

离散数学概论

第五章 图的基本概念

课程QQ号: **819392514**

金耀 软件工程系

fool1025@163.com

13857104418

第五章 图的基本概念

1.1 基本概念

1.2 握手定理

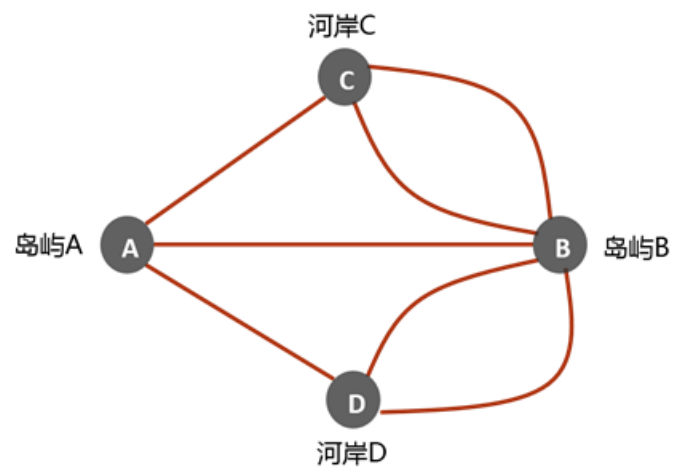
1.3 图的同构和子图

1.4 图的操作

1.5 连通性



哥尼斯堡七桥问题



瑞士数学家，物理学家
(图论之父, 1707~1783)

欧拉生平成就

9岁，把牛顿的《自然哲学的数学原理》看完了。

13岁，考入名校巴塞尔大学，同时修六个专业（**哲学、法学、数学、神学、希伯来语、希腊语**）

15岁，本科毕业。

16岁，硕士毕业。

19岁，博士毕业，博士毕业论文是一片**物理论文**。

20岁，参加**建筑**大赛，只拿到第二。欧拉很生气，觉得就算他没怎么认真比也不能被超越，然后接下来12年连得12个冠军，终于心满意得的比了。

还是20岁，著名数学家伯努利邀请他去俄国。欧拉说去就要当皇家科学院院长，然后伯努利就把**生理**学院院长让给他了。在这期间，欧拉公式。

27岁，发明了以下符号： $f(x)$ 、 \sin 、 \cos 、 \tan 。

28岁，花费三天找出计算彗星轨道方法。然后，不幸的事，右眼失明。

29岁，《力学，或解析地叙述运动的理论》出版，提出诸如质点的概念、在运动学中引入矢量。

32岁，出版**音乐**著作。新学科：**空气动力学、流体动力学**。

59岁，因为医疗事故，左眼失明。完全失明后，因为熟知所有数学公式、能够心算高等数学，写出400多篇论文，新学科：**刚体力学、分析力学**。

64岁，因家中失火，大部分研究被焚毁。

76岁，在说完他自己要离世后，倒地去世。

补充：1、欧拉还曾发现过这样几个学科：**弹道学、分析力学、拓扑学**，欧拉还是一名**制图**学家。

2、欧拉没被焚毁的一小部分论文，后世科学家整理了150+年，有886篇论文。

图论的应用

- ❖ 图论是一门很有**实用价值**的学科，在**自然科学**、**社会科学**等各领域均有很多**应用**。
- ❖ 自**20**世纪中叶以来，受计算机科学蓬勃发展的刺激，图论发展极其迅速，应用范围不断拓广，已渗透到**语言学**、**逻辑学**、**物理学**、**化学**、**电信工程**、**软件工程**、**计算机科学**以及**数学**的其他分支中。特别是在计算机科学的**形式语言**、**数据结构**、**分布式系统**、**操作系统**等方面，图论均扮演着重要的角色。

1

七桥问题 欧拉

2

游戏、博弈问题

3

克希荷夫定律

4

树 凯莱

5

四色猜想

6

高速数字计算机

无向图

多重集合: 元素可以重复出现的集合

无序积: $A \& B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

定义 无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 其中

(1) 顶点集 V 是非空有穷集合,

其元素称为**顶点**

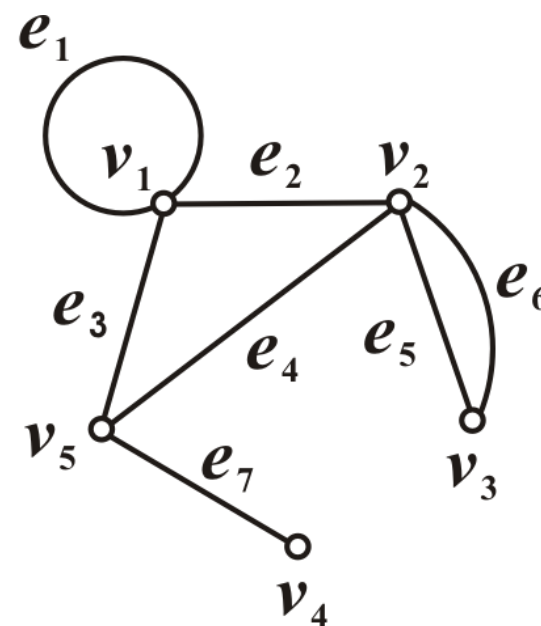
(2) 边集 E 为 $V \& V$ 的多重子集,

其元素称为**无向边**, 简称**边**.

例如, $G = \langle V, E \rangle$, 其中

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$,

$E = \{(v_1, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_1, v_5), (v_4, v_5)\}$



基本概念

❖ 图 (Graph)

【定义】 一个图表示为 $G(V(G), E(G))$, 其中

$V(G)$: 顶点集合(Vertex Set), 简记为 V

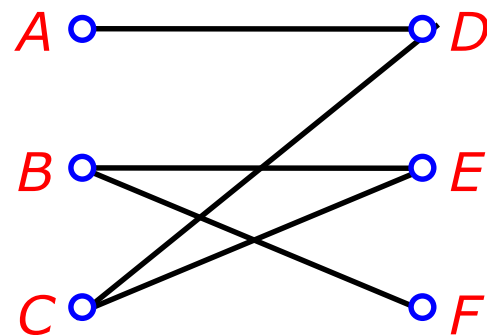
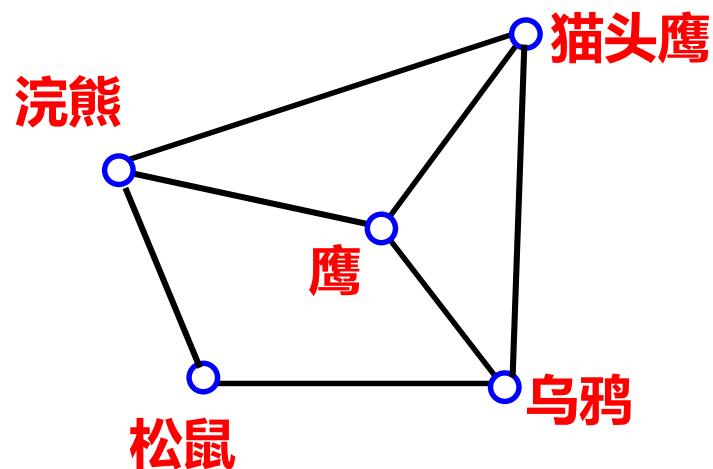
$E(G)$: 边的集合(Edge Set), 简记为 E

- **顶点(Vertex)**: 又称**结点**, 用 u 、 v 等符号表示;
- **阶(Order)**: 顶点个数, 通常用 n 表示.
- **边(Edge)**: 用 e 等符号表示, 也称**结点偶对**;
- **边数(Size)**: 边的个数, 通常用 m 表示.

例

(1) 考虑一张物种栖息地重叠图，图中用点表示每个物种，当两个物种竞争（即它们共享某些食物来源）时，就用一条线将相应的点连接起来。这种图的一部分如左下图所示，从图中看出，松鼠与浣熊竞争，乌鸦不与浣熊竞争。

(2) 在电子商务中，用户与商品之间的购买关系如下：有3个用户A、B和C，3件商品D、E和F，假设A购买了D，B购买了E和F，C购买了D和E，则这种购买情形可用右下图表示。



有向图

定义 有向图 $D=\langle V,E\rangle$, 其中

(1) 顶点集 V 是非空有穷集合,

其元素称为**顶点**

(2) 边集 E 为 $V\times V$ 的多重子集, 其

元素称为**有向边**, 简称**边**.

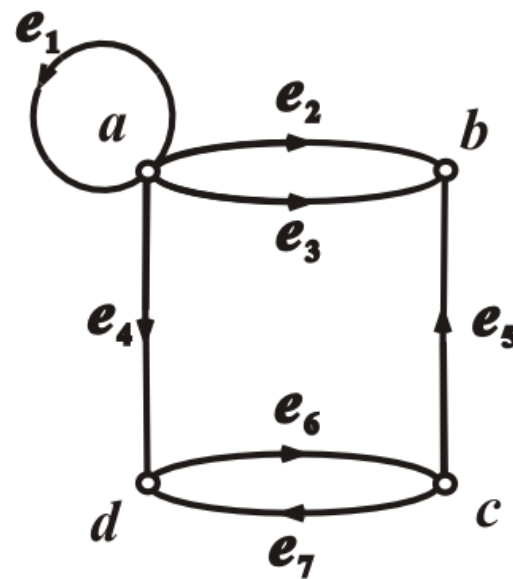
D 的**基图**: 用无向边代替有向边

如 $D=\langle V,E\rangle$, 其中

$V=\{a,b,c,d\}$

$E=\{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle a,b\rangle, \langle a,d\rangle, \langle c,b\rangle, \langle d,c\rangle, \langle c,d\rangle\}$

图的数学定义与图形表示, 在同构意义下一一对应



基本概念

- 从边 (e) 到其相联结的两顶点 (u, v) 的映射如果是有序的, 则这条边一般用有序对 $\langle u, v \rangle$ 来表示, 这时边 e 称为**有向边**或**弧**, u 称为弧 e 的**始点**, v 称为弧 e 的**终点**, u 和 v 统称为 e 的**端点**。同时称 e **关联于** u 和 v , u 和 v 是**邻接点**。同样的, 关联于同一个顶点的两条边, 称为**邻接边**。关联于同一个顶点的一条边, 称为**自回路**, 又可称为**环**, 环的方向是不定的。无向边又可称为**棱**, 没有始点和终点。不与任何结点邻接的结点称为**孤立结点**。
- 每一条边都是有向边的图称为**有向图**, 每一条边都是无向边的图称为**无向图**。如果在图中一些边是有向边, 而另一些边是无向边, 则称这个图是**混合图**。全由孤立结点构成的图称为**零图**或**离散图**。若一个图中只含一个孤立结点, 则该图称为**平凡图**。顶点数为 n 的图称为 **n 阶图**, 顶点集为空集的图称为**空图**。

基本概念

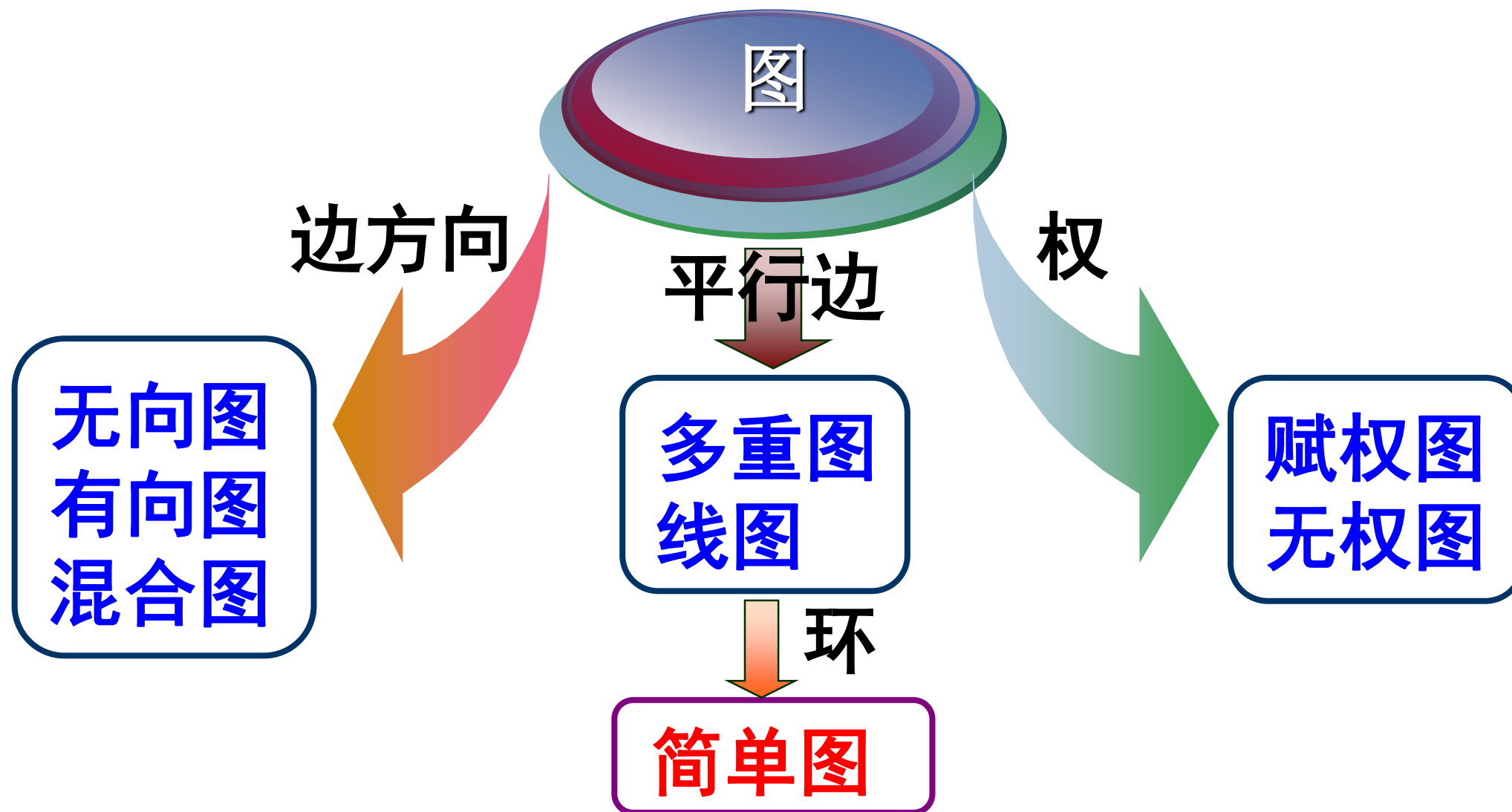
- 在有向图中，两结点间(包括结点自身间)若同始点和同终点的边多于一条，则这几条边称为**平行边**，又称**多重边**。类似的，在无向图中，两结点间(包括结点自身间)若多于一条边，则称这几条边为平行边或**多重边**。
- 含有平行边的图称为**多重图**，不含平行边的称为**线图**，没有自回路的线图称为**简单图**。
- 简单图既无多重边，又无环。
- $[e]$ 可以既表示有向边，又可以表示无向边。
- 两结点 u 、 v 间互相平行的边的条数称为边 $[u, v]$ 的**重数**。
- 仅有一条边时重数为1，没有边时重数为0。

基本概念

❖ 相关概念

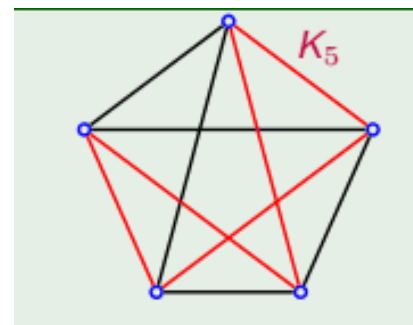
- **自回路**：关联于同一个顶点的一条边
- **孤立顶点**：不与任何顶点邻接的顶点
- **多重边（平行边）**：关联一对结点的无向边/**方向相同**的有向边多于1条
- **重数**：两结点 u 、 v 间互相平行的边的条数。

图的分类



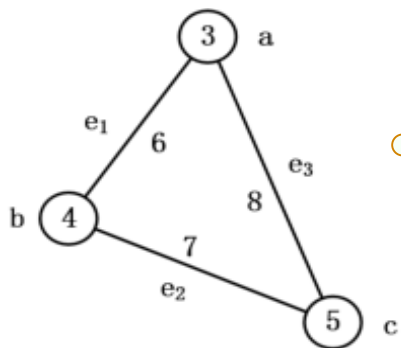
§ 1 基本概念

- 任意两个相异顶点都相邻的简单图称为**完全图**， n 阶完全图记作 K_n 。当 G 为有向图时，则 K_n 为**有向完全图**，当 G 为无向图时，则 K_n 为**无向完全图**。其中，有向完全图每对相同结点间都有两个相反方向的弧。无向完全图的每一条边都是无向边；不含有平行边和环；每一对结点间都有边相连。
- 设 $G = \langle V, E \rangle$ 为具有 n 个结点的简单图，从完全图 K_n 中删去 G 中的所有边而得到的图称为 G 相对于完全图 K_n 的**补图**，简称 G 的补图，记为 \bar{G} 。 G 与 \bar{G} 互为补图。



§ 1 基本概念

- **定理：** 在任何图中， n 个结点的无向完全图 K_n 的边数为 $n(n-1)/2$ ， n 个结点的有向完全图 K_n 的边数为 $n(n-1)$ 。
- **定理：** 在任何有向完全图中，所有结点入度的平方之和等于所有结点的出度平方之和。
- **定义：** 给每条边或弧都赋予权的图 $G=\langle V, E \rangle$ 称为**加权图**(weighted graph)，又称**赋权图**，记为 $G=\langle V, E, W \rangle$ 。对于边 e 来说， $W(e)$ 表示边 e 的**权重**(weight)，简称**权**。



$V=\{a,b,c\}, E=\{e_1,e_2,e_3\},$
 $f(a)=3, f(b)=4, f(c)=5,$
 $g(e_1)=6, g(e_2)=7, g(e_3)=8。$

§ 1 基本概念

- 在无向图中，顶点 v 作为边的端点的次数之和为 v 的**度数**，简称**度**，记作 $d(v)$ 。在有向图中，顶点 v 作为边的始点的次数之和为 v 的**出度**，记为 $d^+(v)$ 。相对的，顶点 v 作为边的终点的次数之和为 v 的**入度**，记为 $d^-(v)$ ，度数则是入度和出度之和。
- 图中度数的最大值称为**最大度**，度数的最小值称为**最小度**。同时，有向图中入度的最大值称为**最大入度**，出度的最大值称为**最大出度**。有向图中度数为1的顶点称为**悬挂顶点**，它所关联的边称为**悬挂边**。
- 设图 G 的顶点集为 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，则称 $(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$ 为 G 的**度数序列**。同理，有向图还有**入度序列**和**出度序列**，分别为 $(d^-(v_1), d^-(v_2), \dots, d^-(v_n))$ 和 $(d^+(v_1), d^+(v_2), \dots, d^+(v_n))$ 。
- 各结点的度数均相同的图称为**正则图**，各结点的度数均为 k 时称为 **k 度正则图**。

顶点的度数

设 $G=\langle V, E \rangle$ 为无向图, $v \in V$,

v 的度数(度) $d(v)$: v 作为边的端点次数之和

悬挂顶点: 度数为1的顶点

悬挂边: 与悬挂顶点关联的边

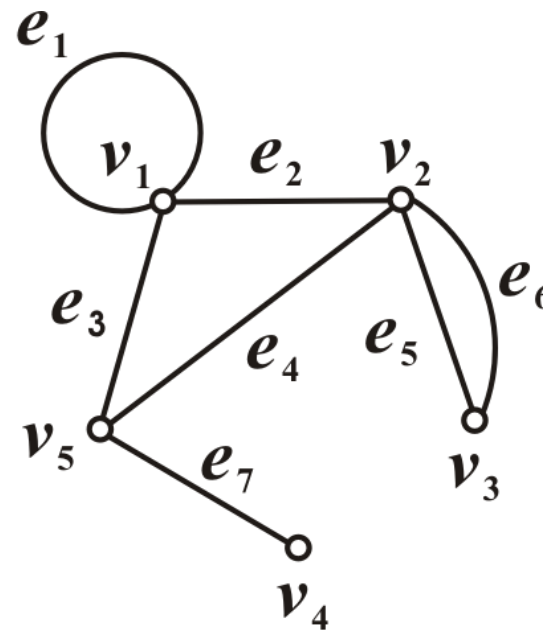
G 的最大度 $\Delta(G)=\max\{d(v) \mid v \in V\}$

G 的最小度 $\delta(G)=\min\{d(v) \mid v \in V\}$

例如 $d(v_5)=3, d(v_2)=4, d(v_1)=4$,

$\Delta(G)=4, \delta(G)=1$,

v_4 是悬挂顶点, e_7 是悬挂边, e_1 是环



顶点的度数(续)

设 $D=\langle V,E \rangle$ 为有向图, $v \in V$,

v 的出度 $d^+(v)$: v 作为边的始点次数之和

v 的入度 $d^-(v)$: v 作为边的终点次数之和

v 的度数(度) $d(v)$: v 作为边的端点次数之和

$$d(v) = d^+(v) + d^-(v)$$

D 的最大出度 $\Delta^+(D) = \max\{d^+(v) | v \in V\}$

最小出度 $\delta^+(D) = \min\{d^+(v) | v \in V\}$

最大入度 $\Delta^-(D) = \max\{d^-(v) | v \in V\}$

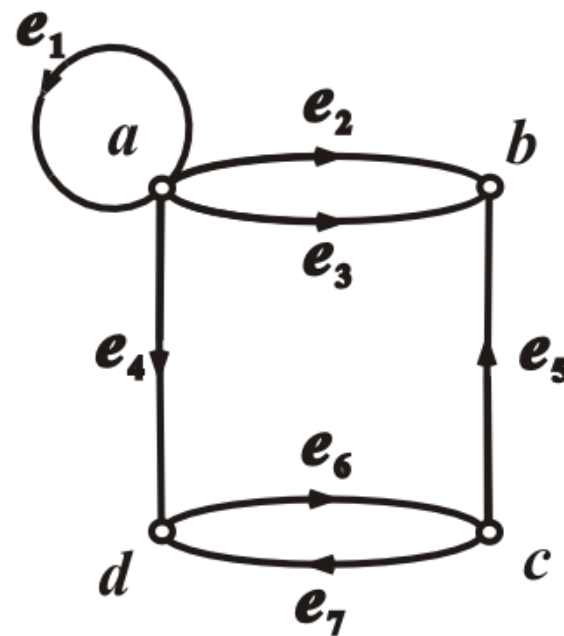
最小入度 $\delta^-(D) = \min\{d^-(v) | v \in V\}$

最大度 $\Delta(D) = \max\{d(v) | v \in V\}$

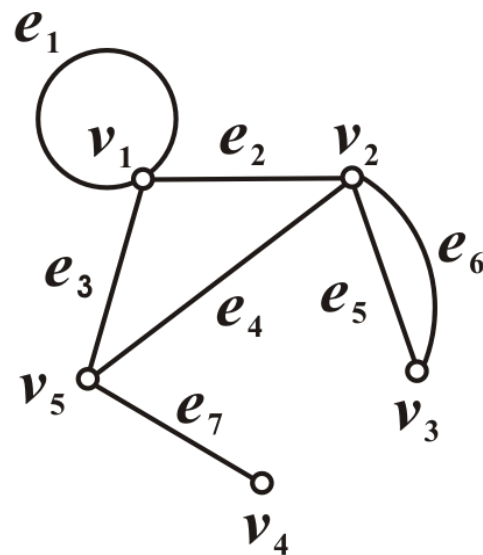
最小度 $\delta(D) = \min\{d(v) | v \in V\}$

例

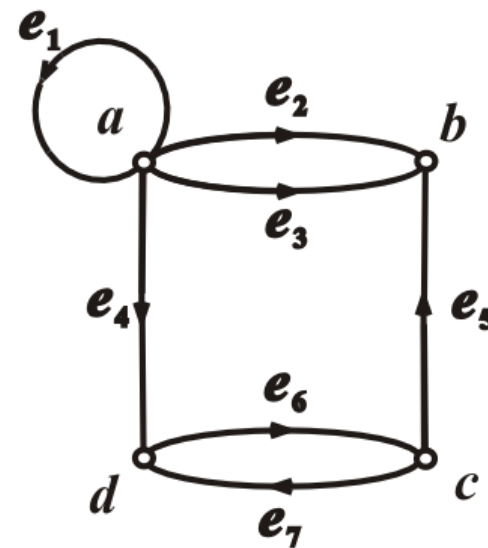
例 $d^+(a)=4, d^-(a)=1, d(a)=5,$
 $d^+(b)=0, d^-(b)=3, d(b)=3,$
 $\Delta^+(D)=4, \delta^+(D)=0, \Delta^-(D)=3,$
 $\delta^-(D)=1, \Delta(D)=5, \delta(D)=3.$



实例



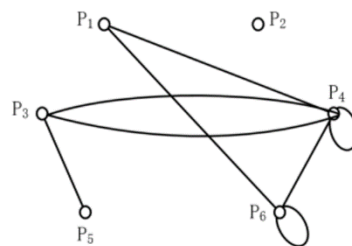
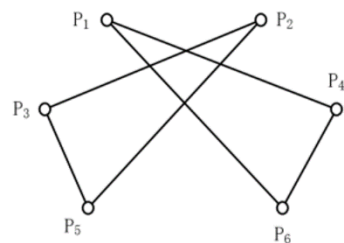
e_5 和 e_6 是平行边
重数为2
不是简单图



e_2 和 e_3 是平行边,重数为2
 e_6 和 e_7 不是平行边
不是简单图

§ 1 基本概念

例：描述下图a)所示的图和图b)所示的多重图。



解：对于图(a)：有6个顶点，从而 $V = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$

有6条边，由此有6个顶点偶，因此

$E = [(P_1, P_4), (P_1, P_6), (P_4, P_6), (P_3, P_2), (P_3, P_5), (P_2, P_5)]$ 。

对于图(b)：有6个顶点，从而 $V = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$

有8条边(其中有2条是多重边，两条是环)，且由此有8个顶点偶，因此

$E = [(P_1, P_4), (P_1, P_6), (P_3, P_4), (P_3, P_4), (P_4, P_4), (P_3, P_5), (P_6, P_6), (P_4, P_6)]$ 。

§ 1 基本概念

例：判定下列多重图 $G(V,E)$ 是否是简单图，其中 $V = \{A,B,C,D\}$ ，
且

- (a) $E = \{(A,B), (A,C), (A,D), (B,C), (C,D)\}$;
- (b) $E = \{(A,B), (B,B), (A,D)\}$;
- (c) $E = \{(A,B), (C,D), (A,B), (B,D)\}$;
- (d) $E = \{(A,B), (B,C), (C,B), (B,B)\}$;

解：简单图既无多重边，又无环。故

(a)是简单图。

(b)不是简单图。因为 (B, B) 是环。

(c)不是简单图。因为 (A, B) 和 (A, B) 是多重边。

(d)不是简单图。因为 (B, C) 和 (C, B) 是多重边， (B, B) 是环。

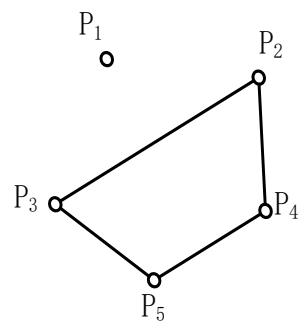
§ 1 基本概念

例：画出下列多重图 $G(V, E)$ 的图形，其中 $V = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ ，且

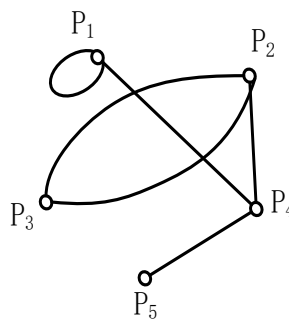
$$(a) E = \{(P_2, P_4), (P_2, P_3), (P_3, P_5), (P_5, P_4)\};$$

$$(b) E = \{(P_1, P_1), (P_2, P_3), (P_2, P_4), (P_3, P_2), (P_4, P_1), (P_5, P_4)\};$$

解：先根据顶点集画出顶点，再连接顶点标明边。其中(a)是图，(b)是多重图，结果如下图所示：



(a)



(b)

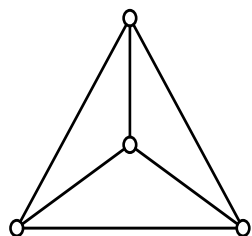
§ 1 基本概念

例：画出一个结点数最少的简单图。

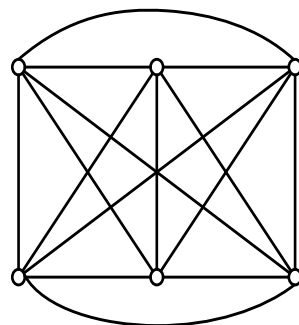
(a)使它是3-正则图；

(b)使它是5-正则图。

解：所求如下图(a)和(b)所示。



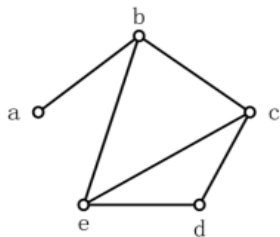
(a)



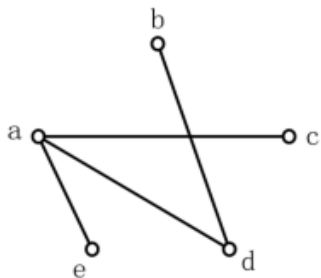
(b)

§ 1 基本概念

例：画出下图中简单图的补图。



解：补图如下图所示：



第五章 图的基本概念

1.1 基本概念

1.2 握手定理

1.3 图的同构和子图

1.4 图的操作

1.5 连通性



§ 2 握手定理

- 我们一般把度数为奇数的结点称为**奇度结点**，度数为偶数的结点称为**偶度结点**。
- **定理**：对任何图，每一条边有2个端点，所有顶点的度数之和等于它们作为端点的次数之和，即等于边数的2倍。即 $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m$
- **推论**：对任何图，奇数结点一定是偶数个。

证明：设 G 中奇数度结点集合为 V_1 ，偶数度结点集合为 V_2 ，则有：

$$\sum \deg(v_i) + \sum \deg(v_j) = \sum \deg(v) = 2|E|, \text{ 分别 } v_i \in V_1, v_j \in V_2, v \in V$$

由于 $\sum \deg(v_j)$ ， $v_j \in V_2$ 是偶数之和必为偶数，而 $2|E|$ 是偶数，故得

$\sum \deg(v_i)$ ， $v_i \in V_1$ 必是偶数。而各个 $\deg(v_i)$ ($v_i \in V_1$)是奇数，所以一定是偶数个 $\deg(v_i)$ 求和的结果，即 $|V_1|$ 是偶数。

§ 2 握手定理

➤ **推论：**对有向图，图的入度总和都与出度总和相等，且等于图的边数，即

$$\sum_{v \in V} \deg^+(v) = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = m$$
$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v) + \sum_{v \in V} \deg^-(v) = 2m$$

握手定理及其推论解释了结点数和边数的关系，我们可以根据上面的定理和推论解决很多问题，比如帮助快速判定某序列能否成为图的度数序列，要灵活掌握。

§ 2 握手定理

例：考虑图 G ，其中 $V(G)=\{A,B,C,D\}$ ， $E(G)=\{(A,B), (B,C), (B,D), (C,D)\}$ 。

求 G 的每个顶点的次数和奇偶性。

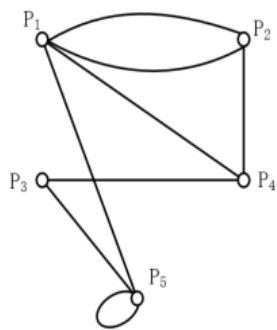
解：计算每个顶点属于的边的条数，得：

$$\deg(A)=1, \quad \deg(B)=3, \quad \deg(C)=2, \quad \deg(D)=2。$$

故 C 和 D 是偶度结点， A 和 B 是奇度结点。

§ 2 握手定理

例：求下图中多重图的每个顶点的次数。



解：计算每个顶点属于的边的条数，得：

$$\deg(P_1)=4, \quad \deg(P_2)=3, \quad \deg(P_3)=2,$$

$$\deg(P_4)=3, \quad \deg(P_5)=4。$$

其中 P_5 处有一个环，所以计算次数时要乘以2。

图的度数列

设无向图 G 的顶点集 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

G 的度数列: $d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)$

如右图度数列: 4, 4, 2, 1, 3

设有向图 D 的顶点集 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

D 的度数列: $d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)$

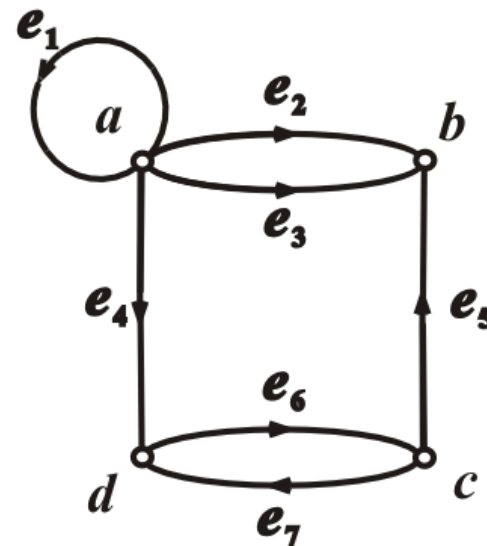
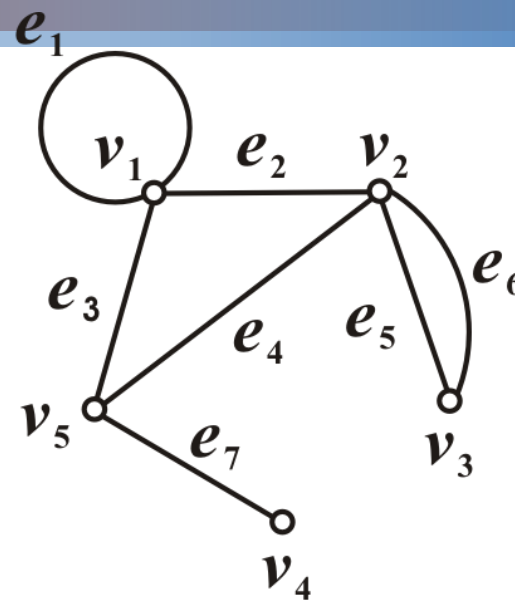
D 的出度列: $d^+(v_1), d^+(v_2), \dots, d^+(v_n)$

D 的入度列: $d^-(v_1), d^-(v_2), \dots, d^-(v_n)$

如右图度数列: 5, 3, 3, 3

出度列: 4, 0, 2, 1

入度列: 1, 3, 1, 2



握手定理的应用

例1 $(3,3,3,4), (2,3,4,6,8)$ 能成为图的度数列吗?

解 不可能. 它们都有奇数个奇数.

例2 已知图 G 有10条边, 4个3度顶点, 其余顶点的度数均小于等于2, 问 G 至少有多少个顶点?

解 设 G 有 n 个顶点. 由握手定理,

$$4 \times 3 + 2 \times (n - 4) \geq 2 \times 10$$

解得 $n \geq 8$

握手定理的应用(续)

例3 证明不存在具有奇数个面且每个面都具有奇数条棱的多面体.

证 用反证法. 假设存在这样的多面体,

作无向图 $G=\langle V, E \rangle$, 其中 $V=\{v \mid v \text{ 为多面体的面} \}$,

$$E=\{(u, v) \mid u, v \in V \wedge u \text{ 与 } v \text{ 有公共的棱} \wedge u \neq v\}.$$

根据假设, $|V|$ 为奇数且 $\forall v \in V, d(v)$ 为奇数. 这与握手定理的推论矛盾.

第五章 图的基本概念

1.1 基本概念

1.2 握手定理

1.3 图的同构和子图

1.4 图的操作

1.5 连通性



§ 3 图的同构和子图

➤ 设 $G=\langle V, E \rangle$ 和 $G'=\langle V', E' \rangle$ 分别表示两个图，若存在从 V 到 V' 的双射函数 φ ，使得对任意的结点 $a, b \in V$ ， $(a, b) \in E$ ，当且仅当 $(\varphi(a), \varphi(b)) \in E'$ ，且 (a, b) 和 $(\varphi(a), \varphi(b))$ 有相同的重数，就称图 G 和 G' 是**同构**的，记为 $G \cong G'$ 。

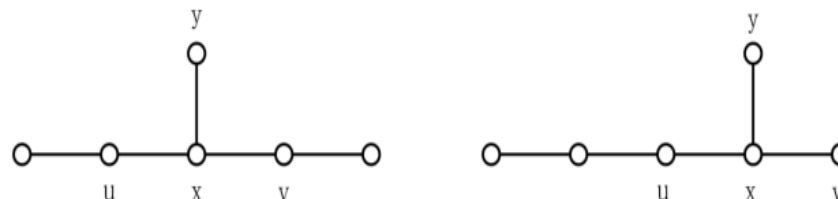
图的同构可以视作是同一个图的不同表现形式，即同构图除了顶点和边的名称不同外，实际上就是一个图形。

§ 3 图的同构和子图

目前尚没有一个有效的方法来直接判定两个图同构，在这里我们可以给出一些**同构的必要条件**：

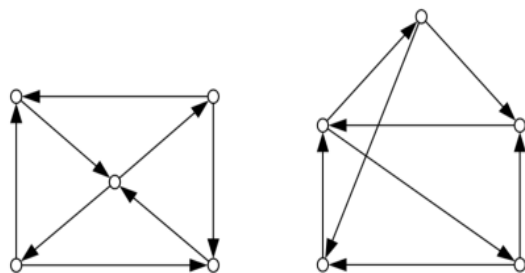
- (1) 同构的图结点数相等；
- (2) 同构的图边数相等；
- (3) 同构的图度数相同的结点数相等；

以上是必要条件但**不是充分条件**，有满足以上三种条件但不是同构图的情况存在，例如下图：



§ 3 图的同构和子图

例：证明下图中的两个有向图是同构的。

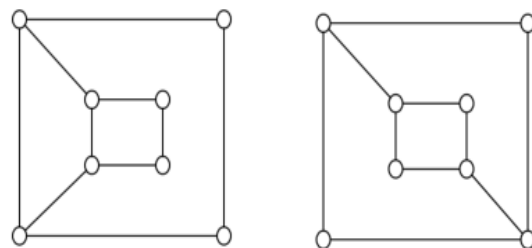


证明：作映射 $g(a)=4, g(b)=1, g(c)=2, g(d)=3, g(e)=5$ 。

在该映射下，边 $\langle a, e \rangle, \langle b, a \rangle, \langle d, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle e, b \rangle, \langle d, c \rangle, \langle c, e \rangle, \langle e, d \rangle$ 分别对应为 $\langle 4, 5 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 5, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 5, 3 \rangle$ ，因此两个有向图同构。

§ 3 图的同构和子图

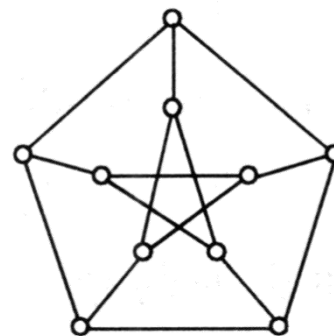
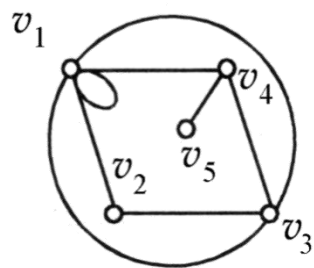
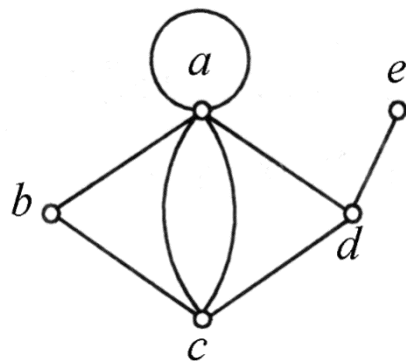
例：证明下图中的两个无向图是不同构的。



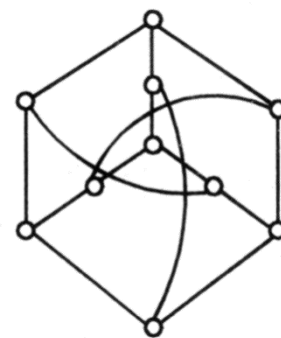
证明：左图中有且只有4个次数为2的，且有两对点相邻接。右图中也有且只有4个次数为2的点，但这4个点互不邻接。因此，两图之间不存在同构映射，因而不同构。

同构实例

例 证明下述2对图是同构的



彼得森图



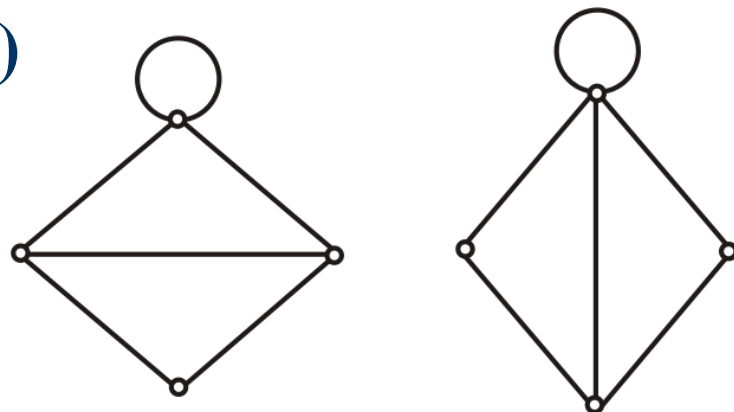
同构实例(续)

例 试画出4阶3条边的所有非同构的无向简单图



例 判断下述每一对图是否同构:

(1)

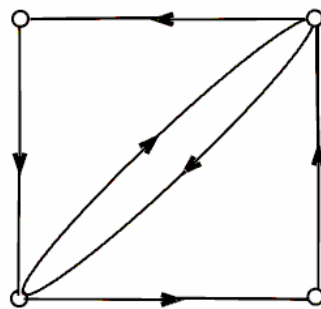
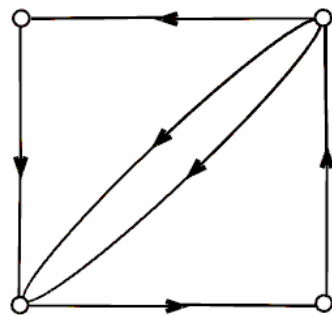


度数列不同

不同构

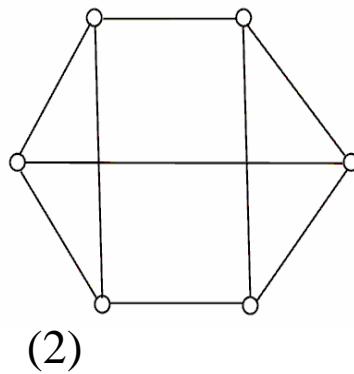
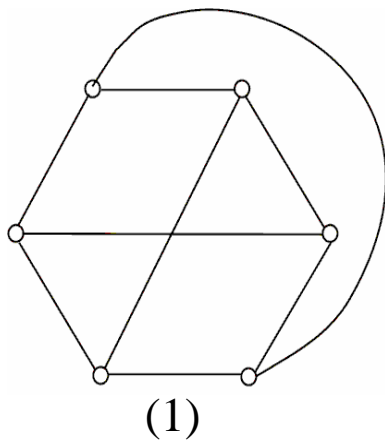
同构实例(续)

(2)



不同构
入(出)度列不同

(3)



不同构(左边没有三角形,
右边有三角形)

注意:度数列相同

图的同构(续)

几点说明：

图之间的同构关系具有自反性、对称性和传递性.

能找到多条同构的必要条件，但它们都不是充分条件：

- ① 边数相同，顶点数相同
- ② 度数列相同（不计度数的顺序）
- ③ 对应顶点的关联集及邻域的元素个数相同，等等

若破坏必要条件，则两图不同构

至今没有找到判断两个图同构的多项式时间算法

§ 3 图的同构和子图

➤ 设 $G=\langle V, E \rangle$ 和 $G'=\langle V', E' \rangle$ 是两个图。

如果 $V' \subseteq V$ 且 $E' \subseteq E$,则称 G' 是 G 的**子图**, 记作 $G' \subseteq G$ 。

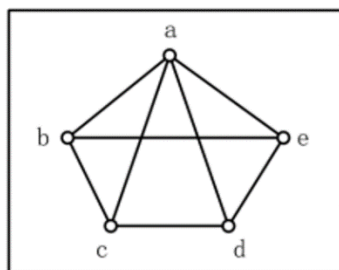
如果 $G' \subseteq G$ 且 $G' \subset G$,则称 G' 是 G 的**真子图**。

如果 $V'=V$ 且 $G' \subseteq G$,则称 G' 是 G 的**生成子图**。

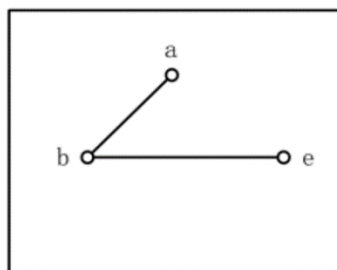
若子图 G' 中没有孤立结点, G' 由 E' 唯一确定, 则称 G' 为**由边集 E' 导出的子图**。

§ 3 图的同构和子图

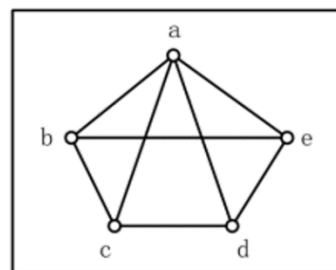
➤ 下图展示了图G及其子图：



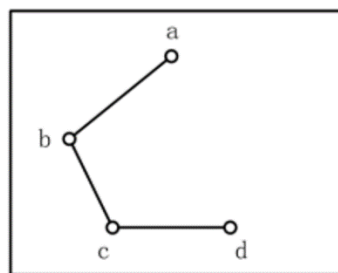
a) 图 G



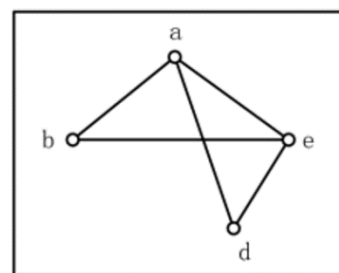
b) 真子图



c) 生成子图




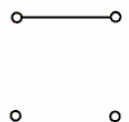
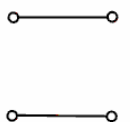
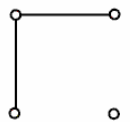
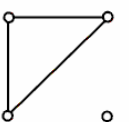
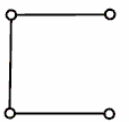
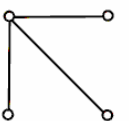
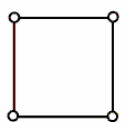
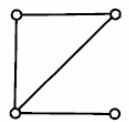
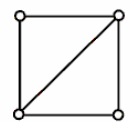
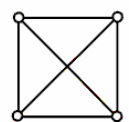
d) 由 $E' = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$ 导出的子图



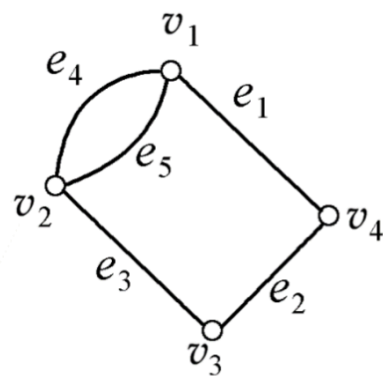
e) 由 $V' = \{a, b, c, d\}$ 导出的子图

生成子图实例

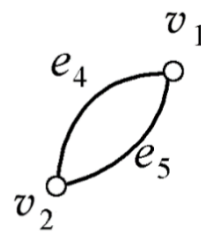
K_4 的所有非同构的生成子图

| m | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|---|---|---|--|---|--|---|---|--|
| |  |  |   |    |   |  |  | |

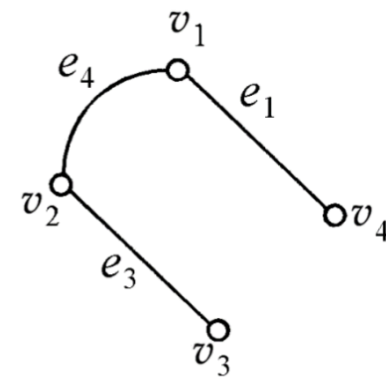
导出子图实例



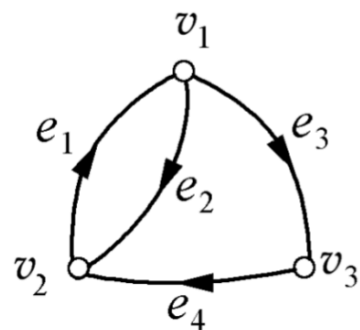
G



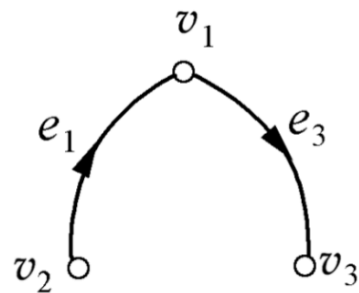
$G[\{v_1, v_2\}]$



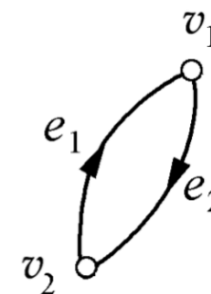
$G[\{e_1, e_3, e_4\}]$



D



$D[\{e_1, e_3\}]$



$D[\{v_1, v_2\}]$

第五章 图的基本概念

1.1 基本概念

1.2 握手定理

1.3 图的同构和子图

1.4 图的操作

1.5 连通性



§ 4 图的操作

设图 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ 和图 $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$

(1) G_1 与 G_2 的 **并**, 定义为图 $G_3 = \langle V_3, E_3 \rangle$, 其中 $V_3 = V_1 \cup V_2, E_3 = E_1 \cup E_2$, 记为 $G_3 = G_1 \cup G_2$ 。

(2) G_1 与 G_2 的 **交**, 定义为图 $G_3 = \langle V_3, E_3 \rangle$, 其中 $V_3 = V_1 \cap V_2, E_3 = E_1 \cap E_2$, 记为 $G_3 = G_1 \cap G_2$ 。

(3) G_1 与 G_2 的 **差**, 定义为图 $G_3 = \langle V_3, E_3 \rangle$, 其中 $E_3 = E_1 - E_2, V_3 = (V_1 - V_2) \cup \{E_3 \text{ 中边所关联的顶点} \}$, 记为 $G_3 = G_1 - G_2$ 。

(4) G_1 与 G_2 的 **环和**, 定义为图 $G_3 = \langle V_3, E_3 \rangle, G_3 = (G_1 \cup G_2) - (G_1 \cap G_2)$, 记为 $G_3 = G_1 \oplus G_2$ 。

§ 4 图的操作

设图 $G\langle V,E\rangle$,

(1) 设 $e\in E$, 用 $G-e$ 表示从 G 中去掉边 e 得到的图, 称为**删除 e** 。又设 $E'\subseteq E$, 用 $G-E'$ 表示从 G 中删除 E' 中所有边得到的图, 称为**删除 E'** 。

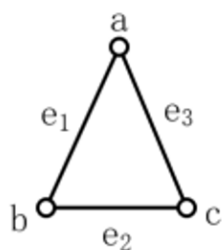
(2) 设 $v\in V$, 用 $G-v$ 表示从 G 中去掉结点 v 及 v 关联的所有边得到的图, 称为**删除结点 v** 。又设 $V'\subseteq V$, 用 $G-V'$ 表示从 G 中删除 V' 中所有结点及关联的所有边得到的图, 称为**删除 V'** 。

(3) 设 $e=(u,v)\in E$, 用 $G\setminus e$ 表示从 G 中删除 e , 将 e 的两个端点 u,v 用一个新的结点 w 代替, 使 w 关联除 e 外的 u 和 v 关联的一切边, 称为**边 e 的收缩**。一个图 G 可以收缩为图 H , 是指 H 可以从 G 经过若干次边的收缩而得到。

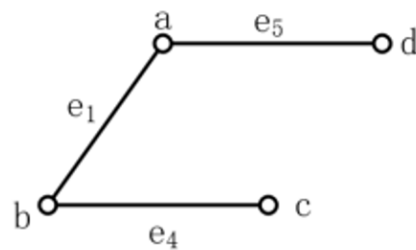
(4) 设 $u,v\in V$ (u,v 可能相邻,也可能不相邻), 用 $G\cup(u,v)$ 表示在 u,v 之间加一条边 (u,v) , 称为**加新边**。

§ 4 图的操作

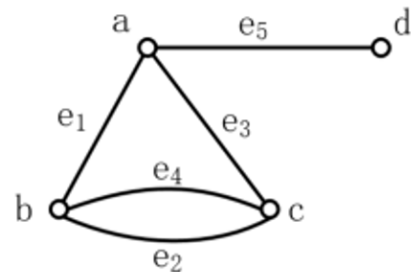
下图展示了图的一系列操作：



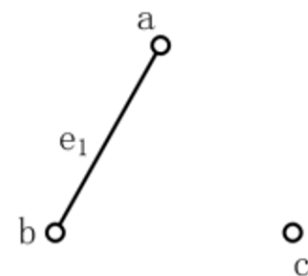
a) G_1



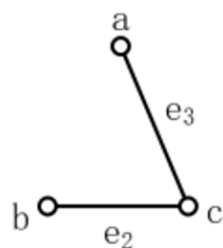
b) G_2



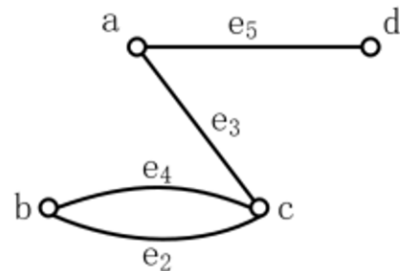
c) $G_1 \cup G_2$



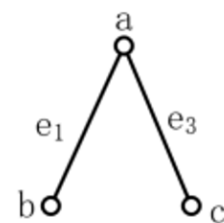
d) $G_1 \cap G_2$



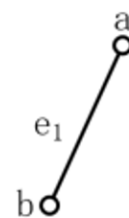
e) $G_1 - G_2$



f) $G_1 \oplus G_2$



g) G_1 删去边 e_2

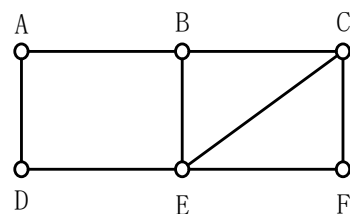


h) G_1 删去结点 c

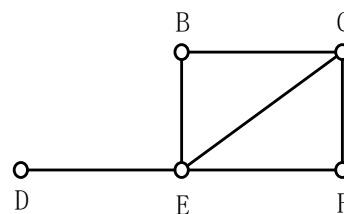
§ 4 图的操作

例：G图如下所示。求(a) $G-A$; (b) $G-B$; (c) $G-C$;

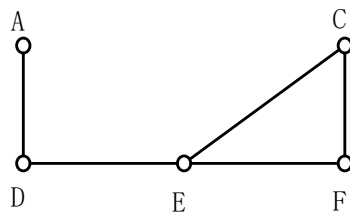
解：图(a)(b)(c)求解如下图所示。



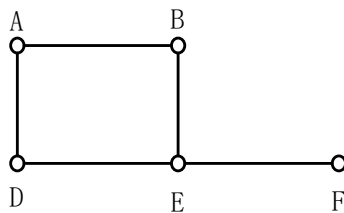
图G



(a)



(b)



(c)

§ 4 图的操作

例：图 G 如下图所示，求：

(a) $G-\{A,B\}$; (b) $G-\{B,C\}$; (c) $G-\{B,D\}$; (d) $G-\{C,D\}$;

解：只要从图 G 中删除对应的边即可，结果如下图所示：

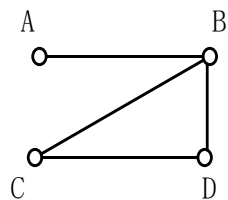
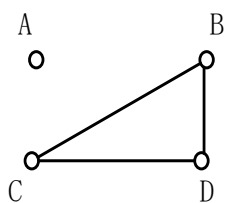
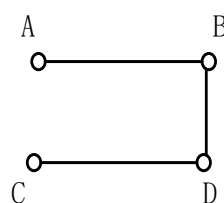


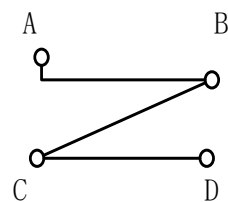
图 G



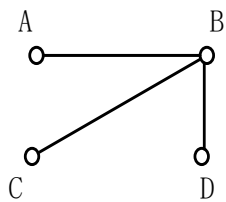
(a) $G-\{A,B\}$



(b) $G-\{B,C\}$



(c) $G-\{B,D\}$



(d) $G-\{C,D\}$

第五章 图的基本概念和矩阵表示

1.1 基本概念

1.2 握手定理

1.3 图的同构和子图

1.4 图的操作

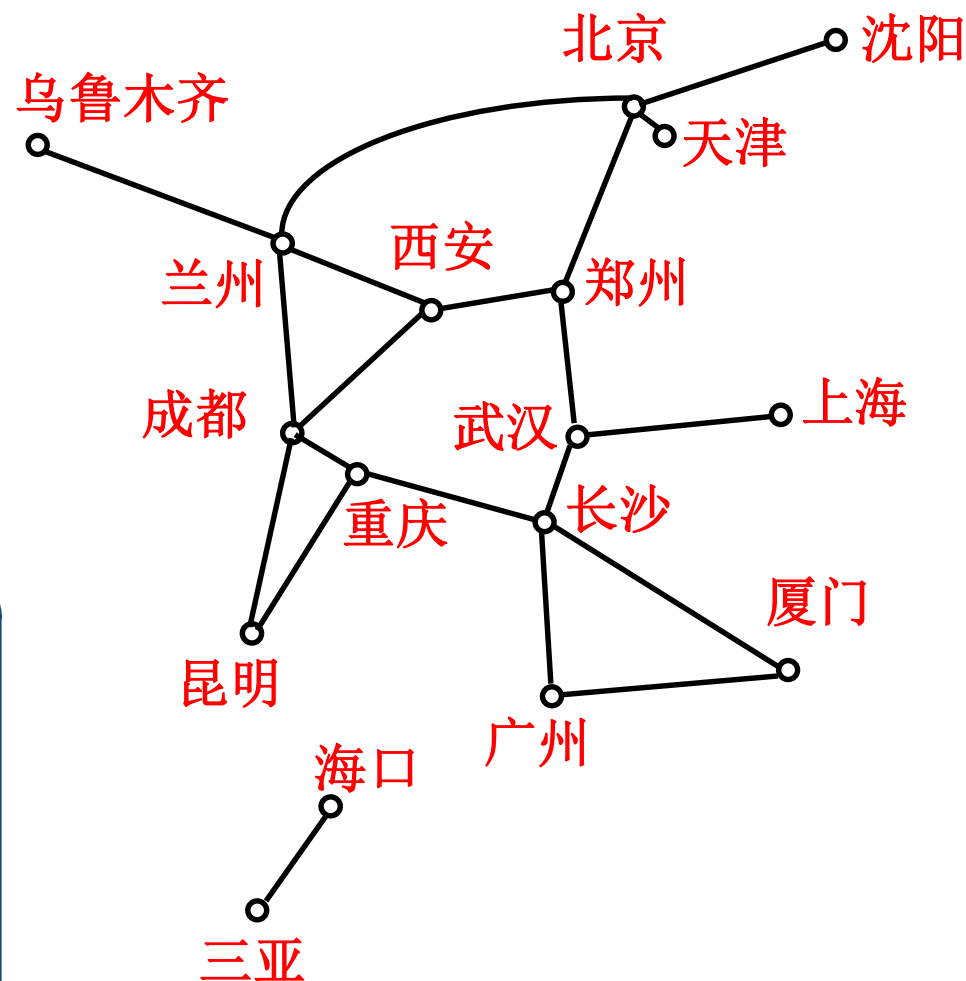
1.5 连通性



引言

右图是中国铁路交通图的一部分，如果一个旅客要从成都乘火车到北京，那么他一定会经过其他车站；而旅客不可能从成都乘火车到达三亚。这就引出了图的通路与连通的概念。

通路与回路是图论中两个重要的基本概念。本节所述定义一般来说既适合有向图，也适合无向图，否则，将加以说明或分开定义。



§ 5 连通性

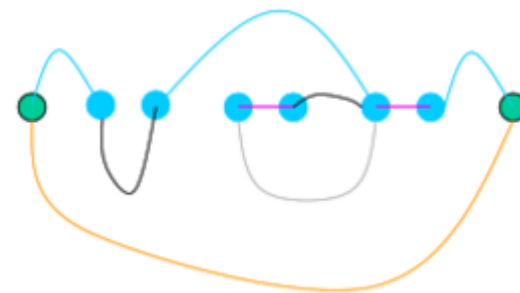
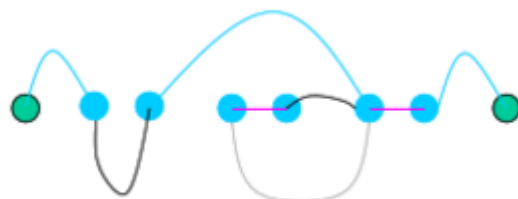
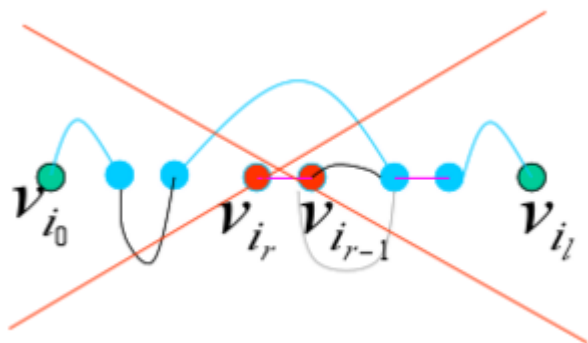
- 给定无向图（或有向图） $G=\langle V, E \rangle$ ，令 $v_0, v_1, \dots, v_m \in V$ ，边（或弧） $e_0, e_1, \dots, e_m \in E$ ，其中 v_{i-1}, v_i 是 e_i 的结点，交替序列 $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_m v_m$ 称为连接 v_0 到 v_m 的**链（或路）**。 v_0 和 v_m 分别是链的**始结点和终结点**，而边（或弧）的数目称为**链的长度**。
- 在图 $G=\langle V, E \rangle$ 中，对 $\forall v_i, v_j \in V$ ，如果从 v_i 到 v_j 存在道路，则称长度最短的通路为从 v_i 到 v_j 的**短程线**，从 v_i 到 v_j 的短程线的长度称为 v_i 到 v_j 的**距离**，记为 $d(v_i, v_j)$ 。

§ 5 连通性

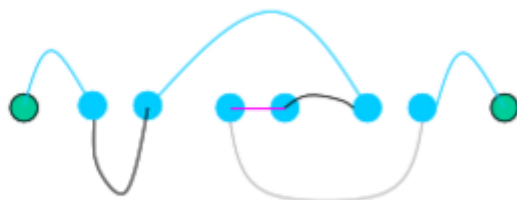
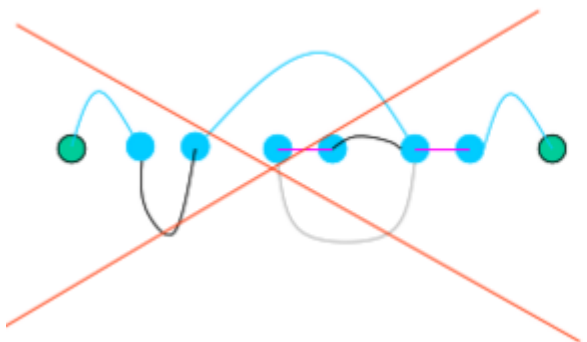
- 若通路中的所有边 $e_0, e_1 \dots e_m$ 互不相同, 则称此通路为**简单通路**或一条**迹**。若回路中的所有边 $e_0, e_1 \dots e_m$ 互不相同, 则称此回路为**简单回路**或一条**闭迹**;
- 若通路中的所有结点 $v_0, v_1 \dots v_m$ 互不相同 (从而所有边互不相同), 则称此通路为**基本通路**或者**初级通路**、**路径**; 若回路中除 $v_0=v_m$ 外的所有结点 $v_0, v_1 \dots v_{m-1}$ 互不相同 (从而所有边互不相同), 则称此回路为**基本回路**或者**初级回路**、**圈**。
- 基本通路(或基本回路)一定是简单通路(或简单回路), 反之则不一定。

简单/初级通/回路

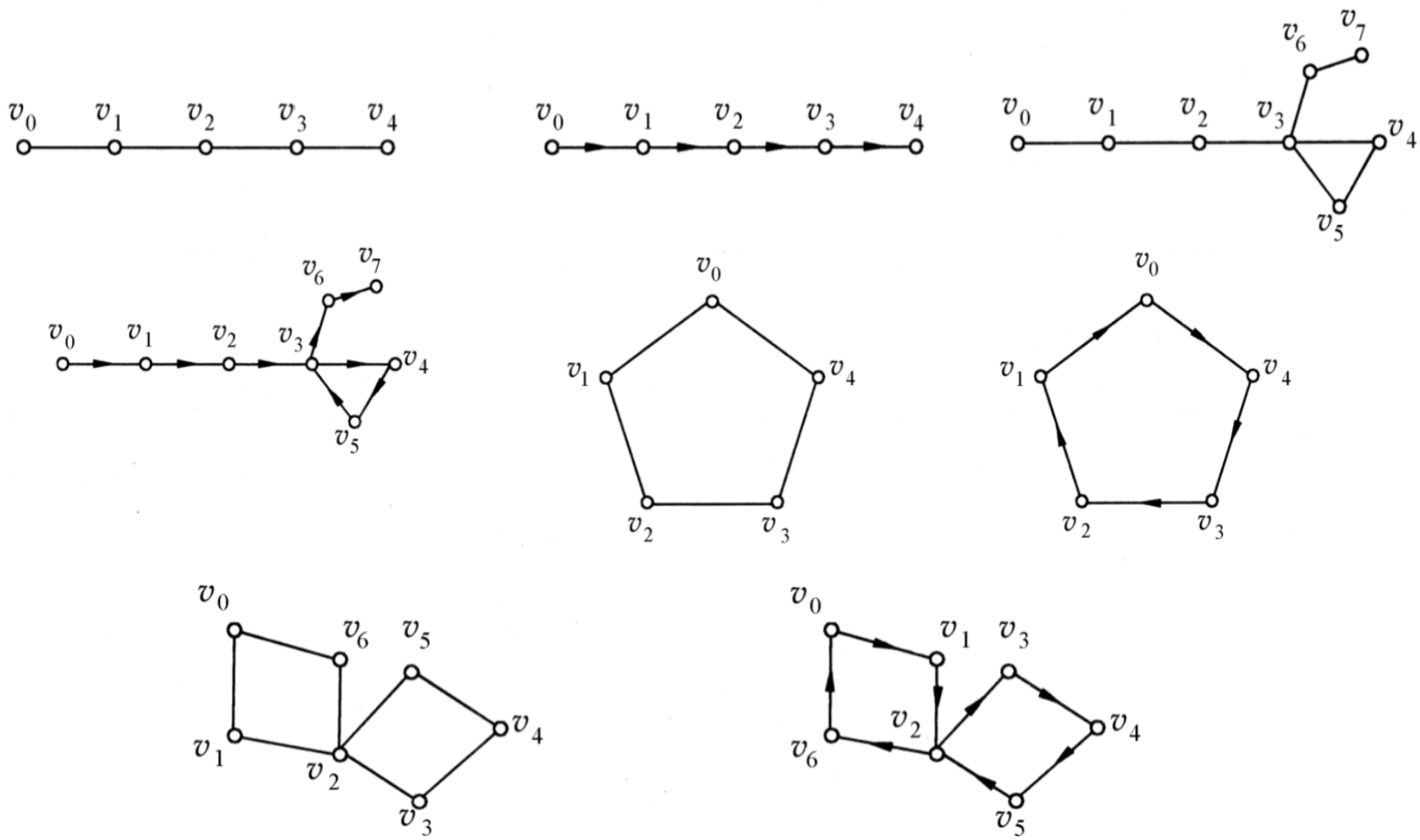
❖ 简单通（回）路：所有边各异



❖ 初级通（回）路：所有顶点和边各异



通路 & 回路实例



§ 5 连通性

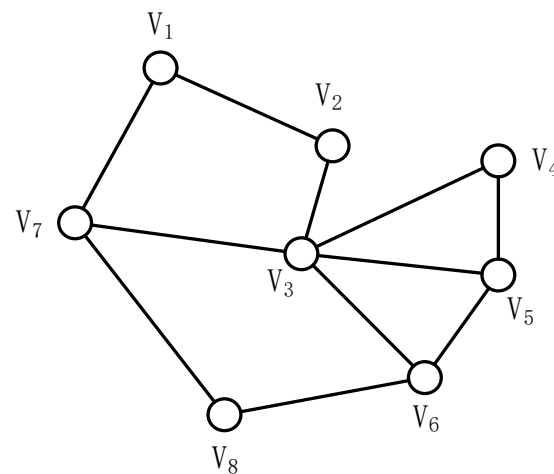
在右图中,

$v_1v_2v_3v_4v_5$ 是一条4-路径;

$v_1v_2v_3v_4v_3$ 是一条4-通道;

$v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_3v_7$ 是一条7-迹;

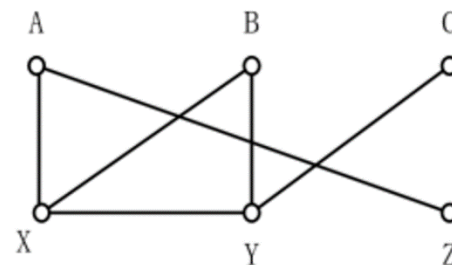
$v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_3v_7v_1$ 是一个圈 (闭迹)。



§ 5 连通性

例：图G如右图所示，判定下列的边序列是否形成通路：

- (a) $\{(A,X), (X,B), (C,Y), (X,X)\}$;
- (b) $\{A,X), (X,Y), (Y,Z), (Z,A)\}$;
- (c) $\{(X,B), (B,Y), (Y,C)\}$;
- (d) $\{(B,Y), (X,Y), (A,X)\}$;



解：若一个边序列的边是这样连接起来的：它的一条的终结点是下一条边的起始点，则这个边序列是通路。

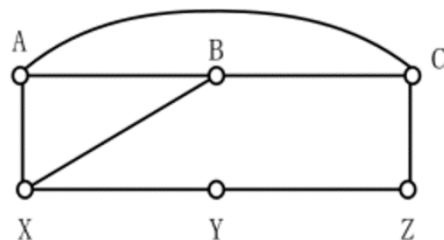
- (a) 否。边 (C,Y) 不接在 (X,B) 后面。
- (b) 否。图上Y和Z之间没有相连， (Y,Z) 不是一条边。
- (c) 是。
- (d) 是。因为这个序列可以重新写成 $((B,Y), (Y,X), (X,A))$ 。

§ 5 连通性

例：图 G 如右图所示，求：

(a) 从 A 到 Z 的所有初级通路；

(b) 从 A 到 Z 的所有简单通路（迹）。



解：(a) 若从 A 到 Z 的一条通路没有顶点是重复的(所以也没有边是重复的)，则它是一条初级通路。

有6条初级通路：(A, C, Z), (A, B, C, Z), (A, X, Y, Z), (A, B, X, Y, Z), (A, X, B, C, Z), (A, C, B, X, Y, Z)。

(b) 若从 A 到 Z 的一条通路没有重复的边,则它是一条简单通路（迹）。

由(a)的6条初级通路与(A, X, B, A, C, Z), (A, C, B, A, X, Y, Z), (A, B, C, A, X, Y, Z), (A, B, X, A, C, Z)合在一起共有10条简单通路（迹）。

通路与回路(续)

说明:

❖ 表示方法

- ① 用顶点和边的交替序列(定义), 如 $\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_l v_l$
- ② 用边的序列, 如 $\Gamma = e_1 e_2 \dots e_l$
- ③ 简单图中, 用顶点的序列, 如 $\Gamma = v_0 v_1 \dots v_l$
- ④ 非简单图中, 可用混合表示法, 如 $\Gamma = v_0 v_1 e_2 v_2 e_5 v_3 v_4 v_5$

❖ 环是长度为1的圈, 两条平行边构成长度为2的圈.

❖ 在无向简单图中, 所有圈的长度 ≥ 3 ; 在有向简单图中, 所有圈的长度 ≥ 2 .

通路 with 回路 (续)

❖ 在两种意义下计算圈的个数

① 定义意义下

在无向图中, 一个长度为 $l (l \geq 3)$ 的圈看作 $2l$ 个不同的圈. 如 $v_0v_1v_2v_0$, $v_1v_2v_0v_1$, $v_2v_0v_1v_2$, $v_0v_2v_1v_0$, $v_1v_0v_2v_1$, $v_2v_1v_0v_2$ 看作 6 个不同的圈.

在有向图中, 一个长度为 $l (l \geq 3)$ 的圈看作 l 个不同的圈.

② 同构意义下

所有长度相同的圈都是同构的, 因而是 1 个圈.

通路与回路(续)

定理 在 n 阶图 G 中, 若从顶点 u 到 v ($u \neq v$) 存在通路, 则从 u 到 v 存在长度小于等于 $n-1$ 的通路.

推论 在 n 阶图 G 中, 若从顶点 u 到 v ($u \neq v$) 存在通路, 则从 u 到 v 存在长度小于等于 $n-1$ 的初级通路.

定理 在一个 n 阶图 G 中, 若存在 v 到自身的回路, 则一定存在 v 到自身长度小于等于 n 的回路.

推论 在一个 n 阶图 G 中, 若存在 v 到自身的简单回路, 则存在 v 到自身长度小于等于 n 的初级回路.

无向图的连通性

设无向图 $G=\langle V,E\rangle$,

u 与 v 连通: 若 u 与 v 之间有通路. 规定 u 与自身总连通.

连通关系 $R=\{\langle u,v\rangle \mid u,v \in V \text{ 且 } u\sim v\}$ 是 V 上的等价关系

连通图: 任意两点都连通的图. 平凡图是连通图.

连通分支: V 关于连通关系 R 的等价类的导出子图

设 $V/R=\{V_1,V_2,\dots,V_k\}$, $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_k]$ 是 G 的连通分支, 其个数记作 $p(G)=k$.

G 是连通图 $\Leftrightarrow p(G)=1$

例



点割集

记 $G-v$: 从 G 中删除 v 及关联的边

$G-V'$: 从 G 中删除 V' 中所有的顶点及关联的边

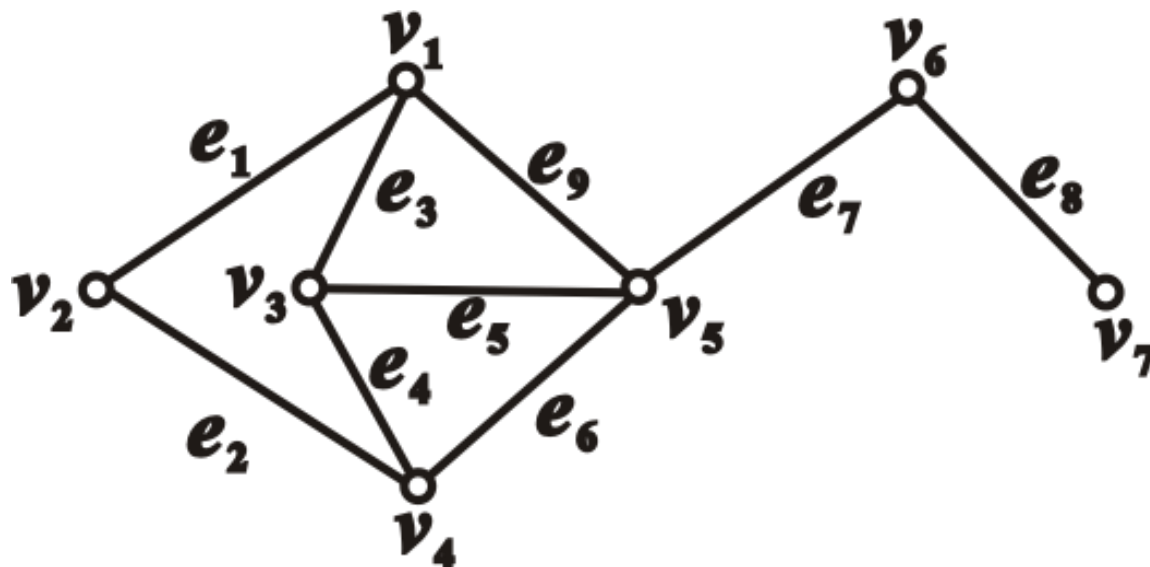
$G-e$: 从 G 中删除 e

$G-E'$: 从 G 中删除 E' 中所有边

定义 设无向图 $G=\langle V,E\rangle$, $V'\subset V$, 若 $p(G-V')>p(G)$ 且 $\forall V''\subset V'$, $p(G-V'')=p(G)$, 则称 V' 为 G 的**点割集**. 若 $\{v\}$ 为点割集, 则称 v 为**割点**.

点割集实例

例 $\{v_1, v_4\}$, $\{v_6\}$ 是点割集, v_6 是割点.
 $\{v_2, v_5\}$ 不是点割集



边割集

定义 设无向图 $G=\langle V,E\rangle$, $E'\subseteq E$, 若 $p(G-E')>p(G)$ 且 $\forall E''\subset E'$, $p(G-E'')=p(G)$, 则称 E' 为 G 的**边割集**. 若 $\{e\}$ 为边割集, 则称 e 为**割边**或**桥**.

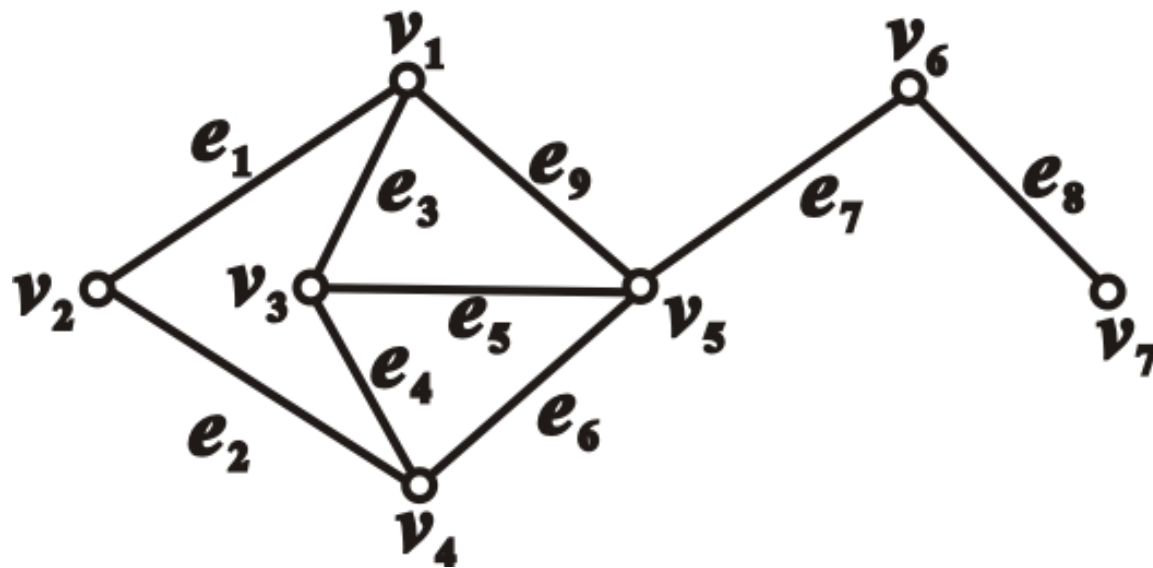
在上一页的图中, $\{e_1, e_2\}$, $\{e_1, e_3, e_5, e_6\}$, $\{e_8\}$ 等是边割集,
 e_8 是桥, $\{e_7, e_9, e_5, e_6\}$ 不是边割集

说明: K_n 无点割集

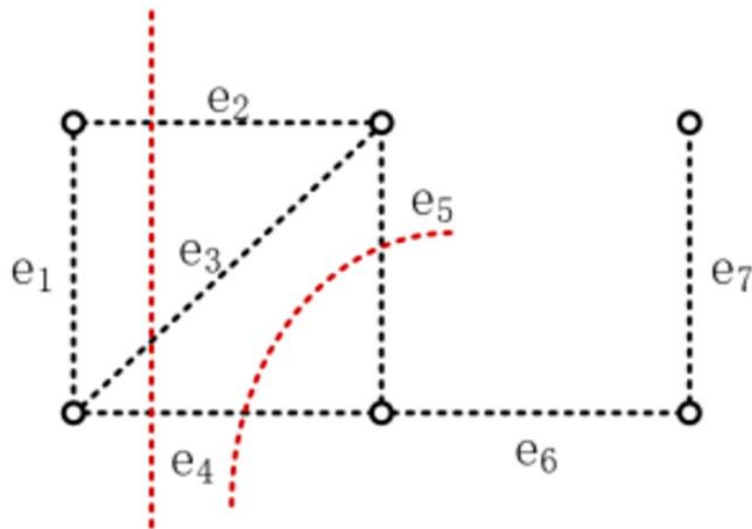
n 阶零图既无点割集, 也无边割集.

若 G 连通, E' 为边割集, 则 $p(G-E')=2$

若 G 连通, V' 为点割集, 则 $p(G-V')\geq 2$



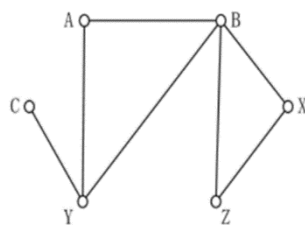
§ 5 连通性



$\{e_2, e_3, e_4\}$ 是一个割集, $\{e_4, e_5\}$ 也是一个割集, 但 $\{e_4, e_5, e_6\}$ 不是割集。

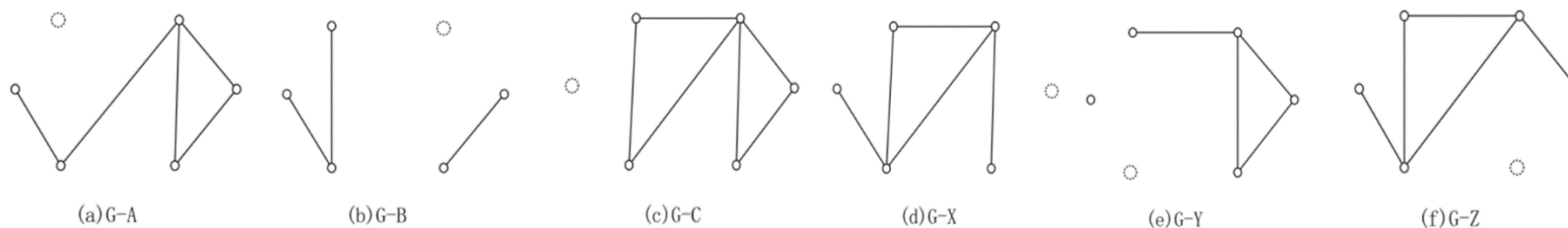
§ 5 连通性

例：图G如下图所示，G有割点么？



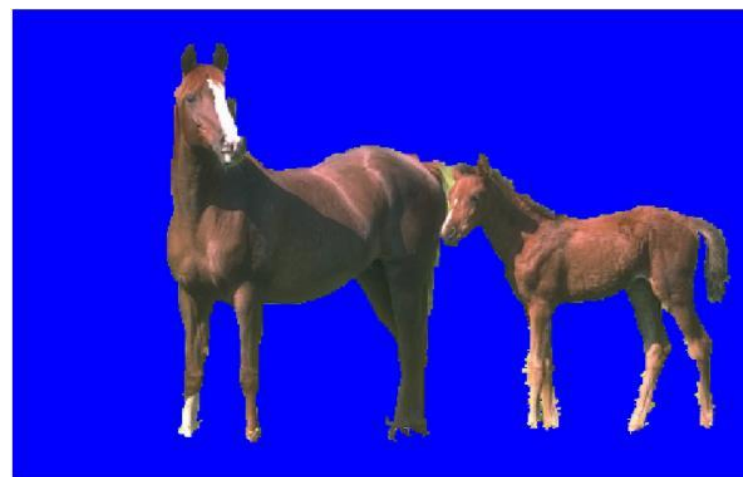
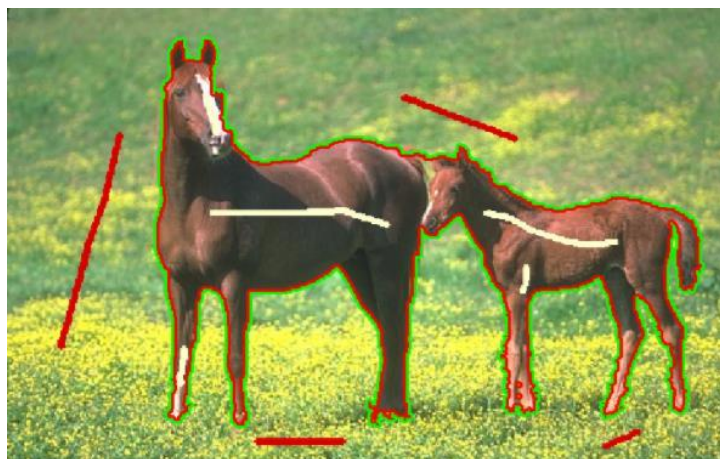
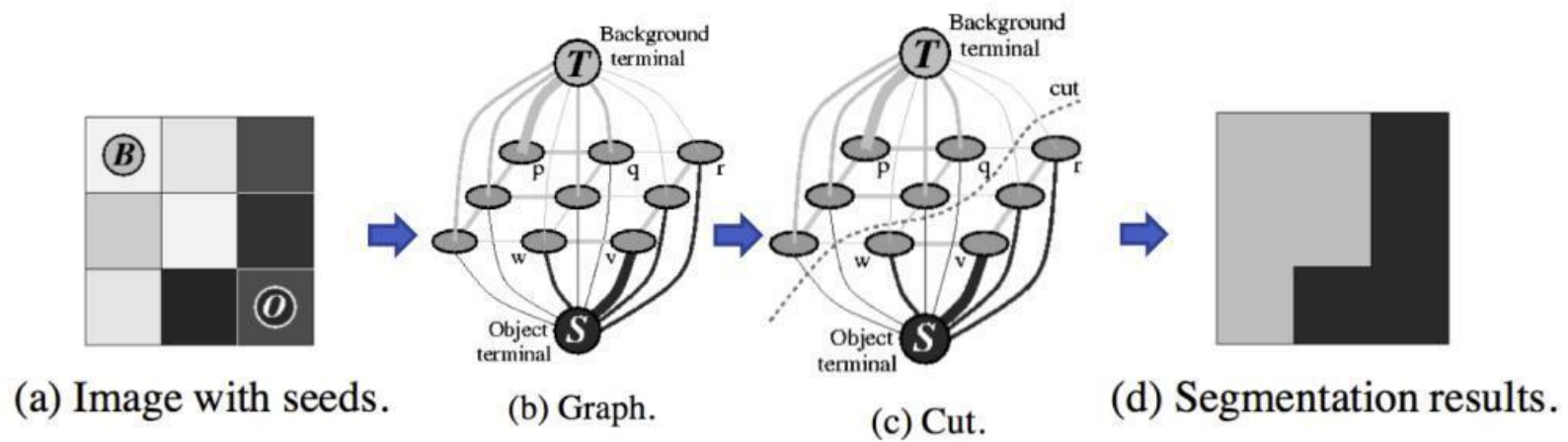
图G

解：先求解 $G-A$, $G-B$, $G-C$, $G-X$, $G-Y$, $G-Z$ 分别如下图所示(a)-(f)所示。



由上图可知，只有 $G-B$ 和 $G-Y$ 是不连通的，所以B和Y是G的割点。

应用——基于图割的图像分割



§ 5 连通性

- 设无向连通图（非完全图） $G = \langle V, E \rangle$ ，称 $\kappa(G) = \min\{|V| \mid V \text{ 为 } G \text{ 的点割集}\}$ 为 G 的**点连通度**，简称**连通度**。又若 $\kappa(G) \geq k$ ，则称 G 为 **k -连通图**。
- 规定：完全图 K_n 的点连通度为 $n-1$ ， $n \geq 1$ ；
- 非连通图的点连通度为0。设无向图连通图 $G = \langle V, E \rangle$ ，称 $\lambda(G) = \min\{|E| \mid E \text{ 为 } G \text{ 的边割集}\}$ 为 G 的**边连通度**。又若 $\lambda(G) \geq k$ ，则称 G 为 **k 边-连通图**。
- 规定非连通图的边连通度为0。
- Whitney定理：对任意无向图 $G = \langle V, E \rangle$ ，均有下面不等式成立：

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

其中， $\kappa(G)$ 、 $\lambda(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别为 G 的点连通度、边连通度和结点的最小度数。

§ 5 连通性

- 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是一个有向图，略去 G 中所有有向边的方向得无向图 G' ，如果无向图 G' 是连通图，则称有向图 G 是**连通图**或称为**弱连通图**，否则称 G 是**非连通图**。
- 设图 $G = \langle V, E \rangle$ ，其中 $v_i, v_j \in V$ ，如果从 v_i 到 v_j 存在一条路径，则称 v_j 从 v_i **可达**。我们定义每个结点到其自身是可达的。
- 设有向图 $G = \langle V, E \rangle$ 是连通图，若 G 中任何一对结点之间至少有一个结点到另一个结点是可达的，则称 G 是**单向连通图**；若 G 中任何一对结点之间都是相互可达的，则称 G 是**强连通图**。
- 在有向图 $G = \langle V, E \rangle$ 中，设 G' 是 G 的子图，如果 G' 是强连通的（单向连通的、弱连通的），同时对任意 $G'' \subseteq G$ ，若 $G' \subset G''$ ，则 G'' 不是强连通的（单向连通的、弱连通的）。那么称 G' 为 G 的**强连通分支**（**单向连通分支、弱连通分支**），或称为**强分图**（**单向分图、弱分图**）。

§ 5 连通性

例：求 G 的连通分图，此处 $V(G)=\{A,B,C,X,Y,Z\}$ 且

$$(a)E(G) = \{(A,X),(C,X)\};$$

$$(b)E(G) = \{(A,Y),(B,C),(Z,Y),(X,Z)\};$$

解：

(a) A 与 C 和 X 连接, B, Y 和 Z 是孤立顶点。

因此 $\{A,C,X\}, \{B\}, \{Y\}$ 和 $\{Z\}$ 是 G 的连通分图。

(b) A, Y, Z 和 X 是连接的, B 和 C 是连接的。

因此 $\{A, X, Y, Z\}$ 和 $\{B, C\}$ 是 G 的连通分图。

§ 5 连通性

例：求 G 的连通分图，此处 $V(G)=\{A,B,C,P,Q\}$ 且

$$(a)E(G) = \{(A,C),(B,Q),(P,C),(Q,A)\};$$

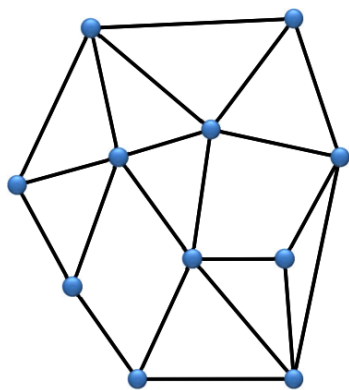
$$(b)E(G) = \emptyset, \text{即空集};$$

解：

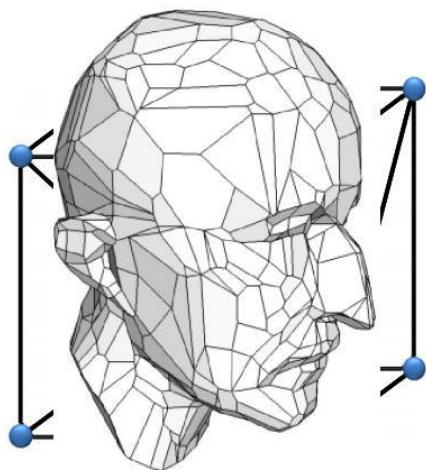
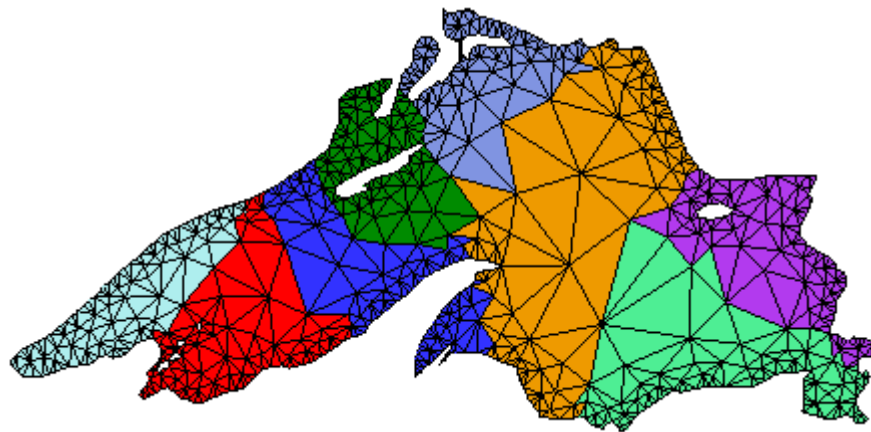
(a)这里 G 是连通的，即每一顶点与其余顶点连接。因此 G 有一个分图 $V(G)=\{A,B,C,P,Q\}$ 。

(b)由于 $E(G)$ 是空集，所有的顶点是孤立点，因此 $\{A\},\{B\},\{C\},\{P\},\{Q\}$ 都是 G 的连通分图。

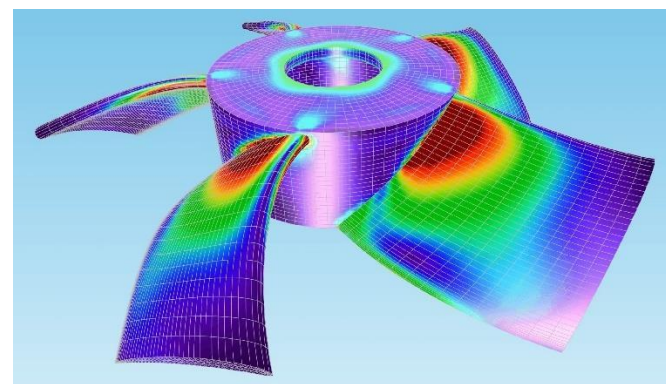
应用——图的嵌入（网格）



嵌入 \mathbf{R}^2 空间

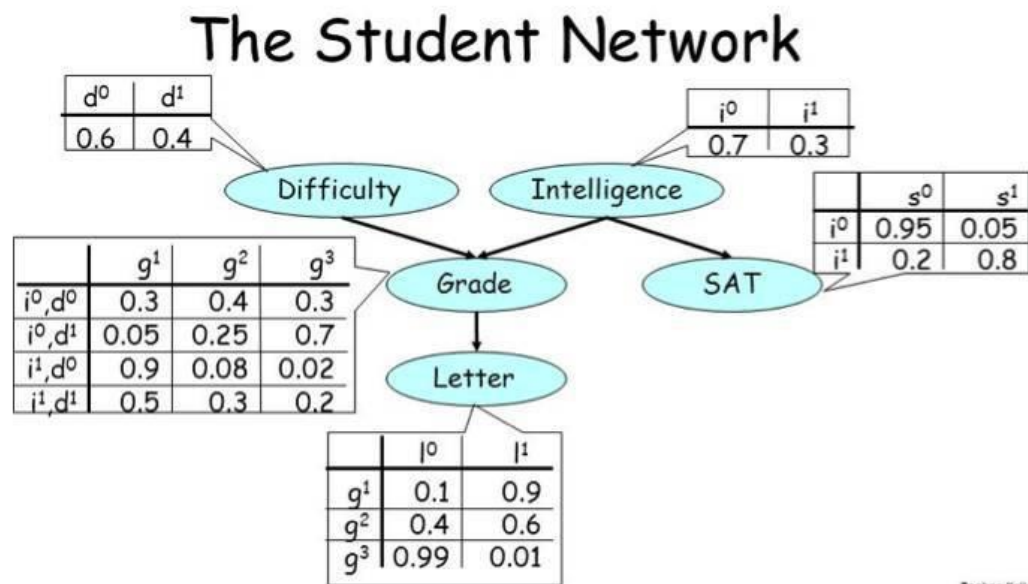


嵌入 \mathbf{R}^3 空间

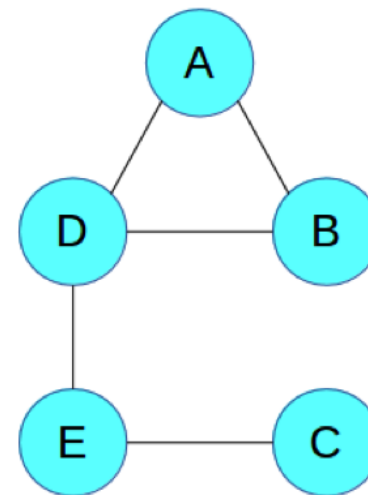


离散计算域

应用——概率图模型

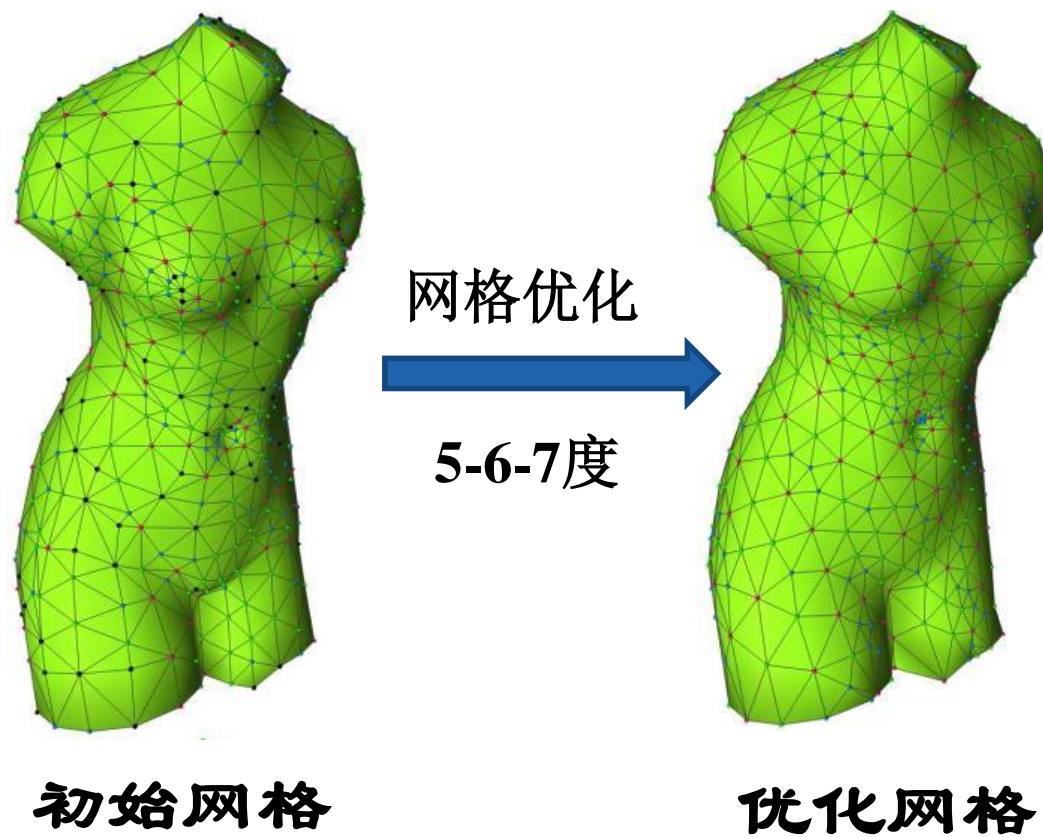


贝叶斯网络（有向图）

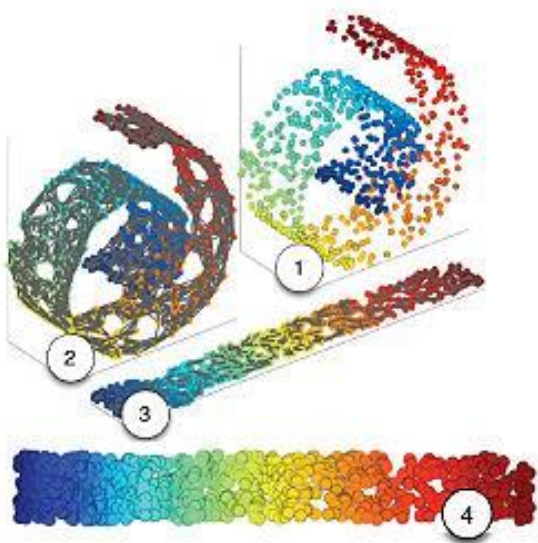


马尔可夫网络（无向图）

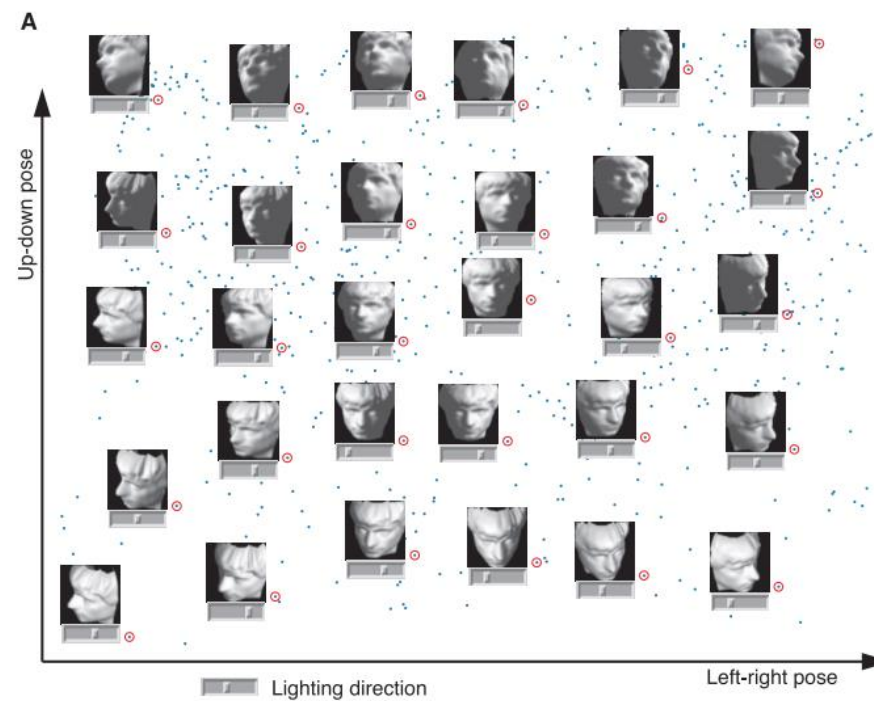
应用——网格优化（优化度）



应用——流形学习（降维）



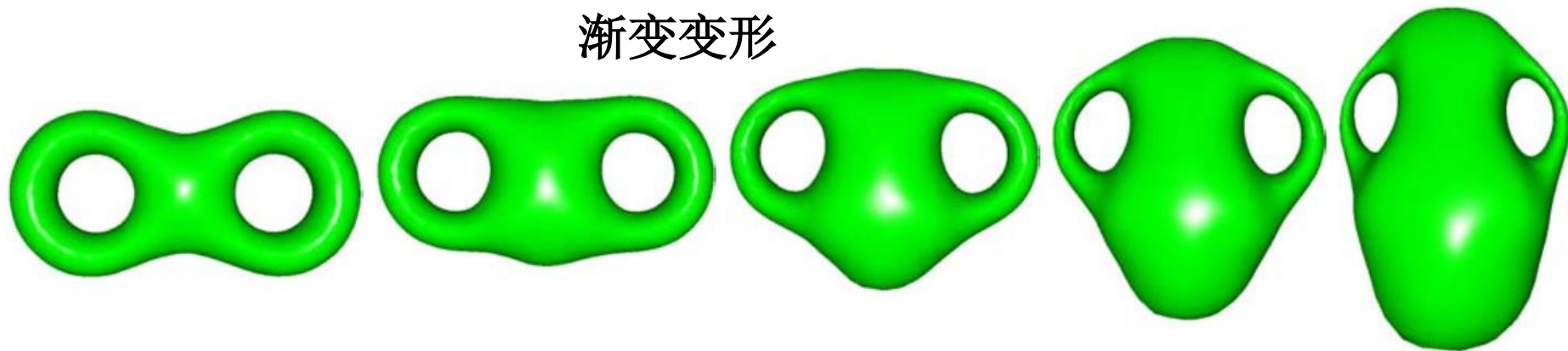
非线性降维



人脸数据降维

应用——网格变形（同构）

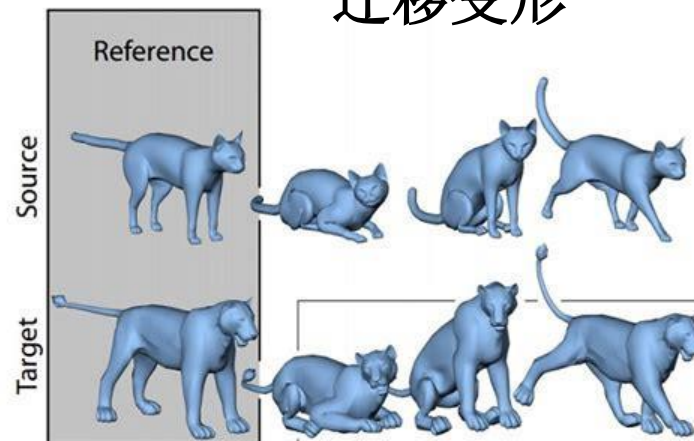
渐变变形



动画



迁移变形



课后习题

❖ 1,3,9,12,13

❖ 答题派

一、简答题

1. 5.5 下面各无向图中有几个顶点?

(25)

- (1) 16条边, 每个顶点都是2度顶点。
- (2) 21条边, 3个4度顶点, 其余的都是3度顶点。
- (3) 24条边, 各顶点的度数是相同的。

2. 5.7 设 n 阶无向简单图 G 中, $\delta(G) = n - 1$, 问 $\Delta(G)$ 应为多少?

(25)

3. 5.16 试寻找3个4阶有向简单图 D_1, D_2, D_3 , 使得 D_1 为强连接图, D_2 为单向连通图, 但不是强连通的, 而 D_3 为弱连通图, 但不是单向连通的, 更不是强连通的。

(25)

4. 5.17 设 V' 和 E' 分别为无向连通图 G 的点割集和边割集, $G - E'$ 的连通分支个数一定为多少? $G - V'$ 的连通分支数也是定数吗?

(25)