

习题精解

1-1 某质点的速度为 $\vec{v} = 2\vec{i} - 8t\vec{j}$, 已知 $t=0$ 时它经过点 $(3, 7)$, 则该质点的运动方程为 ()

- A. $2t\vec{i} - 4t^2\vec{j}$ B. $(2t+3)\vec{i} - (4t^2+7)\vec{j}$ C. $-8\vec{j}$ D. 不能确定

解: 本题答案为 B.

因为 $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

所以 $d\vec{r} = (2\vec{i} - 8t\vec{j})dt$

于是有 $\int_{r_0}^r d\vec{r} = \int_0^t (2\vec{i} - 8t\vec{j})dt$

即 $\vec{r} - \vec{r}_0 = 2t\vec{i} - 4t^2\vec{j}$

亦即 $\vec{r} - (3\vec{i} - 7\vec{j}) = 2t\vec{i} - 4t^2\vec{j}$

故 $\vec{r} = (2t+3)\vec{i} - (4t^2+7)\vec{j}$

1-2 一质点在平面上作曲线运动, t_1 时刻位置矢量为 $\vec{r}_1 = -2\vec{i} + 6\vec{j}$, t_2 时刻的位置矢量为 $\vec{r}_2 = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, 求: (1) 在 $\Delta t = t_2 - t_1$ 时间内质点的位移矢量式; (2) 该段时间内位移的大小和方向; (3) 在坐标图上画出 \vec{r}_1, \vec{r}_2 及 $\Delta\vec{r}$ 。

解 (1) 在 $\Delta t = t_2 - t_1$ 时间内质点的位移矢量式为

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (4\vec{i} - 2\vec{j})(m)$$

(2) 该段时间内位移的大小

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}(m)$$

该段时间内位移的方向与轴的夹角为

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{-2}{4}\right) = -26.6^\circ$$

(3) 坐标图上的表示如图 1.1 所示

1-3 某质点作直线运动, 其运动方程为 $x = 1 + 4t - t^2$, 其中 x 以 m 计, t 以 s 计, 求:

(1) 第 3s 末质点的位置; (2) 头 3s 的位移大小; (3) 头 3s 内经过的路程。

解 (1) 第 3s 末质点的位置为

$$x(3) = 1 + 4 \times 3 - 3^2 = 4(m)$$

(2) 头 3s 的位移大小为

$$x(3) - x(0) = 3(m)$$

(3) 因为质点做反向运动是有 $v(t) = 0$, 所以令 $\frac{dx}{dt} = 0$, 即 $4 - 2t = 0, t = 2s$ 因此头 3s 内经过的路程为

$$|x(3) - x(2)| + |x(2) - x(0)| = |4 - 5| + |5 - 1| = 5(m)$$

1-4 已知某质点的运动方程为 $x = 2t, y = 2 - t^2$, 式中 t 以 s 计, x 和 y 以 m 计。(1) 计算并图示质点的运动轨迹;(2) 求出 $t = 1s$ 到 $t = 2s$ 这段时间内质点的平均速度;(3) 计算 $1s$ 末 $2s$ 末质点的速度;(4) 计算 $1s$ 末和 $2s$ 末质点的加速度。

解 (1) 由质点运动的参数方程 $x = 2t, y = 2 - t^2$ 消去时间参数 t 得质点的运动轨迹为

$$y = 2 - \frac{x^2}{4} (x > 0)$$

运动轨迹如图 1.2

(2) 根据题意可得到质点的位置矢量为

$$\vec{r} = (2t)\vec{i} + (2 - t^2)\vec{j}$$

所以 $t = 1s$ 到 $t = 2s$ 这段时间内质点的平均速度为

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(2) - \vec{r}(1)}{2 - 1} = 2\vec{i} - 3\vec{j} (m \cdot s^{-1})$$

(3) 由位置矢量求导可得质点的速度为

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = 2\vec{i} - (2t)\vec{j}$$

所以 $1s$ 末和 $2s$ 末的质点速度分别为

$$\vec{v}(1) = 2\vec{i} - 2\vec{j} (m \cdot s^{-1}) \text{ 和 } \vec{v}(2) = 2\vec{i} - 4\vec{j} (m \cdot s^{-1})$$

(4) 由速度求导可得质点的加速度为

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = -2\vec{j}$$

所以 $1s$ 末和 $2s$ 末质点的加速度为

$$\vec{a}(1) = \vec{a}(2) = -2\vec{j} (m \cdot s^{-1})$$

1-5 湖中有一小船, 岸边有人用绳子跨过离河面高 H 的滑轮拉船靠岸, 如图 1.3 所示。设绳子的原长为 l_0 , 人以匀速 v_0 拉绳, 使描述小船的运动。

解建立坐标系如图 1.3 所示。按题意, 初始时刻 ($t=0$), 滑轮至小船的绳长为 l_0 , 在此后某

时刻 t , 绳长减小到 $l_0 - v_0 t$, 此刻船的位置为

$$x = \sqrt{(l_0 - v_0 t)^2 - H^2}$$

这就是小船的运动方程，将其对时间求导可得小船的速度为

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{(l_0 - vt)v_0}{\sqrt{(l_0 - v_0 t)^2 - H^2}} = -\frac{v_0}{\cos \alpha}$$

将其对时间求导可得小船的加速度为

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{v_0^2 H^2}{\sqrt{[(l_0 - v_0 t)^2 - H^2]^3}} = -\frac{v_0^2 H^2}{x^3}$$

其中负号说明了小船沿 x 轴的负向（即向岸靠拢的方向）做变加速直线运动，离岸越近（ x 越小），加速度的绝对值越大。

1-6 大马哈鱼总是逆流而上，游到乌苏里江上游去产卵，游程中有时要跃上瀑布。这种鱼跃出水面的速度可达 $32 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 。它最高可跃上多高的瀑布？和人的跳高记录相比如何？

解 鱼跃出水面的速度为 $v = 32 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 8.89 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，若竖直跃出水面，则跃出的高度

$$h = \frac{v^2}{2g} = 4.03(\text{m})$$

此高度和人的跳高记录相比较，差不多是人跳高的两倍。

1-7 一人站在山坡上，山坡与水平面成 α 角，他扔出一个初速度为 \vec{v}_0 的小石子， \vec{v}_0 与水平面成 θ 角，如图 1.4 所示。（1）若忽略空气阻力，试证小石子落到了山坡上距离抛出点为 S 处，有 $S = \frac{2v_0^2 \sin(\theta + \alpha) \cos \theta}{g \cos^2 \alpha}$ 。（2）由此证明对于给定的 v_0 和 α 值时， S 在 $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ 时

有最大值 $S_{\max} = \frac{v_0^2 (\sin \alpha + 1)}{g \cos^2 \alpha}$ 。

解 （1）建立如图 1.4 所示的坐标系，则小石子的运动方程为

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos \theta)t \\ y = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

当小石子落在山坡上时，有

$$\begin{cases} x = S \cos \alpha \\ y = -S \sin \alpha \end{cases}$$

联立以上四个方程，求解可得小石子在空中飞行的时间（即从抛出到落在山坡上是所经历的时间） t 所满足的方程为

$$t^2 - \frac{2v_0}{g}(\sin \theta + \tan \alpha \cos \theta)t = 0$$

解之得

$$t = \frac{2v_0}{g}(\sin \theta + \tan \alpha \cos \theta)$$

但 $t=0$ 时不可能的, 因 $t=0$ 时小石子刚刚抛出, 所以小石子落在山坡的距离为

$$S = \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{(v_0 \cos \theta)t}{\cos \alpha} = \frac{2v_0^2 \sin(\theta + \alpha) \cos \theta}{g \cos^2 \alpha}$$

(2) 给定 v_0 和 α 值时, 有 $S = S(\theta)$, 求 S 的最大值, 可令 $\frac{dS}{d\theta} = 0$, 即

$$\frac{2v_0^2 \cos(2\theta + \alpha)}{g \cos^2 \alpha} = 0$$

亦即

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

此时 $\frac{d^2 S}{d\theta^2} < 0$, 所以 S 有最大值, 且最大值为

$$S_{\max} = \frac{v_0^2 (\sin \alpha + 1)}{g \cos^2 \alpha}$$

1-8 一人扔石子的最大出手速度为 $v_0 = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。他能击中一个与他的手水平距离为

$L = 50 \text{ m}$, 高为 $h = 13 \text{ m}$ 处的目标吗? 在这个距离上他能击中的最大高度是多少?

解 设抛射角为 θ , 则已知条件如图 1.5 所示, 于是石子的运动方程为

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos \theta)t \\ y = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

可得到石子的轨迹方程为

$$y = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}$$

假若石子在给定距离上能击中目标, 可令 $x = L$

此时有

$$y = L \tan \theta - \frac{gL^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}$$

即

$$y = -\frac{gL^2}{2v_0^2} \tan^2 \theta + L \tan \theta - \frac{gL^2}{2v_0^2}$$

以 $\tan \theta$ 为函数, 令 $\frac{dy}{d(\tan \theta)} = 0$, 有 $\tan \theta = \frac{v_0^2}{gL}$, 此时 $\frac{d^2 y}{d^2 \tan \theta} < 0$, 即在给定已

知条件及给定距离上能够击中目标的最大高度为 $y_{\max} = 12.3m$ ，故在给定距离上能击中 $h = 13m$ 高度的目标。

1-9 如果把两个物体 A 和 B 分别以速度 \vec{v}_{OA} 和 \vec{v}_{OB} 抛出去， \vec{v}_{OA} 与水平面的夹角为 α ， \vec{v}_{OB} 与水平面的夹角为 β ，试证明在任意时刻物体 B 相对于物体 A 的速度为常矢量。

解 两物体在忽略风力的影响之后，将在一竖直面内做上抛运动，如图 1.6 所示，则两个物体的速度分别为

$$\vec{v}_A = (v_{OA} \cos \alpha) \vec{i} + (v_{OA} \sin \alpha - gt) \vec{j}$$

$$\vec{v}_B = (v_{OB} \cos \beta) \vec{i} + (v_{OB} \sin \beta - gt) \vec{j}$$

所以在任意时刻物体 B 相对于物体 A 的速度为

$$\vec{v}_B - \vec{v}_A = (v_{OB} \cos \beta - v_{OA} \cos \alpha) \vec{i} + (v_{OB} \sin \beta - v_{OA} \sin \alpha) \vec{j}$$

它是与时间无关的常矢量。

1-10 如果已测得上抛物体两次从两个方向经过两个给定点的时间，即可测出该处的重力加速度。若物体沿两个方向经过水平线 A 的时间间隔为 Δt_A ，而沿两个方向经过水平线 A 上方 h 处的另一水平线 B 的时间间隔为 Δt_B ，设在物体运动的范围内重力加速度为常量，试求该重力加速度的大小。

解 设抛出物体的初速度为 v_0 ，抛射角为 θ ，建立如图 1.7 所示的坐标系，则

$$\begin{cases} h_A = (v_0 \sin \theta) t_A - \frac{1}{2} g t_A^2 \\ h_B = (v_0 \sin \theta) t_B - \frac{1}{2} g t_B^2 \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} t_A^2 - \frac{2v_0 \sin \theta}{g} t_A + \frac{2g_A}{g} = 0 \\ t_B^2 - \frac{2v_0 \sin \theta}{g} t_B + \frac{2g_B}{g} = 0 \end{cases}$$

于是有

$$\begin{cases} \Delta t_A = \sqrt{(t_{A1} + t_{A2})^2 - 4t_{A1}t_{A2}} = \sqrt{\frac{4v_0^2 \sin^2 \theta}{g^2} - \frac{8h_A}{g}} \\ \Delta t_B = \sqrt{(t_{B1} + t_{B2})^2 - 4t_{B1}t_{B2}} = \sqrt{\frac{4v_0^2 \sin^2 \theta}{g^2} - \frac{8h_B}{g}} \end{cases}$$

此二式平方相减可得

$$g = \frac{8(h_B - h_A)}{\Delta t_A^2 - \Delta t_B^2} = \frac{8h}{\Delta t_A^2 - \Delta t_B^2}$$

注意此方法也是实验测得重力加速度的一种方法。

1-11 以初速度 v_0 将一物体斜上抛，抛射角为 θ ，不计空气阻力，则物体在轨道最高点处的曲率半径为 ()

A. $\frac{v_0 \sin \theta}{g}$ B. $\frac{g}{v_0^2}$ C. $\frac{v_0^2 \cos \theta}{g}$ D. 不能确定

解 本题正确答案为 C

因为初速为 v_0 将一物体斜向上抛，抛射角为 θ ，不计空气阻力时，物体在轨道的最高点处

的速率为 $v = v_0 \cos \theta$ ，而此时物体仅有法向加速度 \vec{a}_n ，且 $a_n = g = \frac{v^2}{R}$ ，所以物体在轨道

最高点处的曲率半径为 $R = \frac{v^2}{g} = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g}$

1-12 一质点从静止出发沿半径为 $R = 1\text{m}$ 的圆周运动，其角加速度随时间的变化规律是 $\beta = 12t^2 - 6t (SI)$ ，试求该质点的角速度 ω 和切线加速度 a_τ 。

解 因为 $\beta = 12t^2 - 6t$

所以 $d\omega = (12t^2 - 6t)dt$

于是有 $\int_0^\omega d\omega = \int_0^t (12t^2 - 6t)dt$

故质点的角速度为

$$\omega = 4t^3 - 3t^2$$

切线方向加速度为

$$a_\tau = R\beta = 12t^3 - 6t$$

1-13 一质点做圆周运动方程为 $\theta = 2t - 4t^2$ (θ 以 rad 计， t 以 s 计)。在 $t = 0$ 时开始逆时针旋转，问：(1) $t = 0.5\text{s}$ 时，质点以什么方向转动；(2) 质点转动方向改变的瞬间，它的角位置 θ 多大？

解 (1) 因质点做圆周运动角速度方向改变瞬时，

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{即} \quad 2 - 8t = 0, t = 0.25\text{s}$$

所以 $t = 0.5\text{s}$ 时，质点将以顺时针方向转动。

(2) 质点转动方向改变的瞬间，它的角位置为

$$\theta(0.25) = 2 \times 0.25 - 4 \times (0.25)^2 = 0.25(\text{rad})$$

1-14 质点从静止出发沿半径为 $R = 3m$ 的圆周做匀变速运动, 切向加速度 $a_\tau = 3m \cdot s^{-2}$, 问:

(1) 经过多长时间后质点的总加速度恰好与半径 45° 角? (2) 在上述时间内, 质点所经历的角位移和路程各为多少?

解 因为 $a_\tau = \frac{dv}{dt} = 3$

所以 $dv = 3dt$ 即 $\int_0^v dv = \int_0^t 3dt$

故质点做圆周运动的瞬间时速度为瞬时速率 $v = 3t$
质点的法向加速度的大小为

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(3t)^2}{3} = 3t^2$$

其方向恒指向圆心, 于是总加速度为

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau = (3t^2)\vec{n} + 3\vec{\tau}$$

其中 \vec{n} 为沿半径指向圆心的单位矢量, $\vec{\tau}$ 为切向单位矢量。

(1) 设总加速度 \vec{a} 与半径的夹角 α , 如图 1.8 所示, 则

$$a \sin \alpha = a_\tau, \quad a \cos \alpha = a_n$$

当 $\alpha = 45^\circ$ 时有 $a_n = a_\tau$, 即 $3t^2 = 3, t = 1$ (负根舍去), 所以 $t = 1s$ 时, \vec{a} 与半径成 45° 角。

(2) 因为 $\frac{ds}{dt} = v = 3t$, 所以 $\int_0^s ds = \int_0^1 (3t)dt$

故在这段时间内质点所经过的路程为 $s = 1.5m$, 角位移为 $\Delta\theta = \frac{s}{R} = \frac{1.5}{3} = 0.5(rad)$ 。

1-15 汽车在半径为 $R = 400m$ 的圆弧弯道上减速行驶, 设某一时刻, 汽车的速度为 $v = 10m \cdot s^{-1}$, 切向加速度的大小为 $a_\tau = 0.2m \cdot s^{-2}$ 。汽车的法向加速度和总加速度的大小和方向。

解 已知条件如图 1.9 所示。汽车的法向加速度为

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{10^2}{400} = 0.25(m \cdot s^{-2})$$

汽车的总加速度为

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{(0.25)^2 + (0.2)^2} = 0.32(m \cdot s^{-2})$$

所以 $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau = 0.25\vec{n} + (-0.2)\vec{\tau}(m \cdot s^{-2})$, 故加速度 \vec{a} 和 \vec{v} 的夹角为

$$\alpha = 180^\circ - \arctan\left(\frac{a_n}{a_\tau}\right) = 180^\circ - \arctan\left(\frac{0.25}{0.2}\right) = 128^\circ 40'$$

习题精解

2-1 如图 2.6 所示, 将质量分别为 m 和 M 的 A, B 两物块叠放在一起, 置于光滑水平面上。 A, B 间的静摩擦系数为 μ_s , 滑动摩擦系数

为 μ_k , 现用一水平力 \vec{F} 作用于 A 物块上, 要使 A, B 不发生相对滑动而一同前进, 则应有 ()

A. $\vec{F} \leq \mu_s mg$ B. $\vec{F} \leq \mu_s \frac{m+M}{M} mg$ C. $\vec{F} \leq \mu_s (m+M)g$ D. $\vec{F} \leq \mu_k \frac{m+M}{M} mg$

解 本题正确答案为 B

因 A, B 不发生相对滑动, 设它们一同前进的加速度为 a , 水平方向受力如图 2.6 所示, 则由牛顿第二运动定律的

对物体 A 有: $F - \mu_s mg = ma$

对物体 B 有: $\mu_s mg = Ma$

解之可得: $F = \mu_s \frac{m+M}{M} mg$

可见只要 $F \leq \mu_s \frac{m+M}{M} mg$, 则 A, B 就不发生相对滑动。

2-2 质量为 0.25kg 的质点, 受力为 $\vec{F} = t\vec{i} \text{ (SI)}$ 的作用, 式中 t 为时间。 $t=0$ 时, 该质点以 $\vec{v}_0 = 2\vec{j} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度通过坐标原点, 则该质点任意时刻的位置矢量是_____。

解 因为 $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{t\vec{i}}{0.25} = 4t\vec{i}$, 所以 $d\vec{v} = (4t\vec{i})dt$, 于是有 $\int_{v_0}^v d\vec{v} = \int_0^t (4t\vec{i})dt$,

$\vec{v} = 2t^2\vec{i} + 2\vec{j}$; 又因为 $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, 所以 $d\vec{r} = (2t^2\vec{i} + 2\vec{j})dt$, 于是有 $\int d\vec{r} = \int (2t^2\vec{i} + 2\vec{j})dt$,

$\vec{r} = \frac{2}{3}t^3\vec{i} + 2t\vec{j} + C$, 而 $t=0$ 时质点通过了原点, 所以 $C=0$, 故该质点在任意时刻的位置

矢量为 $\vec{r} = \frac{2}{3}t^3\vec{i} + 2t\vec{j}$ 。

2-3 一质量为 5kg 的物体 (视为质点) 在平面上运动, 其运动方程为 $\vec{r} = 6t\vec{i} - 3t^2\vec{j} \text{ (SI)}$, 则物体所受合外力 \vec{f} 的大小为_____; 其方向为_____。

解 因为 $\vec{f} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 5 \times (-6\vec{j}) = -30\vec{j}$, 所以物体所受合力 \vec{f} 的大小为 30N , 其方向沿

y 轴负向。

2-4 A, B, C 3 个物体, 质量分别为 $m_A = m_B = 0.1\text{kg}, m_C = 0.8\text{kg}$, 当按图 2.7(a) 放置时, 物体系正好匀速运动。(1) 求物体 C 与水平面间的摩擦系数; (2) 如果将物体 A 移动到物

体 B 上面, 如图 2.7(b) 所示, 求系统的加速度及绳中的张力 (滑轮与绳的质量忽略不计)。

解 (1) 由于系统按图 2.7(a) 放置时, 物体系正好匀速运动, 所以有 $m_B g = \mu(m_A + m_C)g$, 物体 C 与水平桌面间的摩擦系数为

$$\mu = \frac{m_B}{m_A + m_C} = \frac{0.1}{0.1 + 0.8} = \frac{1}{9} = 0.11$$

(2) 如果将物体 A 移到物体 B 上面, 分析受力如图 2.7(b)所示, 则

$$\text{对物体 A、B 有: } (m_A + m_B)g - T = (m_A + m_B)a$$

$$\text{对物体 C 有: } T - \mu m_C g = m_C a$$

$$\text{解之可得系统的加速度 } a = \frac{m_A + m_B + \mu m_C}{m_A + m_B + m_C} g = 1.1(m \cdot s^{-2})$$

$$\text{绳子的张力 } T = m_C(a + \mu g) = 1.7(N)$$

2-5 已知条件如图 2.8 所示, 求物体系加速度的大小和 A、B 两绳中的张力 (绳与滑轮的质量及所有的摩擦均忽略不计)。

解 受力分析如图 2.8 所示。由于绳子不可伸长, 所以设物体系的加速度为 a , 则由牛顿第二运动定律可得

对于水平运动的物体有

$$T_B = 2ma$$

对于竖直运动的物体有

$$T_A - T_B - mg = ma$$

对于斜面上运动的物体有

$$2mg \sin 45^\circ - T_A = 2ma$$

联立以上三个方程可得物体系的加速度为

$$a = \frac{2mg \sin 45^\circ - mg}{5m} = \frac{\sqrt{2} - 1}{5}$$

A、B 两绳子的张力分别为

$$T_A = \frac{3\sqrt{2} + 2}{5} mg, T_B = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{5} mg$$

2-6 长为 l 的轻绳, 一端固定, 另一端系一质量为 m 的小球, 使小球从悬挂着的铅直位置以水平初速度 \vec{v}_0 开始运动, 如图 2.9 所示。用牛顿运动定律求小球沿逆时针转过 θ 角时的角速度和绳中的张力。

解 小球在任意位置时的受力分析如图 2.9 所示, 则由牛顿第二运动定律可得

对法向有： $T - mg \cos \theta = m \left(\frac{v^2}{l} \right)$

对切向有： $-mg \sin \theta = m \left(\frac{dv}{dt} \right)$

对切向方程两边同乘以 $d\theta$ ，得

$$-mg \sin \theta d\theta = m \left(\frac{dv}{dt} \right) d\theta$$

即

$$-mg \sin \theta d\theta = m \left(\frac{dv}{dt} \right) \bullet d(l\omega)$$

亦即

$$g \sin \theta d\theta = -l\omega \bullet d\omega$$

于是有

$$\int_0^\theta g \sin \theta d\theta = -\int_{\omega_0}^\omega l\omega \bullet d\omega$$

积分可得 $g(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} l\omega_0^2 - \frac{1}{2} l\omega^2$

所以小球沿逆时针转过 θ 角时的角速度为

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2}{l} g (\cos \theta - 1)} = \frac{1}{l} \sqrt{v_0^2 + 2gl (\cos \theta - 1)}$$

将 $v = l\omega$ 代入法向方程可得绳中的张力为

$$T = m \left(\frac{v_0^2}{l} - 2g + 3g \cos \theta \right)$$

2-7 质量为 $20g$ 的子弹沿 x 轴正方向以 $500m \cdot s^{-1}$ 的速率射入一木块后，与木板一起沿 x 轴

正方向的速度前进，在此过程中木块所受的冲量为（ ）

A. $9N \cdot S$ B. $-9N \cdot S$ C. $10N \cdot S$ D. $-10N \cdot S$

解 本题正确答案为 A

根据动量定理可得子弹受到的冲量为

$$I = mv - mv_0 = 0.02 \times 50 - 0.02 \times 500 = -9(N \bullet s)$$

由牛顿第三运动定律得木块所受的冲量为 $I' = -I = 9N \bullet s$ 。

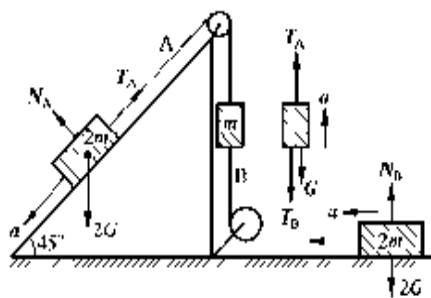


图 2.8

2-8 一质量为 10kg 的物体在力 $\vec{f} = (120t + 40)\vec{i} \text{ (SI)}$ 作用下, 沿 x 轴运动。 $t = 0$ 时, 其速度 $\vec{v}_0 = 6\vec{i} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 则 $t = 3\text{s}$ 时, 其速度为 ()

- A. $10\vec{i} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ B. $66\vec{i} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ C. $72\vec{i} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ D. $4\vec{i} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

解 本题正确答案为 C

在 x 方向, 动量定理可写为 $\int_0^3 (120t + 40) dt = mv - mv_0$, 即 $mv - mv_0 = 660$

所以 $v = v_0 + \frac{660}{m} = 6 + \frac{660}{10} = 72 \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1})$ 。

2-9 有一质点同时受到了 3 个处于同一平面上的力 \vec{f}_1 、 \vec{f}_2 和 \vec{f}_3 的作用。其中 $\vec{f}_1 = 5\vec{i} - 7\vec{j}$, $\vec{f}_2 = -7\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{f}_3 = 2\vec{i} + 2\vec{j} \text{ (SI)}$, 设 $t = 0$ 时, 质点的速度 $v_0 = 0$, 则质点将 ()

- A. 处于静止状态 B. 做匀速直线运动 C. 做加速运动 D. 做减速运动

解 本题正确答案为 A

因为质点所受的合外力 $\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = 0$, 所以质点保持原有的运动状态, 而质点原来静止, 故质点仍将处于静止状态。

2-10 一个不稳定的原子核, 其质量为 M , 开始时是静止的。当它分裂出一个质量为 m 、速度为 v_0 的粒子后, 原子核的其余部分沿相反方向反冲, 则反冲速度的大小为 ()

- A. $\frac{m}{M-m}v_0$ B. $\frac{m}{M}v_0$ C. $\frac{m+M}{m}v_0$ D. $\frac{m}{M+m}v_0$

解 本题正确答案为 A.

因为原子核所受合外力为零, 所以原子核的动量守恒。若设剩余部分的速度为 u , 则

$mv_0 + (M-m)u = 0$, 所以剩余部分的反冲速度为 $u = -\frac{m}{M-m}v_0$ 。

2-11 一物体质量为 10kg 。受到方向不变的力 $F = 30 + 40t \text{ (SI)}$ 的作用, 在开始的 2s 内,

此力的冲量大小等于_____;若物体的初速度大小为 $10\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, 方向与 F 同向, 则在 2s 末物体的速度大小等于_____。

解 在开始的 2s 内, 此力的冲量大小为

$$I = \int_0^2 (30 + 40t) dt = 140 (N \cdot s)$$

由质点的动量定理得

$$I = mv - mv_0$$

当物体的初速度大小为 $10m \cdot s^{-1}$ ，方向与 \vec{F} 同向时，在 $2s$ 末物体速度的大小为

$$v = \frac{I}{m} + v_0 = \frac{140}{10} + 10 = 24 (m \cdot s^{-1})$$

2-12 质量均为 M 的 3 只小船（包括船上的人和物）以相同的速度沿一直线同向航行，时从中间的小船向前后两船同时以速度（相对于该船）抛出质量同为 m 的小包。从小包被抛出至落入前、后两船的过程中，试分析对中船。前船、后船建立动量守恒方程。解 设 3 条小船以相同的速度 v 沿一直线同向航行，根据题意作图 2.10。则由动量守恒定理得

对于前船有

$$Mv + m(v + u) = (M + m)V_{\text{前}}$$

对于后船有

$$Mv + m(v - u) = (M + m)V_{\text{后}}$$

对于中船有

$$Mv = m(v + u) + m(v - u) + (M - 2m)V_{\text{中}}$$

所以抛出小包之后 3 船的速度变为

$$V_{\text{前}} = v + \frac{m}{M + m}u, V_{\text{中}} = v, V_{\text{后}} = v - \frac{m}{M + m}u$$

2-13 一质量为 $0.25kg$ 的小球以 $20m \cdot s^{-1}$ 的速度和 45° 的仰角投向竖直放置的木板，如图

2.11 所示。设小球与木板碰撞的时间为 $0.05s$ 。反弹角度与入射角相同。小球速度的大小不变，求木板对小球的冲力。

解 建立坐标系如图 2.11 所示。由动量定理得到小球所受的平均冲力为

$$\begin{cases} F_x = \frac{1}{\Delta t} [(-mv \cos 45^\circ) - (mv \cos 45^\circ)] \\ F_y = \frac{1}{\Delta t} [(mv \sin 45^\circ) - (mv \sin 45^\circ)] \end{cases}$$

代入数值计算可得

$$\begin{cases} F_x = -144(N) \\ F_y = 0 \end{cases}$$

因此木板对小球的冲力为 $\vec{F} = -144\vec{i}N$ 。

2-14 一质量为 m 的滑块，沿图 2.12 所示的轨道一初速 $v_0 = 2\sqrt{Rg}$ 无摩擦地滑动，求滑块由

A 运动到 B 的过程中所受的冲量，并用图表示之（OB 与地面平行）

解 因为轨道无摩擦，所以滑块在运动过程与地球构成的系统机械能守恒，于是

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgR + \frac{1}{2}mv_B^2$$

而 $v_0 = 2\sqrt{Rg}$ ，因此 $v_B = \sqrt{2Rg}$ ，方向竖直向上。

滑块由 A 运动到 B 的过程中所受的冲量为

$$\vec{I} = mv_B - mv_0 = m\sqrt{2Rg}\vec{j} - 2m\sqrt{Rg}\vec{i} = m\sqrt{Rg}(-2\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j})$$

如图 2.12 所示。

2-15 一质量为 60kg 的人以 $2\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 为的水平速度从后面跳上质量为 80kg 的小车，小车原来的速度为 $1\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ，问：（1）小车的速度将如何变化？（2）人如果迎面跳上小车，小车的速度又将如何变化？

解 若忽略小车与地面之间的摩擦，则小车和人构成的系统动量守恒。

（1）因为 $m_{\text{车、人}}v_{\text{车、人}} = m_{\text{车}}v_{\text{车}} + m_{\text{人}}v_{\text{人}}$

所以 $v_{\text{车、人}} = \frac{m_{\text{车}}v_{\text{车}} + m_{\text{人}}v_{\text{人}}}{m_{\text{车、人}}} = 1.43\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ，车速变大，方向与原来相同。

（2）因为 $m_{\text{车、人}}v_{\text{车、人}} = m_{\text{车}}v_{\text{车}} - m_{\text{人}}v_{\text{人}}$

所以 $v_{\text{车、人}} = \frac{m_{\text{车}}v_{\text{车}} - m_{\text{人}}v_{\text{人}}}{m_{\text{车、人}}} = -0.286\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ，车速变小，方向与原来相反。

2-16 原子核与电子间的吸引力的大小随它们之间的距离 r 而变化，其规律为 $F = \frac{k}{r^2}$ ，求电子从 r_1 运动到 r_2 ($r_1 > r_2$) 的过程中，核的吸引力所做的功。

解 核的吸引力所做的功为

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F \cos \pi dr = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{k}{r^2} dr = k \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$$

2-17 质量为 m 的子弹，在枪筒中前进受到的合力为 $F = 400 - \frac{8000}{9}x$ ，单位为 N ， x 的单位为 m ，子弹射出枪口时的速度为 v ，试求枪筒的长度。

解 设枪筒的长度为 l ，则根据动能定理有

$$\int_0^l F dx = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\int_0^l \left(400 - \frac{8000}{9}x \right) dx = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^{-3} \times 300^2$$

$$l^2 - 0.9l + \frac{81}{400} = 0 \text{ 即 } \left(l - \frac{9}{20} \right)^2 = 0, \text{ 得 } l = 0.45(\text{m})$$

所以枪筒的长度为 $0.45m$ 。

2-18 从轻弹簧的原长开始第一次拉伸长度 L 。在此基础上，第二次使弹簧再伸长 L ，继而第三次又伸长 L 。求第三次拉伸和第二次拉伸弹簧时做的功的比值。

解 第二次拉伸长度 L 时所做的功为

$$W_2 = \frac{1}{2}k(2L)^2 - \frac{1}{2}kL^2 = \frac{3}{2}kL^2$$

第三次拉伸长度 L 时所做的功为

$$W_3 = \frac{1}{2}k(3L)^2 - \frac{1}{2}k(2L)^2 = \frac{5}{2}kL^2$$

所以第三次拉伸和第二次拉伸弹簧时做的功的比值为 $\frac{W_2}{W_3} = \frac{5}{3}$ 。

2-19 用铁锤将一铁钉击入木板，设木板对钉的阻力与钉进木板之深度成正比。在第一次锤击时，钉被击入木板 $1cm$ 。假定每次锤击铁钉时速度相等，且锤与铁钉的碰撞为完全弹性碰撞，问第二次锤击时，钉被击木板多深？

解 据题意设木板对钉子的阻力为 $-kx$ ，锤击铁时的速度为 v ，则由功能原理可知在第一次锤击时有 $\frac{1}{2}mv^2 = \int_0^{0.01} kx dx$ ；在第二次锤击时有 $\frac{1}{2}mv^2 = \int_{0.01}^l kx dx$ ，联立这两个方程可得

第二次锤击时钉被击入的深度为 $l - 0.01 = 4.14 \times 10^{-3}(m)$ 。

2-20 如图 2.13 所示，两物体 A 和 B 的质量分别为 $m_A = m_B = 0.05kg$ ，物体 B 与桌面的滑动摩擦系数为 $\mu_k = 0.1$ ，试分析用动能定理和牛顿第二运动定律求物体 A 自静止落下 $h = 1m$ 时的速度。

解 用牛顿第二运动定律求解。分析物体受力如图 2.3 所示，则

对物体 A 有： $m_A g - T = m_A a$

对物体 B 有： $T - \mu_k m_B g = m_B a$

解之得： $a = \frac{1 - \mu_k}{2} g$

因为 $v = \sqrt{v_0^2 + 2ah}$, $v_0 = 0$,

所以 $v = \sqrt{gh(1 - \mu_k)} = \sqrt{9.8 \times 1 \times (1 - 0.1)} = 2.97(m \cdot s^{-1})$

用动能定理求解。对于物体 A, B 构成的系统动能定理可写为

$$m_A gh - \mu_k m_B gh = \frac{1}{2}(m_A + m_B) v^2$$

所以

$$v = \sqrt{\frac{2(m_A + \mu_k m_B) gh}{m_A + m_B}} = \sqrt{\frac{2 \times (0.05 - 0.1 \times 0.05) \times 9.8 \times 1}{0.05 + 0.05}} = 2.97(m \cdot s^{-1})$$

2-21 一弹簧劲度系数为 k ，一段固定在 A 点，另一端连结一质量为 m 的物体，靠在光滑的半径为 a 的圆柱体表面上，弹簧原长 AB，如图 2.14 所示，再变力的作用下物体极其缓慢的沿圆柱体表面从位置 B 移到了 C，试分别用积分法和功能原理两种方法求力 F 所做的功。
解 利用积分法求解。

分析物体受力如图 2.14 所示，由于物体极其缓慢地沿光滑表面移动，所以有

$$F = mg \cos \theta + kx = mg \cos \theta + ka\theta$$

因此力 \vec{F} 所做的功为

$$W = \int_0^\theta F ds = \int_0^\theta (mg \cos \theta + ka\theta) d(a\theta) = mga \sin \theta + \frac{1}{2} ka^2 \theta^2$$

利用功能原理求解，力 F 所做的功为

$$W = E_{MC} - E_{MB} = mga \sin \theta + \frac{1}{2} ka^2 \theta^2$$

2-22 一长为 l 、质量均匀的链条，放在光滑的水平桌面上。若使其长度的 $1/2$ 悬于桌边下，由静止释放，任其自由滑动，则刚好链条全部离开桌面时的速度为 ()

- A. $\sqrt{2gl}$ B. $\frac{1}{2}\sqrt{3gl}$ C. $\sqrt{3gl}$ D. $2\sqrt{2gl}$

解 本题正确答案为 B。

根据题意作图 2.15。设链条的质量为 m ，则单位长度的质量为 $\frac{m}{l}$ ，若选取桌面为零势能点，则由机械能守恒定律得

$$-\left[\left(\frac{m}{l}\right) \cdot \frac{l}{2}\right] \cdot g \cdot \left(\frac{l}{4}\right) = -\left[\left(\frac{m}{l}\right) \cdot l\right] \cdot g \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} mv^2$$

其中 v 为链条全部离开桌面时的速度。解之得

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{3gl}$$

2-23 一弹簧原长为 0.5m ，劲度系数为 k ，上端固定在天花板上，当下端悬挂一盘子时，其长度为 0.6m ，然后在盘子中放一物体，弹簧长度变为 0.8m ，则盘中放入物体后，在弹簧伸长过程中弹性力做功为 ()

- A. $\int_{0.6}^{0.8} kx dx$ B. $-\int_{0.6}^{0.8} kx dx$ C. $\int_{0.1}^{0.3} kx dx$ D. $-\int_{0.1}^{0.3} kx dx$

解 本题正确答案为 D

$$\text{因为弹力所做的功为 } W = \int_{(0.6-0.5)}^{(0.8-0.5)} (-kx) dx = -\int_{0.1}^{0.3} kx dx$$

2-24 如图所示，已知子弹的质量为 $m = 0.02\text{kg}$ ，木块的质量为 $M = 8.98\text{kg}$ ，弹簧的劲度系数 $k = 100\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ ，子弹以初速 v_0 射入木块后，弹簧被压缩了 $l = 10\text{m}$ 。设木块与平面间的滑动摩擦系数为 $\mu_k = 0.2$ ，不计空气阻力，试求 v_0 的大小。

解 设子弹与木块碰撞后共同前进的速度为 v ，因碰撞过程中动量守恒，所以有

$$mv_0 = (m + M)v$$

在子弹与木块一同压缩弹簧时，由功能原理得

$$-\mu_k(m+M)gl = \frac{1}{2}kl^2 - \frac{1}{2}(m+M)v^2$$

联立以上两式可得子弹的初速度为

$$v_0 = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}kl^2 + \mu_k(m+M)gl}{\frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{m+M}\right)}} = 319(m \cdot s^{-1})$$

2-25 质量为 M 的物体静止于光滑的水平面上，并连接有一轻弹簧如图 2.17 所示，另一质量为 M 的物体以速度 v_0 与弹簧相撞，问当弹簧压缩到最大时有百分之几的动能转化为势能，

解 当弹簧压缩到最大时系统以同一速度 v 前进，此过程中系统的动量守恒，所以有 $Mv_0 = (M+M)v$ 于是 $v = \frac{1}{2}v_0$ ，故弹簧压缩到最大时动能转化为势能的百分率为

$$\frac{\frac{1}{2}Mv_0^2 - \frac{1}{2}(M+M)\left(\frac{1}{2}v_0\right)^2}{\frac{1}{2}Mv_0^2} = 50\%$$

2-26 如图 2.18 所示，一木块 M 静止于光滑的水平面上，一子弹 m 沿水平方向以速度 v 射入木块内一段距离 S' 后停止于木块内。(1) 试求在这一过程中子弹和木块的动能变化是多少？子弹和木块之间的摩擦力对子弹和木块各做了多少功？(2) 证明子弹和木块的总机械能的增量等于一对摩擦力之一沿相对位移 S' 做的功。

解 (1) 如图 2.18 所示。设子弹停止于木块内，二者一同前进的速度为 V ，因为子弹与木块碰撞的过程中动量守恒，所以有 $mv = (m+M)V$ ，解之可得 $V = \frac{mv}{m+M}$

因此在这一过程中子弹和木块的动能变化为

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{mv}{m+M}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{M}{m+M}\right)$$

子弹和木块之间的摩擦力对子弹所做的功为

$$-f \cdot (S+S') = \frac{1}{2}m\left(\frac{mv}{m+M}\right)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv^2\left[\left(\frac{mv}{m+M}\right)^2 - 1\right] < 0$$

子弹和木块之间的摩擦力对木块所做的功为

$$f \cdot S = \frac{1}{2}M\left(\frac{mv}{m+M}\right)^2 - 0 = \frac{1}{2}Mv^2\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 > 0$$

(2) 子弹和木块的总机械能的增量为

$$\Delta E_M = \left[\frac{1}{2}Mv^2\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 - 0\right] + \left[\frac{1}{2}m\left(\frac{mv}{m+M}\right)^2 - \frac{1}{2}mv^2\right] = -\frac{1}{2}mv^2\left(\frac{M}{m+M}\right)^2$$

而摩擦内力所做的总功为

$$W = -f \bullet (S + S') + f \bullet S = -f \bullet S' = \frac{1}{2}mv^2 \left(\frac{M}{m+M} \right)$$

正好等于一对摩擦力之一沿相对位移 S' 做的功。

2-27 证明：在光滑的台面上，一个光滑的小球撞击（撞击可认为时完全弹性碰撞）另一个静止的光滑绣球后，两者总沿着互成直角的方向离开，设光滑的小球质量相等（除正碰外）。证明 如图 2.19 所示，由于在光滑台面上光滑的小球间的碰撞为完全弹性碰撞，所以动能和动量守恒。

由动量守恒，得

$$m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 \quad (1)$$

由动能守恒，得

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \quad (2)$$

（1）式两边平方，得

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 \quad (3)$$

将（3）式与（2）式比较，得 $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = 0$ ，而 \vec{v}_1 和 \vec{v}_2 均不为零，所以有 $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ 。

习题精解

3-1 某刚体绕定轴做匀速转动,对刚体上距转轴为 r 处的任意质元的法向加速度为和切线加速度来正确的是 ()

A. a_n , a_τ 大小均随时间变化

B. a_n , a_τ 大小均保持不变

C. a_n 的大小变化, a_τ 的大小保持不变

D. a_n 大小保持不变, a_τ 的大小变化

解 刚体绕定轴做匀变速转动时,因为 $a_n = r\omega^2$, $a_\tau = r\beta$, 而 β 为恒量, 所以 $\omega = \omega_0 + \beta t$, 故 $a_n = r(\omega_0 + \beta t)^2$, $a_\tau = r\beta$ 。可见: a_n 的大小变化, a_τ 的大小保持恒定, 本题答案为 C。

3-2 一飞轮以的角速度转动 $300 \text{ rad} \cdot \text{min}^{-1}$, 转动惯量为 $5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 现施加一恒定的制动力矩, 使飞轮在 2s 内停止转动, 则该恒定制动力矩的大小为_____。

解 飞轮转动的角速度为 $\beta = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - \omega_0}{2} = -\frac{1}{2} \times \frac{300}{60} = -2.5 (\text{rad} \cdot \text{s}^{-2})$ 所以该恒定制动力矩大小为 $M = J\beta = 5 \times 2.5 = 12.5 (\text{N} \cdot \text{m})$ 。

3-3 一飞轮半径 $r = 1 \text{ m}$, 以转速 $n = 1500 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$ 转动, 受制动均匀减速, 经 $t = 50 \text{ s}$ 后静止, 试求: (1) 角速度 β 和从制动开始到静止这段时间飞轮转过的转数; (2) 制动开始 $t = 25 \text{ s}$ 后时飞轮的角速度 ω ; (3) 在 $t = 25 \text{ s}$ 时飞轮边缘上一点的速度和加速度。

解 (1) 角加速度

$$\beta = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 2n\pi}{50} = -\frac{2 \times 3.14 \times \frac{1500}{60}}{50} = -3.14 (\text{rad} \cdot \text{s}^{-2})$$

从制动开始到静止这段时间飞轮转过的转数

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{\omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2}{2\pi} = \frac{2 \times 3.14 \times \frac{1500}{60} \times 50 - \frac{1}{2} \times 3.14 \times 50^2}{2 \times 3.14} = 625 (\text{圈})$$

(2) 制动开始后 $t = 25 \text{ s}$ 时飞轮的角速度

$$\omega = \omega_0 + \beta t = 2n\pi + \beta t = 2 \times 3.14 \times \frac{1500}{60} - 3.14 \times 25 = 78.5 (\text{rad} \cdot \text{s}^{-2})$$

(3) 在 $t = 25 \text{ s}$ 是飞轮边缘上一点的速度和加速度分别为

$$\vec{v} = (\omega r) \vec{\tau} = (78.5 \times 1) \vec{\tau} = 78.5 \vec{\tau} (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

$$\vec{a} = a_n \vec{n} + a_\tau \vec{\tau} = (\omega^2 r) \vec{n} + (\beta r) \vec{\tau} = [(78.5)^2 \times 1] \vec{n} + (-3.14 \times 1) \vec{\tau} = (6.16 \times 10^3 \vec{n} - 3.14 \vec{\tau}) (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$$

3-4 有 A、B 两个半径相同、质量也相同的细圆环, 其中 A 环的质量分布均匀, 而 B 环的质量分布不均匀。若两环对过环心且与环面垂直轴的转动惯量分别为 J_A 和 J_B , 则有 ()

- A. $J_A > J_B$ B. $J_A < J_B$ C. $J_A = J_B$ D. 无法确定 J_A 和 J_B 的相对大小。

解 因为转动惯量 $J = \int_m r^2 dm$, 对于细圆环而言, 各质元 dm 到转轴的距离均为圆环的半径,

即 $r = \text{恒量}$, 所以 $J = r^2 \int_m dm = mr^2$ 。故 A,B 两个半径相同、质量也相同的细圆环, 不论

其质量在圆环上如何分布, 两环对过环心且与环面垂直轴的转动惯量 $J_A = J_B$, 本题答案为

C。

3-5 刚体的转动惯量取决于____、____和____等 3 各因素。_

解 刚体的转动惯量取决于: 刚体的总质量、质量的分布和转轴的位置 3 个元素。

3-6 如图 3.4 所示, 细棒的长为 l 。设转轴通过棒上离中心距离为 d 的一点并与棒垂直, 求棒对此轴的转动惯量 $J_{O'}$ 。试说明这一转动惯量与 J_O 棒对过棒中心并与此轴平行的转轴的

转动惯量 J_O 之间的关系 (此为平行轴定理)。

解 如图 3.4 所示, 以过 O' 点垂直于棒的直线为轴, 沿棒长方向为 x' 轴, 原点在 O' 处, 在棒上取一原长度元 dx' , 则

$$J_{O'} = \int_m (x')^2 dm = \int_{-\left(\frac{l}{2}+d\right)}^{\left(\frac{l}{2}-d\right)} (x')^2 \left(\frac{m}{l} dx'\right) = \frac{1}{12} ml^2 + md^2$$

所以 $J_{O'}$ 与 J_O 之间的关系为

$$J_{O'} = J_O + md^2$$

3-7 一轻绳在具有水平转轴的定滑轮上, 绳下挂一物体, 物体的质量为 m , 此时滑轮的角加速度为 β , 若将物体取下, 而用大小等于 mg , 方向向下的拉绳子, 则滑轮的角加速度将 ()

- A. 变大 B. 不变 C. 变小 D. 无法确定

解 设滑轮的半径为 R , 转动惯量为 J , 如图 3.5 所示。使用大小等于 mg , 方向向下的力拉

绳子时, 如图 3.5 (a), 滑轮产生的角加速度为 $\beta = \frac{mgR}{J}$ 。

绳下段挂一质量为 m 的物体时, 如图 3.5 (b), 若设绳子此时的拉力为 T , 则

对物体有: $mg - T = m\beta R$

对滑轮有: $TR = J\beta$

此时滑轮产生的角加速度为

$$\beta = \frac{mgR}{J + mR^2}$$

比较可知, 用大小等于 mg , 方向向下的拉力拉绳子时, 滑轮产生的角加速度变大, 本题答案为 A。

3-8 力矩、功和能量的单位量纲相同, 它们的物理意义有什么不同?

解 虽然力矩、功和能量的单位量纲相同，同为 L^2MT^{-2} ，但物理量的量纲相同，并不意味着这些物理量的物理意义相同，力矩为矢量，而功和能量均为标量。力矩通过做功的过程使物体的转动状态发生变化，以改变物体所具有的能量。

3-9 如图 3.6 所示，两物体的质量分别为 m_1 和 m_2 ，滑轮的转动惯量为 J ，半径为 r 。若 m_2 与桌面的摩擦系数为 μ ，设绳子与滑轮间无相对滑动，试求系统的加速度 a 的大小及绳子中张力 T_1 和 T_2 的大小。

解 分析受力如图 3.6 所示。 m_1 和 m_2 可视为质点，设其加速度分别为 a_1 和 a_2 ，则由牛顿运动定律得

$$\begin{cases} m_1g - T_1 = m_1a_1 \\ T_2 - \mu m_2g = m_2a_2 \end{cases}$$

滑轮作定轴转动，则由转动定律有

$$T_1r - T_2r = J\beta$$

由于绳子与滑轮间无相对滑动，所以

$$a_1 = a_2 = a = \beta r$$

联立以上 4 个方程可得，系统的加速度 a 的大小及绳子中张力 T_1 和 T_2 的大小分别为

$$a = \frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}} g, T_1 = \frac{m_2 - \mu m_2 + \frac{J}{r^2}}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}} m_1g, T_2 = \frac{m_1 - \mu m_1 + \frac{J}{r^2}}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}} m_2g$$

3-10 如图 3.7 所示。两个半径不同的同轴滑轮固定在一起，两滑轮的半径分别为 r_1 和 r_2 ，

两个滑轮的转动惯量分别为 J_1 和 J_2 ，绳子的两端分别悬挂着两个质量分别为 m_1 和 m_2 的物体，设滑轮与轴之间的摩擦力忽略不计，滑轮与绳子之间无相对滑动，绳子的质量也忽略不计，且绳子不可伸长。试求两物体的加速度的大小和绳子中张力的大小。

解 分析受力如图 3.7 所示。 m_1 和 m_2 可视为质点，设其受绳子的拉力分别为 T_1 和 T_2 ，加速度分别为 a_1 和 a_2 ，则由牛顿第二运动定律得

$$\begin{cases} m_1g - T_1 = m_1a_1 \\ T_2 - m_2g = m_2a_2 \end{cases}$$

滑轮作定轴转动，则有转动定律有

$$T_1r_1 - T_2r_2 = (J_1 + J_2)\beta$$

由于绳子与滑轮间无相对滑动，所以

$$a_1 = \beta r_1, a_2 = \beta r_2$$

联立以上 5 个方程可得, 两物体的加速度和绳子中的张力分别为

$$a_1 = \frac{(m_1 r_1 - m_2 r_2) r_1 g}{J_1 + J_2 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}$$

$$a_2 = \frac{(m_1 r_1 - m_2 r_2) r_2 g}{J_1 + J_2 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}$$

$$T_1 = \frac{(J_1 + J_2 + m_2 r_2^2 + m_1 r_1 r_2) m_1 g}{J_1 + J_2 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}$$

$$T_2 = \frac{(J_1 + J_2 + m_1 r_1^2 + m_1 r_1 r_2) m_2 g}{J_1 + J_2 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}$$

3-11 如图 3.8 所示, 质量为 m , 长为 l 的均匀细杆, 可绕通过其一端 O 的水平轴转动, 杆的另一端与质量为 m 的小球固连在一起, 当该系统从水平位置有静止转动 θ 角时, 系统的角速度 $\omega =$ _____、动能 $E_k =$ _____, 此过程中力矩所做的功 $W =$ _____.

解 在任意位置时, 受力分析如图 3.8 所示。系统所受的合外力矩为

$$M = mg \frac{l}{2} \cos \theta + mgl \cos \theta = \frac{3}{2} mgl \cos \theta$$

则在此过程中合外力矩所做的功为

$$W = \int_0^\theta M d\theta = \int_0^\theta \left(\frac{3}{2} mgl \cos \theta \right) d\theta = \frac{3}{2} mgl \sin \theta$$

系统的转动惯量为

$$J = \frac{1}{3} ml^2 + ml^2 = \frac{4}{3} ml^2$$

于是刚体定轴转动的动能定理可写为

$$\frac{3}{2} mgl \sin \theta = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} ml^2 \right) \omega^2$$

所以系统的角速度为 $\omega = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g \sin \theta}{l}}$, 系统的动能为 $E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{3}{2} mgl \sin \theta$

3-12 一个张开双臂手握哑铃坐在转椅上, 让转椅转动起来, 若此后无外力矩作用, 则当此人收回双臂时, 人和转椅这一系统的 ()。

- | | |
|-----------------|------------|
| A. 转速加大, 转动动能不变 | B. 角动量加大 |
| C. 转速和转动动能变化不清楚 | D. 角动量保持不变 |

解 因为系统无外力矩的作用, 所以系统的角动量守恒, 及 $J_0 \omega = J \omega$, 当人收回双臂时,

转动系统的转动惯量减少, 即 $J < J_0$, 所以 $\omega > \omega_0$, 故转速增大。

又因为 $\frac{E_{k0}}{E_K} = \frac{\frac{1}{2}J_0\omega_0^2}{\frac{1}{2}J\omega^2} = \frac{J_0\omega_0}{J\omega} \bullet \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega_0}{\omega}$, 所以 $E_k > E_{k0}$ 。因此转速和转动动能都增大,

求角动量守恒。所以本题的正确答案为 D

3-13 如图 3.9 所示。有一半径为 R , 质量为 M 的匀质盘水平放置, 可绕通过盘心的竖直轴作定轴转动, 圆盘对轴的转动惯量 $J = \frac{1}{2}MR^2$ 。当圆盘以角速度 ω_0 转动时, 有一质量为 m 的橡皮泥 (可视质点) 竖直落在圆盘上, 并粘在距转轴 $\frac{1}{2}R$ 处, 如图所示。那么橡皮泥和盘共同角速度 $\omega =$ _____.

解 对于圆盘和橡皮泥组成的系统而言, 所受的合外力矩为零, 所以系统的角动量守恒, 于是有

$$J\omega_0 = \left[J + m\left(\frac{1}{2}R\right)^2 \right] \omega$$

因为圆盘对轴的转动惯量

$$J = \frac{1}{2}MR^2$$

所以橡皮泥和盘的共同角速度为

$$\omega = \frac{2M}{2M+m}\omega_0$$

3-14 如图 3.10 所示。以质量为 m 的小球由一绳子系着, 以角速度 ω_0 在无摩擦的水平面上, 绕圆心 O 作半径为 r_0 的圆周运动。若在通过圆心 O 的绳子端作用一竖直向下的拉力 \vec{F} , 小球则作半径为 $\frac{r_0}{2}$ 的圆周运动。试求: (1) 小球新的角速度 ω ; (2) 拉力 \vec{F} 所做的功。

解 (1) 在拉力 \vec{F} 拉小球的过程中, 由于拉力 \vec{F} 通过了轴心, 因此小球在水平面上转动的过程中不受外力矩的作用, 故其角动量守恒。于是有

$$J_0\omega_0 = J\omega$$

即
$$(mr_0^2)\omega_0 = \left[m\left(\frac{1}{2}r_0\right)^2 \right] \omega$$

小球新的角速度 $\omega = 4\omega_0$ 。

(2) 随着小球转动角速度的增加, 其转动动能也在增加, 这正是拉力 \vec{F} 做功的结果。于是有定轴转动的转动定理得拉力 \vec{F} 所做的功为

$$W = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J_0\omega_0^2 = \frac{1}{2}(mr_0^2)(4\omega_0)^2 - \frac{1}{2}\left[m\left(\frac{1}{2}r_0\right)^2\right]\omega^2 = \frac{3}{2}mr_0^2\omega_0^2$$

3-15 如图 3.11 所示。A 与 B 两个飞轮的轴杆可由摩擦啮合器使之连接，A 轮的转动惯量为 $J_A = 10.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，开始时 B 轮静止，A 轮以 $n_A = 600 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$ 的转速转动，然后时 A 与 B 连接，因而 B 轮得到加速度而 A 轮减速，直到两轮的转速都等于 $n_{AB} = 200 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$ 为止。

求：（1）B 轮的转动惯量 J_B ；（2）在啮合过程中损失的机械能。

解 （1）两飞轮在轴方向啮和时，轴向受的力不产生转动力矩，所以两飞轮构成的系统角动量守恒。于是有

$$J_A\omega_A = (J_A + J_B)\omega_{AB}$$

所以 B 轮的转动惯量为

$$J_B = \frac{\omega_A - \omega_{AB}}{\omega_{AB}} J_A = \frac{n_A - n_{AB}}{n_{AB}} J_A = 20.0 (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$$

（2）有两飞轮在啮和前后转动动能的变化可得啮和过程中系统损失的机械能为

$$\Delta E = \frac{1}{2}J_A\omega_A^2 - \frac{1}{2}(J_A + J_B)\omega_{AB}^2 = 1.31 \times 10^4 (\text{J})$$

3-16 质量为 0.06 kg ，长为 0.2 m 的均匀细棒，可绕垂直与棒的一端水平轴无摩擦的转动。

若将此棒放在水平位置，然后任其开始转动，试求：（1）开始转动时的角加速度；（2）落到竖直位置时的动能；（3）落至竖直位置时对转轴的角动量。

解 根据题意作图 3.12.

（1）开始转动是角加速度为

$$\beta = \frac{M}{J} = \frac{mg \frac{l}{2}}{\frac{1}{3}ml^2} = \frac{3g}{2l} = 73.5 (\text{rad} \cdot \text{s}^{-2})$$

（2）在下落过程中，系统（棒和地球）受的重力为保守力，轴的支持力始终不做功，因此系统的机械能守恒，所以落到竖直位置时的动能为

$$E = \frac{1}{2}J\omega^2 = mg \frac{l}{2} = 0.06 (\text{J})$$

（3）因为 $\frac{1}{2}J\omega^2 = mg \frac{l}{2}$ ，所以落至竖直位置时对转轴的角速度为 $\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$ ，故落至竖

直位置是对转轴的角动量

$$L = J\omega = \sqrt{Jmgl} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}ml^2\right)mgl} = \sqrt{\frac{m^2gl^3}{3}} = 9.7 \times 10^{-3} (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$$

3-17 如图 3.13 所示。一均匀细棒长为 l ，质量为 m ，可绕通过端点 O 的水平轴在竖直平面内无摩擦的转动。棒在水平位置时释放，当它落到竖直位置时与放在地面上静止的物体碰

撞。该物体与地面之间的摩擦系数为 μ ，其质量也为 m ，物体滑行 s 距离后停止。求碰撞后杆的转动动能。

解 根据题意可知此题包含 3 个物理过程。

第一过程为均匀细棒的下落过程。在此过程中，以棒和地球构成的系统为研究对象，棒受的重力为保守力，轴对棒的支持力始终不做功，所以系统的机械能守恒，则

$$mg \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} ml^2 \right) \omega^2$$

第二过程为均匀细棒与物体的碰撞过程。在此过程中，以棒和物体构成的系统为研究对象，物体所受的摩擦力对转轴 O 的力矩与碰撞的冲力矩相比较可忽略，所以系统的角动量守恒，则

$$\left(\frac{1}{3} ml^2 \right) \omega = \left(\frac{1}{3} ml^2 \right) \omega' + mvl$$

其中 ω' 为碰撞后瞬时棒的角速度， v 为碰撞后瞬时物体与棒分离时物体的速率。

第三过程为分离以后的过程。对于棒而言，棒以角速度 ω' 继续转动；对于物体而言，物体在水平面内仅受摩擦力的作用，由质点的动能定律得

$$\frac{1}{2} mv^2 = \mu mgs$$

联立以上 3 个方程可得碰撞后杆的转动动能为

$$E_k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} ml^2 \right) \omega'^2 = \frac{1}{6} m \left(\sqrt{3gl} - 3\sqrt{2\mu gs} \right)^2$$

3-18 如图 3.14 所示，一劲度系数为 k 的轻弹簧与一轻柔绳相连，该跨过一半径为 R ，转动惯量为 J 的定滑轮，绳的另一端悬挂一质量为 m 的物体，开始时弹簧无伸长，物体由静止释放。滑轮与轴之间的摩擦可以忽略不计，当物体下落 h 时，试求物体的速度 v ，(1) 用牛顿定律和转动定律求解；(2) 用守恒定律求解。

解 (1) 用牛顿定律和转动定律求解。

建立坐标系及受力分析如图 3.14 所示。则由牛顿定律和转动定律得

$$\text{对于物体有: } mg - T_1 = ma$$

$$\text{对于滑轮有: } (T_1 - T_2)R = J\beta$$

$$\text{对于弹簧有: } T_2 = kx$$

物体的加速度与滑轮边缘的切向加速相同，即

$$a = \beta R$$

联立以上 4 个方程可得

$$a = \frac{mg - kx}{m + \frac{J}{R^2}}$$

因为

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dv} = v \frac{dv}{dx}$$

所以有

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{mg - kx}{m + \frac{J}{R^2}}$$

整理并积分有

$$\int_0^v v dv = \int_0^h \left(\frac{mg - kx}{m + \frac{J}{R^2}} \right) dx$$

解之可得物体的速度为

$$v = \sqrt{\frac{2mgh - kh^2}{m + \frac{J}{R^2}}}$$

(2) 用守恒定律求解

由于滑轮和轴之间的摩擦忽略不计，系统（弹簧、滑轮、物体和地球）仅受保守力（重力和弹力）的作用，所以系统的机械能守恒，若以物体 m 的初始位置处为势能零点，则

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\left(\frac{v}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}kh^2$$

解之得物体的速度为

$$v = \sqrt{\frac{2mgh - kh^2}{m + \frac{J}{R^2}}}$$

习题精解

4-1 设想每秒有 10^{23} 个氧气分子,以 $500\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度沿着与器壁法线成 45° 角的方向撞

在面积为 $2\times 10^{-4}\text{m}^2$ 的器壁上,求这群分子作用在器壁上的压强。

解 如图 4.1 所示,每个分子的动量变化为

$$|\Delta p_x| = 2p \cos 45^\circ = \sqrt{2}mv$$

全部分子给予器壁的冲量为

$$F \cdot \Delta t = N \Delta p_x$$

压强为

$$p = \frac{F}{S} = \frac{N \Delta p_x}{S \Delta t} = \frac{10^{23} \times \sqrt{2} \times 32 \times 1.66 \times 10^{-27} \times 500}{2 \times 10^{-4} \times 1} = 1.88 \times 10^4 (\text{Pa})$$

4-2 质量为 $2\times 10^{-3}\text{kg}$ 氢气贮于体积为 $2\times 10^{-3}\text{m}^3$ 的容器中,当容器内气体的压强为

$4.0\times 10^4\text{Pa}$ 时,氢气分子的平均平动动能是多少?总平动动能是多少?

解 理想气体的平均平动动能为

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}kT$$

根据理想气体的状态方程

$$pV = \frac{M}{\mu}RT$$

得

$$T = \frac{pV}{R} \frac{\mu}{M}$$

代入 $\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}kT$ 式得

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}k \frac{pV}{R} \frac{\mu}{M} = \frac{3}{2} \frac{pV}{N_0} \frac{\mu}{M} = \frac{3}{2} \times \frac{4.0 \times 10^4 \times 2 \times 10^{-3}}{6.022 \times 10^{23}} \times \frac{2.0 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}} = 1.99 \times 10^{-22} (\text{J})$$

总平动动能为

$$E_{\text{平动}} = \frac{\mu}{M} N_0 \bar{\varepsilon} = \frac{2.0 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}} \times 6.022 \times 10^{23} \times 1.99 \times 10^{-22} = 1.20 \times 10^2 (\text{J})$$

4-3 体积为 $1.0\times 10\text{m}^2$ 的容器中含有 1.03×10^{23} 氢分子,如果其中的压强为 $1.013\times 10^5\text{Pa}$ 。

求气体的温度和分子的方均根速率。

解 氢气的摩尔数为 $\frac{1.03 \times 10^{23}}{N_0}$ ，根据理想气体的状态方程得

$$T = \frac{N_0}{1.03 \times 10^{23}} \frac{pV}{R} = \frac{6.022 \times 10^{23}}{1.03 \times 10^{23}} \times \frac{1.013 \times 10^5 \times 1.0 \times 10^{-3}}{8.31} = 71.27(K)$$

氢分子的方均根速率为

$$\sqrt{v_{H_2}^2} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 71.27}{2.0 \times 10^{-3}}} = 9.43 \times 10^2 (m \cdot s^{-1})$$

4-4 在 300K 时，1mol 氢气分子的总平动动能、总转动动能和气体的热力学能各是多少？

解 对 1mol 气体分子有

$$E_{\text{平}} = \frac{3}{2} RT = \frac{3}{2} \times 8.31 \times 300 = 3.74 \times 10^3 (J)$$

$$E_{\text{转}} = \frac{2}{2} RT = \frac{2}{2} \times 8.31 \times 300 = 2.49 \times 10^3 (J)$$

$$E_{\text{总}} = E_{\text{平}} + E_{\text{转}} = 6.23 \times 10^3 (J)$$

4-5 (1) 当氧气压强为 $2.026 \times 10^5 Pa$ ，体积为 $3 \times 10^{-3} m^3$ 时，所有氧气分子的热力学能是

多少？(2) 当温度为 300K 时， $4 \times 10^{-3} kg$ 的氧气的热力学能时多少？

解 (1) 质量为 M 的理想气体的热力学能

$$E = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} RT$$

根据理想气体的状态方程

$$pV = \frac{M}{\mu} RT$$

故

$$E = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} RT = \frac{i}{2} pV$$

对于氧气分子， $i = 5$ ，所以

$$E = \frac{i}{2} pV = \frac{5}{2} \times 2.026 \times 10^5 \times 3 \times 10^{-3} = 1.52 \times 10^3 (J)$$

(2) 当温度为 300K 时， $4 \times 10^{-3} kg$ 的氧气的热力学能

$$E = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} RT = \frac{4}{32} \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times 300 = 7.8 \times 10^2 (J)$$

4-6 储有氧气的容器以速度 $v = 100 m \cdot s^{-1}$ 运动，假设该容器突然停止，全部定向运动的动能都变为气体分子热运动的动能，问容器中氧气的温度将会上升多少？

解 容器突然停止时, 容器中分子的定向机械运动动能 $\frac{1}{2}(Nm)v^2$ 经过分子与器壁的碰撞和分子之间的相互碰撞而转变为热力学能的增量 $\Delta\left(N\frac{i}{2}kT\right)$

对于氧气分子, $i=5$, 所以

$$\frac{1}{2}(Nm)v^2 = N\left(\frac{5}{2}k\Delta T\right)$$

$$\Delta T = \frac{mv^2}{5k} = \frac{mN_0}{R} \frac{v^2}{5} = \frac{\mu_{O_2}}{R} \frac{v^2}{5} = \frac{32 \times 10^{-3} \times 100^2}{5 \times 8.31} = 7.7(K)$$

4-7 $2 \times 10^{-2} kg$ 的气体放在容积为 $3 \times 10^{-2} m^3$ 的容器中, 容器内气体的压强为 $0.0506 \times 10^5 Pa$ 。求气体分子的最概然速率。

解 由理想气体的状态方程 $pV = \frac{M}{\mu}RT$ 可得

$$\frac{RT}{\mu} = \frac{pV}{M}$$

气体分子的最概然速率为

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2pV}{M}} = \sqrt{\frac{2 \times 0.0506 \times 10^5 \times 3 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-2}}} = 389(m \cdot s^{-1})$$

4-8 温度为 273K, 压强为 $1.013 \times 10^5 Pa$ 时, 某种气体的密度为 $1.25 \times 10^{-2} kg \cdot m^{-3}$ 。求:(1) 气体的摩尔质量, 并指出时哪种气体; (2) 气体分子的方均根速率。

解 (1) 由理想气体的状态方程 $pV = \frac{M}{\mu}RT$ 得

$$\mu = \frac{M}{V} \frac{RT}{p} = 1.25 \times \frac{8.31 \times 273}{1.013 \times 10^5} = 28 \times 10^{-3} (kg)$$

该气体为氮气 (N_2) 或一氧化碳 (CO)。

(2) 气体分子的方均根速率为

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 273}{28 \times 10^{-3}}} = 4.93 \times 10^2 (m \cdot s^{-1})$$

4-9 证明气体分子的最概然速率为 $v_p = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$ 。

证明 气体分子的速率分布曲线的极大值所对应的速率为最该然速率。
有数学知

$$\left. \frac{df(v)}{dv} \right|_{v_p} = 0$$

气体分子的速率分布函数的数学式为

$$f(v) = \frac{dN}{Ndv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$

代入上式得

$$\begin{aligned} \left. \frac{df(v)}{dv} \right|_{v_0=v_p} &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \left(2ve^{-\frac{mv^2}{2kT}} - \frac{m}{2kT} (2v)v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \right) \bigg|_{v=v_p} \\ &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} 2ve^{-\frac{mv^2}{2kT}} \left(1 - \frac{mv^2}{2kT} \right) \bigg|_{v=v_p} = 0 \end{aligned}$$

所以 $1 - \frac{mv^2}{2kT} = 0$

即 $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$

由于气体的摩尔质量 $\mu = mN_0$ ，摩尔气体常量 $R = N_0 k$ ，故上式亦可写成为

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

4-10 质量为 $6.2 \times 10^{-14} \text{ g}$ 的粒子悬浮于 27°C 的液体中。观测到它的方均根速率为 $1.40 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。(1) 计算阿伏伽德罗常数；(2) 设粒子遵守麦克斯韦速率分布律，求该粒子的平均速率。

解 (1) 因为 $\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \frac{R}{N_0} T$

所以

$$N_0 = \frac{3RT}{m \overline{v^2}} = \frac{3 \times 8.31 \times 300}{6.2 \times 10^{-14} \times 10^{-3} \times (1.04 \times 10^{-2})^2} = 6.15 \times 10^{23} (\text{mol}^{-1})$$

(2) 由麦克斯韦分布率求得分子的平均速率为

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300}{\pi \times 6.2 \times 10^{-17}}} = 1.30 \times 10^{-2} (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

4-12 在压强为 $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ 下，氮气分子的平均自由程为 $6.0 \times 10^{-8} \text{ m}$ ，当温度不变时，在多大的压强下，其平均自由程为 $1.0 \times 10^{-3} \text{ m}$ 。

解 因为
$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{Z}} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

$$p = nkT$$

所以
$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

从上式可以看出，当温度保持不变时， $\bar{\lambda} \propto \frac{1}{p}$

故
$$\frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$p_2 = \frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} p_1 = \frac{6.0 \times 10^{-8} \times 1.01 \times 10^5}{1.0 \times 10^{-3}} = 6.06 (\text{Pa})$$

4-13 目前实验室获得的极限真空约为 $1.33 \times 10^{-11} \text{ Pa}$ ，这与距地球表面 $1.0 \times 10^4 \text{ km}$ 处的压强大致相同，试求在 27°C 时单位体积中的分子数及分子的平均自由程。（设气体分子的有效直径为 $d = 3.0 \times 10^{-8} \text{ cm}$ ）

解 由公式 $p = nkT$ 得

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{1.33 \times 10^{-11}}{1.38 \times 10^{-23} \times (273 + 27)} = 3.21 \times 10^9 (\text{m}^{-3})$$

分子的平均自由程为

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times (273 + 27)}{\sqrt{2}\pi \times (3.0 \times 10^{-10})^2 \times 1.33 \times 10^{-11}} = 7.78 \times 10^8 (\text{m})$$

4-14 若氖气分子的有效直径为 $d = 2.59 \times 10^{-10} \text{ m}$ ，问在温度为 500 K ，压强为 $1.0 \times 10^2 \text{ Pa}$ 时，氖分子 1s 内的平均碰撞次数为多少？

解 因为 $\bar{Z} = \sqrt{2}\pi d^2 n \bar{v}$

$$p = nkT, \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$$

所以

$$\begin{aligned}\bar{Z} &= \sqrt{2}\pi d^2 \left(\frac{p}{kT} \right) \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \sqrt{2} \times 3.14 \times (2.59 \times 10^{-10})^2 \\ &\times \left(\frac{1.0 \times 10^2}{1.38 \times 10^{-23} \times 500} \right) \times \sqrt{\frac{8 \times 8.31 \times 500}{3.14 \times 20 \times 10^{-3}}} = 3.1 \times 10^6 (s^{-1})\end{aligned}$$

习题精解

5-1 1mol 理想气体, 例如氧气, 有状态 A (p_1, V_1) 在图 5.2 上 $p-V$ 沿一条直线变到状态 B (p_2, V_2), 该气体的热力学能的增量是多少?

解 理想气体的热力学能 $E = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} RT$

氧气为双原子分子 $i = 5$

氧气的摩尔数为 $\frac{M}{\mu} = 1$

$$\Delta E = E = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1)$$

5-2 如图 5.3 所示, 一定质量的理想气体, 沿图中斜向下的直线由状态 A 变化到状态 B 初态时压强为 $4.0 \times 10^5 \text{ Pa}$, 体积为 $1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$, 末态的压强为 $2.0 \times 10^5 \text{ Pa}$, 体积为 $3.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$, 求此过程中气体对外所做的功。

解 理想气体做功的表达式为 $W = \int p dV$, 其数值等于 $p-V$ 图中过程曲线下所对应的面积

$$W = \frac{1}{2}(p_A + p_B)(V_B - V_A) = \frac{1}{2} \times (2.0 + 4.0) \times 10^5 \times (3.0 - 1.0) \times 10^{-3} = 6.0 \times 10^2 \text{ (J)}$$

5-3 如图 5.4 所示, 系统从状态 A 沿 ACB 变化到状态 B, 有 334J 的热量传递给系统, 而系统对外做功为 126J.

- (1) 若系统从状态 A 沿 ADB 变化到状态 B 是, 系统做的功 42J, 问由多少热量传递给系统。
- (2) 当系统从状态 B 沿曲线 BEA 返回到状态 A 时, 外界对系统做功为 84J, 问系统是吸热还是放热? 传递热量多少?

(3) 若 $E_D - E_A = 167 \text{ J}$, 求系统沿 AD 及 DB 变化时, 各吸收多少热量?

解 (1) 对于过程 ACB

$$E_B - E_A = Q_{ACB} - W_{ACB} = 334 - 126 = 208 \text{ (J)}$$

对于过程 ADB 过程

$$Q_{ADB} = (E_B - E_A) + W_{ADB} = 208 + 42 = 250 \text{ (J)}$$

(2) 对于过程 BEA

$$Q = (E_A - E_B) + W_{CEAB} = -208 - 84 = -292 \text{ (J)}$$

负号表示放热。

(3) 对于过程 AD

$$Q_{AD} = E_D - E_A + W_{ADB} = 167 + 42 = 209(J)$$

对于过程 DB 过程

$$Q_{DB} = (E_B - E_A) - (E_D - E_A) = 208 - 167 = 41(J)$$

5-4 将压强为 $1.013 \times 10^5 Pa$ ，体积为 $1 \times 10^{-3} m^3$ 的氧气，自 $0^\circ C$ 加热到 $160^\circ C$ ，问：(1)

当压强不变时，需要多少热量?(2) 当体积不变时，需要多少热量?(3) 在等压和等体过程中各做多少功?

解 氧气的摩尔数为

$$n = \frac{m}{\mu} = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{1.013 \times 10^5 \times 1 \times 10^{-3}}{8.31 \times 273} = 4.46 \times 10^{-2} (mol)$$

氧气为双原子分子， $i = 5$

$$C_V = \frac{i}{2} R = \frac{5}{2} \times 8.31 = 20.8 (J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1})$$

$$C_p = \left(\frac{i}{2} + 1 \right) R = \frac{7}{2} \times 8.31 = 29.1 (J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1})$$

(1) 当压强不变时，系统所吸热为

$$Q_p = \int p dV + \Delta E = n C_p (T_2 - T_1) = 4.46 \times 10^{-2} \times 29.1 \times (433 - 273) = 2.08 \times 10^2 (J)$$

(2) 体积不变时，系统所吸热为

$$Q_V = \Delta E = n C_V (T_2 - T_1) = 4.46 \times 10^{-2} \times 20.8 \times (433 - 273) = 1.48 \times 10^2 (J)$$

(3) 在等压过程中所做功为

$$W_p = \int p dV = \int_{T_1}^{T_2} n R dT = 4.46 \times 10^{-2} \times 8.31 \times (433 - 273) = 59.3 (J)$$

在等体积过程中，气体体积不变，故所做的功为零。

说明：功的值亦可用热力学第一定律 $Q = \Delta E + W$ 来求

$$\Delta E = n C_V (T_2 - T_1) = 4.46 \times 10^{-2} \times 20.8 \times (433 - 273) = 1.48 \times 10^2 (J)$$

$$W_p = Q_p - \Delta E = 2.08 \times 10^2 - 1.48 \times 10^2 = 59.3 (J)$$

$$W_V = Q_V - \Delta E = 1.48 \times 10^2 - 1.48 \times 10^2 = 0$$

5-5 如图 5.5 所示，1mol 的氢气，在压强为 $1.013 \times 10^5 Pa$ ，温度为 $20^\circ C$ 时，体积为 V_0 ，

现通过以下两种过程使其达到同一状态：(1) 保持体积不变，加热使其温度升高到 $80^\circ C$ ，

然后令其做等温膨胀，体积变为 $2V_0$ ；(2) 先使其作等温膨胀至体积为 $2V_0$ ，然后保持体积

不变，加热使其温度升高到 $80^\circ C$ ，试分析计算以上两过程中，气体吸收的热量，对外所做的功和热力学能的增量。

解 氢气的等体积摩尔热容为 $C_V = \frac{5}{2}R$, 在 A-B 等提过程中, 气体不做功, 热力学能增量为 ΔE_1

$$\Delta E_1 = C_V \Delta T = \frac{5}{2} R \Delta T = \frac{5}{2} \times 8.31 \times 60 = 1.25 \times 10^3 (J)$$

在 B-C 等温过程中热力学能不变, 氢气的体积从 V_0 变化到 $2V_0$, 气体对外所做的功为

$$W_1 = RT \ln \frac{2V_0}{V_0} = 8.31 \times 353 \times \ln 2 = 2.03 \times 10^3 (J)$$

在 A-B-C 过程中, 气体吸收热量为

$$Q_{ABC} = \Delta E_1 + W_1 = 1.25 \times 10^3 + 2.03 \times 10^3 = 3.28 \times 10^3 (J)$$

(2) 在 A-D 等温过程中, 热力学能不变, 气体对外做功为 W_2

$$W_2 = RT_0 \ln \frac{2V_0}{V_0} = 8.31 \times 293 \times \ln 2 = 1.69 \times 10^3 (J)$$

在 D-C 等体吸热的过程中气体不做功, 热力学能增量为 ΔE_2

$$\Delta E_2 = C_V \Delta T = \frac{5}{2} R \Delta T = \frac{5}{2} \times 8.31 \times 60 = 1.25 \times 10^3 (J)$$

在 A-D-C 过程中, 气体吸收热量为 Q_{ADC}

$$Q_{ADC} = Q_{ABC} = \Delta E_2 + W_2 = 1.25 \times 10^3 + 1.69 \times 10^3 = 2.94 \times 10^3 (J)$$

5-6 如图 5.6 所示, 质量为 $6.4 \times 10^{-2} kg$ 的氧气, 在温度为 $27^\circ C$, 体积为 $3 \times 10^{-3} m^3$ 。计

算下列各过程中气体所做的功(1)气体绝热膨胀至体积为 $1.5 \times 10^{-2} m^3$; (2) 气体等温膨胀至体积为 $1.5 \times 10^{-2} m^3$, 然后再等体积冷却, 直到温度等于绝热膨胀后达到最后温度为止。并解释这两种过程中做功不同的原因。

解 (1) 绝热过程中, 氧气的等体摩尔热容为 $C_V = \frac{5}{2}R$, 比热容比为 $\gamma = 1.40$ 。

有绝热方程 $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ 得

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}, Q = 0$$

$$W_1 = -\Delta E = C_V(T_1 - T_2) = C_V T_1 \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{5}{2} \times 8.31 \times 300 \times \left[1 - \left(\frac{2 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-3}} \right)^{1.40-1} \right] = 3.75 \times 10^3 (J)$$

(2) 等温过程中氧气的体积由 V_1 膨胀到 V_2 时所做的功为

$$W_2 = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = 8.31 \times 300 \times \ln \frac{20 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-3}} = 5.74 \times 10^3 (J)$$

5-7 有 1 摩尔单原子理想气体做如图 5.7 所示的循环工程, 求气体在循环过程中吸收的净热量和对外所做的净功, 并求循环效率。

解 气体经过循环所做的净功 W 为图 1-2-3-4-1 线所包围的面积, 即

$$W = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = (2.026 - 1.013) \times 10^5 \times (3.36 - 2.24) \times 10^{-3} = 1.13 \times 10^2 (J)$$

根据理想气体的状态方程 $pV = \frac{M}{\mu} RT$ 得

$$T_1 = \frac{M}{\mu} \frac{p_1 V_1}{R} = 1 \times \frac{1.013 \times 10^5 \times 2.24 \times 10^{-3}}{8.31} = 27.3 (K)$$

$$T_2 = \frac{M}{\mu} \frac{p_2 V_2}{R} = 54.6 (K)$$

$$T_3 = \frac{M}{\mu} \frac{p_3 V_3}{R} = 81.9 (K)$$

$$T_4 = \frac{M}{\mu} \frac{p_4 V_4}{R} = 41.0 (K)$$

在等体过程 1-2, 等压过程 2-3 中, 气体所吸热量 Q_{12} 、 Q_{23} 分别为

$$Q_{12} = C_V(T_2 - T_1) = \frac{3}{2} \times 8.31 \times (54.6 - 27.3) = 3.40 \times 10^2 (J)$$

$$Q_{23} = C_p(T_3 - T_2) = \frac{5}{2} \times 8.31 \times (81.9 - 54.6) = 5.67 \times 10^2 (J)$$

在等体过程 3-4, 等压过程 4-1 中, 气体所放热量 Q_{34} 、 Q_{41} 分别为

$$Q_{34} = C_V(T_4 - T_3) = \frac{3}{2} \times 8.31 \times (41.0 - 81.9) = -5.10 \times 10^2 (J)$$

$$Q_{41} = C_p(T_1 - T_4) = \frac{5}{2} \times 8.31 \times (27.3 - 41.0) = -2.85 \times 10^2 (J)$$

气体经历一个循环所吸收的热量之和为

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = 9.07 \times 10^2 (J)$$

气体在此循环中所放出的热量之和为

$$Q_2 = |Q_{34}| + |Q_{41}| = 7.95 \times 10^2 (J)$$

式中 Q_2 是绝对值。

气体在此循环过程中吸收的净热量为

$$Q = Q_1 - Q_2 = 1.12 \times 10^2 (J)$$

此循环的效率为

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{7.95 \times 10^2}{9.08 \times 10^2} = 12.5\%$$

5-8 一卡诺热机的低温热源的温度为 7 摄氏度，效率为 40%，若要将其效率提高到 50%，问高温热源的温度应提高多少？

解 设高温热源的温度分别为 T_1 和 T_1' ，低温热源的温度为 T_2 ，则有

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \eta' = 1 - \frac{T_2}{T_1'}$$

上式变形得

$$T_1 = \frac{T_2}{1 - \eta}, T_1' = \frac{T_2}{1 - \eta'}$$

高温热源温度需提高的温度为

$$\Delta T = T_1' - T_1 = \frac{T_2}{1 - \eta'} - \frac{T_2}{1 - \eta} = \frac{280}{1 - 0.5} - \frac{280}{1 - 0.4} = 93.3 (K)$$

5-9 汽油机可近似地看成如图 5.8 所示的理想循环，这个循环也做奥托循环，其中 BC 和 DE 是绝热过程，试证明：

(1) 此循环的效率为 $\eta = 1 - \frac{T_E - T_B}{T_D - T_C}$ ，式中 T_B 、 T_C 、 T_D 、 T_E ，分别为 工作物质在状态 B、C、D、E 的温度；

也可以表示为 $\eta = 1 - \left(\frac{V_C}{V_B} \right)^{\gamma-1}$

(2) 若工作物质的比热容比为 r ，在状态 C、D 和 E、B 的体积分别为 V_C 、 V_B ，则上述效率

证明 (1) 该循环尽在 CD 过程中吸热，EB 过程中放热，则热机效率为

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{EB}|}{Q_{CD}} = 1 - \frac{\frac{m}{\mu} C_V (T_E - T_B)}{\frac{m}{\mu} C_V (T_D - T_C)} = 1 - \frac{T_E - T_B}{T_D - T_C} \quad (a)$$

(2) 在过程 CD、DE 中，根据绝热方程 $TV^{\gamma-1} = C$ 有

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$$

$$T_E V_E^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}$$

由以上二式可得

$$\frac{T_E - T_B}{T_D - T_C} = \left(\frac{V_C}{V_B} \right)^{\gamma-1} \quad (\text{b})$$

把(b)代入(a)得

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_C}{V_B} \right)^{\gamma-1}$$

5-10 设有一理想气体为工作物质的热机，其循环如图 5.9 所示，试证明其效率为

$$\eta = 1 - \gamma \frac{\left(\frac{V_1}{V_2} \right) - 1}{\left(\frac{p_1}{p_2} \right) - 1}$$

证明 该热机循环效率为

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_{BC}|}{Q_{CA}}$$

其中

$$Q_{BC} = \frac{m}{\mu} C_p (T_C - T_B)$$

$$Q_{AC} = \frac{m}{\mu} C_v (T_A - T_C)$$

所以

$$\eta = 1 - \gamma \frac{|T_C - T_B|}{T_A - T_C} = 1 - \gamma \frac{\frac{T_B}{T_C} - 1}{\frac{T_A}{T_C} - 1}$$

在等压过程 BC 中和等体过程 CA 中分别有 $\frac{T_B}{V_1} = \frac{T_C}{V_2}$, $\frac{T_A}{p_1} = \frac{T_C}{p_2}$, 代入上式得

$$\eta = 1 - \gamma \frac{\left(\frac{V_1}{V_2} \right) - 1}{\left(\frac{p_1}{p_2} \right) - 1}$$

证毕。

习题解析

6-1 在坐标原点及 $(\sqrt{3}, 0)$ 点分别放置电量 $Q_1 = -2.0 \times 10^{-6} C$ 及 $Q_2 = 1.0 \times 10^{-6} C$ 的点电荷, 求 $P(\sqrt{3}, -1)$ 点处的场强。

解 如图 6.4 所示, 点电荷 Q_1 和 Q_2 在 P 产生的场强分别为

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r_1^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1}, \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r_2^2} \frac{\vec{r}_2}{r_2}$$

而 $\vec{r}_1 = \sqrt{3}\vec{i} - \vec{j}, \vec{r}_2 = -\vec{j}, r_1 = 2, r_2 = 1$, 所以

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{总}} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r_1^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r_2^2} \frac{\vec{r}_2}{r_2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-2.0 \times 10^{-6}}{2^2} \frac{\sqrt{3}\vec{i} - \vec{j}}{2} + \frac{1.0 \times 10^{-6}}{1^2} \frac{-\vec{j}}{1} \right) \\ &\approx -(3.9\vec{i} + 6.8\vec{j}) \times 10^3 (N \cdot C^{-1}) \end{aligned}$$

6-2 长为 $l = 15cm$ 的直导线 AB 上, 设想均匀地分布着线密度为 $\lambda = 5.00 \times 10^{-9} C \cdot m^{-1}$, 的正电荷, 如图 6.5 所示, 求:

- (1) 在导线的延长线上与 B 端相距 $d_1 = 5.0cm$ 处的 P 点的场强;
- (2) 在导线的垂直平分线上与导线中点相距 $d_2 = 5.0cm$ 处的 Q 点的场强。

解 (1) 如图 6.5 (a) 所示, 以 AB 中点为坐标原点, 从 A 到 B 的方向为 x 轴的正方向。在导线 AB 上坐标为 x 处, 取一线元 dx , 其上电荷为

$$dq = \lambda dx$$

它在 P 点产生的场强大小为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{\left(\frac{l}{2} + d_1 - x\right)^2}$$

方向沿 x 轴正方向。导线 AB 上所有线元在 P 点产生的电场的方向相同, 因此 P 点的场强大小为

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{\left(\frac{l}{2} + d_1 - x\right)^2} \bigg|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{l - d_1} \right) \\ &= 5.00 \times 10^{-9} \times 9 \times 10^9 \times \left(\frac{1}{5 \times 10^{-2}} - \frac{1}{20 \times 10^{-2}} \right) = 6.75 \times 10^2 (V \cdot m^{-1}) \end{aligned}$$

方向沿 x 轴正方向。

(2) 如图 6.5 (b) 所示, 以 AB 中点为坐标原点, 从 A 到 B 的方向为 x 轴正方向, 垂直于 AB 的轴为 y 轴, 在导线 AB 上坐标为 x 处, 取一线元 dx, 其上的电荷为

$$dq = \lambda dx$$

它在 Q 点产生的电场的场强大小为

$$dE_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{d_2^2 + x^2}$$

方向如图 6.5 (b) 所示。

在导线 AB 上坐标为 -x 处取另一线元 dx, 其上电荷为

$$dq' = \lambda dx$$

它在 Q 点产生的电场场强大小为

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{d_2^2 + x^2}$$

方向与坐标 x 处电荷元在 Q 点产生的电场方向相对与 y 轴对称, 因此

$$dE_{1x} + dE_{2x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{d_2^2 + x^2} \sin \theta - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{d_2^2 + x^2} \sin \theta = 0$$

dE_1 与 dE_2 的合场强 dE 的大小为

$$\begin{aligned} dE &= dE_{1y} + dE_{2y} = 2dE_1 \sin \theta \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{d_2^2 + x^2} \frac{d^2}{\sqrt{d_2^2 + x^2}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(d_2^2 + x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

方向沿 y 轴正方向, 因此 Q 点的场强的大小为

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(d_2^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 d_2} \frac{x}{(d_2^2 + x^2)^{1/2}} \Bigg|_0^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d_2} \frac{x}{\left(d_2^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{1/2}} \\ &= \frac{9.00 \times 10^9 \times 5.00 \times 10^{-9} \times 0.15}{0.05 \times \left(\frac{0.15^2}{4} + 0.05^2\right)} = 1.50 \times 10^3 (V \cdot m^{-1}) \end{aligned}$$

方向沿 y 轴正方向。

6-3 一根玻璃棒被弯成半径为 R 的半圆形, 其上电荷均匀分布, 总电量为 q, 求半圆中心 O 点的场强。

解 建立如图 6.6 所示的坐标系, 在弧线上取线元 dl 其上电荷为 $dq = \frac{q}{\pi R} dl$, 它在 Q 点处产生的场强

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \frac{(-\vec{R})}{R}$$

由于半圆形上电荷对 y 轴呈对称性分布，电场分布也对 y 轴呈对称性，所以

$$E_x = 0$$

$$E_y = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin\theta dq = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin\theta \frac{q}{\pi R} R d\theta = -\frac{Q}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2}$$

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} = -\frac{Q}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2} \vec{j}$$

6-4 一根细有机玻璃棒被弯成半径为 R 的半圆形，上半截均匀带有正电荷，电荷线密度为 λ ；下半截均匀带有负电荷线密度为 $-\lambda$ ，如图 6.7 所示。求半圆中心 O 点的场强。

解 建立如图 6.7 所示的坐标系，根据电荷分布的对称性，O 点的场强沿 y 轴方向正方向，任意电荷元 dq 在 O 点产生的场强大小为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2}$$

此场强在 y 轴方向的分量为

$$dE_y = dE \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \cos\theta d\theta$$

半圆形上半部分和下半部分在 O 点产生的场强，在 x 轴方向合场强为零，在 y 轴方向分量大小相等，方向相同。因此

$$E = E_y = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

方向沿 y 轴的正方向。

6-5 (1) 一半径为 R 的带电球体，其上电荷分布的体密度为一常数 ρ ，试求此点球体内、外的场强分布；

(2) 若 (1) 中带电球体上点电荷分布的体密度为 $\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$ ，其中为一常数 ρ_0 ，r 为球上

任意一点到球心的距离，试求此带点球体内、外的场强分布。

解 (1) 当 $r < R$ 时，建立如图 6.8 (a) 所示的高斯面，根据高斯面定理

$$\oiint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

式中 $q = \iiint_V \rho dV = \rho \iiint_V dV = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$ ，所以

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

当 $r > R$ 时，建立如图 6.8 (b) 图所示的高斯面，根据高斯面定理

$$\oiint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

式中 $q = \iiint_V \rho dV = \rho \iiint_V dV = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$, 所以

$$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

(2) 当 $r < R$ 时, 建立如图 6.8 (a) 所示的高斯面, 根据高斯面定理

$$\oiint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

式中 $q = \iiint_V \rho dV = \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) 4\pi r^2 dr = \frac{\rho_0 \pi r^3}{3\varepsilon_0} \left(4 - \frac{3r}{R}\right)$, 所以

$$E = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \left(1 - \frac{3r}{4R}\right)$$

当 $r > R$ 时, 建立如图 6.8 (b) 所示的高斯面, 根据高斯面定理

$$\oiint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

式中 $q = \iiint_V \rho dV = \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) 4\pi r^2 dr = \frac{\rho_0 \pi R^3}{3\varepsilon_0}$, 所以

$$E = \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}$$

6-6 根据量子力学, 正常状态的氢原子可以看成由一个电量为 $+e$ 的点电荷, 以及球对称分

布在其周围的电子云构成。已知电子云的电荷密度为 $\rho = -Ce^{-2r/a_0}$ 其中

$$a_0 = 5.3 \times 10^{-11} \text{ m } C = e / (\pi a_0^3) \text{ 是为使点电}$$

荷总量等于 $-e$ 所需要的常量。试问在半径为 a_0 的球内净电荷是多少? 距核远 a_0 处的电场强度是多大?

解 半径为 a_0 的球内净电荷为

$$q = e + \iiint_V \rho dV = e + \int_0^{a_0} -Ce^{-2r/a_0} 4\pi r^2 dr = 0.667e = 1.08 \times 10^{-19} \text{ (C)}$$

在距核 a_0 远处做半径为 a_0 球形高斯面, 根据高斯面定理

$$\oiint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

所以

$$E = \frac{1}{4\pi a_0^2} \frac{q_0}{\epsilon_0} = 3.46 \times 10^{11} (V \cdot m^{-1})$$

6-7 如图 6.9 所示, 一半径为 R 的均匀带电球体, 电荷体密度为 ρ 。今在球内挖去一半径为 r ($r < R$), 如果带电球体心 O 指向球形空腔球心的均匀带电球体所分别产生的场强和的矢量和。

解 利用补偿法求解, 球形空腔中任意一点的电场强度 E 可看作半径为 R 、体密度为 ρ 的均匀带电点球体和半径为 r 、体密度为 $-\rho$ 的均匀带电球体所分别产生的场强 \vec{E}_1 和 \vec{E}_2 的矢量和。

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho \vec{r}_1}{3\epsilon_0}, \quad \vec{E}_2 = -\frac{\rho \vec{r}_2}{3\epsilon_0}$$

所以

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho \vec{r}_1}{3\epsilon_0} - \frac{\rho \vec{r}_2}{3\epsilon_0} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

而 $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{a}$, 上式可改写为

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{a}$$

6-8 有一对点电荷, 所带电量的大小为 q , 它们间的距离为 $2l$ 。试就下述两种情形求这 2 个点电荷连线中点的场强和电势: (1) 2 个点电荷带同种电荷; (2) 2 个点电荷带异种电荷。

解 (1) 以 2 个点电荷连线中点为原点, 建立如图 6.10 所示的坐标系。

2 个点电荷在原点 O 产生的场强大小相等, 方向相反, 合场强为零。

2 个点电荷在原点 O 电势大小相等, 合电势为

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l}$$

(2) 以 2 个点电荷连线中点为原点, 建立如图 6.10 (b) 所示的坐标系。

2 个点电荷在原点 O 产生的场强大小相等, 方向相同, 合场强为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l^2} (-i) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l^2} (-i) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l^2} (-i)$$

2 个点电荷在原点 O 的合电势为

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{l} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{l}{q} = 0$$

6-9 一均匀带电球壳, 它的面电荷密度为 σ , 半径为 R 。求球壳内、外的电势分布。

解: 利用高斯定理可求得球壳内、外的电场强度大小分布为

$$\begin{cases} 0(r < R) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 4\pi R^2}{r^2}, (r > R) \end{cases}$$

当 $r < R$ 时
$$U_P = \int_r^\infty E \cdot dr = \int_r^R E \cdot dr + \int_R^\infty E \cdot dr = \int_R^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 4\pi R^2}{r^2} dr = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

当 $r > R$ 时
$$U_P = \int_r^\infty E \cdot dr = \int_r^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 4\pi R^2}{r^2} dr = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}$$

6-10 电荷 Q 均匀分布在半径为 R 的球体内, 试证明离球心 r ($r < R$) 处的电势为

$$U = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

解 利用高斯定理求得球体内、外的电场强度大小分别为

$$E = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}, (r > R) \\ \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 r^3}, (r < R) \end{cases}$$

选取无穷远处为零电势, 球内任一点的电势为

$$U = \int_r^\infty E \cdot dr = \int_r^R E \cdot dr + \int_R^\infty E \cdot dr = \int_r^R \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} dr + \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} dr = \frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} \Big|_r^R + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

6-11 如图 6.11 所示, 一均匀带电细棒, 电荷密度为 λ , 棒长为 l , 求途中 P 点处的电势 (P 点到棒的距离为 a)

解 建立如图 6.11 所示的坐标系, 在细棒上任一位置 x 处取一电荷元 $dq, dq = \lambda dx$ 。

则在 P 点处的电势为
$$dU_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

整个细棒在 P 点的电势为

$$U_P = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{\frac{4}{9}l^2 + a^2} + \frac{2}{3}l}{\sqrt{\frac{4}{9}l^2 + a^2} - \frac{2}{3}l}$$

6-12 如图 6.12 所示, 3 块平行金属板 A、B 和 C, 面积都是 20cm^2 , A 和 B 相距 4.0mm , A 和 C 相距 2.0mm , B 和 C 两板都接地, 如果使 A 半带正电, 电量为 $3.0 \times 10^{-7}\text{C}$, 并忽略边缘效应, 试求:

(1) 金属板 B 和 C 上的感应电量；(2) A 板相对于地的电势。

解 设 A 板右侧面电量为 q_1 ，左侧面电量为 q_2 ，则

$$q_1 + q_2 = q \quad (1)$$

B 板上的感应电量为 $-q_1$ ，C 板上的感应电量为 $-q_2$ ，均匀分布于与 A 板相对的侧面上，因此 A,B 两板间的场强及 A,C 两板间的场强分别为

$$E_{AB} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{q_1}{\epsilon_0 S}, E_{AC} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} = \frac{q_2}{\epsilon_0 S}$$

A,B 两板间及 A,C 两板间的电势差分别为

$$U_{AB} = E_{AB} d_{AB}, U_{AC} = E_{AC} d_{AC}$$

而 $U_{AB} = U_{AC}$ ，所以

$$E_{AB} d_{AB} = E_{AC} d_{AC}$$

连立 (1)、(2)、(3) 式，代入数值 $S = 20\text{cm}^2, d_{AB} = 4.0\text{mm}, d_{AC} = 2.0\text{mm}, q = 3.0 \times 10^{-7}\text{C}$ ，得

$$q_1 = 1.0 \times 10^{-7}\text{C}, q_2 = 2.0 \times 10^{-7}\text{C}$$

相应地，B 板上的感应电量为 $-q_1 = -1.0 \times 10^{-7}\text{C}$ ，C 板上的感应电量为 $-q_2 = -2.0 \times 10^{-7}\text{C}$ ，A 板相对于地的电势为

$$U_A = U_{AB} = E_{AB} d_{AB} = \frac{q_1}{\epsilon_0 S} d_{AB} = \frac{1.0 \times 10^{-7} \times 4.0 \times 10^{-3}}{8.85 \times 10^{-12} \times 20 \times 10^{-4}} = 2.27 \times 10^4 (\text{V})$$

6-13 如图 6.13 所示，2 个均匀带电的金属同心球壳，内球壳（厚度不计）半径为 $R_1 = 5.0\text{cm}$ ，带电荷 $q_1 = 0.6 \times 10^{-8}\text{C}$ ；外球壳内半径 $R_2 = 7.5\text{cm}$ ，外半径 $R_3 = 9.0\text{cm}$ ，所带总电荷 $q_2 = -2.0 \times 10^{-8}\text{C}$ ，求：(1) 距离球心 $3.0\text{cm}, 6.0\text{cm}, 8.0\text{cm}, 10.0\text{cm}$ 各点处的场强和电势；(2) 如果用导线把 2 个球壳连结起来，结果又如何？

解 由于静电感应，外球壳内表面上均匀分布着电荷，球壳外表面上均匀分布着电荷 $q_1 + q_2$ 。

(1) 根据高斯定理，苛求得不同空间的场强分布。

当 $r < R$ 时

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

所以

$$E_1 = 0$$

当 $R_1 < r < R_2$ 时

$$\oint_S E \cdot dS = \frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

所以

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r^2}$$

当 $R_2 < r < R_3$ 时

$$\oint_S E \cdot dS = 0$$

所以

$$E_3 = 0$$

当 $r > R_3$ 时

$$\oint_S E \cdot dS = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0}$$

所以

$$E_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{r^2}$$

利用电势的定义，可求得不同空间的电势分布。

当

$$r < R_1$$

时

,

$$U_1 = \int_r^\infty E \cdot dr = \int_r^{R_1} E_1 \cdot dr + \int_{R_1}^{R_2} E_2 \cdot dr + \int_{R_2}^{R_3} E_3 \cdot dr + \int_{R_3}^\infty E_4 \cdot dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{R_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{R_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{R_3}$$

当

$$R_1 < r < R_2$$

时

$$U_2 = \int_r^\infty E \cdot dr = \int_r^{R_1} E_1 \cdot dr + \int_{R_1}^{R_2} E_2 \cdot dr + \int_{R_2}^\infty E_3 \cdot dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{R_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{R_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{R_3}$$

当 $R_2 < r < R_3$ 时

$$U_3 = \int_r^\infty E \cdot dr = \int_{R_2}^{R_3} E_3 \cdot dr + \int_{R_3}^\infty E_4 \cdot dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{R_3}$$

当 $r > R_3$ 时

$$\int_r^\infty E \cdot dr = \int_{R_3}^\infty E_4 \cdot dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{R_3}$$

代入相应的数值：

$r = 0.03m$ 时

$$E = 0$$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{R_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{R_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{R_3} = 9 \times 10^9 \left(\frac{0.60 \times 10^{-8}}{0.05} - \frac{0.60 \times 10^{-8}}{0.075} + \frac{0.60 \times 10^{-8} - 2.00 \times 10^{-8}}{0.09} \right) = -1.04 \times 10^3 (V)$$

$r = 0.06m$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 0.60 \times 10^{-8}}{(0.06)^2} = 1.5 \times 10^4 (V \cdot m^{-1})$$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{R_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{R_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{R_3} = 9.0 \times 10^9 \times \left(\frac{0.60 \times 10^{-8}}{0.05} - \frac{0.60 \times 10^{-8}}{0.075} + \frac{0.60 \times 10^{-8} - 2.00 \times 10^{-8}}{0.09} \right) = -1.22 \times 10^3 (V)$$

(2) 如果用导线把两个球壳连结起来, 则部分电荷中和 $q_1 + q_2$, 剩余电荷分布于大球壳外表面上。在大球壳的外表面以内的 3 个点, 场强均为零, 在处, 场强人为

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{r^2} = -1.26 \times 10^4 (V \cdot m^{-1})$$

在大球壳外表面以内的 3 个电势相等, 为

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{R_3} = -1.40 \times 10^3 (V)$$

在 处, 电势仍为

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{r} = -1.26 \times 10^3 (V)$$

6-15 在一半径为 a 的长直导线的外面, 套有半径为 b 的同轴导体薄圆筒, 它们之间充以相对电容率为 ϵ_r 的均匀电介质, 设导线和圆筒都均匀带电, 且沿轴线单位长度所带电荷分别为 λ 和 $-\lambda$, 求 (1) 空间个点的场强大小; (2) 导线和圆筒间电势差。

解 (1) 以导线为轴, 在空间不同区域做半径为 r , 高为 l 的圆柱面形高斯面。根据高斯定理:

当 $r < a$ 时,
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

所以
$$E_1 = 0$$

当 $a < r < b$ 时,
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

所以
$$E_2 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

$$E_2 = \frac{\lambda l}{2\pi r l \epsilon_0 \epsilon_r}$$

当 $r > b$ 时,
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

所以
$$E_3 = 0$$

(2) 导线和圆筒间电势差

$$U = \int_a^b E_2 \cdot dS = \int_a^b \frac{\lambda l}{2\pi r l \epsilon_0 \epsilon_r} \cdot dr = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0 \epsilon_r} \ln \frac{a}{b}$$

6-16 一空气平行板电容器的电容 $C = 1.0 pF$, 充电到电量为 $Q = 1.0 \times 10^{-6} C$ 后, 将电源切断。(1) 求极板间的电势差和电场能量。(2) 两极板拉开, 使距离的 2 倍, 试计算拉开前后电场能量的

变化，并解释其原因。

解 (1) 由电容器的电容定义式

$$C = \frac{Q}{U}$$

可得

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{1.0 \times 10^{-6}}{1.0 \times 10^{-12}} = 1.0 \times 10^6 (V)$$

电场能量

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(1.0 \times 10^{-6})^2}{1.0 \times 10^{-12}} = 0.5 (J)$$

(2) 平行板电容器的电容

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

而，所以

$$C' = \frac{\epsilon_0 S}{d'} = \frac{1}{2} C$$

拉开前后电场能量的改变

$$\Delta W_e = W_e' - W_e = 0.5 (J)$$

电场能量发生改变的原因是，将电容器的两极板拉开的过程中，由于极板上的电荷保持不变，极板间的电场强度也不变，但电场所占的空间增大，总的电场能量也相应地增加，根据功能原理，说增加的电场能量应等于拉开过程中外力克服两极板间的静电力所做的功。

6-17 在电容率为 ϵ 的无限大均匀电介质中，有一半径为 R 的导体球带电量 Q 。求电场的能量。

解 在导体球上的电荷均匀分布在其表面，球内无电场，球外的场强大小为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}$$

取半径从 r 到 $r+dr$ 之间的球壳为体积微元（如图 6.15 所示），体积为，故电场能量为

$$W_e = \iiint_V \frac{1}{2} \epsilon E^2 dV = \int_R^\infty \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon R}$$

6-18 一平行板电容的极板面积为 S ，分别带电量为 $\pm Q$ 的两极板的间距为 d ，若将一厚度为，电容率

为 ϵ 的电介质插入极板间隙。试求：（1）静电能的改变；（2）电场力对电介质所做的功。

解 （1）平行板电容器两极间为真空时，电容器的电容为

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

两极板间插入电介质时，电容器的电容为

$$C' = \frac{\epsilon S}{d}$$

插入电介质前后，静电能的改变为

$$\Delta W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C'} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2 d}{2S} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0} \right)$$

(2) 电场力对电介质所做的功，来源于电容器静电能的减少，即

$$A = -\Delta W_e = -\frac{Q^2 d}{2S} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0} \right)$$

6-19 平行板电容器两极板间（体积为 V ）被相对电容率为 ε_r 的均匀电介质填满，极板上电荷面密度

为 σ ，试计算将电介质从电容器中取出的过程中外力所做的功。

解 平行板间电容两极板间为真空时，电容器的电容为

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

两极板间插入电介质时，静电能的改变为

$$C' = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$$

插入电介质前后，静电能的改变为

$$\Delta W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C'} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{\sigma^2 V}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0} \right)$$

将电介质从电容器中取出过程中外力所做的功

$$A = -\Delta W_e = -\frac{\sigma^2 V}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0} \right)$$

习题精解

7-1 一条无限长直导线在一处弯折成半径为 R 的圆弧,如图 7.6 所示,若已知导线中电流强度为 I ,试利用比奥—萨伐尔定律求:(1)当圆弧为半圆周时,圆心 O 处的磁感应强度;(2)当圆弧为 $1/4$ 圆周时,圆心 O 处的磁感应强度。

解(1)如图 7.6 所示,圆心 O 处的磁感应强度可看作由 3 段载流导线的磁场叠加而成。因为圆心 O 位于直线电流 AB 和 DE 的延长线上,直线电流上的任一电流元在 O 点产生的磁感应强度均为零,所以直线电流 AB 和 DE 段在 O 点不产生磁场。

根据比奥—萨伐尔定律,半圆弧上任一电流元在 O 点产生的磁感应强度为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{R^2}$$

方向垂直纸面向内。半圆弧在 O 点产生的磁感应强度为

$$B = \int_0^{\pi R} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \pi R = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

方向垂直纸面向里。

(2)如图 7.6 (b) 所示,同理,圆心 O 处的磁感应强度可看作由 3 段载流导线的磁场叠加而成。因为圆心 O 位于电流 AB 和 DE 的延长线上,直线电流上的任一电流元在 O 点产生的磁感应强度均为零,所以直线电流 AB 和 DE 段在 O 点不产生磁场。

根据毕奥—萨伐尔定理, $1/4$ 圆弧上任一电流元在 O 点产生的磁感应强度为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{R^2}$$

方向垂直纸面向内, $1/4$ 圆弧电流在 O 点产生的磁感应强度为

$$B = \int_0^{\frac{\pi R}{2}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \frac{\pi R}{2} = \frac{\mu_0 I}{8R}$$

方向垂直纸面向里。

7.2 如图 7.7 所示,有一被折成直角的无限长直导线有 $20A$ 电流, P 点在折线的延长线上,设 a 为,试求 P 点磁感应强度。

解 P 点的磁感应强度可看作由两段载流直导线 AB 和 BC 所产生的磁场叠加而成。 AB 段在 P 点所产生的磁感应强度为零, BC 段在 P 点所产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

式中 $\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = \pi, r_0 = a$ 。所以

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a_0} (\cos \frac{\pi}{2} - \cos \pi) = 4.0 \times 10^{-5} (T)$$

方向垂直纸面向里。

7-3 如图 7.8 所示,用毕奥—萨伐尔定律计算图中 O 点的磁感应强度。

解 圆心 O 处的磁感应强度可看作由 3 段载流导线的磁场叠加而成, AB 段在 P 点所产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

式中 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \frac{\pi}{6}, r_0 = r/2$, 所以

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(\cos 0 - \cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

方向垂直纸面向里。

同理, DE 段在 P 点所产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(\cos \frac{5\pi}{6} - \cos \pi \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

圆弧段在 P 点所产生的磁感应强度为

$$B = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \frac{2\pi}{3} r = \frac{\mu_0 I}{6r}$$

O 点总的磁感应强度为

$$B = B_1 + B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{\mu_0 I}{6r}$$

方向垂直纸面向里。

7-4 如图 7.9 所示, 两根长直导线沿半径方向接到粗细均匀的铁环上的 A、B 两点, 并与很远处的电源相接, 试求环中心 O 点的磁感应强度。

解 因为 O 点在两根长直导线上的延长线上, 所以两根长直导线在 O 点不产生磁场, 设第一段圆弧的长为 l_1 , 电流强度为 I_1 , 电阻为 R_1 , 第二段圆弧长为 l_2 , 电流强度为 I_2 , 电阻为 R_2 , 因为 1、2 两段圆弧两端电压相等, 可得

$$I_1 R_1 = I_2 R_2$$

电阻 $R = \rho \frac{1}{S}$, 而同一铁环的截面积为 S 和电阻率是相同的, 于是有

$$I_1 l_1 = I_2 l_2$$

由于第一段圆弧上的任一线元在 O 点所产生的磁感应强度为

$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 dl}{R^2}$$

方向垂直纸面向里。

第一段圆弧在 O 点所产生的磁感应强度为

$$B_1 = \int_0^{l_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 dl}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 l_1}{R^2}$$

方向垂直纸面向里。

同理, 第二段圆弧在 O 点所产生的磁感应强度为

$$B_2 = \int_0^{l_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 dl}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 l_2}{R^2}$$

方向垂直纸面向外。

铁环在 O 点所产生的总磁感应强度为

$$B = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 l_1}{R^2} - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 l_2}{R^2} = 0$$

7-5 在真空中有两根互相平行的截流长直导线 L_1 和 L_2 ，相距 0.1m，通有方向相反的电流

$I_1 = 20A, I_2 = 10A$ ，如图 7.10 所示，求 L_1, L_2 所决定的平面内位于 L_2 两侧各距 L_2 为 0.05m 的 a, b 两点的磁感应强度为 B。

解 截流长直导线在空间产生磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

长直导线在 a, b 两点产生磁感应强度为

$$B_{1a} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \times 0.05}, B_{1b} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \times 0.15}$$

方向垂直纸面向里

长直导线 L_2 在 a, b 两点产生的磁感应强度为

$$B_{2a} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \times 0.05}, B_{2b} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \times 0.05}$$

长直导线 L_2 在 a 点产生磁感应强度为

$$B_a = B_{1a} + B_{2a} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \times 0.05} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \times 0.05} = 1.2 \times 10^{-4} (T)$$

方向垂直纸面向里

在 b 点产生磁感应强度为

$$B_b = B_{1b} + B_{2b} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \times 0.15} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \times 0.05} = -1.33 \times 10^{-5} (T)$$

方向垂直纸面向外

7-6 如图 7.11 (a) 所示载流长直导线中的电流为 I，求通过矩形面积 CDEF 的磁通量。

解 在矩形平面上取一矩形面元 $dS = ldx$ (如图 7.11 (b)) 截流长直导线的磁场穿过该面

元的磁通量为

$$d\phi_m = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} ldx$$

通过矩形面积的总磁通量为

$$\phi_m = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi x} ldx = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

7-7 一载流无限长直圆筒，内半径为 a，外半径为 b，传到电流为 I，电流沿轴线方向流动，并均匀的分布在管的横截面上，求磁感应强度的分布。

解 建立如图 7.12 所示半径为 r 的安培回路，由电流分布的对称性，L 上各点 B 值相等，方向沿圆的切线，根据安培环路定理有

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \cos \theta dl = B \oint_L dl = B 2\pi r = \mu_0 I'$$

可得

$$B = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r}$$

其中 I' 是通过圆周 L 内部的电流。

当 $r < a$ 时,

$$I' = 0, B = 0$$

当 $a < r < b$ 时,

$$I' = \frac{I(r^2 - a^2)}{b^2 - a^2}, B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}$$

当 $r > b$ 时,

$$I = I', B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

7-8 一根很长的电缆由半径为 R_1 的导体圆柱, 以及内外半径分别为 R_2 和 R_3 的同轴导体圆柱构成。电流 I 从一导体流出, 又从另一导体流回, 电流都沿轴线方向流动, 并均匀分布在其横截面上, 设 r 为到轴线的垂直距离, 试求磁感应强度随 r 的变化。

解 由电流分布具有轴对称性, 可知相应的磁场分布也具有轴对称性, 根据安培环路定理, 有

$$\oint_L B \cdot dl = B \oint_L dl = B 2\pi r = \mu_0 I'$$

可得

$$B = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r}$$

其中是通过圆周 L 内部的电流,

当 $r < R_1$ 时,

$$I' = \frac{I r^2}{R_1^2}, B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R_1^2}$$

当 $R_1 < r < R_2$ 时,

$$I' = I, B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

当 $R_2 < r < R_3$ 时,

$$I' = I - \frac{I(r^2 - R_2^2)}{R_3^2 - R_2^2} = \frac{I(R_3^2 - r^2)}{R_3^2 - R_2^2}, B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

当 $r > R_3$ 时,

$$I' = 0, B = 0$$

7-9 一根很长的同轴电缆, 由一导线圆柱 (半径为 a) 和一同轴的导线圆管 (内、外半径分别为 b 、 c) 构成。使用时, 电流 I 从一导体流出, 从另一导体流回。设电流都是均匀分布在导体的横截面上, 求: (1) 导体圆柱内 ($r < a$); (2) 两导体之间 ($a < r < b$); (3) 导体圆管内 ($b < r < c$); (4) 电缆外 ($r > c$) 各点处磁感应强度的大小。

解 如图 7.13 所示, 由电流分布具有轴对称性可知, 相应的磁场分布也具有轴对称性。根据安培环路定理有

$$\oint_L B dl = B \oint_L dl = B 2\pi r = \mu_0 I'$$

可得

$$B = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r}$$

其中 I' 是通过圆周 L 内部的电流

(1) 当 $r < a$ 时,

$$I' = \frac{I r^2}{a^2}, B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{a^2}$$

(2) 当 $a < r < b$ 时,

$$I' = I, B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

(3) 当 $b < r < c$ 时,
$$I' = I - \frac{I(r^2 - b^2)}{c^2 - b^2} = \frac{I(c^2 - r^2)}{c^2 - b^2}, B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

(4) 当 $r > R_3$ 时,
$$I' = 0, B = 0$$

7-10 一载有电流 $I = 7.0A$ 的硬导线, 转折处为半径为 $r = 0.10m$ 的四分之一圆周 ab 。均匀外磁场的大小为 $B = 1T$, 其方向垂直于导线所在的平面, 如图 7.14 所示, 求圆弧 ab 部分所受的力。

解 在圆弧 ab 上取一电流元 Idl , 此电流元所受安培力为

$$dF = Idl \times B$$

把 dF 沿轴正交分解, 有图 7.14 有

$$dF_x = dF \cos \theta = BI \cos \theta dl$$

$$dF_y = dF \sin \theta = BI \sin \theta dl$$

由于 $dl = R d\theta$, 所以

$$dF_x = BI \cos \theta R d\theta$$

$$dF_y = BI \sin \theta R d\theta$$

因此

$$F_x = \int dF_x = BIR$$

$$F_y = \int dF_y = BIR$$

整个圆弧 ab 所受的安培力为

$$F = F_x i + F_y j = BIRi + BIRj$$

7-11 用铅丝制作成半径为 $R = 0.05m$ 的圆环, 圆环中载有电流 $I = 7A$, 把圆环放在磁场中, 磁场的方向与环面垂直, 磁感应强度的大小为 $1.0T$, 试问圆环静止时, 铅丝内部张力为多少?

解 如图 7.15 所示, 整个圆环所受的合力为零, 圆环静止不动。欲求圆环内部任意一点的张力, 可把圆环沿直径分为左右两部分, 其中左半部分所受的安培力为, 而左半部分又保持静止不动, 则必有

$$BI2R = 2T$$

铅丝内部张力 T 为

$$T = BIR = 0.35(N)$$

7-12 通以电流 I 的导线 $abcd$ 形状如图 7.16 所示, $\overline{ab} = \overline{cd} = l$, bc 弧是半径为 R 的半圆周,

置于磁感应强度为 B 的均匀磁场中, B 的方向垂直纸面向里。求此导线受到的安培力的大小和方向。

解 建立如图 7.16 所示的坐标系。由安培定理得两线段和受力大小相等, 方向相反, 二力合力为零, 导线所受力即为半圆弧所受力。

在 bc 弧上任取一电流元 Idl , 其受力为

$$dF = Idl \times B$$

由对称性可知

$$F_x = \int_0^\pi dF_x = 0$$
$$F_y = \int_0^\pi dF_y = \int_0^\pi BIR \sin \theta d\theta = 2BIR$$

导线所受力 $F = 2BIRj$

7-13 直径 $d = 0.02m$ 的圆形线圈，共 10 匝，通以 $0.1A$ 的电流时，问：（1）它的磁矩是多少？（2）若将该线圈置于 $1.5T$ 的磁场中，它受到的最大磁力矩是多少？

解 （1）载流圆形线圈的磁矩大小为

$$m = NIS = 10 \times 0.1 \times \pi \times \left(\frac{0.02}{2} \right)^2 = 3.1 \times 10^{-4} (A \cdot m^2)$$

（2）线圈置于的磁场中，它受到的最大磁力矩是

$$M_{\max} = mB = 3.1 \times 10^{-4} \times 1.5 = 4.7 \times 10^{-4} (N \cdot m^2)$$

7-14 一电子动能为 $10eV$ ，在垂直于匀强磁场的平面内做圆周运动，已知磁感应强度 $B = 1.0 \times 10^{-4} T$ ，试求电子的轨道半径和回旋周期。

解 电子的轨道半径

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{\sqrt{2mE}}{eB} = \frac{\sqrt{2 \times 9.1093898 \times 10^{-31} \times 10 \times 1.6 \times 10^{-19}}}{1.6 \times 10^{-19} \times 1.0 \times 10^{-4}} = 0.11(m)$$

电子回旋周期

$$T = \frac{2\pi m}{eB} = 3.6 \times 10^{-7} (s)$$

7-15 正电子的质量和电量都与电子相同，但它带的是正电荷，有一个正电子在 $B = 0.10T$ 的均匀磁场中运动，其动能为 $E_k = 2.0 \times 10^3 eV$ ，它的速度 v 与 B 成 60° 角。试求该正电子所做的螺旋线的运动的周期、半径和螺距。

解 将分解为平行和垂直与 B 的分量，有

$$v_\perp = v \sin \theta = \sin 60^\circ \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$$
$$v_\parallel = v \cos \theta = \cos 60^\circ \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$$

回旋周期

$$T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi m}{eB} = 3.6 \times 10^{-10} (s)$$

螺旋线的半径为

$$R = \frac{mv_\perp}{eB} = 1.3 \times 10^{-3} (m)$$

螺旋线的螺距为

$$h = v_{\parallel} T = 4.7 \times 10^{-3} (m)$$

7-16 如图 7.17 所示, 一块长方形半导体样品放在 xy 面上, 其长、宽和厚度依次沿 x, y 和 z 轴的方向, 沿 x 轴方向有电流通过, 在 y 轴方向加有均匀磁场。现测得 $a = 1.0cm, b = 0.35cm, d = 0.10cm, I = 1.0mA, B = 0.30T$ 。在宽度为 $0.35cm$, 两侧的电势差 $U_{AA'} = 6.55mV$ 。(1) 试问这块半导体是正电荷导电 (P 型) 还是负电荷导电 (N 型)?

(2) 试求载流子的浓度。

解 (1) 这块半导体是正电荷导电 (P 型)。

利用霍尔公式可得

$$n = \frac{IB}{qdU_{AA'}} = 2.9 \times 10^{20} (m^{-3})$$

7-17 螺绕环中心周长 $10cm$, 环上均匀密绕线圈 200 匝, 线圈中通有电流 $0.1A$ 。若管内充满相对磁导率 $\mu_r = 4200$ 的均匀磁介质, 则管内的 B 和 H 的大小各是多少?

解 以螺绕环中心为轴, 作半径的圆周。根据磁介质中的安培环路定理, 有

$$\oint_L H \cdot dl = \sum_{i=1}^N I_i = NI$$

所以

$$H = \frac{NI}{2\pi r} = \frac{200 \times 0.1}{0.1} = 200 (A \cdot m^{-1})$$

$$B = \mu H = 4\pi \times 10^{-7} \times 4200 \times 200 = 1.06 (T)$$

7-18 一无限长圆柱形直导线外包一层磁导率为 μ 的圆筒形磁介质, 导线半径为 R_1 , 磁介质的外半径为 R_2 导线内, 有电流 I 通过, 且电流沿导线横截面均匀分布。求磁介质

内外的磁场强度和磁感应强度的分布。

解 以圆柱形直导线中心为轴, 作半径为 r 的圆周。

根据磁介质中的安培环路定理, 有

$$\oint_L H \cdot dl = I'$$

$$\text{当 } r < R_1 \text{ 时, } I' = \frac{r^2}{R_1^2} I, H = \frac{Ir}{2\pi R_1^2}, B = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R_1^2}$$

$$\text{当 } R_1 < r < R_2 \text{ 时, } I' = I, H = \frac{I}{2\pi r}, B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

$$\text{当 } r > R_2 \text{ 时, } I' = I, H = \frac{I}{2\pi r}, B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

习题精解

8-1 一根无限长直导线有交变电流 $i = I_0 \sin \omega t$ ，它旁边有一与它共面的矩形线圈 ABCD，

如图 8.3 所示，长为 l 的 AB 和 CD 两边与直导线平行，它们到直导线的距离分别为 a 和 b ，试求矩形线圈所围面积的磁通量，以及线圈中的感应电动势。

解 建立如图 8.3 所示的坐标系，在矩形平面上取一矩形面元 $dS = ldx$ ，载流长直导线的磁场穿过该面元的磁通量为

$$d\phi_m = B \cdot dS = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} ldx$$

通过矩形面积 CDEF 的总磁通量为

$$\phi_m = \int_a^b \frac{\mu_0 i}{2\pi x} ldx = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

由法拉第电磁感应定律有

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{\mu_0 i l \omega}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \cos \omega t$$

8-2 有一无限长直螺线管，单位长度上线圈的匝数为 n ，在管的中心放置一绕了 N 圈，半径为 r 的圆形小线圈，其轴线与螺线管的轴线平行，设螺线管内电流变化率为 $\frac{dI}{dt}$ ，求小线圈中感应的电动势。

解 无限长直螺线管内部的磁场为

$$B = \mu_0 nI$$

通过 N 匝圆形小线圈的磁通量为

$$\phi_m = NBS = N\mu_0 nI\pi r^2$$

由法拉第电磁感应定律有

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -N\mu_0 n\pi r^2 \frac{dI}{dt}$$

8-3 一面积为 S 的小线圈在一单位长度线圈匝数为 n ，通过电流为 i 的长螺线管内，并与螺线管共轴，若 $i = i_0 \sin \omega t$ ，求小线圈中感生电动势的表达式。

解 通过小线圈的磁通量为

$$\phi_m = BS = \mu_0 niS$$

由法拉第电磁感应定律有

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\mu_0 nS \frac{di}{dt} = -\mu_0 nSi_0 \omega \cos \omega t$$

8-4 如图 8.4 所示，矩形线圈 ABCD 放在 $B = 6.0 \times 10^{-1} T$ 的均匀磁场中，磁场方向与线圈平面的法线方向之间的夹角为 $\alpha = 60^\circ$ ，长为 $0.20m$ 的 AB 边可左右滑动。若令 AB 边以速率 $v = 5.0m \cdot s^{-1}$ 向右运动，试求线圈中感应电动势的大小及感应电流的方向。

解 利用动生电动势公式

$$\mathcal{E} = \int_A^B (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{0.20} 5 \times 0.6 \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - 60^\circ\right) dl = 0.30(V)$$

感应电流的方向从 $A \rightarrow B$.

8-5 如图 8.5 所示, 两段导体 AB 和 CD 的长度均为 10cm , 它们在 B 处相接成角 30° ; 磁场方向垂直于纸面向里, 其大小为 $B = 2.5 \times 10^{-2} T$. 若使导体在均匀磁场中以速率 $v = 1.5\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 运动, 方向与 AB 段平行, 试问 AC 间的电势差是多少? 哪一端的电势高?

解 导体 AB 段与运动方向平行, 不切割磁场线, 没有电动势产生. BC 段产生的动生电动势为

$$\mathcal{E} = \int_B^C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{1.10} 1.5 \times 2.5 \times 10^{-2} \times \cos 60^\circ dl = 1.9 \times 10^{-3} (V)$$

AC 间的电势差是

$$U_{AC} = -\mathcal{E} = -1.9 \times 10^{-3} (V)$$

C 端的电势高。

8-6 长为 l 的一金属棒 ab, 水平放置在均匀磁场 B 中, 如图 8.6 所示, 金属棒可绕 O 点在水平面内以角速度 ω 旋转, O 点离 a 端的距离为 l/k . 试求 a,b 两端的电势差, 并指出哪端电势高 (设 $k > 2$)

解 建立如图 8.6 所示的坐标系, 在 Ob 棒上任一位置 x 处取一微元 dx , 该微元产生的动生电动势为

$$d\mathcal{E} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{x} = -\omega x B dx$$

Ob 棒产生的动生电动势为

$$\mathcal{E}_{Ob} = \int_0^{l-l/k} -\omega x B dx = -\frac{1}{2} \omega B l^2 \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2$$

同理, Oa 棒产生的动生电动势为

$$\mathcal{E}_{Oa} = \int_0^{l/k} -\omega x B dx = -\frac{1}{2} \omega B l^2 \frac{l^2}{k^2}$$

金属棒 a,b 两端的电势差

$$U_{ab} = -\mathcal{E}_{ab} = \mathcal{E}_{Oa} - \mathcal{E}_{Ob} = -\frac{1}{2} \omega B l^2 \frac{l^2}{k^2} - \left(-\frac{1}{2} \omega B l^2 \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2\right) = \frac{1}{2} \omega B l^2 \left(1 - \frac{2}{k}\right)$$

因 $k > 2$, 所以 a 端电势高。

8-7 如图 8.7 所示, 真空中一载有稳恒电流 I 的无限长直导线旁有一半圆形导线回路, 其半径为 r , 回路平面与长直导线垂直, 且半圆形直径 cd 的延长线与长直导线相交, 导线与圆心 O 之间距离为, 无限长直导线的电流方向垂直纸面向内, 当回路以速度垂直纸面向外运动时, 求:

(1) 回路中感应电动势的大小;

(2) 半圆弧导线 cd 中感应电动势的大小。

解 (1) 由于无限长直导线所产生的磁场方向与半圆形导线所在平面平行, 因此当导线回路运动时, 通过它的磁通量不随时间改变, 导线回路中感应电动势 $\varepsilon = 0$ 。

(2) 半圆形导线中的感应电动势与直导线中的感应电动势大小相等, 方向相反, 所以可由直导线计算感应电动势的大小

选取 x 轴如图 8.7 所示, 在 x 处取线元 dx , dx 中产生感应电动势大小为

$$d\varepsilon = (v \times B) \cdot dl$$

$$\text{其中 } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

导线 \overline{cd} 及圆弧 cd 产生感应电动势的大小均为

$$\varepsilon = \int_{l-r}^{l+r} vBdx = \frac{\mu_0 Iv}{2\pi} \int_{l-r}^{l+r} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 Iv}{2\pi} \ln \frac{l+r}{l-r}$$

8-8 在半径 $R = 0.50m$ 的圆柱体内有均匀磁场, 其方向与圆柱体的轴线平行, 且 $dB/dt = 1.0 \times 10^{-2} T \cdot s^{-1}$, 圆柱体外无磁场, 试求离开中心 O 的距离分别为 $0.1m, 0.25m, 0.50m, 1.0m$ 和各点的感生电场的场强。

解 变化的磁场产生感生电场线是以圆柱轴线为圆心的一系列同心圆, 因此有

$$\oint_L E_{\text{感}} \cdot dl = - \iint_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$$

$$\text{而 } \oint_L E_{\text{感}} \cdot dl = E_{\text{感}} 2\pi r, - \iint_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS = - \frac{dB}{dt} \pi r^2$$

$$\begin{aligned} \text{当 } r < R \text{ 时,} \quad E_{\text{感}} 2\pi r &= - \frac{dB}{dt} \pi r^2 \\ E_{\text{感}} &= - \frac{1}{2} r \frac{dB}{dt} \end{aligned}$$

所以 $r = 0.1m$ 时, $E_{\text{感}} = 5.0 \times 10^{-4} V \cdot m^{-1}$; $r = 0.25m$ 时, $E_{\text{感}} = 1.3 \times 10^{-3} V \cdot m^{-1}$

$$\begin{aligned} \text{当 } r > R \text{ 时} \quad E_{\text{感}} 2\pi r &= - \frac{dB}{dt} \pi R^2 \\ E_{\text{感}} &= - \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt} \end{aligned}$$

所以 $r = 0.50m$ 时, $E_{\text{感}} = 2.5 \times 10^{-3} V \cdot m^{-1}$; $r = 1.0m$ 时 $E_{\text{感}} = 1.25 \times 10^{-3} V \cdot m^{-1}$

8-9 如图 8.8 所示, 磁感应强度为 B 的均匀磁场充满在半径为 R 的圆柱体内, 有一长为 l 的金属棒 ab 放在该磁场中, 如果 B 以速率 dB/dt 变化, 试证: 由变化磁场所产生并作用于棒

两端的电动势等于 $\frac{dB}{dt} \frac{1}{2} l \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

证明 方法一 连接 Oa,Ob,设想 Oab 构成闭合回路,由于 Oa,Ob 沿半径方向,与通过该处的感生电场处垂直,所以 Oa,Ob 两段均无电动势,这样由法拉第电磁感应定律求出的闭合回路 Oab 的总电动势就是棒 ab 两端电动势。根据法拉第电磁感应定律

$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon_{Oab} = -S \frac{dB}{dt} = \frac{dB}{dt} \frac{1}{2} l \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

方法二 变化的磁场在圆柱体内产生的感生电场为

$$E_{\text{感}} = -\frac{1}{2} r \frac{dB}{dt}$$

棒 ab 两端的电动势为

$$\varepsilon_{ab} = \int_0^l E_{\text{感}} \cdot dx = \int_0^l E_{\text{感}} \cos \theta dx = \int_0^l -\frac{1}{2} r \frac{dB}{dt} \frac{\sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}}{r} dx = \frac{dB}{dt} \frac{1}{2} l \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

8-10 如图 8.9 所示,两根横截面半径为 a 的平行长直导线,中心相距 d,它们载有大小相等、方向相反的电流,属于同一回路,设导线内部的磁通量可以忽略不计,试证明这样一对导线长为 l 的一段自感为 $L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$ 。

解 两根平行长直导线在它们之间产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi (d-x)}$$

穿过两根导线间长为一段的磁通量为

$$\begin{aligned} \phi_m &= \int_a^{d-a} B \cdot dS = \int_a^{d-a} \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi (d-x)} \right] l dx \\ &= \frac{\mu_0 l I}{\pi} \ln \frac{d-a}{a} \end{aligned}$$

所以,一对长为一段导线的自感为

$$L = \frac{\phi_m}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

8-11 一均匀密绕的环形螺线管,环的平均半径为 R,管的横截面积为 S,环的总匝数为 N,管内充满磁导率为 μ 的磁介质。求此环形螺线管的自感系数 L。

解 当环形螺线管中通有电流 I 时,管中的磁感应强度为

$$B = \mu n I = \frac{\mu I N}{2\pi R}$$

通过环形螺线管的磁链为

$$\psi_m = N \phi_m = \frac{\mu I N^2 S}{2\pi R}$$

则环形螺线管的自感系数为

$$L = \frac{\psi_m}{I} = \frac{\mu N^2 S}{2\pi R}$$

8-12 由两薄圆筒构成的同轴电缆，内筒半径 R_1 ，外筒半径为 R_2 ，两筒间的介质 $\mu_r = 1$ 。设内圆筒和外圆筒中的电流方向相反，而电流强度 I 相等，求长度为 l 的一段同轴电缆所储磁能为多少？

解 有安培环路定理可求得同轴电缆在空间不同区域的磁感应强度为

$$r < R_1 \text{ 时, } B_1 = 0$$

$$R_1 < r < R_2 \text{ 时, } B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$r > R_2 \text{ 时, } B_3 = 0$$

在长为 L ，内径为 r ，外径为 $r + dr$ 的同轴薄圆筒的体积 $dV = 2\pi r l dr$ 中磁场能量为

$$dW_m = \frac{1}{2} \frac{B_2^2}{\mu_0} dV = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi r} dr$$

所以，长度为 l 的一段同轴电缆所储能为

$$W_m = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I^2 r}{4\pi r} dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

8-13 在同时存在电场和磁场的空间区域中，某点 P 的电场强度为 E ，磁感应强度为 B ，此空间区域介质的介电常数 $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ ，磁导率 $\mu \approx \mu_0$ 。求 P 点处电场和磁场的总能量体密度 w 。

解

电场能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

磁场能量密度为

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

总能量密度为

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

8-14 一小圆线圈面积为 $S_1 = 4.0 \text{ cm}^2$ ，由表面绝缘的细导线绕成，其匝数为 $N_1 = 50$ ，把它

放在另一半径 $R_2 = 20 \text{ cm}$ ， $N_2 = 100$ 匝的圆线圈中心，两线圈同轴共面。如果把大线圈在小线圈中产生的磁场看成是均匀的，试求这两个线圈之间的互感；如果大线圈导线中的电流每秒减少 50 A ，试求小线圈中的感应电动势。

解 当大圆形线圈通有 I_2 时, 它在小圆形线圈中心处的磁感应强度大小为

$$B_2 = N_2 \frac{\mu_0 I_2}{2R_2}$$

若把大圆形线圈在小圆形线圈中产生的磁场看成是均匀的, 则通过小圆形线圈的磁链为

$$\psi_m = N_1 B_2 S_1 = N_1 N_2 \frac{\mu_0 I_2}{2R_2} S_1$$

两个线圈之间的互感为

$$M = \frac{\psi_m}{I_2} = \frac{N_1 N_2 \mu_0 S_1}{2R_2} = \frac{50 \times 100 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 4.0 \times 10^{-4}}{2 \times 0.2} = 6.28 \times 10^{-6} (H)$$

如果大线圈导线中的电流每秒减少 50A, 则小线圈中的感应电动势为

$$\varepsilon = -M \frac{di}{dt} = 6.28 \times 10^{-6} \times 50 = 3.14 \times 10^{-4} (V)$$

8-15 一螺线管长为 30cm。由 2500 匝漆包导线均匀密绕而成, 其中铁芯的相对磁导率 $\mu_r = 100$, 当它的导线中通有 2.0A 的电流时, 求螺线管中心处的磁场能量密度。

解 螺线管中的磁感应强度为

$$B = \mu_0 \mu_r n I = \mu_0 \mu_r \frac{N}{l} I$$

螺线管中的磁场能量密度为

$$w_m = \iiint \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} dV = \int_0^R \frac{\mu_0 I^2 r^2}{4\pi^2 R^2} 2\pi r l dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi^2}$$

8-16 一根长直导线载有电流 I , 且 I 均匀地分布在导线的横截面上, 试求在长度为的一段导线内部的磁场能量。

解 有安培环路定理可得长直导线内部的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

在长度为的一段导线内部的磁场能量

$$W_m = \iiint \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} dV = \int_0^R \frac{\mu_0 I^2 r^2}{4\pi^2 R^4} 2\pi r l dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}$$

8-17 一同轴线由很长的直导线和套在它外面的同轴圆筒构成, 它们之间充满了相对磁导率为 $\mu_r = 1$ 的介质, 假定导线的半径为 R_1 , 圆筒的内外半径分别为 R_2 和 R_3 , 电流 I 由圆筒流出, 由直导线流回, 并均匀地分布在它们的横截面上, 试求: (1) 在空间各个范围内的磁能密度表达式; (2) 当 $R_1 = 10mm, R_2 = 4.0mm, R_3 = 5.0mm, I = 10A$ 时, 在每米长度的同轴线中所储存的磁场能量。

解 (1) 有安培环路定理可得在空间各个范围内的磁感应强度为

$$r < R_1 \text{ 时 } B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2} ; \quad R_1 < r < R_2 \text{ 时 } B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$R_2 < r < R_3 \text{ 时 } B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} ; \quad r > R_3 \text{ 时 } B_4 = 0$$

相应地，空间各个范围内的磁能密度为

$$r < R_1 \text{ 时 } w_m = \frac{1}{2} \frac{B_1^2}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R_1^2} ; \quad R_1 < r < R_2 \text{ 时 } w_m = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} ;$$

$$R_2 < r < R_3 \text{ 时 } w_m = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} \left(\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)^2 ; \quad r > R_3 \text{ 时 } w_m = 0。$$

(2) 每米长度的同轴线中所储存的磁场能量为

$$\begin{aligned} W_m &= \iiint w_m dV = \iiint w_{1m} dV + \iiint w_{2m} dV + \iiint w_{3m} dV + \iiint w_{4m} dV = \\ &= \int_0^{R_1} \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R_1^2} 2\pi r dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r dr + \int_{R_2}^{R_3} \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} \left(\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)^2 2\pi r dr + 0 \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_3^4 \ln(R_3/R_2)}{(R_3^2 - R_2^2)^2} - \frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} + \frac{R_3^4 - R_2^4}{4(R_3^2 - R_2^2)^2} \right] = 1.7 \times 10^{-5} (J) \end{aligned}$$

8-18 证明电容 C 的平行板电容器，极板间的位移电流强度 $I_d = C \frac{dU}{dt}$ ， U 是电容器两极板间的电势差。

证明 由于平行板中 $D = \sigma$ ，所以穿过极板位移电位移通量

$$\phi_D = \iint_S D \cdot dS = \sigma S = q = CU$$

平行板电容器中的位移电流强度

$$I_d = \frac{d\phi_D}{dt} = \frac{d(CU)}{dt} = C \frac{dU}{dt}$$

8-19 设圆形平行板电容器的交变电场为 $E = 720 \sin(10^5 \pi r) V \cdot m^{-1}$ ，电荷在电容器极板上均匀分布，且边缘效应可以忽略，试求：(1) 电容器两极板间的位移电流密度；(2) 在距离电容器极板中心连线为 $r = 1.0cm$ 处，经过时间 $t = 2.0 \times 10^{-5} s$ 时的磁感应强度的大小。

解 (1) 电容器两极板间的位移电流密度为

$$j_d = \frac{\partial d}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = 2.00 \times 10^{-3} \cos(10^5 \pi r) A/m^2$$

(2) 以电容器极板中心连线为圆心，以 $r = 1.0cm$ 为半径做一圆周。由全电流安培环路定律有

$$\oint_L H \cdot dl = \frac{d\phi_D}{dt}$$

所以

$$H 2\pi r = \pi r^2 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$$

$$H = \frac{1}{2} r \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$$

经过时间时 $t = 2.0 \times 10^{-5} s$ ，磁感应强度的大小为

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 r \varepsilon_0}{2} \frac{dE}{dt} = 1.26 \times 10^{-11} (T)$$

8-20 试确定哪一个麦克斯韦方程相当于或包括下列事实：

- (1) 电场线仅起始或终止与电荷或无穷远处；
- (2) 位移电流；
- (3) 在静电平衡条件下，导体内部可能有任何电荷；
- (4) 一变化的电场，必定有一个磁场伴随它；
- (5) 闭合面的磁通量始终为零；
- (6) 一个变化的磁场，必定有一个电场伴随它；
- (7) 磁感应线是无头无尾的；
- (8) 通过一个闭合面的净电通量与闭合面内部的总电荷成正比；
- (9) 不存在磁单极子；
- (10) 库仑定律；
- (11) 静电场是保守场。

解 $\oiint_s D \cdot ds = \sum_{i=1}^N q_i$ 相当于或包括事实：(1)，(3)，(8)，(10)；

$$\oint_L E \cdot dl = - \iint_s \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS \text{ 相当于或包括事实：(6)，(11)；}$$

$$\oiint_s B \cdot dS = 0 \text{ 相当于或包括事实：(5)，(7)，(9)；}$$

$$\oint_L H \cdot dl = \sum_{i=1}^N I_i + \frac{d\phi_D}{dt} \text{ 相当于或包括事实：(2)，(4)；}$$

习题精解

9-1. 在气垫导轨上质量为 m 的物体由两个轻弹簧分别固定在气垫导轨的两端, 如图 9-1 所示, 试证明物体 m 的左右运动为简谐振动, 并求其振动周期。设弹簧的劲度系数为 k_1 和 k_2 。

解: 取物体在平衡位置为坐标原点, 则物体在任意位置时受的力为

$$F = -(k_1 + k_2)x$$

根据牛顿第二定律有

$$F = -(k_1 + k_2)x = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

化简得

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_1 + k_2}{m}x = 0$$

令 $\omega^2 = \frac{k_1 + k_2}{m}$ 则 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$ 所以物体做简谐振动, 其周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

9-2 如图 9.2 所示在电场强度为 E 的匀强电场中, 放置一电偶极矩 $P=ql$ 的电偶极子, $+q$ 和 $-q$ 相距 l , 且 l 不变。若有一外界扰动使这对电荷偏过一微小角度, 扰动消息后, 这对电荷会以垂直与电场并通过 l 的中心点 o 的直线为轴来回摆动。试证明这种摆动是近似的简谐振动, 并求其振动周期。设电荷的质量皆为 m , 重力忽略不计。

解 取逆时针的力矩方向为正方向, 当电偶极子在如图 9.2 所示位置时, 点偶极子所受力矩为

$$M = -qE \frac{l}{2} \sin \theta - qE \frac{l}{2} \sin \theta = -qEl \sin \theta$$

点偶极子对中心 O 点的转动惯量为

$$J = m \left(\frac{l}{2} \right)^2 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} ml^2$$

由转动定律知

$$M = -qEl \sin \theta = J\beta = \frac{1}{2} ml^2 \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

化简得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2qE}{ml} \sin \theta = 0$$

当角度很小时有 $\sin \theta \approx \theta$, 若令 $\omega^2 = \frac{2qE}{ml}$, 则上式变为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \sin\theta = 0$$

所以点偶极子的微小摆动是简谐振动。而且其周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{2qE}}$$

9-3 汽车的质量一般支承在固定与轴承的若干根弹簧上, 成为一倒置的弹簧振子。汽车为开动时, 上下为自由振动的频率应保持在 $\nu = 1.3\text{Hz}$ 附近, 与人的步行频率接近, 才能使乘客没有不适之感。问汽车正常载重时, 每根弹簧松弛状态下压缩了多少长度?

解 汽车正常载重时的质量为 m , 振子总劲度系数为 k , 则振动的周期为 $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$, 频率

$$\text{为 } \nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

正常载重时弹簧的压缩量为

$$x = \frac{mg}{k} = \frac{T^2}{4\pi^2} g = \frac{g}{4\pi^2 \nu^2} = 0.15(m)$$

9-4 一根质量为 m , 长为 l 的均匀细棒, 一端悬挂在水平轴 O 点, 如图 9.3 所示。开始棒在平衡位置 OO' 处于平衡状态。将棒拉开微小角度后放手, 棒将在重力矩作用下, 绕 O 点在竖直平面内来回摆动。此装置时最简单的物理摆。

若不计棒与轴的摩擦力和空气的阻力, 棒将摆动不止。试证明摆角很小的情况下, 细棒的摆动为简谐振动, 并求其振动周期。

解 设在某一时刻, 细棒偏离铅直线的角位移为 θ , 并规定细棒在平衡位置向右时 θ 为正, 在向左时为负, 则力矩为

$$M = -mg \frac{1}{2} l \sin\theta$$

负号表示力矩方向与角位移方向相反, 细棒对 O 点转动惯量为 $J = \frac{1}{3} ml^2$, 根据转动定律有

$$M = -\frac{1}{2} mgl \sin\theta = J\beta = \frac{1}{3} ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

化简得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3g}{2l} \sin\theta = 0$$

当 θ 很小时有 $\sin\theta \approx \theta$, 若令 $\omega^2 = \frac{3g}{2l}$ 则上式变为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \sin\theta = 0$$

所以细棒的摆动为简谐振动，其周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$$

9-5 一放置在水平光滑桌面上的弹簧振子，振幅 $A = 2 \times 10^{-2} m$ ，周期 $T = 0.50 s$ ，当 $t = 0$ 时，

- (1) 物体在正方向的端点；
- (2) 物体在负方向的端点；
- (3) 物体在平衡位置，向负方向运动；
- (4) 物体在平衡位置，向负方向运动；

(5) 物体在 $x = 1.0 \times 10^{-2} m$ 处向负方向运动

(6) 物体在 $x = -1.0 \times 10^{-2} m$ 处向正方向运动。求以上各种情况的振动方程。

解 由题意知 $A = 2.0 \times 10^{-2} m, T = 0.5 s, \omega = \frac{2\pi}{T} = 4\pi s^{-1}$

(1) 由初始条件得初相为 $\varphi_1 = 0$ ，所以振动方程为

$$x = 2 \times 10^{-2} \cos 4\pi t (m)$$

(2) 由初始条件得初相为 $\varphi_2 = \pi$ ，所以振动方程为

$$x = 2 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + \pi) (m)$$

(3) 由初始条件得初相为 $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$ ，所以振动方程为

$$x = 2 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + \frac{\pi}{2}) (m)$$

(4) 由初始条件得初相为 $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$ ，所以振动方程为

$$x = 2 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + \frac{3\pi}{2}) (m)$$

(5) 因为 $\cos \varphi_5 = \frac{x_0}{A} = \frac{1 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-2}} = 0.5$ ，所以 $\varphi_5 = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ ，取 $\varphi_5 = \frac{\pi}{3}$ （因为速度小于零），

所以振动方程为

$$x = 2 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + \frac{\pi}{3}) (m)$$

(6) $\cos \varphi_6 = \frac{x_0}{A} = \frac{-1 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-2}} = -0.5$ ，所以 $\varphi_6 = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ ，取 $\varphi_6 = \frac{4\pi}{3}$ （因为速度大于零），

所以振动方程为

$$x = 2 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + \frac{4\pi}{3})(m)$$

9-6 一质点沿 x 轴做简谐振动，振幅为 0.12m，周期为 2s，当 t=0 时，质点的位置在 0.06m 处，且向 x 轴正方向运动，求：

(1) 质点振动的运动方程；

(2) t=0.5s 时，质点的位置、速度、加速度；

(3) 质点 x=-0.06m 处，且向 x 轴负方向运动，在回到平衡位置所需最短的时间。

解 (1) 由题意可知： $A = 0.12m, \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi, x_0 = A \cos \varphi_0$ 可求得 $\varphi_0 = -\frac{\pi}{3}$ (初速度为零)，所以质点的运动方程为

$$x = 0.12 \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$(2) \quad x_{t=0.5} = 0.12 \cos\left(0.5\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 0.1(m)$$

任意时刻的速度为

$$v = -0.12 \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

所以

$$v_{t=0.5} = -0.12 \cos\left(0.5\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -0.19(m \cdot s^{-1})$$

任意时刻的加速度为

$$a = -0.12\pi^2 \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

所以

$$a_{t=0.5} = -0.12\pi^2 \cos\left(0.5\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -1.0(m \cdot s^{-2})$$

(3) 根据题意画旋转矢量图如图 9.4 所示。

由图可知，质点在 x=-0.06m 处，且向 x 轴负方向运动，再回到平衡位置相位的变化为

$$\Delta\varphi = \frac{3}{2}\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi$$

所以

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{5}{6} \approx 0.833(s)$$

9-7 一弹簧悬挂 0.01kg 砝码时伸长 8cm，现在这根弹簧下悬挂 0.025kg 的物体，使它作自由振动。请建立坐标系，分析对下述 3 种情况列出初始条件，求出振幅和初相位，最后建立振动方程。

(1) 开始时，使物体从平衡位置向下移动 4cm 后松手；

(2) 开始时，物体在平衡位置，给以向上的初速度，使其振动；

(3) 把物体从平衡位置向下拉动 4cm 后, 又给以向上 $21\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ 的初速度, 同时开始计时。

解 (1) 取物体处在平衡位置为坐标原点, 向下为 x 轴正方向, 建立如图 9.5 所示坐标系。系统振动的圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{m_1 g / x_1}{m}} = \sqrt{\frac{0.01 \times g / 0.08}{0.025}} = 7 (\text{s}^{-1})$$

根据题意, 初始条件为

$$\begin{cases} x_0 = 4\text{cm} \\ v_0 = 0\text{cm} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

$$\text{振幅 } A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = 4\text{cm}, \text{ 初相位 } \varphi_1 = 0$$

振动方程为

$$x = 4 \cos 7t (\text{m})$$

(2) 根据题意, 初始条件为

$$\begin{cases} x_0 = 0\text{cm} \\ v_0 = -21\text{cm} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

$$\text{振幅 } A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = 3\text{cm}, \text{ 初相位 } \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

振动方程为

$$x = 3 \cos(7t + \frac{\pi}{2}) (\text{m})$$

(3) 根据题意, 初始条件为

$$\begin{cases} x_0 = 4\text{cm} \\ v_0 = -21\text{cm} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

$$\text{振幅 } A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = 5\text{cm}, \quad \tan \varphi_3 = -\frac{v_0}{x_0 \omega} = 0.75, \text{ 得 } \varphi_3 = 0.64$$

振动方程为

$$x = 5 \cos(7t + 0.64) (\text{m})$$

9-8 质量为 0.1kg 的物体, 以振幅 $A = 1.0 \times 10^{-2}\text{m}$ 做简谐振动, 其最大加速度为

$4.0\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, 求: (1) 振动周期; (2) 通过平衡位置时的动能; (3) 总能量。

解 (1) 简谐振动的物体的最大加速度为

$$a_{\max} = A\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{\max}}{A}} = \sqrt{\frac{4.0}{1.0 \times 10^{-2}}} = 20 (s^{-1}), \text{ 所以周期为 } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20} = 0.314 (s)。$$

(2) 做简谐振动的物体通过平衡位置时具有最大速度

$$|v_{\max}| = A\omega$$

所以动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2} \times 0.1 \times (1.0 \times 10^{-2})^2 \times 20 = 2 \times 10^{-3} (J)$$

(3) 总能量为

$$E_{\text{总}} = E_k = 2 \times 10^{-3} (J)$$

9-9 弹簧振子在光滑的水平面上做振幅为 A_0 的简谐振动, 如图 9.6 所示, 物体的质量为

M , 弹簧的劲度系数为 k , 当物体到达平衡位置且向负方向运动时, 一质量为 m 的小泥团以速度 v' 从右打来, 并粘附于物体之上, 若以此时刻作为起始时刻, 求:

(1) 系统振动的圆频率;

(2) 按图示坐标列出初始条件;

(3) 写出振动方程;

解 (1) 小泥团粘附于物体之后与物体一起做简谐振动, 总质量为 $M+m$, 弹簧的劲度系数为 k , 所以系统振动的圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$$

(2) 小泥团粘附于物体之上后动量守恒, 所以有

$$-Mv - mv' = (M+m)v_0$$

$$v_0 = -\frac{Mv + mv'}{M+m}$$

按图 9.6 所示坐标初始条件为
$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ v_0 = -\frac{Mv + mv'}{M+m} \end{cases}$$

(3) 根据初始条件, 系统振动的初相位为 $\varphi = \frac{\pi}{2}$; 假设, 系统的振动振幅为 A , 根据能量守恒, 有

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(M+m)v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{(Mv + mv')^2}{M+m}$$

其中

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}kA_0^2$$

故得

$$A = \frac{mv' + MA_0 \sqrt{\frac{k}{M}}}{\sqrt{(M+m)k}}$$

振动方程为

$$x = \frac{mv' + MA_0 \sqrt{\frac{k}{M}}}{\sqrt{(M+m)k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) (m)$$

9-10 有一个弹簧振子，振幅 $A = 2 \times 10^{-2} m$ ，周期 $T = 1s$ ，初相位 $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ ，(1) 写出它的振动方程；(2) 利用旋转矢量图，作 $x-t$ 图。

解 (1) 由题意可知， $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$ ，所以弹簧振子的振动方程为

$$x = 2 \times 10^{-2} \cos\left(2\pi t + \frac{3}{4}\pi\right) (m)$$

(2) 利用旋转矢量图做 $x-t$ 图如图 9.7 所示

9-11 一物体做简谐振动，(1) 当它的位置在振幅一半处时，试利用旋转矢量计算它的相位可能为哪几个值？做出这些旋转矢量；(2) 谐振子在这些位置时，其动能。势能各占总能量的百分比是多少？

解 (1) 根据题意做旋转矢量如图 9.8 所示。

由图 9.8 可知，当它的位置在振幅的一半时，它的可能相位是

$$\pm \frac{\pi}{3}, \pm \frac{2\pi}{3}$$

(2) 物体做简谐振动时的总能量为 $W = \frac{1}{2}kA^2$ ，在任意位置时的时能为 $W_p = \frac{1}{2}kx^2$ ，所以

当它的位置在振幅的一半时的势能为 $W_p = \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{2}A\right)^2 = \frac{1}{8}kA^2$ ，势能占总能量的百分比为

25%，动能占总能量的百分比为 75%。

9-12 手持一块平板，平板上放以质量为 0.5kg 的砝码，现使平板在竖直方向上下振动，设该振动是简谐振动，频率为，振幅是 0.04m，问：

(1) 位移最大时，砝码对平板的正压力多大？

(2) 以多大的振幅振动时，会使砝码脱离平板？

(3) 如果振动频率加快一倍则砝码随板保持一起振动的振幅上限是多大？

解 (1) 由题意可知， $\omega = 2\pi\nu = 4\pi s^{-1}$ ， $A = 0.04m$ 。因为物体在作简谐振动，物体在最

大位移时加速度大小 $a_{\max} = A\omega^2 = 0.04 \times 16\pi^2 = 0.64\pi^2$

根据牛顿第二定律有

$$\begin{aligned} N_1 - mg &= ma_{\max} \\ mg - N_2 &= ma_{\max} \end{aligned}$$

解得 $N_1 = 8.06N$ (最低位置), $N_2 = 1.74N$ (最高位置)

(2) 当 $mg = ma_{\max} = mA\omega^2$, 即时 $A = 0.062m$ 会使砝码脱离平板。

(3) 频率增大一倍, 把 $\omega_1 = 2\omega$ 代入 $mg = ma_{\max} = mA_1\omega_1^2$ 得

$$A_1 = \frac{1}{4}A = 1.55 \times 10^{-2} (m)$$

9-13 有两个完全相同的弹簧振子 A 和 B, 并排地放在光滑的水平面上, 测得它们的周期都是 2s。现将两个物体从平衡位置向右拉开 5cm, 然后先释放 A 振子, 经过 0.5s 后, 再释放 B 振子, 如图 9.9 所示, 若以 B 振子释放的瞬间作为时间的起点,

(1) 分别写出两个物体的振动方程;

(2) 它们的相位差为多少? 分别画出它们的 $x-t$ 图。

解 (1) 由题可知, 两物体做简谐振动的圆频率为 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$, 若以 B 振子释放的瞬间

作为时间的起点, 则 B 物体振动的初相位是 $\varphi_B = 0$, 振动方程应为

$$x_B = 5 \cos \pi t (cm)$$

由于 A 物体先释放 0.5s 时的时间, 所以相位超前 B 物体 $\Delta\varphi = 2\pi \cdot \frac{0.5}{T} = \frac{\pi}{2}$, 所以 A 物体

振动的初相位是 $\varphi_A = \frac{\pi}{2}$, 振动方程应为

$$x_A = 5 \cos \left(\pi t + \frac{\pi}{2} \right) (cm)$$

(2) 它们的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$$

作 A, B 两物体的振动曲线如图 9.10 所示。

9-14 一质点同时参与两个方向、同频率的简谐振动, 它们的振动方程分别为

$$x_1 = 6 \cos \left(2t + \frac{\pi}{6} \right) cm$$

$$x_2 = 8 \cos \left(2t - \frac{\pi}{3} \right) cm$$

试 用旋转矢量求出合振动方程。

解 作旋转矢量如图 9.11 所示。

由平面几何关系可知

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 10cm$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1}{A_2} = \frac{6}{8} = 0.75$$

合振动的初相位是

$$\alpha = -\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right) = -0.4$$

所以合振动的振动方程为

$$x = 10 \cos(2t - 0.4)(cm)$$

9-15 有两个同方向、同频率的简谐振动，其合振动的振幅为 0.2，合振动的相位于第一个振动的相位之差为 $\frac{\pi}{6}$ ，若第一个振动的振幅为 0.173m，求第二个振动的振幅，第一、第二两振动的相位差。

解 做旋转矢量如图 9.12 所示。

由平面几何关系可知

$$A_2 = \sqrt{A^2 + A_1^2 - 2AA_1 \cos \frac{\pi}{6}} = 0.1(m)$$

假设 A_1 和 A_2 的夹角为 φ ，则由平面几何可知

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi}$$

把已知数代入解得 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ，

9-16 质量为 0.4kg 的质点同时参与互相垂直的两个振动：

$$x = 0.08 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right), y = 0.06 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)$$

式中 x, y 以 m 计， t 以 s 计。

(1) 求运动轨迹方程；

(2) 质点在任一位置所受的力。

解 (1) 由振动方程消去时间因子得轨迹方程为

$$\frac{x^2}{0.08^2} + \frac{y^2}{0.06^2} = 1$$

(2) 质点在任意时刻的加速度为

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}i + \frac{d^2y}{dt^2}j = -0.08\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)i - 0.06\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)j$$

质点在任一位置所受的力为

$$F = ma = \left[-32\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)i - 24\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)j \right] \times 10^{-3} (N)$$

9-17 质点参与两个方向互相垂直的、同相位、同频率的简谐振动：

(1) 证明质点的合振动时简谐振动；

(2) 求合振动的振幅和频率。

解 (1) 根据题意，假设两个分振动的振动方程分别为

$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi)$$

$$y = A_y \cos(\omega t + \varphi)$$

合成的轨迹是直线 $y = \frac{A_x}{A_y} x$ ，在任意时刻质点离开平衡位置的距离为

$$x' = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \cos(\omega t + \varphi)$$

所以质点的合振动是简谐振动。

(2) 合振动的振幅为 $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ ，圆频率为 ω 。

习题精解

10-1 在平面简谐波的波射线上, A,B,C,D 各点离波源的距离分别是 $\frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2}, \frac{3}{4}\lambda, \lambda$ 。设振源的

振动方程为 $y = A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$, 振动周期为 T。(1) 这 4 点与振源的振动相位差各为多少?

(2) 这 4 点的初相位各为多少? (3) 这 4 点开始运动的时刻比振源落后多少?

解 (1)

$$\Delta\varphi_1 = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{\pi}{2}, \Delta\varphi_2 = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = \pi,$$

$$\Delta\varphi_3 = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{3\pi}{2}, \Delta\varphi_4 = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi$$

(2)

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \Delta\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \Delta\varphi_2 = -\frac{\pi}{2},$$

$$\varphi_3 = \frac{\pi}{2} - \Delta\varphi_3 = -\pi, \varphi_4 = \frac{\pi}{2} - \Delta\varphi_4 = -\frac{3}{2}\pi$$

(3)

$$\Delta t_1 = T, \frac{\Delta\varphi_1}{2\pi} = \frac{1}{4}T, \Delta t_2 = T, \frac{\Delta\varphi_2}{2\pi} = \frac{1}{2}T$$

$$\Delta t_3 = T, \frac{\Delta\varphi_3}{2\pi} = \frac{3}{4}T, \Delta t_4 = T, \frac{\Delta\varphi_4}{2\pi} = T$$

10-2 波源做谐振动, 周期为 0.01s , 振幅为 $1.0 \times 10^{-2}\text{m}$, 经平衡位置向 y 轴正方向运动时,

作为计时起点, 设此振动以 $u = 400\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度沿 x 轴的正方向传播, 试写出波动方程。

解 根据题意可知, 波源振动的相位为 $\varphi = \frac{3}{2}\pi$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.01} = 200\pi, A = 1.0 \times 10^{-2}\text{m}, u = 400\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

波动方程

$$y = 1.0 \times 10^{-2} \cos \left[200\pi \left(t - \frac{x}{400} \right) + \frac{3}{2}\pi \right] \text{m}$$

10-3 一平面简谐波的波动方程为 $y = 0.05 \cos(4\pi x - 10\pi t)\text{m}$, 求 (1) 此波的频率、周

期、波长、波速和振幅; (2) 求 x 轴上各质元振动的最大速度和最大加速度。

解 (1) 比较系数法

将波动方程改写成

$$y = 0.05 \cos 10\pi \left(t - \frac{x}{2.5} \right) \text{m}$$

与 $y = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$ 比较得

$$A = 0.05m; \omega = 10\pi; T = \frac{2\pi}{10\pi} = 0.2s$$

$$v = \frac{1}{T} = 5s^{-1}; u = 2.5m \cdot s^{-1}; \lambda = u \cdot T = 0.5m$$

(2) 各质元的速度为

$$v = 0.05 \times 10\pi \sin(4\pi x - 10\pi t) m \cdot s^{-1}$$

所以

$$v_{\max} = 0.05 \times 10\pi = 1.57(m \cdot s^{-1})$$

各质元的加速度为

$$a = -0.05 \times (10\pi)^2 \cos(4\pi x - 10\pi t) m \cdot s^{-2}$$

所以

$$a_{\max} = 0.05 \times (10\pi)^2 = 49.3(m \cdot s^{-2})$$

10-4 设在某一时刻的横波波形曲线的一部分如图 10.1 所示。若波向 x 轴正方向传播，(1) 试分析用箭头表明原点 0, 1, 2, 3, 4 等点在此时的运动趋势；(2) 确定此时刻这些点的振动初相位；(3) 若波向 x 轴的正方向传播，这些点的振动初相位为多少？

解 (1) 因为波是沿 x 轴的正方向传播的，所以下一个时刻的波形如图 10.1 中虚线所示。由图可知：O 点的运动趋势向 y 轴正方向；1 点的运动趋势向 y 轴的正方向；2 点的运动趋势向 y 轴的负方向；3 点的运动趋势向 y 轴的负方向；4 点的运动趋势向 y 轴的正方向。

(2) 各点的振动的初相位分别为

$$\varphi_0 = \frac{3}{2}\pi; \varphi_1 = \pi; \varphi_2 = \frac{1}{2}\pi; \varphi_3 = 0; \varphi_4 = \frac{3}{2}\pi$$

(3) 若波向 x 轴的负方向传播，则各点振动的初相位分别为

$$\varphi'_0 = \frac{1}{2}\pi; \varphi'_1 = \pi; \varphi'_2 = \frac{3}{2}\pi; \varphi'_3 = 0; \varphi'_4 = \frac{1}{2}\pi$$

10-5 一平面简谐波的波动方程为 $y = 0.02 \cos(500\pi t - 200\pi t)m$ (1) 求该波的振幅、周期、圆频率、频率波速和波长；(2) 设 $x=0$ 处为波源，求距波源 0.125m 及 1m 处的振动方程，并分别绘出它们的 y-t 图；(3) 求 $t=0.01s$ 及 $t=0.02s$ 时的波动方程，并绘出对应时刻的波形图。

解 (1) 将波动方程变为

$$y = 0.02 \cos 500\pi \left(t - \frac{x}{2.5} \right) m$$

与 $y = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) m$ 相比较得

$$A = 0.02m; \omega = 500\pi s^{-1}; v = \frac{\omega}{2\pi} = 250Hz$$

$$T = \frac{1}{v} = 0.004s; u = 2.5m \cdot s^{-1}; \lambda = uT = 0.1m$$

(2) 将 $x=0.125m$ 及 $x=1m$ 代入波动方程, 得振动方程分别为

$$y_1 = 0.02 \cos(500\pi t - 25\pi)m$$

$$y_2 = 0.02 \cos(500\pi t - 200\pi)m$$

绘 $y-t$ 图如图 10.2 (a) 所示。

(3) 将 $t=0.01s$ 及 $t=0.02s$ 代入波动方程, 得两时刻的波方程分别为

$$y_1 = 0.02 \cos(5\pi t - 200\pi x)m$$

$$y_2 = 0.02 \cos(10\pi t - 200\pi x)m$$

两时刻的波形图如图 10.2 (b) 所示。

10-6 一平面简谐波的波动方程为

$$y = 8 \times 10^{-2} \cos(4\pi t - 2\pi x)m$$

(1) $x=0.2m$ 处的质元在 $t=2.1s$ 时刻的振动相位为多少? 此相位所描述的运动状态如何?

(2) 此相位值在哪一时刻传至 $0.4m$ 处?

解 (1) 将 $t=0.01s$ 及 $t=0.02s$ 代入波动方程得

$$\varphi = 4\pi \times 2.1 - 2\pi \times 0.2 = 8\pi$$

此质元在此时刻的位置为

$$y = 8 \times 10^{-2} \cos 8\pi = 8 \times 10^{-2}(m)$$

速度为

$$v = -4\pi \times 8 \times 10^{-2} \sin 8\pi = 0$$

(2) 将 $x=0.4m$ 代入有

$$4\pi t - 2\pi \times 0.4 = 8\pi$$

得

$$t = 2.2(s)$$

10-7 一波源做简谐振动, 周期为 $0.01s$, 振幅为 $0.1m$, 经平衡位置向正方向运动时为计时起点, 设此振动以 $400m \cdot s^{-1}$ 的速度沿直线传播,

(1) 写出波动方程;

(2) 求距波源 $16m$ 处和 $20m$ 处的质元的振动方程和初相位;

(3) 求距波源 $15m$ 处和 $16m$ 处的两质元的相位差是多少?

解 (1) 取波源的传播方向为 x 轴的正向, 由题意可知波源振动的初相位为 $\varphi = \frac{3}{2}\pi$,

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 200\pi$, 所以波方程为

$$y = 0.1 \cos \left[200\pi \left(t - \frac{x}{400} \right) + \frac{3}{2}\pi \right] m$$

(2) 将 $x=16m$ 和 $x=20m$ 代入波动方程得振动方程为

$$y_1 = 0.1 \cos(200\pi t - 6.5\pi) m$$

$$y_2 = 0.1 \cos(200\pi t - 8.5\pi) m$$

所以初相位分别是

$$\varphi_{10} = -6.5\pi$$

$$\varphi_{20} = -8.5\pi$$

(3) 距波源 15m 和 16m 处的两质元的相位差为

$$\Delta\varphi = 200\pi \left(t - \frac{x_1}{400} \right) - 200\pi \left(t - \frac{x_2}{400} \right) = -200\pi \frac{x_1 - x_2}{400} = \frac{\pi}{2}$$

10-8 有一波在媒介中传播，其速度 $u = 1 \times 10^3 m \cdot s^{-1}$ ，振幅 $A = 1.0 \times 10^{-4} M$ ，频率 $\nu = 10^3 Hz$ ，若媒介的密度为 $800 kg \cdot m^{-3}$ ，

(1) 求该波的平均能流密度；

(2) 求 1min 内垂直通过一面积为 $S = 4 \times 10^{-4} m^2$ 的总能量。

解 (1) 由 $\nu = 10^3 Hz$ 知道 $\omega = 2\pi\nu = 2 \times 10^3 \pi s^{-1}$ ，该波的平均能流密度为

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 u = \frac{1}{2} \times 800 \times (1.0 \times 10^{-4})^2 \times (2 \times 10^3 \pi)^2 \times 10^3 \\ &= 1.58 \times 10^5 (J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}) \end{aligned}$$

(2) 1min 内垂直通过一面积为 $S = 4 \times 10^{-4} m^2$ 的总能量为

$$E = ISt = 3.79 \times 10^3 (J)$$

10-9 一平面简谐波沿直径为 0.14m 的圆柱形管行进（管中充满空气），波的强度为 $18 \times 10^{-3} J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}$ ，频率为 300Hz，波速为 $18 \times 10^{-3} J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}$ ，问：

(1) 波的平均能量密度和最大能量密度是多少？

(2) 每两个相邻的，相位差为 π 的波振面之间的波段中有多少能量？

解 (1) 波的平均能量密度为

$$\bar{\omega} = \frac{I}{u} = \frac{18 \times 10^{-3}}{300} = 6 \times 10^{-5} (J \cdot m^{-3})$$

最大能量密度

$$w_{\max} = 2\bar{\omega} = 1.2 \times 10^{-4} (J \cdot m^{-3})$$

(2) 波长 $\lambda = uT = \frac{u}{\nu} = 1(m)$

所以每两个相邻的，相位差为的波段中的能量为

$$E = \bar{\omega} \bullet V = \bar{\omega} \bullet S \bullet \lambda = 6 \times 10^{-5} \times \pi \left(\frac{0.14}{2} \right)^2 \times 1 = 9.24 \times 10^{-7} (J)$$

10-10 两相干波源分别在 P,Q 两处，它们相距 $\frac{3}{2}\lambda$ ，如图 10.3 所示。由 P,Q 发出频率为 ν ，波长为 λ 的相干波。R 为 PQ 连线上的一点，求下面的两种情况两波在 R 点的和振幅：(1) 设两波源有相同的初相位；(2) 两波源初相位为。

解 (1) 设两波源有相同的初相位，P,Q 两波源在 R 点引起振动的相位差为

$$\Delta\varphi = -2\pi \bullet \frac{PR - QR}{\lambda} = -3\pi$$

所以和振幅为

$$A = |A_1 - A_2|$$

(2) 因为两波源的初相位差为 (假设 P 振动相位超前 Q 振动相位)，P,Q 两波源在 R 点引起振动的相位差为

$$\Delta\varphi = \pi - 2\pi \bullet \frac{PR - QR}{\lambda} = -2\pi$$

所以合振幅为

$$A = A_1 + A_2$$

10-11 两个波在一根很长的细绳上传播，它们的方程分别为

$$y_1 = 0.06 \cos \pi(x - 4t)$$

$$y_2 = 0.06 \cos \pi(x + 4t)$$

式中，x,y 以 m 计，t 以 s 计。

(1) 试证明这细绳实际上作驻波振动，并求波节和波腹的位置；

(2) 波腹处的振幅为多大？在 x=1.2m 处质元的振幅多大？

解 (1) 任意质元在任意时刻的位移为

$$y = y_1 + y_2 = 0.12 \cos \pi x \cos 4\pi t$$

所以这细绳实际上做驻波式振动。

波节位置为 $\cos \pi x = 0$ ，即 $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots (m)$

波腹位置为 $\cos \pi x = \pm 1$ ，即 $x = 0, 1, 2, 3, \dots (m)$

(2) 波腹处的振幅为

$$A_{\text{波腹}} = 0.12(m)$$

在 x=1.2m 处质元的振幅为

$$A = |0.12 \cos 1.2\pi| = 0.097(m)$$

10-12 绳索上的驻波公式为: $y = 0.08 \cos 2\pi x \cos 50\pi t(m)$, 求 形成该驻波的两反向行进波的振幅、波长和波速。

解 把 $y = 0.08 \cos 2\pi x \cos 50\pi t(m)$ 与驻波的标准形式 $y = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t(m)$ 线比较得:

$$A = 0.04m, \lambda = 1m, u = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda \omega}{2\pi} = 25(m \bullet s^{-1})$$

10-13 一警笛发射频率为 1500Hz 的声波, 并以 $22m \bullet s^{-1}$ 的速度向着观测者运动, 观测者相对与空气静止, 求观测者所听到的警笛发出声音的频率是多少? (设空气中的声速为 $340m \bullet s^{-1}$)

解 观测者所听到的警笛发出的声音的频率为

$$\nu = \frac{u}{u - v_s} \nu_0 = \frac{340}{340 - 22} \times 1500 = 1604(Hz)$$

11-1 钠黄光波长为 589.3nm，试以一次延续时间 10^{-8} 计，计算一个波列中的完整波的个数。

解
$$N = \frac{c\tau}{\lambda} = \frac{3 \times 10^{17} \times 10^{-8}}{589.3} \approx 5 \times 10^6$$

11-2 在杨氏双缝实验中，当做如下调节时，屏幕上的干涉条纹将如何变化？（要说明理由）

（1）使两缝之间的距离逐渐减小；

（2）保持双缝的间距不变，使双缝与屏幕的距离逐渐减小；

（3）如图 11.3 所示，把双缝中的一条狭缝遮住，并在两缝的垂直平分线上放置一块平面反射镜。

解 （1）由条纹间距公式 $\Delta x = \frac{D}{d} \lambda$ ，在 D 和 λ 不变的情况下，减小 d 可使 Δx 增大，条纹间距变宽。

（2）同理，若 d 和 λ 保持不变，减小 D ， Δx 变小，条纹变密，到一定程度时条纹将难以分辨。

（3）此装置同洛埃镜实验，由于反射光有半波损失，所以

$$x_{\text{明}} = (2k-1) \frac{D}{d} \frac{\lambda}{2}$$
$$x_{\text{暗}} = k \frac{D}{d} \lambda$$

与杨氏双缝的干涉条纹相比，其明暗条纹分布的状况恰好相反，且相干的区域仅在中心轴线上方的部分。

11-3 洛埃镜干涉装置如图 11.4 所示，光源波长 $\lambda = 7.2 \times 10^{-7} \text{m}$ ，试求镜的右边缘到第一条明纹的距离。

解 因为镜右边缘是暗纹中心，它到第一明条纹的距离 h 应为半个条纹间隔，

$$h = \frac{1}{2} \frac{D}{d} \lambda = \frac{1}{2} \times \frac{20+30}{0.4} \times 7.2 \times 10^{-5} = 4.5 \times 10^{-3} (\text{cm})$$

11-4 由汞弧灯发出的光，通过一绿光滤光片后，照射到相距为 0.60mm 的双缝上，在距双缝 2.5m 远处的屏幕上出现干涉条纹。现测得相邻两明条纹中心的距离为 2.27mm，求入射光的波长

解 有公式 $\Delta x = \frac{D}{d} \lambda$ 得

$$\lambda = \Delta x \cdot \frac{d}{D} = \frac{2.27 \times 10^{-3} \times 0.06 \times 10^{-3}}{2.5} = 5.5 \times 10^{-7} (\text{m}) = 550 (\text{nm})$$

11-5 在双缝装置中，用一很薄的云母片（ $n=1.58$ ）覆盖其中的一条狭缝，这时屏幕上的第七级明条纹恰好移到屏幕中央原零级明条纹的位置。如果入射光的波长为 550nm，则这云母片的厚度应为多少？

解 设云母片的厚度为 $\sigma = ne - e = (n-1)e = 7\lambda$ ，根据题意，插入云母片而引起的光程差为

$$e = \frac{7\lambda}{n-1} = \frac{7 \times 550 \times 10^{-9}}{1.58-1} = 6.6 \times 10^{-6} (m)$$

11-6 在杨氏干涉装置中, 光源宽度为 $b = 0.25mm$, 光源至双孔的距离为 $R = 20cm$, 所用光波波长为 $\lambda = 546nm$ 。(1) 试求双孔处的横向相干宽度 d ; (2) 试求当双孔间距为 $d' = 0.50mm$ 时, 在观察屏幕上能否看到干涉条纹? (3) 为能观察到干涉条纹, 光源至少应再移动多少距离?

解 (1) 由公式 $b < \frac{R}{d} \lambda$ 得

$$b < \frac{R}{d} \lambda = \frac{20 \times 10 \times 546 \times 10^{-6}}{0.25} \approx 0.44 (mm)$$

(2) 不能, 因为, $d' = 0.50mm$

$$R' > \frac{bd'}{\lambda} = \frac{0.25 \times 10 \times 0.50 \times 10^{-1}}{546 \times 10^{-7}} \approx 23 (cm)$$

(3) $\Delta R = R' - R = 23 - 20 = 3 (cm)$

11-7 在杨氏实验装置中, 采用加有蓝绿色滤光片的白色光源, 其波长范围为 $\Delta\lambda = 100nm$, 平均波长为 $\lambda = 490nm$ 。试估计从第几级开始, 条纹将变得无法分辨?

解 设蓝绿光的波长范围为 $\lambda_1 - \lambda_2$, 则按题意有

$$\begin{aligned} \lambda_2 - \lambda_1 &= \Delta\lambda = 100 (nm) \\ \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_1) &= \lambda = 490 (nm) \end{aligned}$$

相应于 λ_1 和 λ_2 , 杨氏干涉条纹中 k 级极大的位置分别为

$$x_1 = k \frac{D}{d} \lambda_1, x_2 = k \frac{D}{d} \lambda_2$$

因此, k 级干涉条纹所占据的宽度为

$$x_2 - x_1 = k \frac{D}{d} \lambda_2 - k \frac{D}{d} \lambda_1 = k \frac{D}{d} \Delta\lambda$$

显然, 当此宽度大于或等于相应与平均波长 λ 的条纹间距时, 干涉条纹变得模糊不清, 这个条件可以表达为

$$k \frac{D}{d} \Delta\lambda \geq \frac{D}{d} \lambda$$

即 $k \geq \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 4.9$

所以, 从第五级开始, 干涉条纹变得无法分辨。

11-8 (1) 在白光的照射下, 我们通常可看到呈彩色花纹的肥皂膜和肥皂泡, 并且当发现有黑色斑纹出现时, 就预示着泡沫即将破裂, 试解释这一现象。

(2) 在单色照射下观察牛顿环的装置中, 如果在垂直于平板的方向上移动平凸透镜, 那么, 当透镜离开或接近平板时, 牛顿环将发生什么变化? 为什么?

解 (1) 肥皂泡沫是由肥皂水形成的厚度一般并不均匀的薄膜, 在单色光照射下便可产生等厚干涉花纹。用白光照射可产生彩色的干涉花纹。

设泡沫上的黑斑这一局部区域可近似看作是厚度 e 均匀的薄膜, 由于它的两表面均与空气相接触, 因此在薄膜干涉的反射光相消条件中须计入半波损失, 其为

$$2e\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, k=0,1,2,3,\dots$$

式中, λ 为入射光的波长, i 为光线的入射角。挡在白光照射下观察到黑斑这一现象, 说明对于任何波长的可见光在该处均产生干涉相消, 于是由上面的公式可见, 此时惟有 $k=0$, 厚度 $e \rightarrow 0$ 时, 才能成立。因而黑斑的出现即使肥皂沫先破裂的先兆。

(2) 在牛顿环装置中, 若平凸透镜球面与平板玻璃相接触, 空气膜上下表面反射光之间的光程差

$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2}$$

式中 e 是空气薄膜厚度, 离中心不同的地方, e 的大小不同。将平凸透镜垂直于平板方向向上移动一距离 h , 则各处的空气层厚度均增加同一量值 $2h$, 为

$$\delta = 2(e+h) + \frac{\lambda}{2}$$

因此, 各处的干涉条纹的级数。每当 h 增加 $\frac{\lambda}{4}$ 时, 干涉条纹向内收缩, 明与暗之间交替变化一次。而每当 h 增加 $\frac{\lambda}{2}$, 干涉条纹有变得与原来相同 (仅是干涉条纹的级数 k 增加 1)。

所以, 当透镜离开 (或接近) 平板时, 牛顿环发生收缩 (或扩张), 各处将整体同步地发生明、暗的交替变化, 而在指定的圆环范围内, 包含的条纹数目则是始终不变的。

11-9 波长范围为 400nm-700nm 的白光垂直入射在肥皂膜上, 膜的厚度为 550nm, 折射率为 1.35。试问在反射光中哪些波长的光干涉增强? 那些波长的光干涉相消?

解 垂直入射是, 考虑到半波损失, 反射干涉光的光程差为

$$\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2}$$

当 $2ne + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, k=1,2,3,\dots$ 时, 干涉相长,

$$\lambda = \frac{2ne}{k - \frac{1}{2}} = \frac{2 \times 1.35 \times 0.55 \times 10^3}{k - \frac{1}{2}} (nm)$$

当 $k=3$ 时 $\lambda = 594nm$, 当 $k=4$ 时 $\lambda = 424nm$

当 $2ne + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, k=0,1,2,3,\dots$ 时, 干涉相消,

$$\lambda = \frac{2ne}{k}$$

取 $k=3, \lambda = 495nm$ 。

11-10 在棱镜 ($n_1 = 1.52$) 表面涂一层增透膜, 为使此增透膜 ($n_2 = 1.30$) 适用于 550nm 波长的光, 膜的厚度应取何值?

解 设垂直入射于增透膜上，根据题意：

$$2n_2e = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda, k = 0, 1, 2, \dots$$

膜厚

$$e = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2n_2}$$

令 $k = 0$ ，可得增透膜的最薄厚度为

$$e_{\min} = 105.8(nm)$$

11-11 有一楔形薄膜，折射率 $n = 1.4$ ，楔角 $\theta = 10^{-4} rad$ ，在某一单色光的垂直照射下，可测得两相邻明条纹之间的距离为 $0.25cm$ ，试求：

- (1) 此单色光在真空中的波长；
- (2) 如果薄膜长为 $3.5cm$ ，总共可出现多少条明条纹？

解 (1) 由楔形薄膜的干涉条件得两相邻明条纹间距：

$$\Delta x = \frac{\frac{\lambda}{2n}}{\sin \theta} \approx \frac{\lambda}{2n\theta}$$

$$\lambda = 2n\theta \cdot \Delta x$$

以 $n = 1, \theta = 10^{-4} rad, \Delta x = 0.25 \times 10^{-2} m$ 代入上式得

$$\lambda = 0.7 \times 10^{-6} m = 700nm$$

- (2) 在长为 $3.5 \times 10^{-2} m$ 的楔形膜上，明条纹总数为

$$m = \frac{l}{\Delta x} = 14(\text{条})$$

11-12 图 11.5 为一干涉膨胀仪的示意图，AB 与 $A'B'$ 二平面玻璃板之间放一热膨胀系数极小的熔石英环柱 CC' ，被测样品 W 置于该环柱内，样品的上表面与 AB 板的下表面形成一楔形空气层，若以波长为 λ 的单色光垂直射于此空气层，就产生等厚干涉条纹。设在温度为 $t_0^\circ C$ 时，测得样品的长度为 L_0 ；温度升高到时 $t^\circ C$ ，测得样品的长度为 L 。并且在这过程中，数得通过视场中某一刻线的干涉条纹数目为 N ，设环柱 CC' 的长度变化可以忽略不计，求证：被测样品材料的热膨胀系数 β 为

$$\beta = \frac{N\lambda}{2L_0(t - t_0)}$$

解 该装置中 AB 平板玻璃与样品 W 表面中间所夹的是一楔形空气薄膜，在等厚干涉条纹中，设在温度 t_0 时，某一刻线所在位置对应于第 k 级暗条纹，此处楔形空气层的厚度为 e_k 满足

$$e_k = k \frac{\lambda}{2}$$

温度升高到时, 由于样品 W 的长度发生膨胀, 有 N 条干涉条纹通过此刻线, 则对应该刻线处干涉条纹级数变为 k-N, 于是楔形空气层厚度变为

$$e_{k-N} = (k-N) \frac{\lambda}{2}$$

依照题意, 忽略石英环的膨胀, 则该处空气层厚度的减少为

$$\Delta L = L - L_0 = e_k - e_{k-N} = N \frac{\lambda}{2}$$

由膨胀系数的定义得

$$\beta = \frac{L - L_0}{L_0} \cdot \frac{1}{t - t_0} = \frac{N\lambda}{2L_0(t - t_0)}$$

11-13 利用楔形空气薄膜的等厚干涉条纹, 可以测量经精密加工后工件表面上极小纹路的深度。如图 11.6, 在工件表面上放一平板玻璃, 使期间形成楔形空气薄膜, 以单色光垂直照射玻璃表面, 用显微镜观察干涉条纹, 由于工件表面不平, 观察到的条纹如图所示, 试根据条纹弯曲的方向, 说明工件表面上纹路是凹的还是凸的? 并证明纹路深度可用下式表示:

$$H = \frac{a}{b} \cdot \frac{\lambda}{2}$$

其中 a, b 如图所示。

解 纹路是凹的, 因工件表面有凹纹, 故各级等厚线的相应部分向楔形膜顶端移动。

两相邻暗纹间距离为 b, 对应高度差为 $\frac{\lambda}{2}$, 则有

$$b \sin \theta = \frac{\lambda}{2}$$

当条纹移动距离为 a 是, 对应高度差 H (即纹路深度) 为

$$H = a \sin \theta = \frac{a}{b} \cdot \frac{\lambda}{2}$$

11-14 (1) 若用波长不同的观察牛顿环, $\lambda_1 = 600nm$, $\lambda_2 = 450nm$, 观察到用 λ_1 时的第 k

个暗环与用 λ_2 时的第 k+1 个暗环重合, 已知透镜的曲率半径是 190cm, 求用时第 k 个暗环

的半径。(2) 若在牛顿环中波长为 500nm 的光的第 5 个明环与波长为 λ 的光的第 6 个明环重合, 求波长 λ 。

解 (1) 牛顿环中 k 级暗条纹半径

$$r_k = \sqrt{kR\lambda}$$

依照题意, 当 λ_1 光的 k 级暗条纹与 λ_2 光的第 k+1 级暗条纹在 r 处重合是满足

$$r = \sqrt{kR\lambda_1}$$

$$r = \sqrt{(k+1)R\lambda_2}$$

由(1)、(2)式解得

$$k = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

(3) 式代入(1)式得

$$r = \sqrt{\frac{R\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}} = 1.85 \times 10^{-3} (m)$$

(2) 用波长 $\lambda_1 = 500nm$ 的光照射, $k_1 = 5$ 级的明环与用波长的光照射时, $k_2 = 6$ 级的明环重合, 则有关系式

$$r = \sqrt{\frac{(2k_1 - 1)R\lambda_1}{2}} = \sqrt{\frac{(2k_2 - 1)R\lambda}{2}}$$

$$\text{所以, } \lambda = \frac{2k_1 - 1}{2k_2 - 1} \lambda_1 = \frac{2 \times 5 - 1}{2 \times 6 - 1} \times 500 = 409.1 (nm)$$

11-15 在图 11.7 所示的装置中, 平面玻璃板是由两部分组成的 (冕牌玻璃和火石玻璃), 透镜是用冕牌玻璃制成, 而透镜与玻璃板之间的空间充满着二硫化碳, 试问 由此而成的牛顿环的花样如何? 为什么?

解 由于火石玻璃的折射率大于二硫化碳的折射率, 而二硫化碳的折射率大于冕牌玻璃, 当光波由冕牌玻璃射向二硫化碳, 以及由二硫化碳射向火石玻璃时, 都有“半波损失”, 上、下表面反射没有额外程差 $\frac{\lambda}{2}$, 而光波由二硫化碳射向冕牌玻璃时没有半波损失, 因此在右半边上下表面反射有额外程差, 所以此扭动环的花样有以下特点: (1) 在牛顿环中心, 火石玻璃一侧外为亮斑, 冕牌玻璃一侧处为暗斑, (2) 火石玻璃处, 由中心向外为亮斑、暗斑、亮环交替变化; 冕牌玻璃处由中心向外为暗斑、亮环、暗环交替变化。(3) 同一半径的圆环, 一半亮一半暗。第 k 级条纹的半径为

$$r_k = \sqrt{\frac{kR\lambda}{n}}$$

式中 n 是二硫化碳的折射率。在冕牌玻璃上方为暗条纹位置, 在火石玻璃上方为亮条纹位置。

11-16 用波长为 $589nm$ 的钠黄光观察牛顿环。在透镜与平板接触良好的情况下, 测得第 20 个暗环的直径为 $0.687cm$ 。当透镜向上移动 $5.00 \times 10^{-4}cm$ 时, 同一级暗环的直径变为多少?

解 透镜与平板接触良好的情况下, 暗半径 $r = \sqrt{kR\lambda}$, 由已知条件可得

$$R = \frac{r^2}{k\lambda} = \frac{0.687^2}{20 \times 589 \times 10^{-7} \times 2^2} = 1.00 \times 10^2 (cm)$$

当透镜向上移动 $5.00 \times 10^{-4}cm$ 时, 暗环半径

$$r' = \sqrt{(k\lambda - 2 \times 5.00 \times 10^{-4})R} = \sqrt{(20 \times 589 \times 10^{-7} - 2 \times 5.00 \times 10^{-4}) \times 1.00 \times 10^2} = 0.133(\text{cm})$$

11-17 一块玻璃上滴一油滴，当油滴展开成油膜时，在波长 $\lambda = 600\text{nm}$ 的单色光垂直入射下，从反射光中观察油膜所形成的干涉条纹，已知玻璃的折射率为 $n_1 = 1.50$ ，油膜的折射率为 $n_2 = 1.20$ ，问：

(1) 当油膜中心最高点与玻璃片上表面相距 1200nm 时，可看到几条明条纹？明条纹所在处的油膜厚度为多少？中心点的明暗程度如何？

(2) 当油膜继续摊展时，所看到的条纹情况将如何变化？中心点的情况如何变化？

解 (1) 在空气—油以及油—玻璃反射界面上均有“半波损失”，因此明条纹处必满足

$$e = \frac{k\lambda}{2n_2}, k = 0, 1, 2, \dots$$

式中 e 为油膜厚度。

当

$$k = 0, e_0 = 0; k = 1, e_1 = 250\text{nm}; k = 2, e_2 = 500\text{nm}; k = 3, e_3 = 750\text{nm}; k = 4, e_4 = 1000\text{nm}; k = 5, e_5 = 1250\text{nm}$$

。当 $e = h = 1200\text{nm}$ 时，可看到 5 条明条纹 ($k = 0, 1, 2, \dots$)。各级明条纹所在处的油膜厚度如前所示，中心点的明暗程度介于明条纹与暗条纹之间。

(2) 此时油膜半径扩大，油膜厚度减小；条纹级数减少，间距增大；中心点由半明半暗向暗、明依次变化，直至整个油膜呈现一片明亮区域。

11-18 (1) 迈克耳孙干涉仪可用来测量单色光的波长，当 M_2 移动距离 $\Delta d = 0.3220\text{mm}$ 时，测得某单色光的干涉条纹条移过 $\Delta N = 1024$ ，试求该单色光的波长。

(2) 在迈克耳孙干涉仪的 M_2 镜前，当插入一薄玻璃片时，可观察到有 150 条干涉条纹向一方移过，若玻璃片的折射率 $n = 1.632$ ，所用的单色光的波长 $\lambda = 500\text{nm}$ ，试求玻璃片的厚度。

解 (1) 由 $\Delta d = \frac{\Delta N \lambda}{2}$ 得

$$\lambda = 2 \frac{\Delta d}{\Delta N} = 2 \times \frac{0.3220 \times 10^{-3}}{1024} = 6.298 \times 10^{-7}(\text{m}) = 628.9(\text{nm})$$

(2) 插入一薄玻璃片时，设玻璃片的厚度为 d ，则相应的光程差变化为

$$2(n-1)d = \Delta N \lambda$$

所以

$$d = \frac{\Delta N' \cdot \lambda}{2(n-1)} = \frac{150 \times 500 \times 10^{-9}}{2 \times (1.632 - 1)} = 5.9 \times 10^{-5}(\text{m}) = 5.9 \times 10^{-3}(\text{cm})$$

11-19 利用迈克耳孙干涉仪进行长度的精密测量，光源是镉的红色谱线，波长为 643.8nm ，谱线宽度为 $1.0 \times 10^{-3}\text{nm}$ ，试问一次测量长度的量程是多少？如果使用波长为 631.8nm ，谱

线宽度为 $1.0 \times 10^{-6} \text{ nm}$ 的氦氖激光, 则一次测量长度的量程又是多少?

解 发生相干的最大光程差 $\delta_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$, 测量的长度 L 最大值为 $\frac{1}{2}\delta_c$, 则

$$L_{\text{辐}} = \frac{643.8^2}{2 \times 1.0 \times 10^{-2}} = 2.072 \times 10^8 (\text{nm}) = 2.072 \times 10^{-1} (\text{m})$$

$$L_{\text{激}} = \frac{632^2}{2 \times 1.0 \times 10^{-2}} = 2.002 \times 10^8 (\text{nm}) = 2.002 \times 10^{-1} (\text{m})$$

11-20 (1) 在单缝衍射中, 为什么衍射角 ϕ 愈大 (级数愈大) 的那些明条纹的亮度就愈小?

(2) 在单缝的夫琅和费衍射中, 增大波长与增大缝宽对衍射图样分别产生什么影响?

解 (1) 衍射角 ϕ 愈大, 则 $d \sin \phi$ 可分成的半波带数目越多, 而每一半波带的面积以及相应的光能量越小。因为每一明条纹都是由相消后留下的一个半波带所形成, 因此它的亮度就越小了。

(2) 衍射中央明纹半衍射角宽度的正弦满足:

$$\sin \frac{\Delta\phi_0}{2} = \frac{\lambda}{a}$$

k 级暗条纹衍射角的正弦满足:

$$\sin \phi_k = k \frac{\lambda}{a}$$

由此可见, 增大波长, 中央明条纹变宽, 各级条纹变疏; 增加缝宽, 则中央条纹变窄, 各级条纹变密。

11-21 波长为 500 nm 的平行光线垂直地入射到一宽为 1 mm 的狭缝, 若在缝的后面有一焦距为 100 cm 的薄透镜, 使光线聚焦于一屏幕上, 试问从衍射图样的中心点到以下点的距离如何: (1) 第一级暗纹中心; (2) 第一级明纹中心; (3) 第三级暗纹中心。

解 (1) 单缝衍射各级极小的条件为

$$a \sin \phi = \pm k \lambda (k = 1, 2, \dots)$$

衍射图形的第一级极小, 可令 $k=1$ 求得

$$a \sin \phi_1 = \lambda$$

它离中心点距离:

$$x_1 = f \tan \phi_1 = f \sin \phi_1 = f \frac{\lambda}{a} = 5 \times 10^{-4} (\text{m})$$

(2) 第一级明条纹近似位置可由下两式求得

$$\begin{cases} a \sin \phi = 1.5 \lambda \\ x'_1 = f \tan \phi \end{cases}$$

$$x'_1 = f \sin \phi = f \cdot \frac{1.5 \lambda}{a} = 0.75 (\text{mm})$$

(3) 第三级极小位置为

$$x_3 = f \frac{3\lambda}{a} = 1.5 \times 10^{-3} (m)$$

11-22 有一单缝，宽 $a=0.10\text{mm}$ ，在缝后放一焦距为 50cm 的会聚透镜，用波长为 546nm 的平行绿光垂直照射单缝，求位于透镜焦面处的屏幕上的中央明条纹的宽度。

解 中央明纹角宽度满足公式：

$$-\lambda < na \sin \phi < \lambda$$

空气中， $n=1, f \gg a$ 所以 $\sin \phi \approx \tan \phi$ ，中央明条纹宽度为

$$\Delta x = 2f \tan \phi = 2f \frac{\lambda}{a} = 5.5 \times 10^{-3} (m)$$

11-23 一单色平行光垂直入射一单缝，其衍射第三级明纹中心恰与波长为 600nm 的单色光垂直入射该缝时的第二级明纹中心重合，试求该单色光波长。

解 设该单色光波长为，根据题意，

$$(2 \times 3 + 1) \frac{\lambda}{2} = (2 \times 2 + 1) \frac{600}{2}$$

所以

$$\lambda \approx 429\text{nm}$$

11-24 如图 11.8 所示，设有一波长为 λ 的单色平行光沿着与缝平面的法线成 ψ 角的方向入射到宽度为 a 的单狭缝 AB 上，试求出决定各极小值（即各暗条纹中心）的衍射 ϕ 的条件。

解 1、2 两光的光程差在如图 11.8 情况下为

$$a \sin \phi - a \sin \psi = a (\sin \phi - \sin \psi)$$

因此，极小值条件为

$$a (\sin \phi - \sin \psi) = \pm k \lambda, k = 1, 2, \dots$$

$$\phi = \sin^{-1} \left(\frac{\pm k \lambda}{a} + \sin \psi \right)$$

11-25 当入射角波长满足光栅方程 $d \sin \phi = \pm k \lambda, k = 0, 1, 2, \dots$ 时，两相邻的狭缝沿 ϕ 角所射出的光线能够互相加强，试问：

(1) 当满足光栅方程时，任意两个狭缝沿角射出的光线能否互相加强？

(2) 在方程中，当 $k=2$ 时，第一条缝与第二条缝沿 ϕ 角射出的光线的光程差是多少？第一条缝与第 N 条缝的光程差又是多少？

解 (1) 能够互相加强，因任意两狭缝沿 ϕ 角的衍射光线的光程差是波长的整数倍。

(2) 当 $k=2$ 时，第一条缝与第二条缝沿 ϕ 角射出的光线在屏上会聚时，两者的光程差

$$\delta = 2\lambda, \text{ 而第一条缝与第 } N \text{ 条缝的光程差 } \delta = 2(N-1)\lambda$$

11-26 波长为 600nm 的单色光垂直入射在一光栅上，第二级明条纹出现在 $\sin \phi = 0.20$ 处，第四级缺级，试问：(1) 光栅上相邻两缝的间距是多少？(2) 光栅上狭缝的最小宽度有多

大? (3) 按上述选定的 a, b 值, 在 $-90^\circ < \phi < 90^\circ$ 范围内, 实际呈现的全部级数。

解 (1) 光栅的明条纹的条件是:

$$(a+b)\sin\phi = k\lambda$$

对应于 $\sin\phi_1 = 0.20$ 处满足:

$$0.20(a+b) = 2 \times 600 \times 10^{-7}$$

可得光栅相邻两缝间的距离 $(a+b) = 6.0 \times 10^{-4} \text{ cm}$

(2) 由于第四级衍射条纹缺级, 即第四级干涉明条纹落在单缝衍射暗条纹上, 因此须满足方程组:

$$\begin{cases} (a+b)\sin\phi = 4\lambda \\ a\sin\phi = 2k'\frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

解得

$$a = \frac{a+b}{4} k' = 1.5 \times 10^{-4} k'$$

取 $k' = 1$, 得光栅上狭缝的最小宽度为 $1.5 \times 10^{-4} \text{ cm}$

(3) 由 $(a+b)\sin\phi = k\lambda$

$$k = \frac{(a+b)\sin\phi}{\lambda}$$

当 $\phi = \frac{\pi}{2}$ 时

$$\frac{a+b}{\lambda} = \frac{6.0 \times 10^{-4}}{600 \times 10^{-7}} = 10$$

所以在 $-90^\circ < \phi < 90^\circ$ 范围内实际呈现的全部级数为 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 9$ 级明

暗条纹。($k = \pm 10$ 时条纹在 $\phi = 90^\circ$ 处)

11-27 为了测量一个给定光栅的光栅常数, 用氦氖激光器的红光垂直地照射光栅, 做夫琅和费衍射实验, 已知第一级明条纹出现在 38° 的方向, 问这光栅的光栅常数是多少? 1 cm 内有多少条缝? 第二级明条纹出现在什么角度?

解 由衍射光栅明纹公式:

$$(a+b)\sin\phi = k\lambda$$

得

$$a+b = \frac{k\lambda}{\sin\phi} = \frac{1 \times 632.8 \times 10^{-7}}{\sin 38^\circ} = 1.03 \times 10^{-4} (cm)$$

1cm 内缝的条数:

$$N = \frac{1}{1.03 \times 10^{-4}} + 1 = 9.71 \times 10^3$$

第二级明条纹不出现, 因为按公式应有

$$\sin\phi = \frac{k\lambda}{a+b} = \frac{2 \times 632.8 \times 10^{-7}}{1.03 \times 10^{-4}} > 1$$

这是不可能的。

11-28 一双缝, 缝间距 $d = 0.10mm$, 缝宽 $a = 0.02mm$, 用波长 $\lambda = 480nm$ 的平行单色光垂直入射该双缝, 双缝后放一焦距为 f 的透镜, 试求:

- (1) 透镜焦平面处屏上干涉条纹的间距;
- (2) 单缝衍射中央亮纹的宽度;
- (3) 单缝衍射的中央包线内有多少条干涉的主极大。

解 (1) 由光栅方程 $d \sin\phi = k\lambda$ 得

$$\sin\phi_k = \frac{k\lambda}{d}$$

$$\sin\phi_{k+1} = \frac{(k+1)\lambda}{d}$$

当 ϕ 角很小时, 有 $\sin\phi = \tan\phi$, 设条纹在屏上位置坐标为 x , 得干涉条纹的间距为

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = f \tan\phi_{k+1} - f \tan\phi_k = f \frac{\lambda}{d} = 50 \times \frac{480 \times 10^{-7}}{0.01 \times 10^{-1}} = 0.24 (cm)$$

(2) 中央亮纹宽度为

$$\Delta x_0 = f \cdot \frac{2\lambda}{a} = 50 \times \frac{2 \times 480 \times 10^{-7}}{0.02 \times 10^{-1}} = 2.4 (cm)$$

(3) 由缺级公式 $k = \frac{d}{a} k' = \frac{0.10}{0.02} k' = 5k'$, 取 $k' = 1$, 得 $k = 5$ 说明第五级正好在单缝衍射第一暗纹处, 因而缺级, 则中央包线内有 9 条干涉主极大。

11-29 图 11.9 中所示, 入射 X 射线束不是黄色的, 而是含有有从 $0.095nm$ 到 $0.130nm$ 这一范围内的各种波长, 晶体的晶格常数 $a_0 = 0.275nm$, 试问对图示的晶面能否产生强反射?

解 由布喇格公式: $2a_0 \sin\phi = k\lambda$, 得 $\lambda = \frac{2a_0 \sin\phi}{k}$ 时满足干涉相长

当 $k = 1$ 时, $\lambda = 0.39nm$; $k = 2$ 时, $\lambda = 0.19nm$; $k = 3$ 时, $\lambda = 0.13nm$; $k = 4$ 时, $\lambda = 0.097nm$

所以当波长在 $0.095 \leq \lambda \leq 0.13nm$ 范围内, 有波长 $\lambda_1 = 0.13nm$ 和波长 $\lambda_2 = 0.097nm$ 的光

可以产生强反射。

11-30 在圆孔的夫琅和费衍射中，设圆孔半径为 0.10mm ，透镜焦距 59cm ，所用单色光波长为 50nm ，求在透镜焦平面处屏幕上呈现的爱里斑半径，如果圆孔半径改为 1.0mm ，其他条件不变（包括入射光能流密度保持不变），爱里斑的半径变为多大？

解 爱里斑半径：

$$R = f \cdot \theta_0 = f \frac{1.22\lambda}{D} = 50 \times \frac{1.22 \times 500 \times 10^{-7}}{2 \times 0.010} = 0.15(\text{cm})$$

若孔径改为 1.0mm ，则爱里斑半径：

$$R = f \cdot \theta_0 = f \frac{1.22\lambda}{D} = 50 \times \frac{1.22 \times 500 \times 10^{-7}}{2 \times 0.10} = 0.015(\text{cm})$$

11-31 在迎面驶来的汽车上，两盏灯相距 120cm ，试问汽车离人多远的地方，眼睛恰可分辨这两盏灯？设夜间人眼孔直径为 5.0mm ，入射光波长 $\lambda = 550\text{nm}$ 。（这里仅考虑人眼圆瞳孔的衍射效应）

解 有人眼最小可分辨角为（在空气中）

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{a} = 1.22 \times \frac{550 \times 10^{-7}}{0.50} = 1.34 \times 10^{-4}(\text{rad})$$

而 $l \cdot \theta = \Delta x$ ，所以眼睛恰巧分辨两盏灯的距离为

$$l = \frac{\Delta x}{\theta} = \frac{1.20}{1.34 \times 10^{-4}} = 8.95 \times 10^3(\text{m})$$

11-32 已知天空中两颗星相对于一望远镜的角距离为 $4.84 \times 10^{-6}\text{rad}$ ，它们都发出波长为 $\lambda = 550\text{nm}$ 的光，试问：望远镜的口径至少要多大，才能分辨出这两颗星？

解 由最小分辨角公式 $\delta\phi = 1.22 \frac{\lambda}{d}$ ，得

$$d = 1.22 \frac{\lambda}{\delta\phi} = 1.22 \times \frac{550 \times 10^{-7}}{4.84 \times 10^{-6}} = 13.8(\text{cm})$$

11-33 一光源发射的红双线在波长 $\lambda = 656.3\text{nm}$ 处，两条谱线的波长差 $\Delta\lambda = 0.18\text{nm}$ ，今有一光栅可以在第一级中把这两条谱线分辨出来，试求该光栅所需的最小刻线总数。

解 根据光栅分辨率公式 $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN$ ，令 $k=1$ ，刻线总数最少为

$$N = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{656.3}{0.18} = 3647$$

11-34 一光栅宽为 6.0cm ，每厘米有 6000 条刻线，问在第三级谱线中，对 $\lambda = 500\text{nm}$ 处，可分辨的最小波长间隔是多少？

解 光栅刻线总数 $N = 6000 \times 6.0 = 3.6 \times 10^4$ ，由公式 $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN$ ，得

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{kN} = \frac{500}{3 \times 3.6 \times 10^4} = 4.6 \times 10^{-3}(\text{nm})$$

11-35 将偏振化方向相互平行的两块偏振片 M 和 N 共轴平行放置，并在他们之间平行地插入另一块偏振片 B，B 与 M 的偏振化方向之间的夹角为 θ ，若用强度为 I_0 的单色自然光垂

直入射到偏振片 M 上，并假定不计偏振片对光能量的吸收，试问透过检偏器 N 的出射光强将如何随 θ 角而变化？

解 根据马吕斯定律可得出射光强：

$$I = \frac{1}{2} I_0 \cos^4 \theta$$

11-36 根据布儒斯特定律可以测得不透明介质的折射率，今测得釉质的起偏振角 $i_0 = 58^\circ$ ，

试求它的折射率

解 根据布儒斯特定律，釉质的折射率：

$$n = \tan i_0 = \tan 58^\circ = 1.60$$

11-37 水的折射率为 1.33，玻璃的折射率为 1.50，当光由水中射向玻璃而反射时，起偏振角为多少？问光由玻璃射向水中而反射时，起偏振角又为多少？这两个起偏角的数值间是什么关系？

解 根据布儒斯特定律，设光由水射向玻璃的起偏角为 i_0 ，由玻璃射向水的起偏振角为 i'_0 ，则

$$\tan i_0 = \frac{n_{\text{玻}}}{n_{\text{水}}} = \frac{1.50}{1.33}, \quad i_0 = 48^\circ 26'$$
$$\tan i'_0 = \frac{n_{\text{水}}}{n_{\text{玻}}} = \frac{1.33}{1.50}, \quad i'_0 = 41^\circ 34'$$

可见两角互余。

习题精解

12-1 在狭义相对论的基本理论中,相对性原理说的是_____ ;光速不变原理说的是_____.

解 所有惯性系对一切物理定律都是等价的;在所有惯性系中,真空中的光速具有相同的量值 c 。

12-2 以速度 u 相对地球做匀速直线运动的恒心所发射的光子,其相对于地球的速度大小为_____.

解 根据光速不变原理可知,光子相对于地球的速度大小为 c 。

12-3 宇宙飞船相对于地面以速度 u 作匀速直线飞行,某一时刻飞船头部的宇航员向飞船尾部发出一个光讯号,经 Δt 时间后,被尾部的接收器收到,则由此可知飞船的固有长度为 ().

- A. $c\Delta t$ B. $u\Delta t$ C. $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}c\Delta t$ D. $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \cdot c\Delta t$

解 根据光速不变的原理可知,光相对于宇宙飞船的速度为 c ,所以飞船的固有长度为,应选择 A.

12-4 一张正方形宣传画,边长为 5m ,在平行于铁路的墙上,一列高速火车以每小时 210 公里的速度接近此宣传画,在司机看来,此画形状是_____,面积为_____.

解 根据长度的收缩效应可知,当高速火车接近此宣传画时,此画形状应是长方形。

$$u = 210\text{km} \cdot \text{h}^{-1} = 58.3\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(58.3)^2}{(3 \times 10^8)^2}}} \approx 1$$

所以此画的面积大约为 25m^2 。

12-5 S 系中的观察者有一根米尺固定在 x 轴上,其两端各装一手枪,在 S' 系中的 x' 轴上固定有另一根长尺,当后者从前者旁边经过是,S 系中的观察者同时扳动两手枪,使子弹在 S' 系中尺上打出两个记号。则在 S' 系中两个记号之间的距离 $\Delta x'$ _____ 1m (大于、等于、小于)。

解 由题意可知,在 S 系中的观察者观测到 S' 系中两个记号之间的就离为 1m ,根据长度的收缩效应,在 S' 系中两个记号之间的距离 $\Delta x'$ 应大于 1m 。

12-6 在地球上进行的一场足球赛保持了 90min ,在以 $0.80c$ 的速度飞行的光子火箭中的乘客看来,这场球赛进行了 ()

- A. $1h$ B. $2h$ C. $2.5h$ D. $54h$

解 因为 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{0.6} \approx 1.67$

所以坐在光子火箭中的乘客看来,这场球赛进行的时间为

$$\Delta t' = \gamma \Delta t = 1.67 \times 90 \approx 150\text{min} = 2.5h$$

12-7 静止的子的平均寿命为 $\tau_0 = 2 \times 10^{-6} s$ ，今在 8km 的高空，由于 π 介质的衰变产生一个速度为 $0.998c$ 的 μ 子，试论证此 μ 子的有无可能到达地面。

解 因为 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 15.82$ ，所以地面观测者观测到 μ 子的寿命为

$\tau = \gamma \tau_0 \approx 3.2 \times 10^{-5} (s)$ ，飞行距离为 $l = 0.998c \cdot \tau \approx 9.6 \times 10^3 = 9.6(km)$ ，因此 μ 子可以到达地面。

12-8 质子在加速器中被加速，当动能为静止能量为 4 倍时，其质量为静止质量的_____倍。

解 因为 $E_k = 4m_0c^2$

又 $E_k = mc^2 - m_0c^2$

所以 $m = 5m_0$

12-9 某人测得一静止棒长为 L_0 ，质量为 m ，当此棒相对于人以速度 u 沿棒长方向运动时，则此人再测棒的线密度为_____。

解 当棒对于人以速度 u 沿棒长方向运动时，其长度为 $l = L_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$ ，质量为

$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ ，所以棒的线密度为 $\lambda = \frac{m'}{l} = \frac{m}{L_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$

12-10 在实验室测得氢发射的光谱中有一长条波长 $\lambda = 121.6nm$ 的谱线，若测得一星体发出的氢光谱中和此波长相对应的 $\lambda = 430.4nm$ ，则发射此光的星体相对地球的速度为多少？它是靠近还是远离地球？

解 波长 $\lambda = 121.6nm$ 的谱线所对应的频率为 $\nu_0 = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{121.6 \times 10^{-6}} = 2.45 \times 10^{12} (Hz)$ 。

波长 $\lambda = 430.4nm$ 的谱线所对应的频率为 $\nu_0 = \frac{c}{\lambda} = 1.7 \times 10^{12} (Hz)$

根据多普勒效应公式 $\nu = \sqrt{\frac{c+u}{c-u}} \cdot \nu_0$ ，解得 $u = -0.35c = -1.05 \times 10^8 (m \cdot s^{-1})$ ，负号说明星体远离地球。

12-11 宇宙飞船以 $0.8c$ 速度远离地球（退行速度），在此过程中飞船向地球发出两个光信号，间隔为 Δt_e ，问地球上接收到它发出的两个光信号间隔 Δt_r 为多少？

解 以宇宙飞船为 k' 系，地球为 k 系，在 k' 系中观测时间间隔为 Δt_e ，在 k 系中观测到的

时间间隔为

$$\Delta t = \gamma \Delta t_e$$

地球上接收到它发出的两个光信号间隔为

$$\Delta t_r = \Delta t + \frac{\Delta t \bullet u}{c} = \gamma \Delta t_e \left(1 + \frac{u}{c} \right) = \Delta t_e \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 3\Delta t_e$$

12-12 在实验室中测得电子的速度是 $0.8c$ ，假设一观察者相对于实验室以 $0.6c$ 的速度运动，其方向与电子的运动方向相同，试求观察者测得的电子的能量、动能和动量。

解 以实验室为 k 系，以观测者为 k' 系，则 k' 系相对于 k 系的速度为 $u = 0.6c, v_x = 0.8c$ ，

观测者测得电子的速度为

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}} = 0.35c$$

观测者测得电子的总能量为

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v'_x}{c} \right)^2}} = 8.75 \times 10^{-14} (J)$$

观测者测得电子的动能为

$$E_k = E - m_0 c^2 = 5.5 \times 10^{-15} (J)$$

观测者测得电子的动能为

$$p = mv' = 1.02 \times 10^{-22} (kg \bullet m \bullet s^{-1})$$

12-13 两个静质量为 m_0 的粒子，其中一个静止，另一个以 $u_0 = 0.8c$ 运动，它们对心碰撞以后粘在一起，求碰撞后合成粒子的静质量。

解 运动的粒子的动量为

$$P = mu_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \bullet u_0 = \frac{m_0}{0.6} \bullet 0.8c = \frac{4m_0 c}{3}$$

由动量守恒定律可知，碰撞后合成粒子的动量为

$$\frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} = \frac{4m_0 c}{3}$$

合成粒子的总能量为

$$E = Mc^2 = m_0 c^2 + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \bullet c^2 = 2.667 m_0 c^2$$

于是对于合成粒子有

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2.667m_0$$

连立 (1)、(2) 式解得合成粒子的静止质量为 $M_0 = 2.31m_0$

12-14 在地球—月球系中测得地球到月球的距离为 $3.844 \times 10^8 m$ ，一火箭以 $0.8c$ 的速率沿着从地球到月球的方向飞行，先经过地球（事件 1），之后又经过月球（事件 2）。问在地球—月球系和火箭系中观测，火箭由地球飞向月球各需多少时间？

解 在地球—月球系中观测，火箭由地球飞向月球需要的时间为

$$\Delta t_1 = \frac{S}{v} = \frac{3.844 \times 10^8}{0.8 \times 3 \times 10^8} = 1.6(s)$$

由题意知 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.8c}{c}\right)^2}} \approx 1.67$ ，在火箭系中观测，火箭由地球飞向月球所需要的时间为

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta t_1}{\gamma} = 0.96(s)$$

12-15 粒子的静止质量为 m_0 ，当其动能等于其静能是，其质量和动量各等于多少？

解 由题意知 ($E = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2$ 静止能量)

解得

$$m = 2m_0$$

根据相对论能量和动量的关系： $E^2 = p^2c^2 + E_0^2$ 得

$$p = \sqrt{\frac{E^2 - E_0^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{(2m_0)^2 c^4 - m_0^2 c^4}{c^2}} = \sqrt{3}m_0c$$

12-16 相对基本粒子 μ 子为静止的惯性系中测得它的平均寿命为 $\tau_0 = 2.2 \times 10^{-6} s$ 。当 μ 子以速度 $u = 0.9966c$ 相对实验室运动时，在实验室测得它通过的平均距离为，问：

(1) 按照经典理论， μ 子从产生到湮没通过的平均距离为多少？

(2) 按照相对论， μ 子从产生到湮没通过的平均距离又是多少？

(3) 将 (1)，(2) 的计算结果与试验结果比较可以说明什么？

解 (1) 按照经典理论， μ 子从产生的到湮没通过的平均距离为

$$S = u\tau_0 = 0.9966c \times 2.2 \times 10^{-6} = 657.756(m)$$

(2) 按照相对论， μ 子从产生到湮没同伙的平均距离为

$$S' = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \bullet u = 7983 \approx 8 \times 10^3 (m)$$

(3) 前两问的计算结果与实验结果比较可以说明对高速运动的粒子，经典理论是不适应的，而按照相对论计算的结果和实验符合得很好，对高速运动的粒子狭义相对论是适应的。

12-17 一根米尺静止在 K' 系中，与轴成 30° 角，如果在 K 系中测得该米尺与 x 轴的夹角为 45° 角，试求 K' 系的速度为多少？在 K 系中测得米尺的长度是多少？

解 如图 12.1 所示，由题意知：

$$\Delta x' = L_0 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} (m)$$

$$\Delta y' = L_0 \sin 30^\circ = \frac{1}{2} (m)$$

$$\Delta x = \Delta y \cot 45^\circ = \Delta y = \Delta y' = \frac{1}{2} (m)$$

根据长度收缩效应得

$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

解得

$$u = 0.816c$$

在 K 系中测得米尺的长度为：

$$L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707 (m)$$

习题精解

13-1 钾的截止频率为 $4.62 \times 10^{14} \text{ Hz}$ ，今用波长为 435.8 nm 的光照射，求从钾的表面上放出的光电子的初速度

解 因为 $h\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + W, W = h\nu_0, \nu = \frac{c}{\lambda}$ 所以从钾表面放出光电子的初速度为

$$v = \sqrt{\frac{2h}{m} \left(\frac{c}{\lambda} - \nu_0 \right)} = 5.74 \times 10^5 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

注意：这里认为逸出金属的光电子速度很小，因此计算中取电子的静质量。

13-2 波长为 0.0708 nm 的 X 射线在石蜡上受到康普顿散射，求在 $\frac{\pi}{2}$ 和 π 方向上说散射的 X 射线的波长各是多大？

解 在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的方向上，有

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2 \times 0.00243 \sin^2 \frac{\pi}{4} = 0.00243 (\text{nm})$$

所以在该方向上的波长为

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = 0.0708 + 0.00243 = 0.0732 (\text{nm})$$

在 $\theta = \pi$ 的方向上，有

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2 \times 0.00243 \sin^2 \frac{\pi}{2} = 0.00486 (\text{nm})$$

所以在该方向上的波长为

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = 0.0708 + 0.00486 = 0.0756 (\text{nm})$$

13-3 试计算原子光谱中莱曼线系的最段和最长波长，并指出是否为可见光。

解 对于莱曼线系有 $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right), n = 2, 3, 4, \dots$

令 $n=2$ ，则可得到莱曼线系中最长的波长为 $\lambda_{21\text{max}} = 121.5 \text{ nm}$ ；令 $n = \infty$ ，则可得到莱曼线

系中最短的波长为 $\lambda_{\infty 1\text{min}} = 91.2 \text{ nm}$ ，它们均不在可见光的范围，因此可知莱曼线系不属于可见光的范畴。

13-4 试求：（1）红光 $\lambda = 700 \text{ nm}$ ；（2）X 射线 $\lambda = 0.025 \text{ nm}$ ；（3） γ 射线 $\lambda = 0.00124 \text{ nm}$

的光子的能量、动量和质量。

解（1）对于红光有

$$E = h\nu = \frac{hc}{\nu} = 1.60 \times 10^{-13} (J)$$

$$P = \frac{E}{c} = 5.35 \times 10^{-22} (kg \cdot m \cdot s^{-1}), m = \frac{E}{c^2} = 1.78 \times 10^{-30} (kg)$$

(2) 对于 X 射线有

$$E = h\nu = \frac{hc}{\nu} = 2.84 \times 10^{-19} (J)$$

$$P = \frac{E}{c} = 9.47 \times 10^{-28} (kg \cdot m \cdot s^{-1}), m = \frac{E}{c^2} = 3.16 \times 10^{-36} (kg)$$

(3) 对于 γ 射线有

$$E = h\nu = \frac{hc}{\nu} = 7.96 \times 10^{-15} (J)$$

$$P = \frac{E}{c} = 2.56 \times 10^{-23} (kg \cdot m \cdot s^{-1}), m = \frac{E}{c^2} = 8.84 \times 10^{-32} (kg)$$

13-5 求速度 $v = \frac{c}{2}$ 的电子的物质波的波长。

解 电子的物质波的波长为

$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{m_0 v} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{2h}{m_0} \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = 0.00421 (nm)$$

13-6 一电子有沿 x 轴方向的速率，其值为 $200m \cdot s^{-1}$ 。动量的不确定量的相对值 $\frac{\Delta P_x}{P_x}$ 为

0.01%。若这时确定该电子的位置将有多大的不确定量？

解 因为 $\frac{\Delta P_x}{P_x} = \frac{\Delta v_x}{v_x} = 0.01\%$ ，所以 $\Delta v_x = 0.01\% v_x = 0.02 (m \cdot s^{-1})$ 。

又因为 $\Delta x \cdot (m \Delta v_x) \geq \frac{h}{2}$ ，所以有 $\Delta x \geq \frac{h}{2(m \Delta v_x)} = 0.0029m$ ，可见电子的动量越确定，则

位置越不确定。

13-7 一个粒子沿 x 轴的正方向运动，设它的运动可以用下列波函数来描述：

$$\psi(x) = \frac{C}{1+ix}$$

试求：(1) 归一化常数 C；(2) 求概率密度 $|\psi(x)|^2$ ；(3) 何处概率密度最大？

解 (1) 因为

$$\int |\psi(x)|^2 dx = \int \psi(x) \cdot \psi^*(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C^2}{1+x^2} dx = \pi C^2 = 1$$

所以归一化常数为

$$C = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

(2) 概率密度为

$$|\psi(x)|^2 = \psi(x) \bullet \psi^*(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

(3) 从概率密度的表达式可以看出, 概率密度最大的位置及最大值为

$$|\psi(x)|_{\max}^2 = |\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi}$$

13-8 当 $n=2$ 时, 宽度为 a 的一维无限深方势阱壁附近的概率密度有多大? 哪里的概率密度最大?

解 当 $n=2$ 时一维无限深方势阱中粒子的波函数为

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$$

所以概率密度的表达式为

$$|\psi_2(x)|^2 = \psi_2(x) \bullet \psi_2^*(x) = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$$

于是势阱壁附近的概率密度为

$$|\psi_2(0)|^2 = 0 \quad \text{和} \quad |\psi_2(a)|^2 = 0$$

令 $\sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right) = 1$, 则可得概率密度最大时的位置为

$$x = \frac{1}{4}a \quad \text{和} \quad x = \frac{3}{4}a$$

13-9 在宽为 a 的一维无限深方势阱中, 当 $n=1,2,3$, 求介于壁阱和 $\frac{a}{3}$ 之间粒子出现的概率。

解 宽为 a 的一维无限深方势阱中粒子的波函数为

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

粒子出现的概率密度为

$$|\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

所以 $n=1$ 时

$$\int_0^{\frac{a}{3}} |\psi_1(x)|^2 dx = \int_0^{\frac{a}{3}} \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) dx = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$$

$n=2$ 时

$$\int_0^{\frac{a}{3}} |\psi_2(x)|^2 dx = \int_0^{\frac{a}{3}} \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right) dx = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8\pi}$$

n=3 时

$$\int_0^{\frac{a}{3}} |\psi_n(x)|^2 dx = \int_0^{\frac{a}{3}} \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \frac{1}{3}$$