)-G'(t)=4\pi f(t^2)t^2-2\pi f(t^2)t>0$ 当t>1 ……………………1 分

由 F(1)=G(1)=0 可得结论……………………………………………1 分

评分标准说明：有极坐标或球坐标思想，可适当给分。

6．证明：$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy = \int_0^1 dy\int_0^y f(x)f(y)dx = \int_0^1 \left[f(y)\int_0^y f(x)dx\right]dy$

$$=\int_0^1\left[\int_0^y f(x)dx\right]d\left[\int_0^y f(x)dx\right]=\frac{1}{2}\left[\int_0^y f(x)dx\right]_0^1=\frac{A^2}{2}。\quad \text{………（5 分）}$$

7．证明：左$=\int_0^a dx\int_x^a e^{m(a-x)}f(x)dy=\int_0^a (a-x)\cdot e^{m(a-x)}f(x)dx=$右 .

8．证明：交换积分次序 ……………1 分

$$\int_0^a dy\int_0^y f\left(x\right)dx = \int_0^a dx\int_x^a f\left(x\right)dx = \int_0^a \left(a-x\right)f\left(x\right)dx$$ ……………3 分

9．证明：因为 $\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx = \int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b \frac{1}{f(y)}dy = \iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}dxdy$ …………2 分

$$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx = \int_a^b f(y)dx\cdot\int_a^b \frac{1}{f(x)}dy = \iint\limits_D \frac{f(y)}{f(x)}dxdy$$ ………..4 分

所以 $2\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx = \iint\limits_D \left(\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(x)}{f(y)}\right)dxdy \ge 2\iint\limits_D dxdy = 2(b-a)^2$，

因此 $\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \ge (b-a)^2$． ……6 分

10．证明：$\frac{\partial u}{\partial x} = f'\left(r\right)\frac{x}{r}$，$\frac{\partial u}{\partial y} = f'\left(r\right)\frac{y}{r}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(f''\left(r\right)\frac{x^2}{r^2}+f'\left(r\right)\frac{y^2}{r^3}\right)+\left(f''\left(r\right)\frac{y^2}{r^2}+f'\left(r\right)\frac{x^2}{r^3}\right) = f''\left(r\right)+f'\left(r\right)\frac{1}{r}$$

$$\iint\limits_{s^2+t^2\le x^2+y^2} \frac{1}{1+s^2+t^2}dsdt = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^r \frac{1}{1+\rho^2}\rho d\rho = \pi\ln\left(1+r^2\right)$$

11．证明：左 $= \int_0^a f\left(x\right)dx\cdot\int_0^a f\left(x\right)dx = \int_0^a f\left(x\right)dx\cdot\int_0^a f\left(y\right)dy = \int_0^a\int_0^a f\left(x\right)f\left(y\right)dxdy$

$= \int_0^a dx\int_x^a f\left(x\right)f\left(y\right)dy + \int_0^a dy\int_y^a f\left(x\right)f\left(y\right)dx = \int_0^a\left[f\left(x\right)\int_x^a f\left(y\right)dy\right]dx + \int_0^a\left[f\left(y\right)\int_y^a f\left(x\right)dx\right]dy$ =右.

第六部分 应用题

1．

解 记雪堆体积为 V，侧面积为 S，则

$$V = \int_0^{h(t)} dz\iint\limits_{D_z} dxdy = \frac{\pi}{4}h^3(t), \text{其中} D_z: x^2+y^2 \le \frac{1}{2}[h^2(t)-h(t)z],$$

$$S = \iint\limits_{D_0}\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,dxdy = \iint\limits_{D_0}\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\,dxdy$$

$$= \frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{h^2(t)+16\rho^2}\,\rho d\rho = \frac{13\pi}{12}h^2(t), \text{其中} D_0: x^2+y^2 \le \frac{1}{2}h^2(t),$$

由题意知 $\frac{dV}{dt} = -0.9S$，从而 $\begin{cases}\frac{dh}{dt} = -\frac{13}{10}\\ h(0) = 130\end{cases} \Rightarrow h(t) = -\frac{13}{10}t+130$，令 $h(t)\to 0$，得 $t = 100(h)$，

因此高度为 130 厘米的雪堆全部融化所需的时间为 100 小时.