

离散数学概论

第六章 特殊的图（一）

课程QQ号： 689423416

金耀 数字媒体技术系

fool1025@163.com

13857104418

第六章 特殊的图

1.1 树

1.2 欧拉图

1.3 哈密尔顿图

1.4 二部图

1.5 平面图

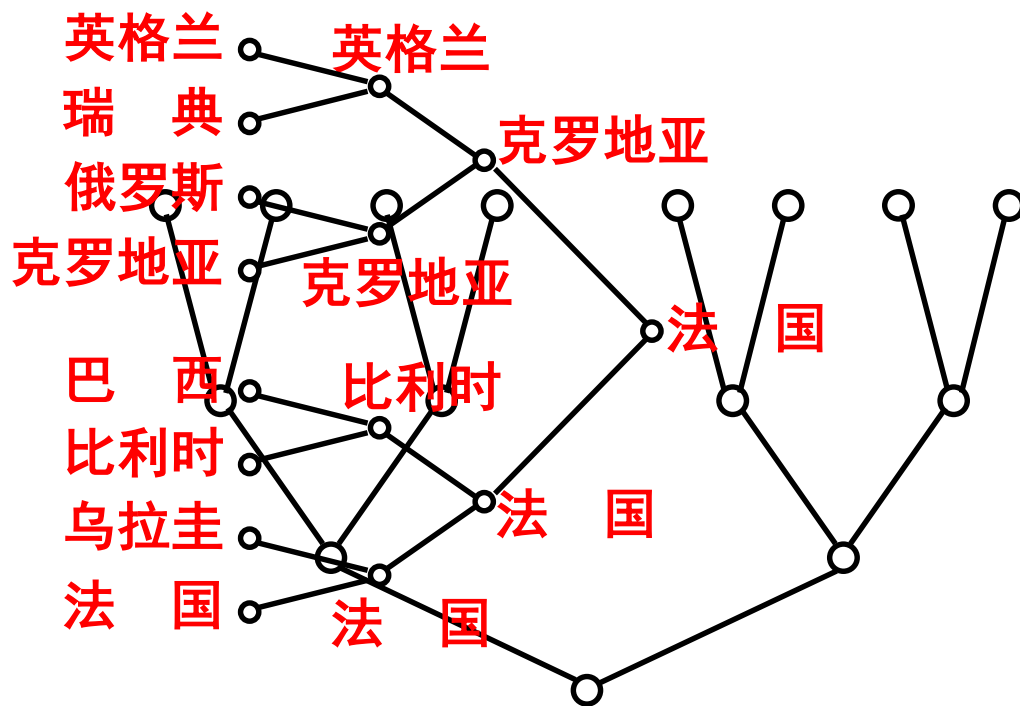


引言

- ❖ **树**是图论中的一个非常重要的概念，有着非常广泛的应用，例如**现代计算机操作系统**均采用**树形结构**来组织文件和文件夹，本节介绍**树的基本知识和应用**。
- ❖ 在本节中，所谈到的图都假定是**简单图**；所谈到的回路均指**简单回路或基本（初级）回路**。并且同一个图形表示的回路（简单的或基本的），可能有不同的**交替序列**表示方法，但规定它们表示的是同一条回路。

树的基本概念及性质

例 2018年俄罗斯世界杯8强的比赛结果图，最后胜利的队捧得大力神杯。



定义

- **连通而不含回路**的无向图称为**无向树**(Undirected Tree), 简称**树**(Tree), 常用**T**表示树。
- 树中度数为1的结点称为**叶**(Leaf); 度数大于1的结点称为**分支点**(Branch Point)或**内部结点**(Interior Point)。
- 每个连通分支都是树的无向图称为**森林**(Forest)。

解题小贴士——无向图G是树的判断

- (1) 图G是**连通**的。
- (2) 图G中**不存在回路**。

- 树中**没有环**和
- 在任何非平凡

不含回路的无向图称为
森林

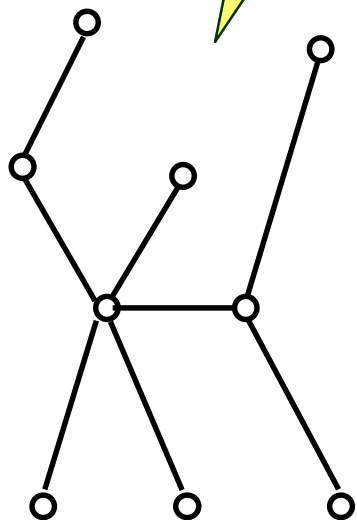
连通，无回路

连通，无回路

不连通，无回路

有回路

判断下图中的图哪些是树？为什么？



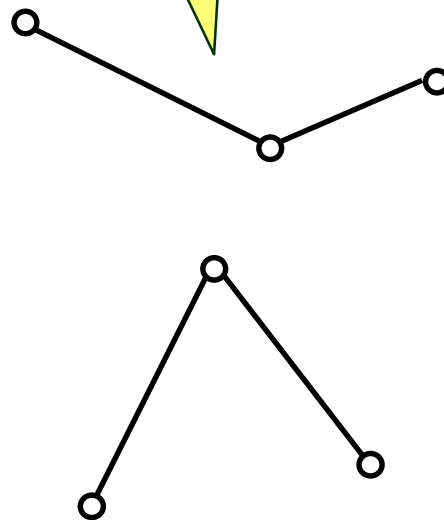
(a)

树



(b)

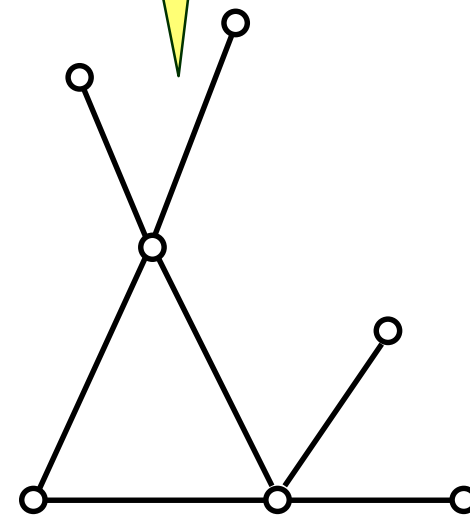
树



(c)

不是树

森林



(d)

不是树

不是森林

树的性质

定理 设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, $|V| = n$, $|E| = m$, 下列各命题是等价的:

- ① G 连通而不含回路(即 G 是树)
- ② G 中无回路, 且 $m = n-1$
- ③ G 是连通的, 且 $m = n-1$
- ④ G 中无回路, 但在 G 中任二结点之间增加一条新边, 就得到唯一的一条基本 (初级) 回路
- ⑤ G 是连通的, 但删除 G 中任一条边后, 便不连通($n \geq 2$)
- ⑥ G 中每一对结点之间有唯一一条基本 (初级) 通路($n \geq 2$)

树的特点

在结点给定的无向图中，

树是边数最多的无回路图

树是边数最少的连通图

由定理：

由定理：

点

之间增加一条新边，就得到一棵

G 是连通的，但删除 G 中任一条边后，便不连通。

由此可知，在无向图 $G = (n, m)$ 中，

若 $m < n-1$ ，则 G 是不连通的

若 $m > n-1$ ，则 G 必含回路

定理

任意非平凡树 $T = (n, m)$ 都至少有两片叶。

证明 因非平凡树 T 是连通的，从而 T 中各结点的度数均大于等于1。

设 T 中有 k 个度数为1的结点(即 k 片叶)，其余的结点度数均大于等于2。

由握手定理得

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq k + 2(n - k) = 2n - k$$

由于树中有 $m = n - 1$ ，于是 $2(n - 1) \geq 2n - k$ ，

因此可得 $k \geq 2$ ，这说明 T 中至少有两片叶。



生成树及算法

定义 给定图 $G = \langle V, E \rangle$, 若 G 的某个**生成子图**是**树**, 则称之为 G 的**生成树**(Spanning Tree), 记为 T_G 。

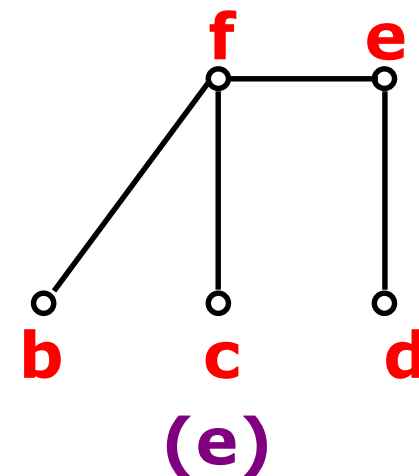
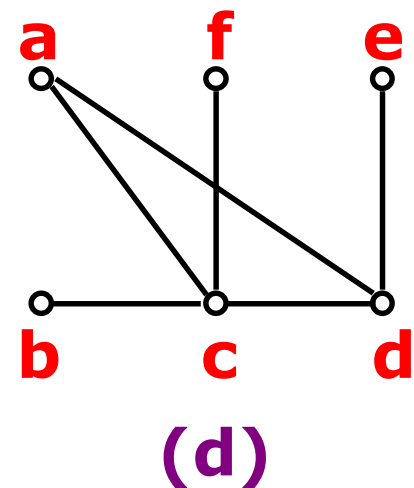
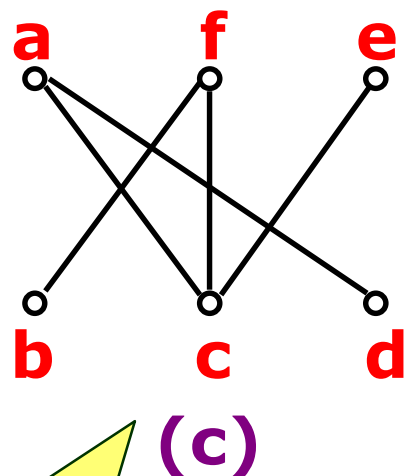
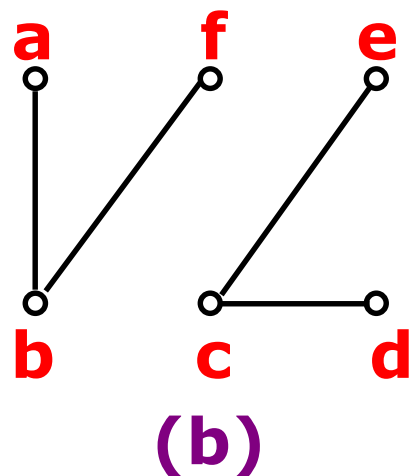
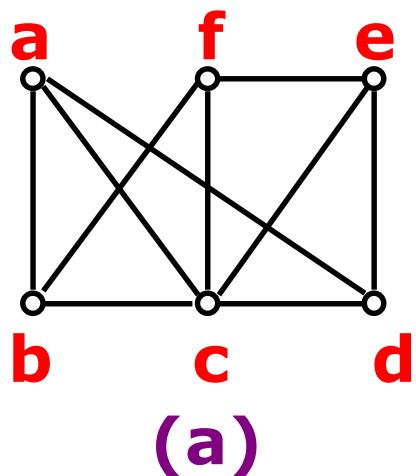
- 生成树 T_G 中的边称为**树枝**(Branch)
- G 中不在 T_G 中的边称为**弦**(Chord)
- T_G 的所有弦的集合称为生成树的**补**(Complement)

解题小贴士——图 G' 是图 G 的生成树的判断

- (1) 图 G' 是图 G 的生成子图。
- (2) 图 G' 是树。

例

判断下图中的图(b)、(c)、(d)、(e)是否是图(a)的生成树。



不是

是

不是

不是

树枝: $(a, c), (a, d), (b, f), (c, f), (c, e)$

弦: $(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, f)$

说明

- 一个无向连通图 G ，如果 G 是树，则它的生成树是唯一的，就是 G 本身。
- 如果 G 不是树，那么它的生成树就不唯一了。
- 求连通图 $G=(n, m)$ 的生成树的一种算法，称为“破圈法”，算法的关键是判断 G 中是否有回路。若有回路，则删除回路中的一条边，直到剩下的图中无回路为止，由定理知，共删除 $m-n+1$ 条边。
- 连通图 $G=(n, m)$ 一定存在生成树，且其有 n 个结点， $n-1$ 条树枝， $m-n+1$ 条弦，因此选择 G 中不构成任何回路的 $n-1$ 条边，就得到 G 的生成树，这种方法称为“避圈法”。

破圈法与避圈法

算法

解题小贴士——求连通图 $G=(n, m)$ 的生成树

- ◆ 使用破圈法：找出一条回路，并删除该回路中的一条边，直到图中没有回路为止，删除的边的总数为 $m-n+1$ 。
- ◆ 使用避圈法：选取一条边，验证该边与已选取的边不构成回路，选取的边的总数为 $n-1$ 。

算法

每次

选取

由于删除回路上的边和选择不构成任何回路的边
有多种选法，所以产生的生成树不是唯一的。

根树的定义与分类

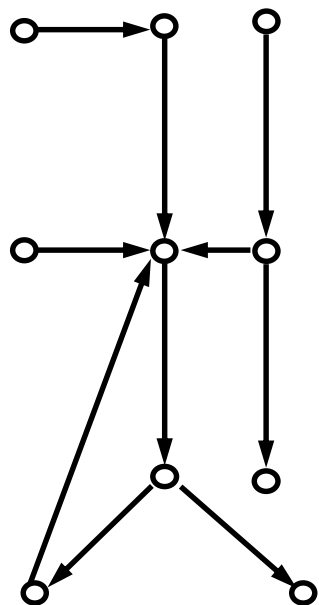
定义 一个有向图，若略去所有有向边的方向所得到的无向图是一棵树，则这个有向图称为**有向树**(Directed Tree)。

解题小贴士——有向树的判断

- (1) 将所有有向边都略去方向变为无向边，得到一个无向图。
- (2) 判断该无向图是否是树。

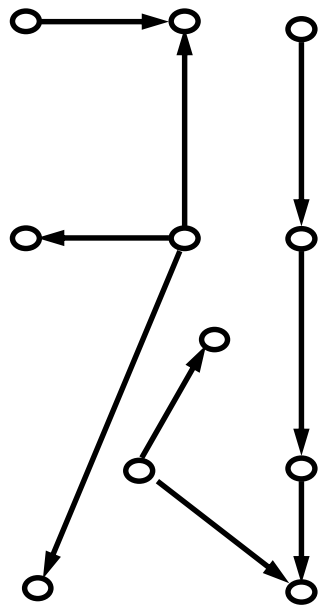
例

判断下图中的图哪些是有向树？为什么？



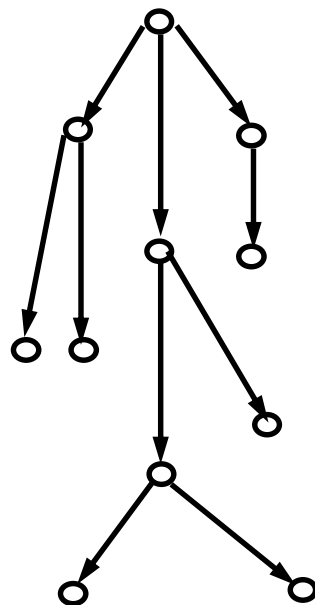
(a)

不是有向树



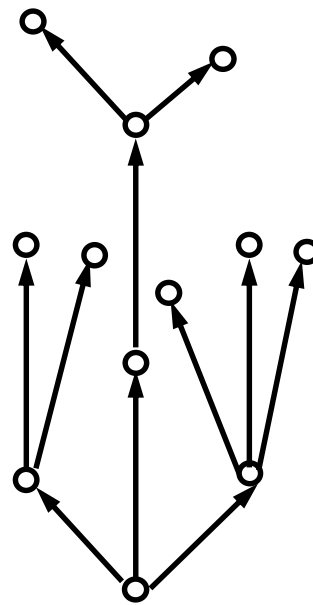
(b)

不是有向树



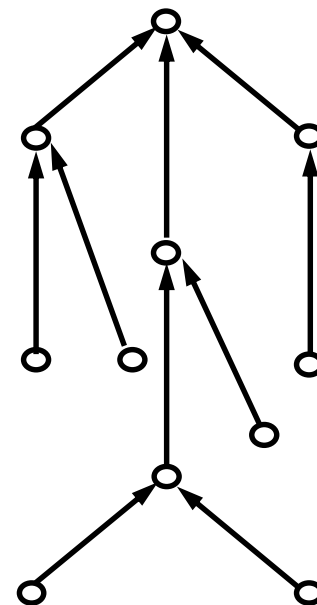
(c)

有向树



(d)

有向树



(e)

有向树

定义

一棵非平凡的有向树，如果恰有一个结点的入度为0，其余所有结点的入度均为1，则称之为**根树**(Root Tree)或**外向树**(Outward Tree)。

入度为0的结点称为**根**(Root)；出度为0的结点称为**叶**(Leaf)；入度为1，出度大于0的结点称为**内点**(Interior Point)；又将内点和根统称为**分支点**(Branch Point)。



在根树中
Number); 称
根树的**高**(He

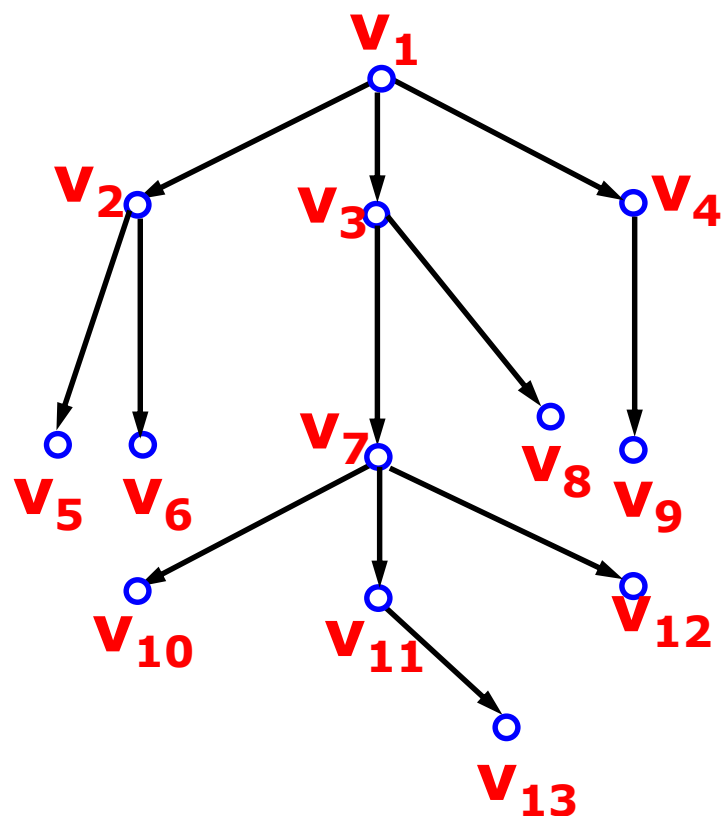
解题小贴士——根树的判断

- (1) 判断是否为有向树。
- (2) 计算所有结点的度数，看是否恰有一个结点的入度为0，其余所有结点的入度均为1。

层数(Layer
最大的称为

例

判断下图所示的图是否是根树？若是根树，给出其根、叶和内点，计算所有结点所在的层数和高。



倒置法

- V_1 处在第零层，层数为0
是根树
- V_2, V_3, V_4 同处在第一层，层数为1
根: V_1
- V_5, V_6, V_7, V_8, V_9 同处在第二层，层数为2
叶: $V_5, V_6, V_8, V_9, V_{10}, V_{12}, V_{13}$
- V_{10}, V_{11}, V_{12} 同处在第三层，层数为3
内点: $V_2, V_3, V_4, V_7, V_{11}$
- V_{13} 处在第四层，层数为4
- 这棵树的高为4

第六章 特殊的图

1.1 树

1.2 欧拉图

1.3 哈密尔顿图

1.4 二部图

1.5 平面图



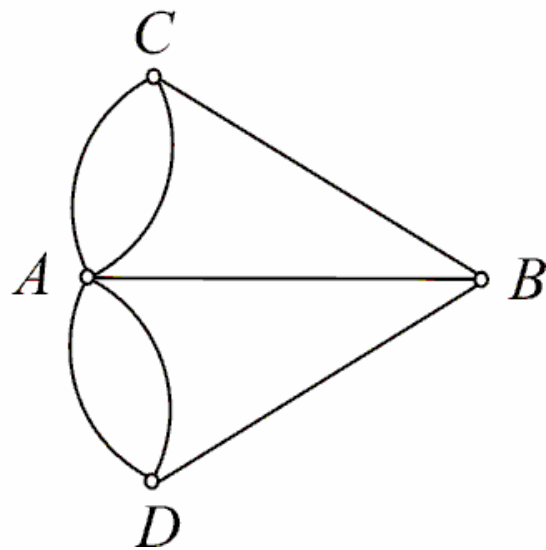
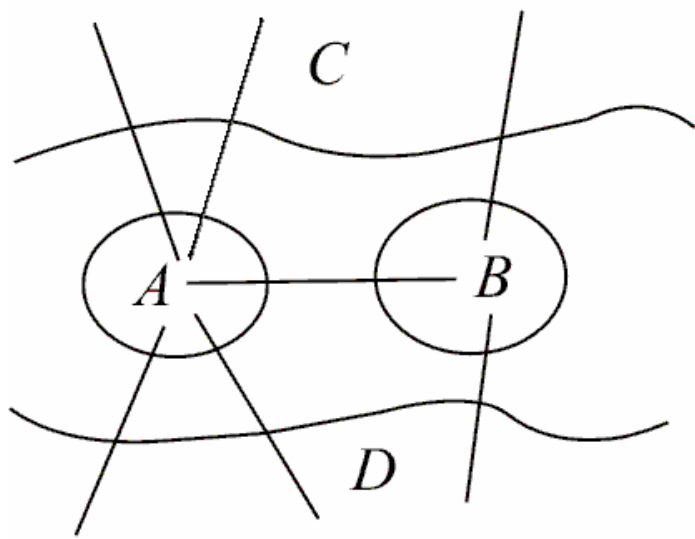
§ 1 欧拉图

一、基本概念

二、判定



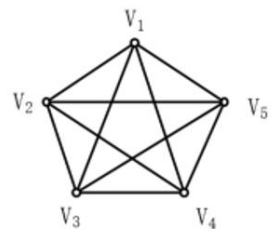
哥尼斯堡七桥问题



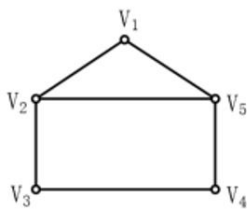
要求边不重复地一笔画出整个图

一. 基本概念

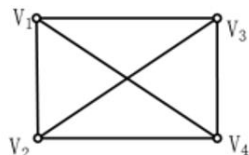
- 设 G 是一个无孤立结点的图，经过图中每边一次且仅一次的道路（回路/链）称为**欧拉道路**（回路/链），具有欧拉回路的图称为**欧拉图**。
- 我们规定平凡图为欧拉图，且每个欧拉图必然是连通图。



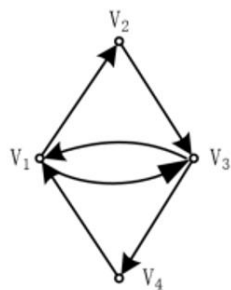
a)



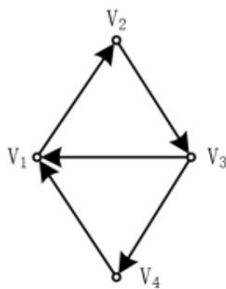
b)



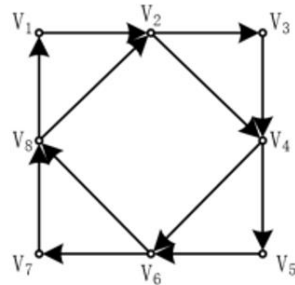
c)



d)



e)



f)

图a)和图d)是欧拉图；
图b)和图e)不是欧拉图，但存在欧拉通路；
图c)和图f)不存在欧拉通路。

一. 基本概念

- **定理：** 无向连通图 $G = \langle V, E \rangle$ 是欧拉图当且仅当 G 的所有结点的度数都为偶数。
- **推论：** 非平凡连通图 $G = \langle V, E \rangle$ 含有欧拉道路当且仅当 G 仅有零个或者两个奇数度结点。
- **定理：** 给定连通无向图 $G = \langle V, E \rangle$, $u, v \in V$ 且 $u \neq v$, u 与 v 间存在欧拉链等价于 G 中仅有 u 和 v 为奇度结点。
- **定理：** 给定弱连通有向图 G , G 有欧拉回路等价于 G 中的每个结点的入度等于出度。
- **定理：** 给定弱连通有向图 $G = \langle V, E \rangle$, $u, v \in V$ 且 $u \neq v$, u 与 v 存在欧拉道路等价于 G 中唯有 u 和 v 的入度不等于出度, 且 u 的入度比其出度大于1和 v 的出度比其入度小于1(或者反之)。

欧拉通路 & 欧拉回路判别准则

- 对任意给定的**无向连通图**，只需通过对图中各**结点度数**的计算，就可知它是否存在欧拉通路及欧拉回路，从而知道它是否为欧拉图；
- 对任意给定的**有向连通图**，只需通过对图中各**结点出度与入度**的计算，就可知它是否存在欧拉通路及欧拉回路，从而知道它是否为欧拉图。

利用这项准则，很容易判断出哥尼斯堡七桥问题是无解的，因为它所对应的图中所有4个结点的度数均为奇数。

解题小贴士——欧拉图的判断2

❖ 连通图的无向图

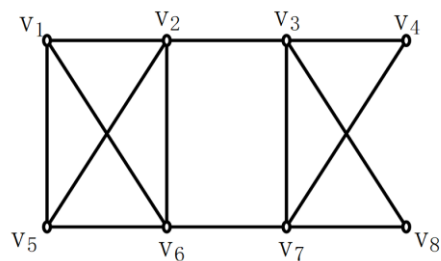
- (1) 计算所有结点的度数。
- (2) 存在0个奇度数结点则有欧拉回路，是欧拉图；存在2个奇度数结点则有欧拉通路。

❖ 连通图的有向图

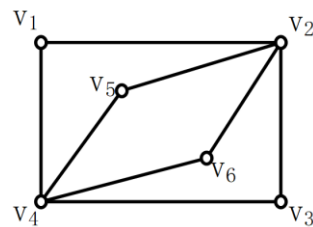
- (1) 计算所有结点的出度和入度。
- (2) 所有结点的入度等于出度则有欧拉回路，是欧拉图；两个结点以外，其余结点的入度等于出度，而这两个例外的结点中，一个结点的入度比出度大1，另一个结点的出度比入度大1，则有欧拉通路。

例题

例：求下图的欧拉路径或欧拉回路。



a)



b)

解：图a)的欧拉路径为

$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_5, v_3, v_6, v_7, v_2, v_8, v_7, v_1, v_8)$ 。

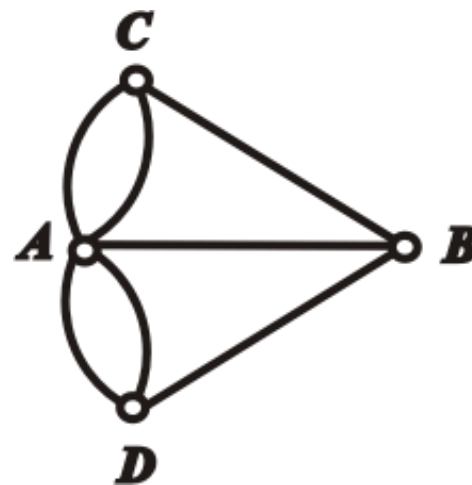
图b)的欧拉回路为

$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_2, v_6, v_4, v_1)$ 。

实例

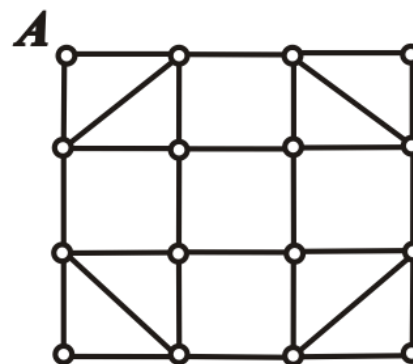
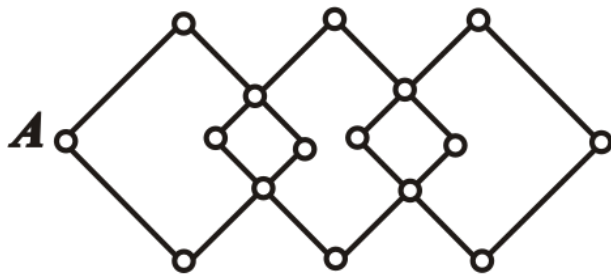
例1 哥尼斯堡七桥问题

4个奇度顶点, 不存在
欧拉通路, 更不存在
欧拉回路,

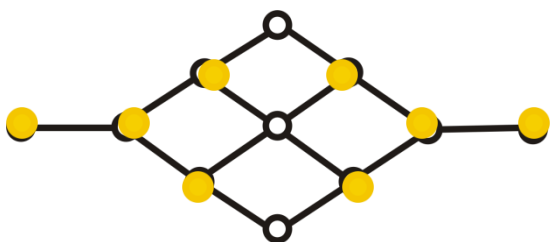


例2 下面两个图都是欧拉图.

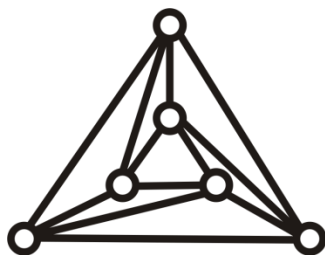
从A点出发, 如何一次成功地走出一条欧拉回路来?



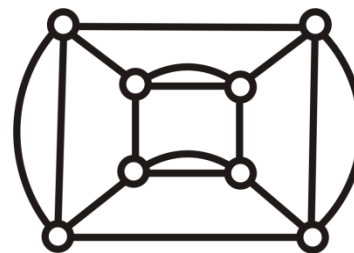
实例:判断下图是否存在欧拉通（回）路



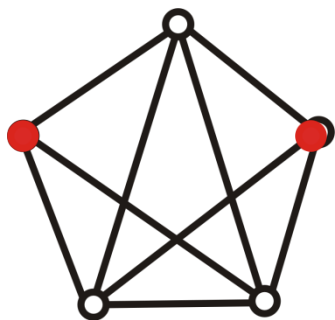
无欧拉通路



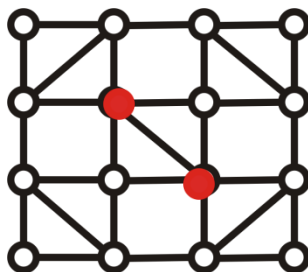
欧拉图



欧拉图



有欧拉通路
非欧拉图



有欧拉通路
非欧拉图

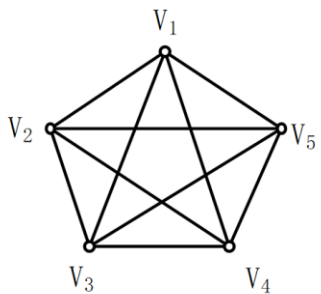


无欧拉通路

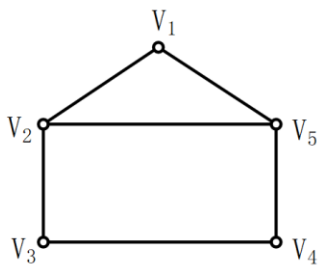
二. 判定

判断无向欧拉通路的方法：无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 具有一条欧拉通路当且仅当 G 是连通的，且仅有零个或者两个奇度数结点。若有两个奇度数结点，则它们是 G 中每条欧拉通路的端点。

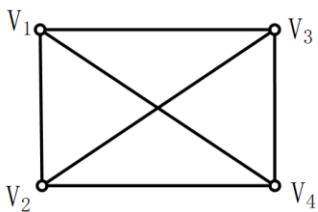
判断无向欧拉图的方法：无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 是欧拉图当且仅当 G 是连通的，且 G 的所有结点的度数都为偶数。



a)



b)



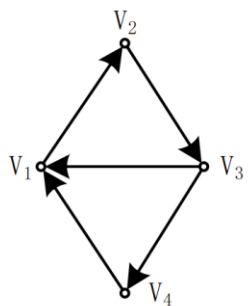
c)

图a) 是欧拉图；图b) 不是欧拉图，但存在欧拉通路；图c) 既不是欧拉图，也不存在欧拉通路。

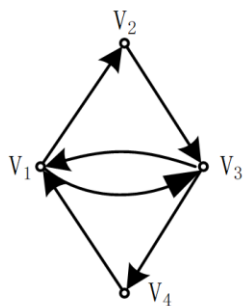
二. 判定

判断有向欧拉通路的方法：有向图G具有一条欧拉通路，当且仅当G是连通的，且除了两个结点以外，其余结点的入度等于出度，而这两个例外的结点中，一个结点的入度比出度大1，另一个结点的出度比入度大1。

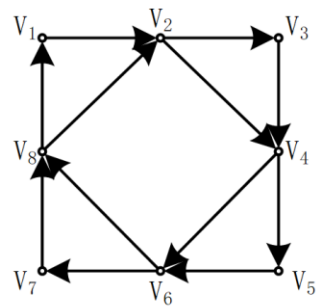
判断有向欧拉图的方法：有向图G具有一条欧拉回路，当且仅当G是连通的，且所有结点的入度等于出度。



a)



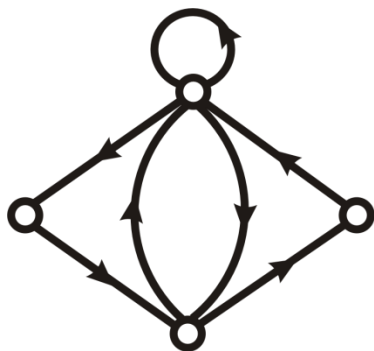
b)



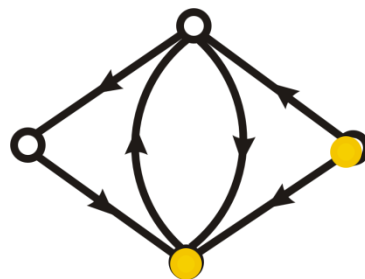
c)

图a)存在一条的欧拉通路： $v_3v_1v_2v_3v_4v_1$ ；
图b)中存在欧拉回路 $v_1v_2v_3v_4v_1v_3v_1$ ，因而b)是欧拉图；
图c)中有欧拉回路 $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_2v_4v_6v_8v_1$ ，因而c)是欧拉图。

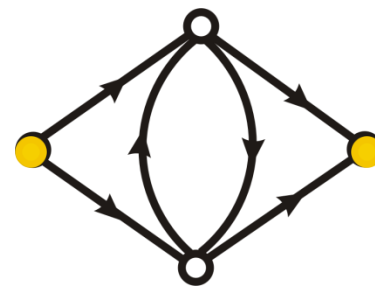
实例



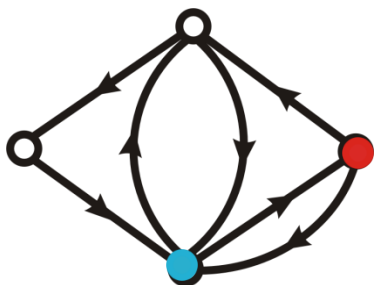
欧拉图



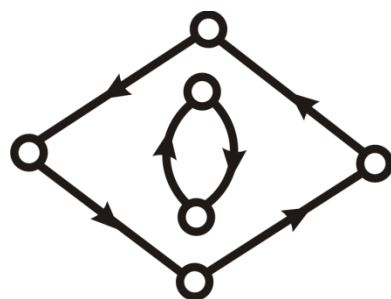
无欧拉通路



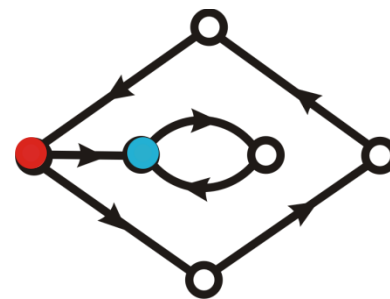
无欧拉通路



有欧拉通路
无欧拉回路



无欧拉通路

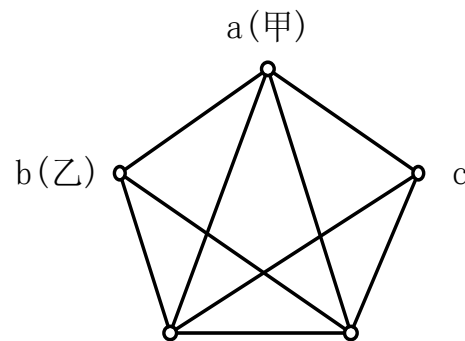


有欧拉通路
无欧拉回路

二. 判定

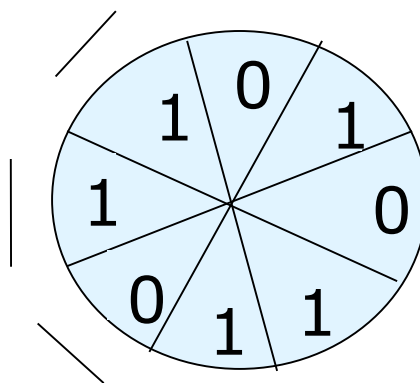
例：如下图所示，甲、乙两只蚂蚁分别位于图中的结点a，b处，并设图中的边长度是相等的。甲、乙进行比赛：从它们所在的结点出发走过图中的所有边最后到达结点c处。如果它们的速度相同，问谁先到达目的地？

解：在图中，仅有两个度数为奇数的结点b，c，因而存在从b到c的欧拉通路，蚂蚁乙走到c只要走一条欧拉通路，边数为9条。而蚂蚁甲要想走完所有的边到达c，至少要先走一条边到达b，再走一条欧拉通路，因而它至少要走10条边才能到达c，所以乙必胜。



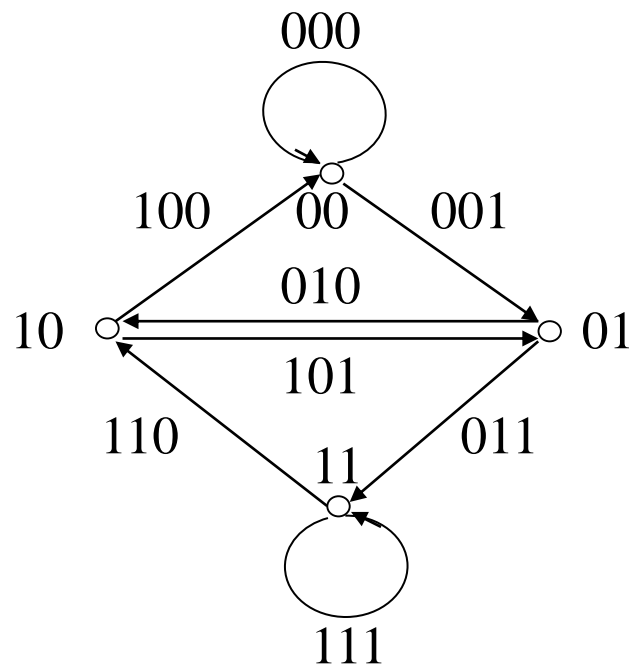
应用实例

例 设旋转磁鼓分成8个扇区, 每个扇区标记一个0或1, 有3个探测器能够读出连续的3个扇区的标记. 如何赋给扇区标记, 使得能够根据探测器的读数确定磁鼓的位置. 为了能够根据读数确定磁鼓的位置, 必须构造一个由8个0和1组成的圆环, 使得圆环上连续3个数字的序列都不相同.



应用实例(续)

构造一个4阶有向图, 8条边的标记是不同的, 图中存在一条欧拉回路: 000, 001, 011, 111, 110, 101, 010, 100. 在这条回路上连续3条边的标记的第一位恰好与第一条边的标记相同. 顺着这条回路取每一条边标记的第一位得到00011101, 按照这个顺序标记磁鼓的扇区.



第六章 特殊的图

1.1 树

1.2 欧拉图

1.3 哈密尔顿图

1.4 二部图

1.5 平面图



§ 2 哈密尔顿图

一、基本概念

二、判定

三、例题

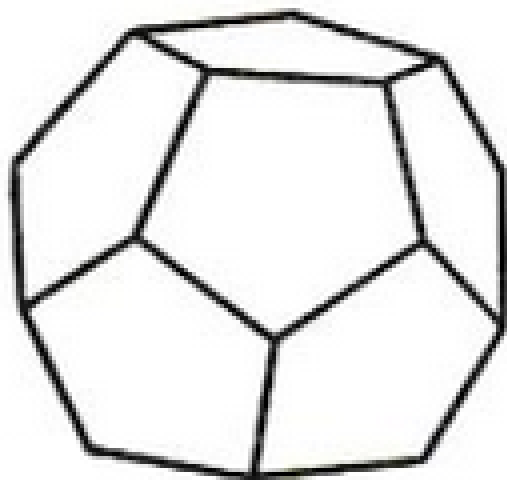


哈密顿的引入与定义

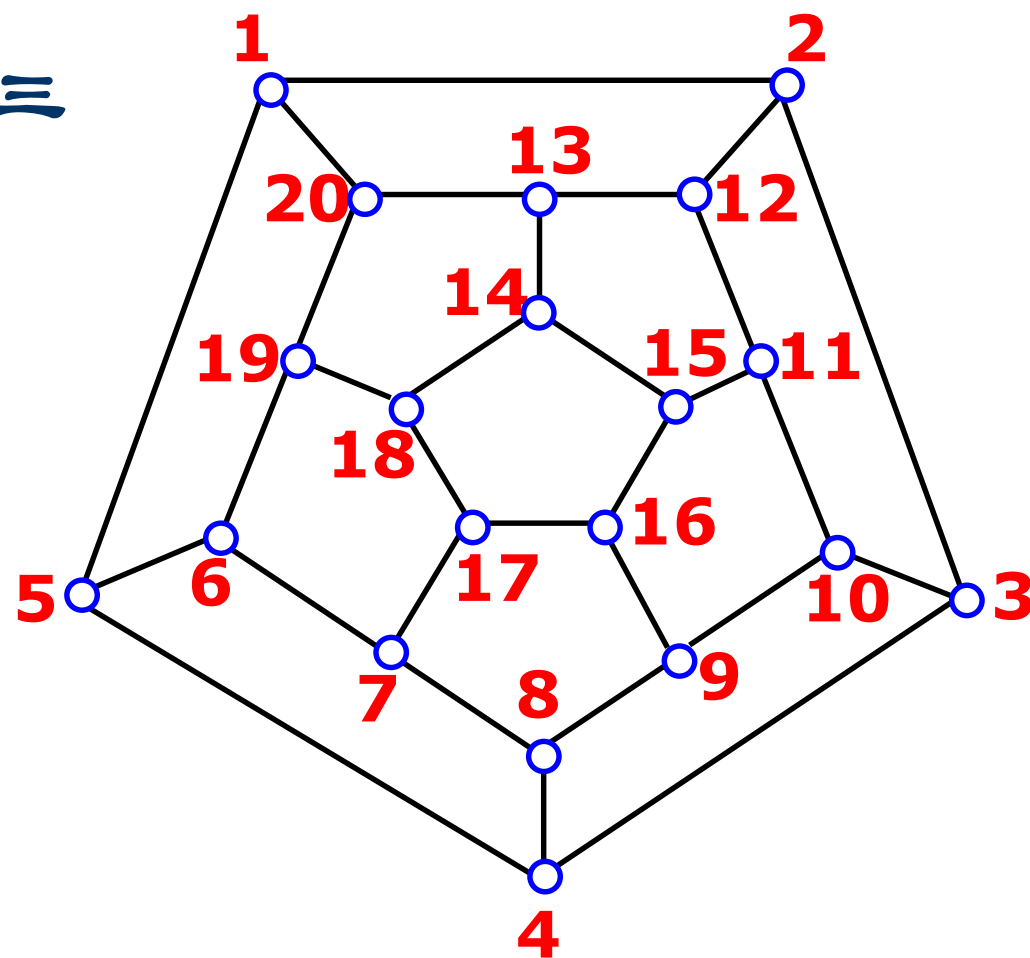
1859年，威廉·哈密顿爵士

正十二面体：每个面都是正五边形，三面交于一角

20个顶点、30条边和12个面



平面展开



哈密顿



威廉 ● 哈密顿

爱尔兰数学家、物理学家、
力学家

- ❖ 自幼聪明，被称为**神童**。
- ❖ **3岁**能读英语，会算术；**5岁**能译拉丁语、希腊语和希伯来语，并能背诵荷马史诗；**9岁**便熟悉了波斯语、阿拉伯语和印地语。他自幼喜欢算术，计算很快。
- ❖ **1818年**遇到美国“计算神童”Z. **科耳本** (Colburn) 后对数学产生了更深厚的兴趣。
- ❖ 到**1820年**已阅读了**牛顿**的《自然哲学的数学原理》，并对天文学有强烈爱好，常用自己的望远镜观测天体。

哈密顿



威廉·哈密顿

爱尔兰数学家、物理学家、
力学家

- ❖ 1820年开始读P. S. 拉普拉斯 (Laplace) 的著作《天体力学》，1822年指出了此书中的一个错误；同年他开始进行科学研究工作，对曲线和曲面的性质进行了系列研究，并用于几何光学。
- ❖ 爱尔兰科学院院士R. J. 布林克莱 (Brinkley) 称他是“这个年龄 (17岁) 的第一数学家”。
- ❖ 首先建立了光学的数学理论，并把这种理论移植到动力学中去，提出了著名的“哈密顿最小作用原理”，即用一个变分式推出各种动力学定律。
- ❖ 还把广义坐标和广义动量作为典型变量来建立动力学方程——哈密顿典型方程。

哈密顿



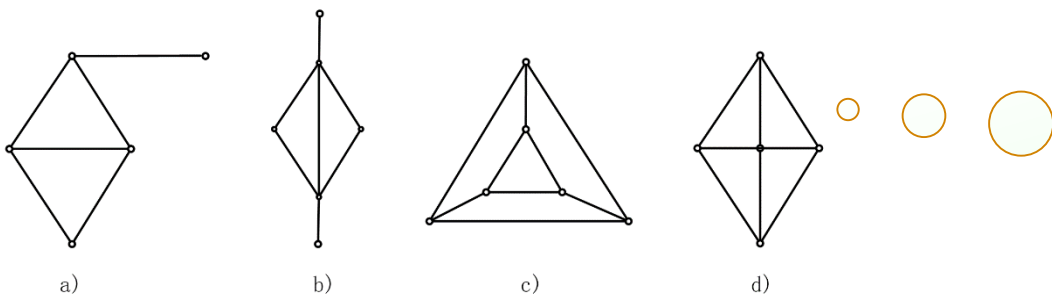
威廉·哈密顿

爱尔兰数学家、物理学家、
力学家

- ❖ 还建立了与系统的总能量有关的**哈密顿函数**，这些工作推动了变分法和微分方程理论的进一步研究。
- ❖ **哈密顿方程**是一个经典力学方程。
- ❖ **哈密顿函数**既是经典物理学中的一个函数，也是量子物理学中的一个算子。
- ❖ **哈密顿图**是图论中的一个术语。
- ❖ 他也喜欢文学，成为数学大师后，仍不断赋诗填词，一直认为文学与数学是近似的学科——都是抽象思维的文字与符号。他曾写道：“**诗与数学是近亲。**”

一. 基本概念

- 设 G 是一个连通图，若 G 中存在一条包含全部结点的基本道路，即经过图中每个结点一次且仅一次的道路，称这条道路为 G 的**哈密尔顿道路**。若 G 中存在一个包含全部结点的圈，则称这个圈为 G 的**哈密尔顿圈**；含有哈密尔顿圈的图称为**哈密尔顿图**。
- 我们规定平凡图为哈密尔顿图，且由定义可知，完全图必是哈密尔顿图。
- 经过图中所有结点的回路中长度最短的回路称为**哈密尔顿回路**。



图a) 中有哈密尔顿道路，
图b) 中没有哈密尔顿道路，
图c) 和d) 都有哈密尔顿圈。

哈密顿通路和哈密顿回路的特征

- 哈密顿通路是经过图中所有结点的通路中**长度最短**的通路，即为通过图中所有结点的基本通路
- 哈密顿回路是经过图中所有结点的回路中**长度最短**的回路，即为通过图中所有结点的基本回路
- 如果我们仅用结点来描述的话

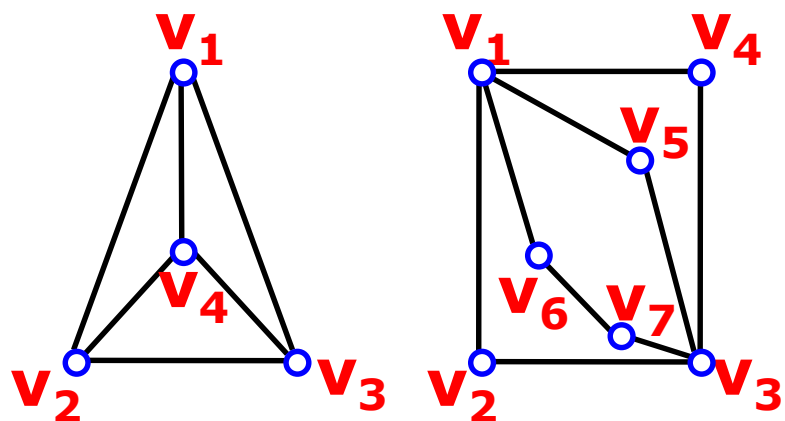
解题小贴士——哈密顿图的判断1

找到一条经过图中每个结点一次且仅一次的通路（回路），则该图存在哈密顿通路（回路）。有哈密顿回路的图则为哈密顿图。

平行边与环存在与否不影响图中是否存在哈密顿通路（回路），约定以后讨论均为连通的简单图。

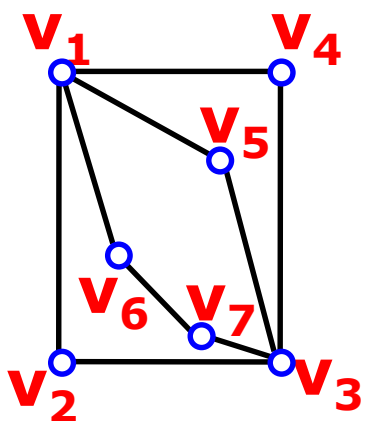
例题

判断下面6个图中，是否是哈密顿图？是否存在哈密顿通路？



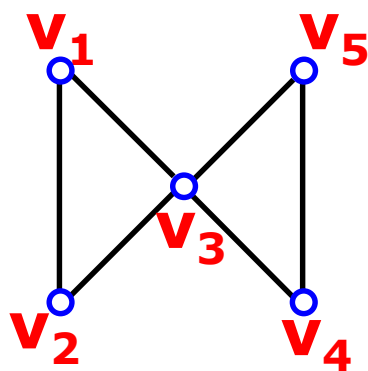
(a)

哈密
顿图



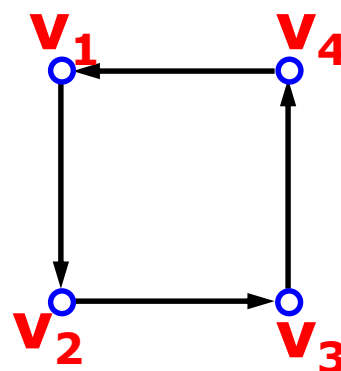
(b)

不存在哈密
顿通路



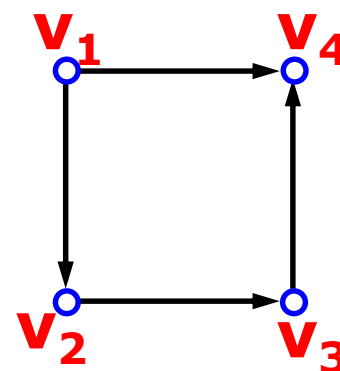
(c)

不是哈密顿图，但
存在哈密顿通路



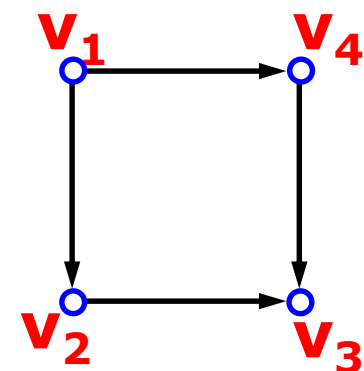
(d)

哈密
顿图



(e)

不是哈密顿图，但
存在哈密顿通路



(f)

不存在哈密
顿通路

二. 判定

➤ **定理：（必要条件）** 设无向连通图 $G = \langle V, E \rangle$ 是哈密尔顿图， S 是 V 的任意非空真子集，则 $p(G-S) \leq |S|$ ，其中 $p(G-S)$ 是从 G 中删除 S 后所得图的连通分支数。

（注意：此定理只是哈密尔顿图的必要条件，而不是充分条件。可以利用其逆否命题来判断某些图是否不是哈密尔顿图，即下述定理）

➤ **定理：（充分条件）** 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是具有 n 个顶点的简单无向图，若在 G 中每一对不相邻顶点的次数之和大于等于 $n-1$ ，则在 G 中存在一条哈密尔顿路径。

推论

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$ 中存在哈密顿通路，则对 V 的任意非空子集 V_1 ，

都有

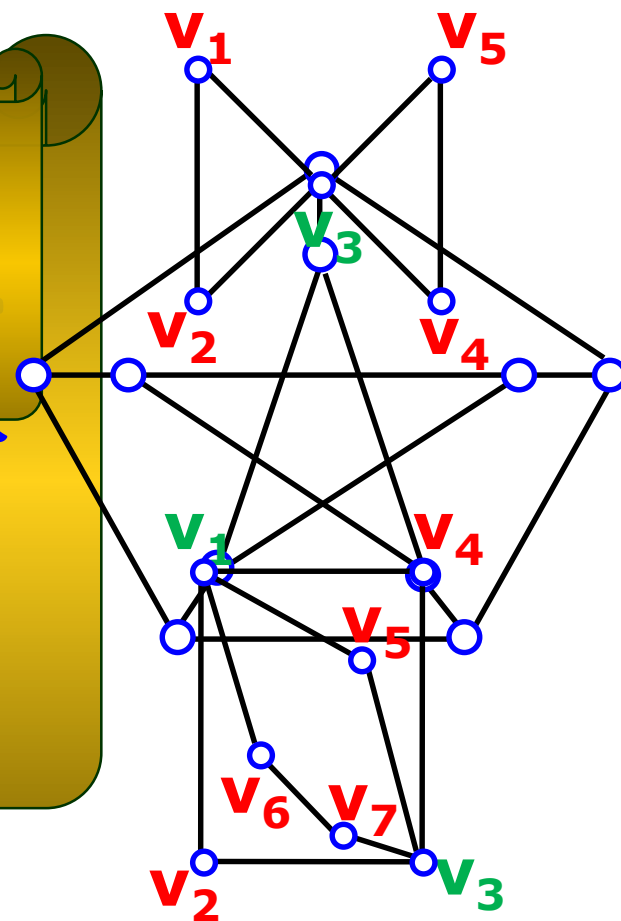
注意：

定理给出的是哈密顿图的必要条件，而不是充分条件。

有用。我们经常利用该定理的逆否命题来判断某些图不

是哈密顿图，即：若存在 V 的某个非空子集 V_1 使得

$p(G - V_1) > |V_1|$ ，则 G 不是哈密顿图。

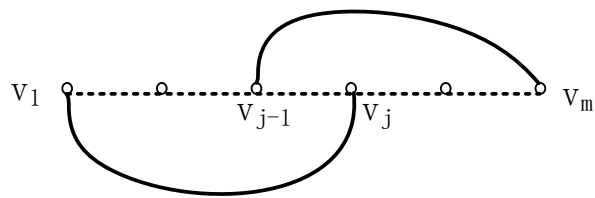


二. 判定

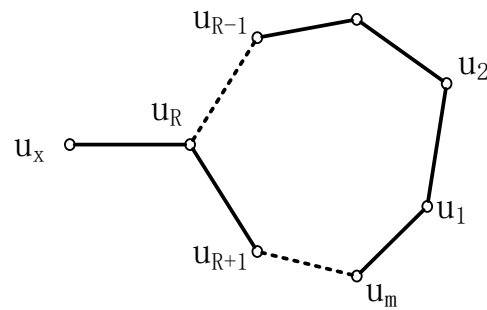
充分条件证明： G 中任意两点之间有路径，设 $P=v_1v_2\dots v_m$ 是 G 中最长的一条路径(长度为 $m-1$)，可证明它就是一条哈密尔顿路径，即 $n=m$ 。

假若不然，若 $m < n$ ，可以按以下方法构造一条长 m 路径，如下图 a) 所示，在 $m < n$ 时，由 P 的最长性可知， v_1, v_m 只能与 P 中的点邻接，分两种情况讨论：

(1) 若 $v_1 v_m$ 相邻，则 $v_1 v_2 \dots v_m v_1$ 是一个 m 长的圈；



a) 哈密尔顿路径



b) 哈密尔顿圈

二. 判定

(2) 若 v_1v_m 不相邻, 设 v_1 只与 $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ik}$ 邻接, 其中 $2 \leq i_j \leq m-1$

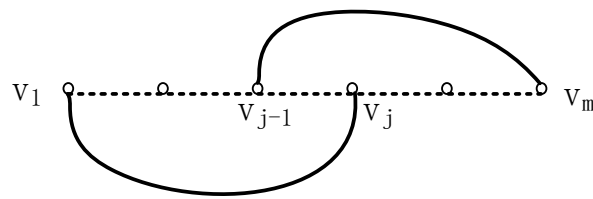
那么 v_m 必与 $v_{i1-1}, v_{i2-1}, \dots, v_{ik-1}$ 之一, 如 v_{j-1} 邻接, 否则与 v_m 邻接的顶点不超过 $m-1-k$ 个, 即 $\deg(v_1) + \deg(v_m) \leq k + m - 1 - k < n - 1$ 矛盾。

现在已构造得到一个 m 长的圈, 如下图b)所示, 重新标记图的顶点使这个圈为 $u_1u_2 \dots u_mu_1$ 。

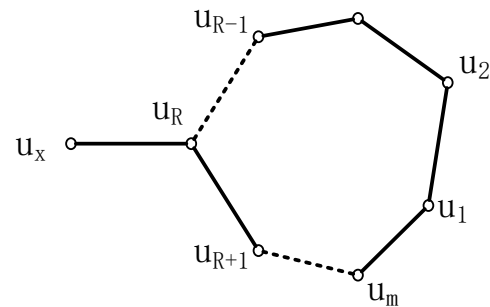
因为 G 连通, 且前面假设 $m < n$, 所以 G 中必有一个不属于该圈的顶点 u_x 与该圈的某一个顶点邻接。

于是 G 有一条 m 长路径

$u_xu_Ru_{R+1} \dots u_mu_1u_2 \dots u_{R-1}$,
与 P 是最长路矛盾。



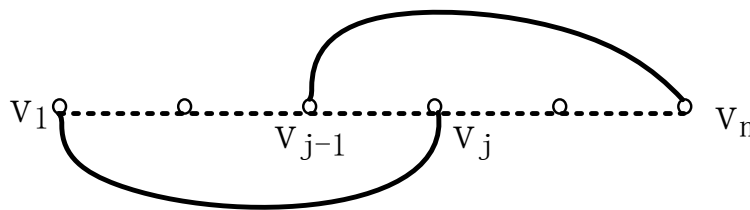
a) 哈密顿路径



b) 哈密顿圈

二. 判定

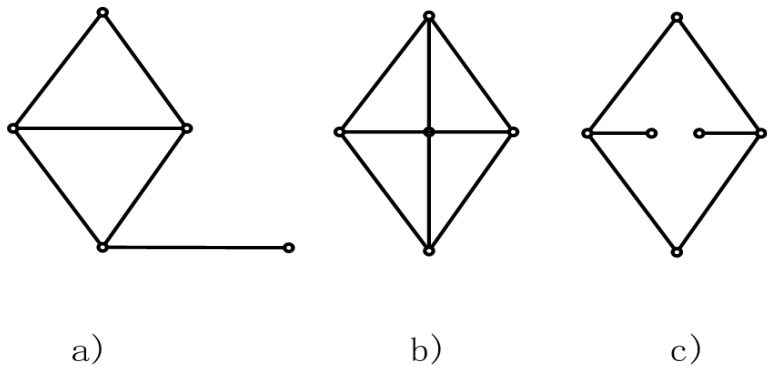
- **定理：（充分条件）** 设 $G=<V,E>$ 是具有 n 个顶点的简单无向图,若在 G 中每一对**不相邻**顶点的次数之和大于等于 n ,则在 G 中存在一条哈密尔顿回路。
- **证明：**已证明下图这样的图中有哈密尔顿路径 $P=v_1v_2\cdots v_n$ 。



- (1) 若 v_1v_n 相邻, 则 $v_1v_2\cdots v_nv_1$ 是一个哈密尔顿圈;
- (2) 若 v_1v_n 不相邻, 设 v_1 只与 $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ik}$ 邻接, 其中 $2 \leq i_j \leq n-1$; 那么 v_n 必与 $v_{i1-1}, v_{i2-1}, \dots, v_{ik-1}$ 之一, 如 v_{j-1} 邻接, 否则与 v_n 邻接的顶点不超过 $n-1-k$ 个, 即 $\deg(v_1) + \deg(v_n) \leq k + n - 1 - k < n$ 。
- 在这种情况下 $v_1v_2\cdots v_{j-1}v_nv_{n-1}\cdots v_jv_1$ 是一个哈密尔顿圈。

二. 判定

- **定理：（充分条件）** 设 $G=\langle V,E \rangle$ 是具有 $n \geq 3$ 个顶点的简单无向图，若在 G 中每一个顶点的次数大于等于 $n/2$ ，则在 G 中存在一条哈密尔顿回路。
- 注意，以上定理的条件都是充分非必要的。



图a)和图c)不是哈密尔顿图，
图b)为哈密尔顿图。

实例

例 设 G 为 n 阶无向连通简单图, 若 G 中有割点或桥, 则 G 不是哈密顿图.

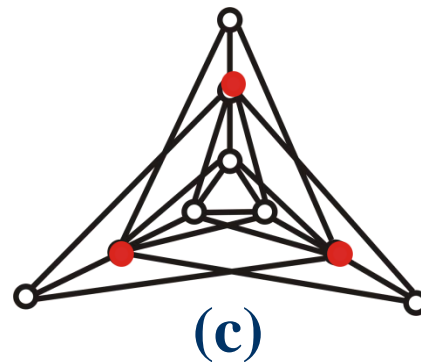
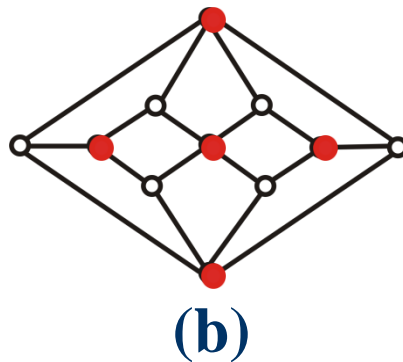
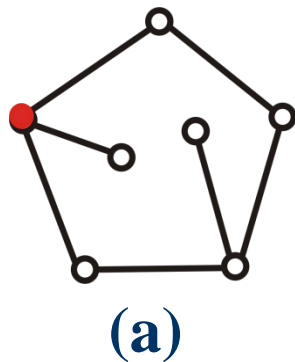
证 :

(1) 设 v 为割点, 则 $p(G-v) \geq 2 > |\{v\}| = 1$. 根据定理, G 不是哈密顿图.

(2) 若 G 是 K_2 (K_2 有桥), 它显然不是哈密顿图. 除 K_2 外, 其他的有桥连通图均有割点. 由(1), 得证 G 不是哈密顿图.

实例

例 证明下述各图不是哈密顿图：

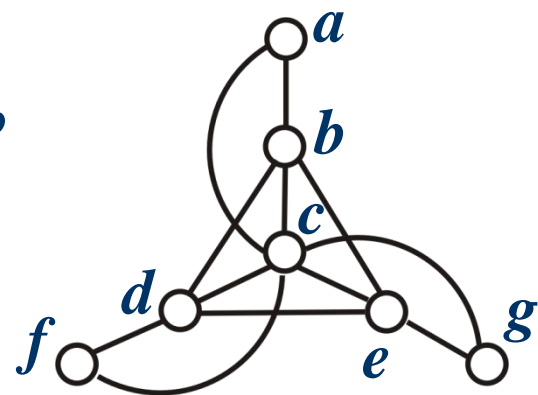


(c) 中存在哈密顿通路

实例

例 证明右图不是哈密顿图

证 假设存在一条哈密顿回路, a, f, g 是2度顶点, 边 (a, c) , (f, c) 和 (g, c) 必在这条哈密顿回路上, 从而点 c 出现3次, 矛盾.

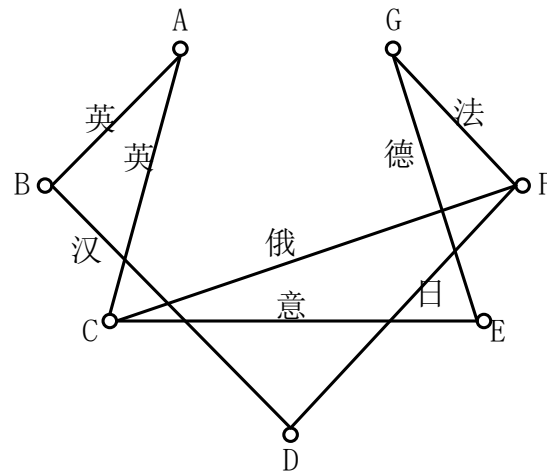


此外, 该图满足前述定理的条件, 这表明此条件是必要、而不充分的. 又该图有哈密顿通路.

三. 例题

例：已知关于 a, b, c, d, e, f 和 g 的下述事实： a 讲英语； b 讲英语和汉语； c 讲英语、意大利语和俄语； d 讲日语和汉语； e 讲德国和意大利语； f 讲法语、日语和俄语； g 讲法语和德语。试问这七个人应如何排座位，才能使每个人都能和他身边的人交谈？

解：结点为客人，会共同语言的2结点相邻接。则问题归结为求下图的一条哈密尔顿回路。



例题

例：考虑7天内安排7门课程的考试，使得同一位教师所任的两门课程考试不安排在接连的两天中，试证明如果没有教师担任多于4门课程，则符合上述要求的考试安排总是可能的。

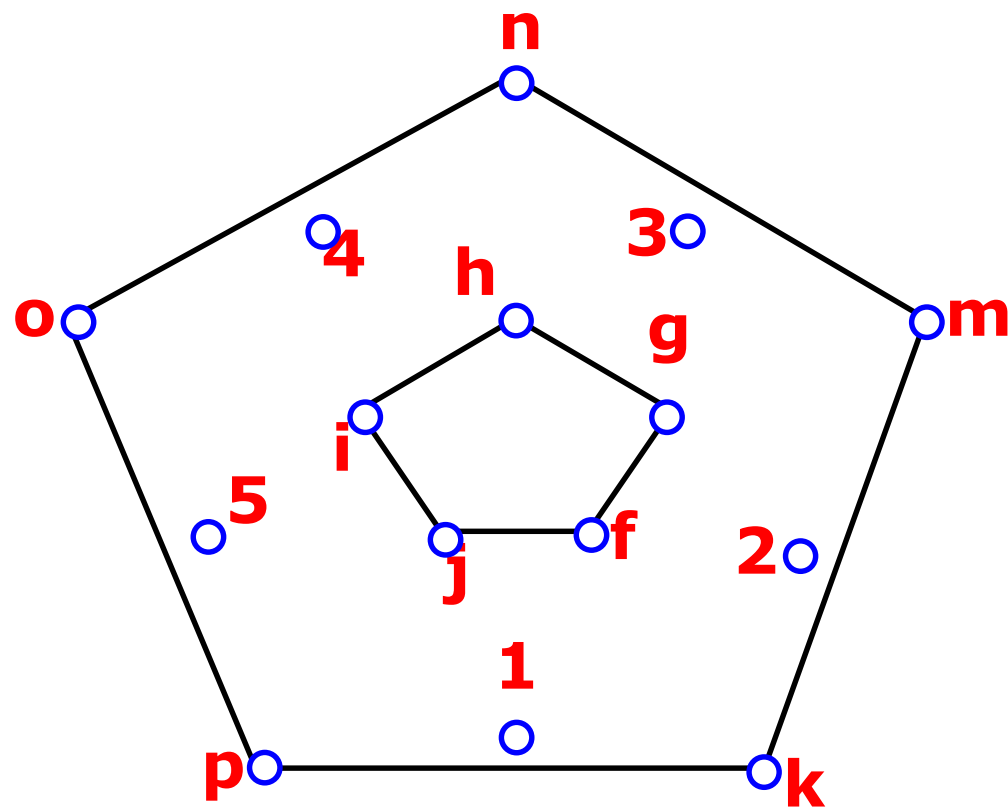
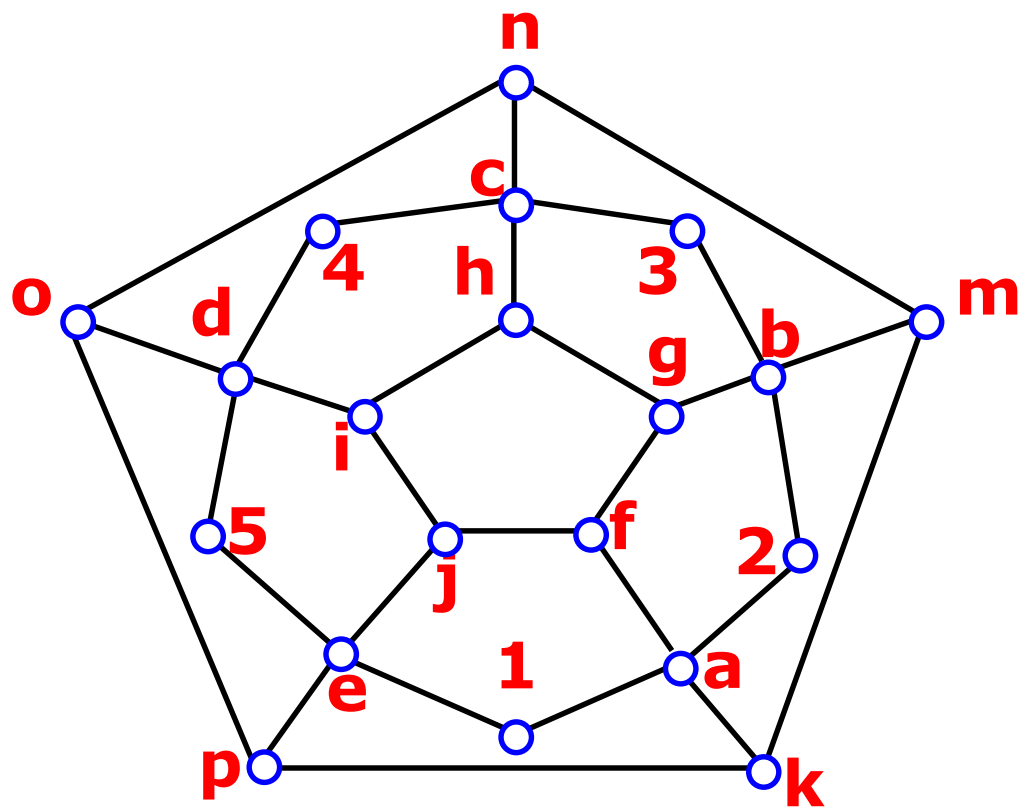
证明：设 G 是具有7个结点的图，每个结点对应于一门课程考试，如果这两个结点对应的课程考试是由不同教师担任的，那么这两个结点之间有一条边，因为每个教师所任课程数不会超过4，所以每个结点的度数至少为3，则任两个结点的度数之和至少是6，所以 G 总是包含一条哈密尔顿路径，它对应于一个7门考试课程的一个合理安排。

例题

某地有5个风景点，若每个风景点均有2条道路与其它景点相通。问游人可否经过每个风景点恰好一次而游完这5处？

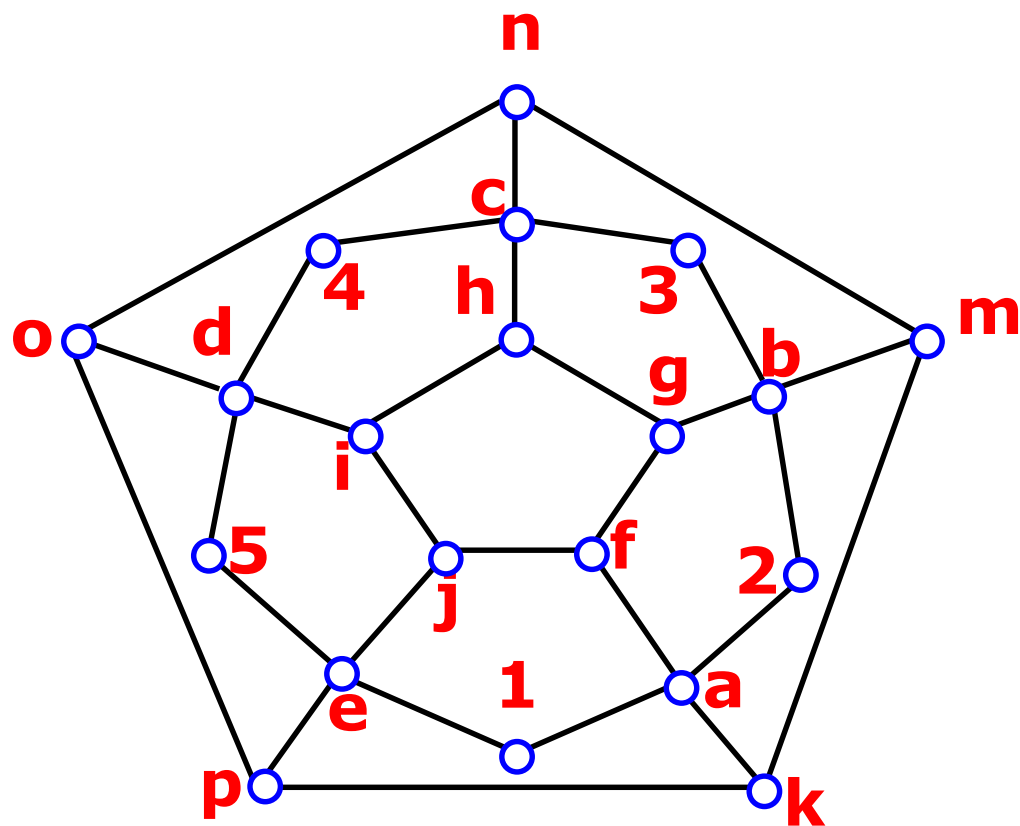
解 看成是有5个结点的无向图，两风景点间的道路看成是无向图的边，因此每个结点的度数均为2，从而任意两个不相邻的结点的度数之和等于4，正好为总结点数减1。故此图中存在一条哈密顿通路，因此游人可以经过每个风景点恰好一次而游完这5处。

判断是否存在哈密顿回路



方法一：删除结点子集 $\{a, b, c, d, e\}$ ，得到的图有7个连通分支，该图不是哈密顿图，故不存在哈密顿回路。

判断是否存在哈密顿回路



方法二：若图中存在哈密顿回路，则

该回路组成的图中任何结点的度数均为2。

因而结点1、2、3、4、5所关联的边均在回路中，于是在结点a、b、c、d、e处均应将不与1、2、3、4、5关联的边删除，而要删除与结点a、b、c、d、e关联的其它边，得到右图。

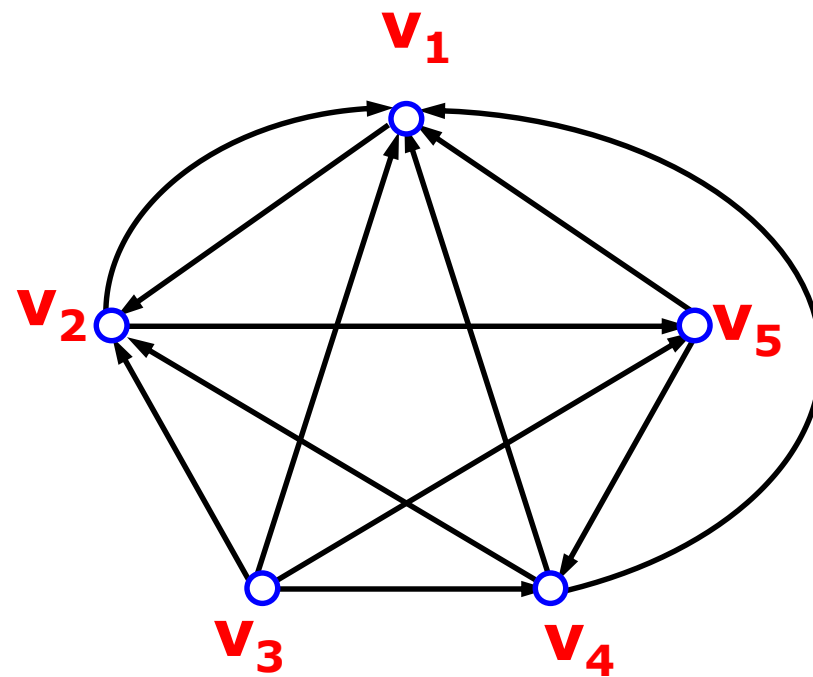
它不是连通图，因而图中不存在哈密顿回路。

定理

设 $G = \langle V, E \rangle$ 是有 n ($n \geq 2$)个结点的一些简单有向图。如果忽略 G 中边的方向所得的无向图中含生成子图 K_n ，则有向图 G 中存在哈密顿通路。

在右图中，它所对应的无向图中含**完全图** K_5 ，由定理知，图中含有**哈密顿通路**。

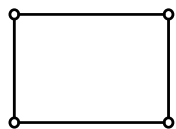
事实上，通路 $v_3v_5v_4v_2v_1$ 为一条哈密顿通路。



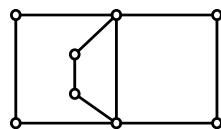
三. 例题

- 例：(a) 画一个图，使它有一条欧拉回路和一条哈密尔顿回路。
(b) 画一个图，使它有一条欧拉回路，但没有一条哈密尔顿回路。
(c) 画一个图，使它没有一条欧拉回路，但有一条哈密尔顿回路。
(d) 画一个图，使它既没有一条欧拉回路，也没有一条哈密尔顿回路。

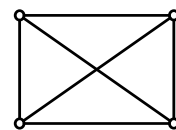
解：求解如下图(a)(b)(c)(d)所示。



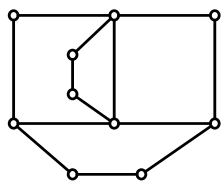
(a)



(b)



(c)



(d)

习题

❖ 第6章: 5,6,7,12

❖ 第7章: 3,5

一、简答题

1. 6.10 画一个无向图, 使它:

(40)

- (1) 既是欧拉图, 又是哈密顿图;
- (2) 是欧拉图, 而不是哈密顿图;
- (3) 是哈密顿图, 而不是欧拉图;
- (4) 既不是欧拉图, 也不是哈密顿图。

2. 6.7 图6-1所示个途中哪些是欧拉图?

(30)

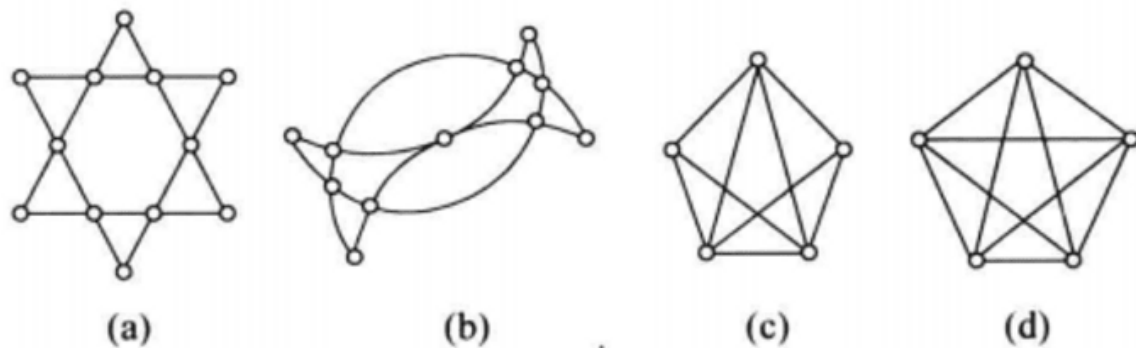


图 6-1

3. 6.14 有割点的无向图 G 不可能为哈密顿图, G 也一定不是欧拉图吗?

(30)