

离散数学概论

第二章 一阶逻辑 一命题逻辑推理

课程QQ号: **819392514**

金耀 数字媒体技术系

fool1025@163.com

13857104418

量词辖域收缩与扩张等值式

设 $A(x)$ 是含 x 自由出现的公式， B 中不含 x 的出现

关于全称量词的：

$$\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \vee B$$

$$\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge B$$

$$\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \rightarrow B$$

$$\forall x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall xA(x)$$

关于存在量词的：

$$\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee B$$

$$\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \wedge B$$

$$\exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \rightarrow B$$

$$\exists x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists xA(x)$$

量词分配等值式

$$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$$

$$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$

$$\forall x(A(x) \vee B(x)) \not\Leftrightarrow \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$$

$$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \not\Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$$

$$(\forall x)(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow (\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)$$

$$(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$$

注意： \forall 对 \vee 无分配律， \exists 对 \wedge 无分配律。

前束范式

定义 设 A 为一个一阶逻辑公式，若 A 具有如下形式 $Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_kx_kB$ ，则称 A 为**前束范式**，其中 $Q_i (1 \leq i \leq k)$ 为 \forall 或 \exists ， B 为不含量词的公式。

所有的量词都非否定的在公式前面，没有括号分割，使得它们的辖域延伸至整个公式。

前束范式

例如, $\forall x \exists y (F(x) \rightarrow (G(y) \wedge H(x, y)))$

$$\forall x \neg (F(x) \wedge G(x))$$

是前束范式

$$\forall x (F(x) \rightarrow \exists y (G(y) \wedge H(x, y)))$$

$$\neg \exists x (F(x) \wedge G(x))$$

不是前束范式。

公式的前束范式

定理（前束范式存在定理） 一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式。

注意：

公式的前束范式**不唯一**

求公式的前束范式的方法：利用重要等值式、置换规则、换名规则、代替规则进行等值演算。

计算公式前束范式的步骤

- 1) 消除多余量词；
- 2) 消去公式中的联结词 \rightarrow 和 \leftrightarrow (为了便于量词辖域的扩充)；
- 3) \neg 后移：如果量词前有“ \neg ”，则用量词否定公式将“ \neg ”后移。再用德摩根定律或求公式的否定公式，将“ \neg ”后移到原子谓词公式之前。
- 4) 变元换名：用约束变元的改名规则或自由变元的代入规则对变元换名 (为量词辖域扩充作准备)；
- 5) 提取量词：用量词辖域扩充公式提取量词，使之成为前束范式形式。

公式的前束范式(续)

例 求下列公式的前束范式

$$(1) \neg \exists x(M(x) \wedge F(x))$$

解 $\neg \exists x(M(x) \wedge F(x))$

$$\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x) \vee \neg F(x)) \quad (\text{量词否定等值式})$$

$$\Leftrightarrow \forall x(M(x) \rightarrow \neg F(x))$$

两步结果都是前束范式，说明前束范式不唯一。

例(续)

$$(2) \quad \forall x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$$

解 $\forall x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall x \neg G(x)$$

(量词否定等值式)

$$\Leftrightarrow \forall x (F(x) \wedge \neg G(x))$$

(量词分配等值式)

另有一种形式

$$\forall x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall x \neg G(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall y \neg G(y)$$

(换名规则)

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (F(x) \wedge \neg G(y))$$

(量词辖域扩张)

两种形式是等值的

例(续)

$$(3) \exists x F(x) \vee \neg \forall x G(x)$$

$$\text{解} \quad \exists x F(x) \vee \neg \forall x G(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x F(x) \vee \exists x \neg G(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (F(x) \vee \neg G(x))$$

$$\text{或} \quad \Leftrightarrow \exists x \exists y (F(x) \vee \neg G(y))$$

$$(4) \forall x F(x) \rightarrow \exists y (G(x, y) \wedge \neg H(y))$$

$$\text{解} \quad \forall x F(x) \rightarrow \exists y (G(x, y) \wedge \neg H(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall z F(z) \rightarrow \exists y (G(x, y) \wedge \neg H(y)) \quad (\text{换名规则})$$

$$\Leftrightarrow \exists z \exists y (F(z) \rightarrow (G(x, y) \wedge \neg H(y)))$$

例(续)

或 $\Leftrightarrow \forall x F(x) \rightarrow \exists y (G(z, y) \wedge \neg H(y))$ (代替规则)

$\Leftrightarrow \exists x \exists y (F(x) \rightarrow (G(z, y) \wedge \neg H(y)))$

(5) $\forall x (F(x, y) \rightarrow \exists y (G(x, y) \wedge H(x, z)))$

解 $\forall x (F(x, y) \rightarrow \exists y (G(x, y) \wedge H(x, z)))$

$\Leftrightarrow \forall x (F(x, u) \rightarrow \exists y (G(x, y) \wedge H(x, z)))$

$\Leftrightarrow \forall x \exists y (F(x, u) \rightarrow G(x, y) \wedge H(x, z))$

注意：x与y不能颠倒

例题

❖ 求 $(\forall x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)$ 的前束范式

❖ 求 $\forall x A(x, y) \rightarrow \forall y B(y)$ 的前束范式

$$\Leftrightarrow \forall x A(x, y) \rightarrow \forall z B(z)$$

$$\Leftrightarrow \neg \forall x A(x, y) \vee \forall z B(z)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg A(x, y) \vee \forall z B(z)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \forall z (\neg A(x, y) \vee B(z))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \forall z (A(x, y) \rightarrow B(z))$$

第二章 一阶逻辑

1. 一阶逻辑的基本概念
2. 一阶逻辑合式公式及解释
3. 一阶逻辑等值式
4. 逻辑推理理论



人工智能的三大学派

- ❖ **符号主义**: 在用数学和物理学中的逻辑符号来表达思维的形成, 通过大量的“如果-就”规则定义, 产生像人一样的智能。
- ❖ **连接主义**: 主张智能来自神经元之间的连接, 它让计算机模拟人类大脑中的神经网络及其连接机制, 如人工神经网络。
- ❖ **行为主义**: 基于感知行为的控制系统, 使每个基本单元实现自我优化和适应, 这也是一个自下而上的过程, 典型的代表有进化算法、多智能体、强化学习等。

本讲主要内容

- 命题逻辑推理理论
- 一阶逻辑推理理论



推理形式

推理的形式结构为：

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_K \rightarrow B$$

若该式是逻辑有效式,则称推理正确,

B 是 A_1, A_2, \dots, A_K 的逻辑结论。

此时将该式记为:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_K \Rightarrow B$$

命题逻辑推理理论

- 真值表法
 - 等值演算法
 - 构造证明法
- } 判断推理是否正确
- 证明推理正确

说明：用前3个方法时采用形式结构

“ $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$ ”.

用构造证明时，采用

“前提： A_1, A_2, \dots, A_k , 结论： B ”.

实例

例 判断下面推理是否正确

(1) 若今天是1号，则明天是5号. 今天是1号. 所以明天是5号。

解 设 p ：今天是1号， q ：明天是5号.

推理的形式结构为：

$$\begin{aligned} & (p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q \\ \Leftrightarrow & \neg((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q \\ \Leftrightarrow & \neg p \vee \neg q \vee q \Leftrightarrow 1 \end{aligned}$$

得证推理正确

实例 (续)

(2) 若今天是1号, 则明天是5号. 明天是5号. 所以今天是1号.

解 设 p : 今天是1号, q : 明天是5号.

推理的形式结构为: $(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$

证明 (用主析取范式法)

$$(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge q \rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow \neg ((\neg p \vee q) \wedge q) \vee p$$

$$\Leftrightarrow \neg q \vee p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_3$$

结果不含 m_1 , 故01是成假赋值, 所以推理不正确.

推理定律——重言蕴涵式

重要的推理定律

$$A \Rightarrow (A \vee B)$$

$$(A \wedge B) \Rightarrow A$$

$$(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$$

$$(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$$

$$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$$

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$$

$$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$$

$$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$$

附加律

化简律

假言推理

拒取式

析取三段论

假言三段论

等价三段论

构造性二难

推理定律 (续)

$$(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \Rightarrow B$$

构造性二难 (特殊形式)

$$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$$

破坏性二难

证明: 描述推理过程的命题公式序列, 其中每个命题公式或者是已知的前提, 或者是由前面的命题公式应用推理规则得到的结论。

关于“二难”

❖ 二难：若有两个命题 A 和 B ，其对应推论 C 和 D 都让人“为难”，但 A 和 B 至少需成立其一，因此无论如何都将令人“为难”。

例：往届采用答题派系统提交习题。答题派试用的第一年，我没有退回作业的权限。经常有同学在答题派提交0分作业，要求我退回，这使我左右为难：如果退回，则我得经常向维护者提出请求，会打扰他；如果不退回，则同学将有意见。因此，无论我选择退回还是不退回，都将陷于二难境地。

推理规则

(1) 前提引入规则

(2) 结论引入规则

(3) 置换规则

(4) 假言推理规则

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{\therefore B}$$

(5) 附加规则

$$\frac{A}{\therefore A \vee B}$$

(6) 化简规则

$$\frac{A \wedge B}{\therefore A}$$

(7) 拒取式规则

$$\frac{A \rightarrow B \quad \neg B}{\therefore \neg A}$$

(8) 假言三段论规则

$$\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow C}{\therefore A \rightarrow C}$$

推理规则(续)

(9) 析取三段论规则

$$\frac{A \vee B \quad \neg B}{\therefore A}$$

(10) 构造性二难推理规则

$$\frac{A \rightarrow B \quad C \rightarrow D \quad A \vee C}{\therefore B \vee D}$$

(11) 破坏性二难推理规则

$$\frac{A \rightarrow B \quad C \rightarrow D \quad \neg B \vee \neg D}{\therefore \neg A \vee \neg C}$$

(12) 合取引入规则

$$\frac{A \quad B}{\therefore A \wedge B}$$

构造证明之一——直接证明法

例 构造下面推理的证明：

若明天是星期一或星期三，我就有课。若有课，今天必备课。我今天下午没备课。所以，明天不是星期一和星期三。

**解 设 p ：明天是星期一， q ：明天是星期三，
 r ：我有课， s ：我备课**

推理的形式结构为

前提： $(p \vee q) \rightarrow r, r \rightarrow s, \neg s$

结论： $\neg p \wedge \neg q$

直接证明法 (续)

证明

① $r \rightarrow s$

前提引入

② $\neg s$

前提引入

③ $\neg r$

①②拒取式

④ $(p \vee q) \rightarrow r$

前提引入

⑤ $\neg(p \vee q)$

③④拒取式

⑥ $\neg p \wedge \neg q$

⑤置换

构造证明之二——附加前提证明法

欲证明

前提: A_1, A_2, \dots, A_k

结论: $C \rightarrow B$

等价地证明

前提: A_1, A_2, \dots, A_k, C

结论: B

理由:

$$\begin{aligned} & (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow (C \rightarrow B) \\ \Leftrightarrow & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \vee (\neg C \vee B) \\ \Leftrightarrow & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge C) \vee B \\ \Leftrightarrow & (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge C) \rightarrow B \end{aligned}$$

附加前提证明法 (续)

例 构造下面推理的证明：

2是素数或合数。若2是素数，则 $\sqrt{2}$ 是无理数。若 $\sqrt{2}$ 是无理数，则4不是素数。所以，如果4是素数，则2是合数。

用附加前提证明法构造证明

解 设 p ：2是素数， q ：2是合数，
 r ： $\sqrt{2}$ 是无理数， s ：4是素数

推理的形式结构

前提： $p \vee q, p \rightarrow r, r \rightarrow \neg s$

结论： $s \rightarrow q$

附加前提证明法 (续)

证明

① s

附加前提引入

② $p \rightarrow r$

前提引入

③ $r \rightarrow \neg s$

前提引入

④ $p \rightarrow \neg s$

②③假言三段论

⑤ $\neg p$

①④拒取式

⑥ $p \vee q$

前提引入

⑦ q

⑤⑥析取三段论

请用直接证明法证明之

构造证明之三——归谬法(反证法)

欲证明

前提: A_1, A_2, \dots, A_k

结论: B

将 $\neg B$ 加入前提, 若推出矛盾, 则得证推理正确.

理由:

$$\begin{aligned} & A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B \\ \Leftrightarrow & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \vee B \\ \Leftrightarrow & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B) \end{aligned}$$

括号内部为矛盾式当且仅当 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B)$ 为重言式。

归谬法 (续)

例 构造下面推理的证明

前提: $\neg(p \wedge q) \vee r, r \rightarrow s, \neg s, p$

结论: $\neg q$

证明 (用归谬法)

① q

结论否定引入

② $r \rightarrow s$

前提引入

③ $\neg s$

前提引入

④ $\neg r$

②③拒取式

归谬法 (续)

$$\textcircled{5} \neg(p \wedge q) \vee r$$

前提引入

$$\textcircled{6} \neg(p \wedge q)$$

$\textcircled{4}\textcircled{5}$ 析取三段论

$$\textcircled{7} \neg p \vee \neg q$$

$\textcircled{6}$ 置换

$$\textcircled{8} \neg p$$

$\textcircled{1}\textcircled{7}$ 析取三段论

$$\textcircled{9} p$$

前提引入

$$\textcircled{10} \neg p \wedge p$$

$\textcircled{8}\textcircled{9}$ 合取

请用直接证明法证明之

构造证明之四—归结证明法(*)

归结规则

$$\frac{A \vee B \quad \neg A \vee C}{\therefore B \vee C}$$

理由：

$$\begin{aligned} & (p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r) \\ \Leftrightarrow & \neg((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \vee (q \vee r) \\ \Leftrightarrow & (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r) \vee q \vee r \\ \Leftrightarrow & ((\neg p \wedge \neg q) \vee q) \vee ((p \wedge \neg r) \vee r) \\ \Leftrightarrow & (\neg p \vee q) \vee (p \vee r) \\ \Leftrightarrow & 1 \end{aligned}$$

归结证明法的基本步骤

1. 将每一个前提化成等值的合取范式, 设所有合取范式的

全部简单析取式为 A_1, A_2, \dots, A_t

2. 将结论的否定化成等值的合取范式 $B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_s$, 其中

每个 B_j 是简单析取式

3. 以 A_1, A_2, \dots, A_t 和 B_1, B_2, \dots, B_s 为前提, 使用归结规则推出0

除前提引入规则外, 只使用归结规则

实例

例6 用归结证明法构造下面推理的证明:

前提: $(p \rightarrow q) \rightarrow r, r \rightarrow s, \neg s$

结论: $p \wedge \neg q$

$$\text{解 } (p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r \Leftrightarrow$$

$$(p \wedge \neg q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$$

$$r \rightarrow s \Leftrightarrow \neg r \vee s$$

$$\neg(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

把推理的前提改写成

前提: $p \vee r, \neg q \vee r, \neg r \vee s, \neg s, \neg p \vee q$

(结论均为0, 不必写出)

实例(续)

前提: $p \vee r, \neg q \vee r, \neg r \vee s, \neg s, \neg p \vee q$

证明

- ① $p \vee r$
- ② $\neg p \vee q$
- ③ $q \vee r$
- ④ $\neg q \vee r$
- ⑤ r
- ⑥ $\neg r \vee s$
- ⑦ s
- ⑧ $\neg s$
- ⑨ \bot

前提引入

前提引入

①②归结

前提引入

③④归结

前提引入

⑤⑥归结

前提引入

⑦⑧合取

(2) 请根据下面事实，找出凶手：

1. 清洁工或者秘书谋害了经理。
2. 如果清洁工谋害了经理，则谋害不会发生在午夜前。
3. 如果秘书的证词是正确的，则谋害发生在午夜前。
4. 如果秘书的证词不正确，则午夜时屋里灯光未灭。
5. 如果清洁工富裕，则他不会谋害经理。
6. 经理有钱且清洁工不富裕。
7. 午夜时屋里灯灭了。

命题符号为：

$A \vee B, A \rightarrow \neg C, D \rightarrow C, \neg D \rightarrow \neg E, H \rightarrow \neg A, G \wedge \neg H, E \Rightarrow ?$

令A:清洁工谋害了经理。 B:秘书谋害了经理。

C:谋害发生在午夜前。 D:秘书的证词是正确的。

E:午夜时屋里灯光灭了。 H:清洁工富裕。

G:经理有钱。

$A \vee B, A \rightarrow \neg C, B \rightarrow C, D \rightarrow C, \neg D \rightarrow \neg E, H \rightarrow \neg A, G \wedge \neg H, E \Rightarrow ?$

(1) E

(2) $\neg D \rightarrow \neg E$

前提

(3) $\neg \neg D$

拒取式

(4) D

(5) $D \rightarrow C$

前提

(6) C

假言推理

(7) $A \rightarrow \neg C$

前提

(8) $\neg A$

拒取式

(9) $A \vee B$

前提

(10) B

拒取式

结果是秘书谋害了经理。

课堂练习

❖ 前提: $p \vee q, \neg p \vee r, \neg r \vee s$, 结论: $q \vee s$

❖ 前提: $\neg p \vee q \vee r, \neg p, \neg r$, 结论: $\neg q$

证明方法总结

直接证明法： 当 A 为真时 B 为真, 则 $A \rightarrow B$ 为真.

间接证明法： $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$.

归谬法(反证法)： 设 A 成立, 假设 B 不成立, 推出矛盾.

归结法： 若 A 或 B 成立, 且非 A 或 C 成立, 则 B 或 C 成立.

分情况证明法： 待证明的命题形式为 $A = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_k \vee B$,

证明 $A_1 \rightarrow B, A_2 \rightarrow B, \dots, A_k \rightarrow B$ 均为真.

构造性证明法： 在 A 为真的条件下, 构造具有这种性质的客体.

数学归纳法： 命题形式: $\forall x(x \in N \wedge x \geq n_0), P(x)$

(1) **归纳基础** 证 $P(n_0)$ 为真

(2) **归纳步骤** $\forall x(x \geq n_0)$, 假设 $P(x)$ 为真, 证 $P(x+1)$ 为真.

构造性证明

❖ 源自希腊的西方数学主要遵循“公理化”的原则来搭建理论大厦；
而中国古代数学的传统却着重于构造性算法化的证明，因而适合现代计算机科学发展的脉络。 ——吴文俊

❖ 例：罗尔定理、拉格朗日中值定理

❖ 例：水仙花数 (153,370,371,407)

一个非构造性证明的例子

❖ 证明存在无理数 x, y 使得 x^y 是有理数.

证：对于无理数 $\sqrt{2}$ ，考察 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 。

若它是有理数，则 $x=y=\sqrt{2}$ 都是无理数；

若它是无理数，令 $x=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ， $y=\sqrt{2}$ ，则 $x^y=2$ 是有理数。

应用：吴氏几何定理机器证明

基于吴方法的自动几何定理证明大致步骤如下：

1. 将几何问题代数化，将给定的几何条件翻译成多项式方程，(hypothesis polynomials) f_1, f_2, \dots, f_r ，将几何结论也翻译成多项式 g_1, g_2, \dots, g_s (conclusion polynomials)
2. 用伪除方法 (pseudodivision) 将条件多项式变换成三角列形式，

$$\begin{cases} f_1 = f_1(u_1, \dots, u_d, x_1) \\ f_2 = f_2(u_1, \dots, u_d, x_1, x_2) \\ \vdots \\ f_r = f_r(u_1, \dots, u_d, x_1, \dots, x_r) \end{cases}$$

代数簇 $V(f_1, \dots, f_r)$ 包含条件多项式生成的代数簇的不可约分支 (irreducible components)



吴文俊 (1919-2017)

3. 用三角列中的多项式伪除结论多项式，如果余式非0，则我们说命题不成立；
4. 检查非退化条件，如果非退化条件满足 (所有初式的乘积非零)，则我们说结论多项式由条件多项式生成。

例：三角形垂心定理

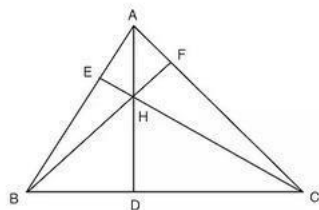


图2. 三角形垂心定理。

例如我们来证明三角形垂心定理：如图2所示，三角形的顶点坐标是

$$A = (u_2, u_3), B = (0, 0), C = (u_1, 0)$$

三个垂足为

$$D = (u_2, 0), E = (x_1, x_2), F = (x_3, x_4)$$

由垂直条件得到多项式方程

$$\begin{aligned}x_2 u_2 - x_1 u_3 &= 0 \\x_4 (u_2 - u_1) - u_3 (x_3 - u_1) &= 0 \\x_2 u_3 + u_2 (x_1 - u_1) &= 0 \\x_4 u_3 + x_3 (u_2 - u_1) &= 0,\end{aligned}$$

我们假设AD和CE交于G点，AD和BF交于H点，

$G = (u_2, x_5)$, $H = (u_2, x_6)$ 。由G、E、C三点共线，H、B、F三点共线，增加方程

$$\begin{aligned}(x_2 - x_5)(x_1 - u_1) - x_2(x_1 - u_2) &= 0 \\x_6 x_3 - x_4 u_2 &= 0\end{aligned}$$

我们需要证明G和H重合，即 $x_5 - x_6 = 0$ 。

例：机器人路径规划

吴方法可以用来求解多项式方程组。将一般的多项式方程组化解为三角列形式，非常类似于线性方程组的高斯消元法

(Gauss elimination)。我们通过数值方法求解单变元多项式 $f_1(u_1, \dots, u_d, x_1) = 0$ ，求得 x_1 ；然后将 x_1 代入第二个方程 $f_2(u_1, \dots, u_d, x_1, x_2) = 0$ ，求得 x_2 ；再将 x_1, x_2 代入第三个方程

$f_3(u_1, \dots, u_d, x_1, x_2, x_3) = 0$ ，求得 x_3 ；以此类推，逐步求得所有的未知变量 (x_1, x_2, \dots, x_r) 。

在机器人 (robotics) 领域，机械臂路径规划是一个经典问题。一条机械臂有多个关节，每个关节有旋转自由度或者伸缩自由度，我们将这些自由度由变元 $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r, d_1, d_2, \dots, d_s)$ 表示。机械手的位置和朝向由这些变元控制，同时它们可以表示成多项式函数：

$f(\cos \theta_1, \sin \theta_1, \cos \theta_2, \sin \theta_2, \dots, \cos \theta_r, \sin \theta_r, d_1, d_2, \dots, d_s)$

同时我们有限制 $\cos^2 \theta_i + \sin^2 \theta_i = 1$ 。在机器人应用中，机器人通过三维扫描获得物体的三维几何位置信息，从而得到最终机械手的位置和朝向，通过反解各个关节的旋转角度，和机械臂的伸缩，使得机械手达到目标位置，从而可以实现抓取。这被称为是逆向运动学问题 (inverse kinematics)，需要求解多项式方程组，而吴方法正是解多项式方程组的有力武器。

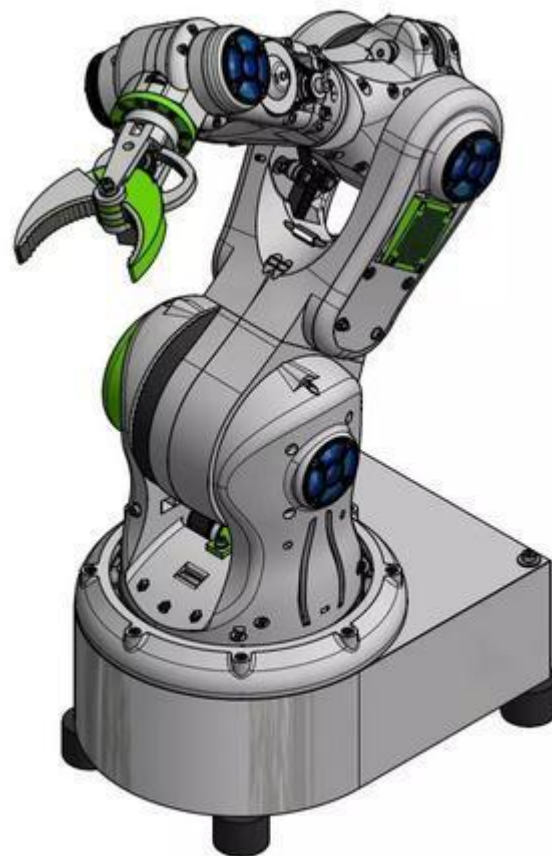


图3. 机械臂逆向运动学。

例：图形渲染

在计算机图形学中，光线跟踪法（Ray Tracing）提供了高质量真实感绘制效果，因而在电影动漫中被广泛应用。许多曲面被表示成带参数的样条曲面（Spline Surface），即为分片多项式或者有理多项式，其一般表示形式为

$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{cases}$$

这里 (f, g, h) 是分片多项式，如图5所示的犹他壶模型（Utah Teapot）。在光线跟踪法中，每条光线被表示成一条射线 $\mathbf{r}(t) = \mathbf{b} + t\mathbf{d}, t \geq 0$ ，我们需要计算射线和曲面的交点，这占据了整个计算时间的95%以上。直接用曲面的参数形式计算交点比较困难，我们需要将曲面变换成隐式形式，即为 $F(x, y, z) = 0$ ，这一过程被称为是参数曲面的隐式化。将射线方程代入隐式曲面，求解关于 t 的一元多项式方程，可以求解交点。参数曲面的隐式化可以直接应用吴方法，消去变元 u, v ，即得隐式曲面。



图5. 光线跟踪法渲染的犹他壶。（Ray Tracing Utah Teapot）

习题

❖ 课后习题: **12, 14, 16, 18;**

❖ 答题派: 右图

1. 1.19 构造下面推理的证明。

(40)

(1) 前提: $\neg(p \wedge \neg q), \neg q \vee r, \neg r.$

结论: $\neg p.$

(2) 前提: $p \rightarrow (q \rightarrow s), q, p \vee \neg r.$

结论: $r \rightarrow s.$

(3) 前提: $p \rightarrow q.$

结论: $p \rightarrow (p \wedge q).$

(4) 前提: $q \rightarrow p, q \leftrightarrow s, s \leftrightarrow t, t \wedge r.$

结论: $p \wedge q \wedge s \wedge r.$

(5) 前提: $(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r \vee s, \neg s, p.$

结论: $\neg q.$

2. 2.15 求下列各式的前束范式。

(20)

(1) $\forall x F(x) \vee \exists y G(x, y).$

(2) $\exists x (F(x) \wedge \forall y G(x, y, z)) \rightarrow \exists z H(x, y, z).$

3. 2.14 求下列各式的前束范式。

(20)

(1) $\neg \exists x F(x) \rightarrow \forall y G(x, y).$

(2) $\neg (\forall x F(x, y) \vee \exists y G(x, y)).$

4. 1.20 判断下列推理是否正确, 并证明你的结论。如果他是理科学生, 他必学好数学。如果他不是文科学生, 他必是理科学生。他没学好数学, 所以他是文科学生。