§ 9.2 Laplace 变换的性质

一、线性性质与相似性质

二、延迟性质与位移性质

三、微分性质

四、积分性质

五、周期函数的像函数

六、卷积与卷积定理

§ 9.2 Laplace 变换的性质

- 几点说明

(1) 在下面给出的基本性质中，所涉及到的函数的 Laplace 变换均假定存在，且它们的增长指数均假定为 c。

(2) 如无特别说明，默认函数与像函数按大小写自然对应，比如：$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$，$G(s)=\mathscr{L}[g(t)]$.

(3) 对于涉及到的一些运算(如求导、积分、极限及求和等)的次序交换问题，均不另作说明。

一、线性性质与相似性质 P217

1. 线性性质 P217

性质 设 a, b 为常数，则有

$$\mathscr{L}[a\,f(t)+b\,g(t)]=a\,F(s)+b\,G(s);$$

$$\mathscr{L}^{-1}[a\,F(s)+b\,G(s)]=a\,f(t)+b\,g(t).$$

证明 （略）

例 求函数 $f(t)=\sin 2t\sin 3t$ 的 Laplace 变换。

解 $f(t)=\sin 2t\sin 3t=\dfrac{1}{2}(\cos t-\cos 5t)$,

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{2}(\mathscr{L}[\cos t]-\mathscr{L}[\cos 5t])$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+25}\right)$$

$$=\frac{12s}{(s^2+1)(s^2+25)}.$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{1}{(s-1)(s-2)}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 $F(s)=\dfrac{1}{s-2}-\dfrac{1}{s-1}$,

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]$$

$$=e^{2t}-e^{t}.$$

一、线性性质与相似性质

2. 相似性质（或尺度性质）

P 218

性质 设 a 为任一正实数，则有 $\mathscr{L}[f(at)]=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$.

证明 $\mathscr{L}[f(at)]=\int_0^{+\infty}f(at)e^{-st}dt$

$$\xlongequal{\text{令 } x=at}\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(x)e^{-\frac{s}{a}x}dx$$

$$=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

二、延迟性质与位移性质 P223

1. 延迟性质 P223

性质 设当 $t<0$ 时 $f(t)=0$，则对任一非负实数 τ，有

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s).$$

证明 $\mathscr{L}[f(t-\tau)]=\int_0^{+\infty} f(t-\tau)e^{-st}\,dt$

$$=\int_\tau^{+\infty} f(t-\tau)e^{-st}\,dt$$

$$\overset{\text{令 } x=t-\tau}{=\!=\!=} \int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}\cdot e^{-s\tau}\,dx$$

$$=e^{-s\tau}F(s).$$

二、延迟性质与位移性质 P 223

1. 延迟性质 P 223

性质 设当 $t<0$ 时 $f(t)=0$，则对任任一非负实数 τ，有

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)]=\mathrm{e}^{-s\tau}F(s).$$

注意 在延迟性质中专门强调了当 $t<0$ 时 $f(t)=0$ 这一约定。

- 事实上，该性质可以直接表述为：

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)u(t-\tau)]=\mathrm{e}^{-s\tau}F(s).$$

- 因此，在利用该性质求逆变换时，应为：

$$\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-s\tau}F(s)]=f(t-\tau)u(t-\tau).$$

例 求 $\mathscr{L}[\sin(t-\frac{\pi}{2})]$. P223 例 9.12

解 方法一 已知 $\mathscr{L}[\sin t]=\dfrac{1}{s^2+1}$,

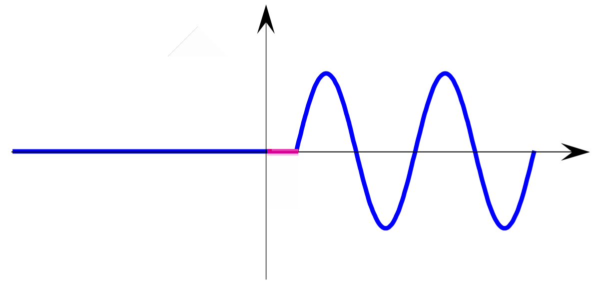
根据延迟性质，有

$$\mathscr{L}[\sin(t-\frac{\pi}{2})]=\frac{1}{s^2+1}e^{-\frac{\pi}{2}s}.$$

方法二 $\mathscr{L}[\sin(t-\frac{\pi}{2})]=\mathscr{L}[-\cos t]$

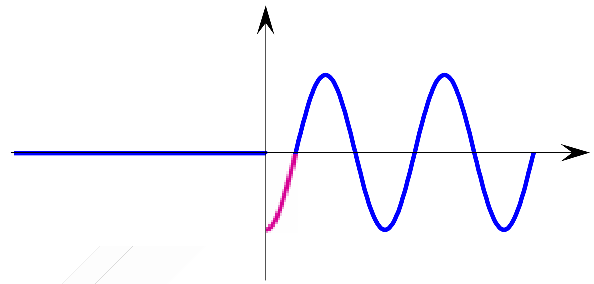
$$=\frac{1}{s^2+1}(-s).$$

方法一 先充零再平移



$\sin(t-\frac{\pi}{2})u(t-\frac{\pi}{2})$

方法二 先平移再充零



$\sin(t-\frac{\pi}{2})u(t)$

- 两种方法为什么会得到不同的结果？

例 求 $\mathscr{L}[\sin(t-\frac{\pi}{2})]$. P223 例 9.12

附 两种结果的逆变换对比。

(1) 对于 $F_1(s)=\dfrac{1}{s^2+1}e^{-\frac{\pi}{2}s}$,

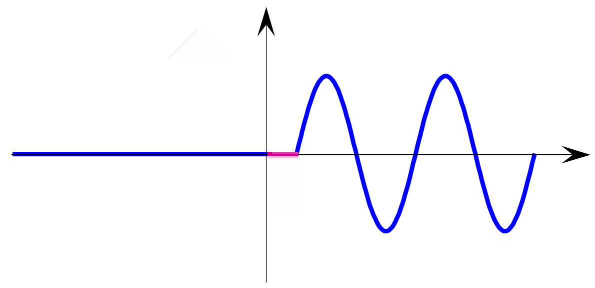
$$\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]=\sin(t-\frac{\pi}{2})u(t-\frac{\pi}{2}).$$

(2) 对于 $F_2(s)=\dfrac{1}{s^2+1}(-s)$,

$$\mathscr{L}^{-1}[F_2(s)]=\sin(t-\frac{\pi}{2})u(t).$$

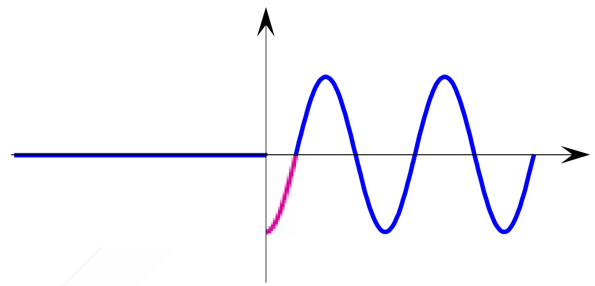
$$=-\cos t\, u(t).$$

方法一　先充零再平移



$\sin(t-\frac{\pi}{2})u(t-\frac{\pi}{2})$

方法二　先平移再充零



$\sin(t-\frac{\pi}{2})u(t)$

例 设 $F(s)=\dfrac{1}{s-1}\mathrm{e}^{-2s}$，求 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

P224 例 9.13 修改

解 已知 $\mathscr{L}^{-1}[\dfrac{1}{s-1}]=\mathrm{e}^{t}u(t)$,

根据延迟性质，有

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathrm{e}^{t-2}u(t-2)$$

$$=\begin{cases}\mathrm{e}^{t-2}, & t>2,\\ 0, & t<2.\end{cases}$$

二、延迟性质与位移性质

2. 位移性质 P 224

性质　设 a 为任一复常数，则有

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at} f(t)] = F(s-a).$$

证明　(略)

例如　$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{t}\cos t] = \dfrac{s-1}{(s-1)^2+1}.$

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{t}\sin t] = \frac{1}{(s-1)^2+1}.$$

三、微分性质 P218

1. 导数的象函数 P218

性质 $\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0).$

证明 (1) $\mathscr{L}[f'(t)] = \int_0^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}f(t)$

$$= f(t)\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$

(2) 由 $|f(t)| \le M\mathrm{e}^{ct}$，有 $|f(t)\mathrm{e}^{-st}| \le M\mathrm{e}^{-(\mathrm{Re}\,s-c)t}$，

因此，当 $\mathrm{Re}\,s = \beta > c$ 时，有 $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st} = 0$，

即得 $\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0).$

三、微分性质 P218

1. 导数的象函数 P218

性质 $\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0).$

- 一般地，有

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

其中，$f^{(k)}(0)$ 应理解为 $\lim\limits_{t\to 0^+} f^{(k)}(t).$

- Laplace 变换的这一性质非常重要，可用来求解微分方程(组)的初值问题。(§ 9.4 将专门介绍)

例 求函数 $f(t)=t^n$ 的 Laplace 变换（m 为正整数）。 P219 例 9.7

解 由 $f(t)=t^n$，可知

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0;\quad f^{(n)}(t)=n!.$$

根据导数的象函数性质：

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots$$
$$-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0).$$

可得 $\mathscr{L}[n!]=s^n\mathscr{L}[f(t)]=s^n\mathscr{L}[t^n]$,

故有 $\mathscr{L}[t^n]=\dfrac{1}{s^n}\mathscr{L}[n!]=\dfrac{n!}{s^n}\mathscr{L}[1]=\dfrac{n!}{s^{n+1}}.$

三、微分性质

2. 象函数的导数 P 219

性质 $F'(s)=-\mathscr{L}[t\,f(t)].$

- 一般地，有 $F^{(n)}(s)=(-1)^n\mathscr{L}[t^n f(t)].$

证明 由 $F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$，有

$$F'(s)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}[f(t)\mathrm{e}^{-st}]\mathrm{d}t$$

$$=-\int_0^{+\infty} t\,f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\mathscr{L}[t\,f(t)].$$

进一步，可得 $F^{(n)}(s)=(-1)^n\mathscr{L}[t^n f(t)].$

例 求函数 $f(t)=t\sin\omega t$ 的 Laplace 变换。 P220 例 9.8

解 已知 $\mathscr{L}[\sin\omega t]=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$,

根据象函数的导数性质，有

$$\mathscr{L}[t\sin\omega t]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right]$$

$$=\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

$F'(s)=-\mathscr{L}[t\,f(t)].$

- 一般地，有 $F^{(n)}(s)=(-1)^n\mathscr{L}[t^n f(t)].$

例 求函数 $f(t)=t^2\cos^2 t$ 的 Laplace 变换。 P220 例 9.8

解 由于 $\cos^2 t=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2t)$，且已知

$$\mathscr{L}[1]=\frac{1}{s},\quad \mathscr{L}[\cos 2t]=\frac{s}{s^2+2^2},$$

根据线性性质，有

$$\mathscr{L}[\cos^2 t]=\frac{1}{2}\cdot[\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+2^2}]=\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}.$$

进一步，根据象函数的导数性质，有

$$\mathscr{L}[t^2\cos^2 t]=\frac{d^2}{ds^2}[\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}]=\frac{2s^6+48s^2+64}{s^3(s^2+4)^3}.$$

四、积分性质 P 220

1. 积分的象函数 P 220

性质 $\mathscr{L}[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t] = \dfrac{1}{s}F(s).$

证明 令 $g(t) = \int_0^t f(t)\mathrm{d}t$，则有 $g'(t) = f(t)$， 且 $g(0) = 0$，

根据微分性质， 有

$$\mathscr{L}[g'(t)] = sG(s) - g(0) = sG(s),$$

$$\Rightarrow \quad G(s) = \frac{1}{s}\mathscr{L}[g'(t)] = \frac{1}{s}\mathscr{L}[f(t)],$$

即得 $\mathscr{L}[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t] = \dfrac{1}{s}F(s).$

四、积分性质 P220

1. 积分的象函数 P220

性质 $$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}F(s).$$

- 一般地，有

$$\mathscr{L}\Big[\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{d}t\cdots\int_0^t}_{n\text{次}} f(t)\,\mathrm{d}t\Big]=\frac{1}{s^n}F(s).$$

证明 （略）

例　求函数 $f(t)=\int_0^t t\sin 2t\,\mathrm{d}t$ 的 Laplace 变换。

解　已知 $\mathscr{L}[\sin 2t]=\dfrac{2}{s^2+2^2}$,

根据微分性质，有

$$\mathscr{L}[t\sin 2t]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)=\frac{4s}{(s^2+4)^2},$$

进一步，根据积分性质，得

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t t\sin 2t\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}\cdot\frac{4s}{(s^2+4)^2}=\frac{4}{(s^2+4)^2}.$$

四、积分性质

2. 象函数的积分 P 221

性质 $$\int_s^{\infty} F(s)\,\mathrm{d}s = \mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right].$$

- 一般地，有

$$\underbrace{\int_s^{\infty}\mathrm{d}s\int_s^{\infty}\mathrm{d}s\cdots\int_s^{\infty}}_{n\text{次}} F(s)\,\mathrm{d}s = \mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t^n}\right].$$

证明 （略）

例 求函数 $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ 的 Laplace 变换。 P221 例 9.10

解 已知 $\mathscr{L}[\sin t]=\dfrac{1}{s^2+1}$,

根据象函数的积分性质，有

$$\mathscr{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]=\int_s^{\infty}\frac{1}{1+s^2}\,\mathrm{d}s=\operatorname{arccot} s.$$

[注] 按照定义，上述结果即为 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\operatorname{arccot} s$,

进一步，如果令 $s=0$，可得 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$.

可见，利用 Laplace 变换可以计算某些广义积分。 (进入?)

小结 部分基本性质汇总

线性性质 $\mathscr{L}[a\,f(t)+b\,g(t)]=a\,F(s)+b\,G(s);$

$$\mathscr{L}^{-1}[a\,F(s)+b\,G(s)]=a\,f(t)+b\,g(t).$$

相似性质 $\mathscr{L}[f(at)]=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right).$

延迟性质 $\mathscr{L}[f(t-\tau)]=\mathrm{e}^{-s\tau}F(s).$

$$\mathscr{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-s\tau}F(s)]=f(t-\tau)\,u(t-\tau).$$

位移性质 $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)]=F(s-a).$

小结 部分基本性质汇总

微分性质

$$\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0).$$

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

$$F'(s) = -\mathscr{L}[t f(t)];$$

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \mathscr{L}[t^n f(t)].$$

积分性质

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{s} F(s).$$

$$\int_s^{\infty} F(s)\,\mathrm{d}s = \mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right].$$

五、周期函数的像函数 P 224

性质 设 $f(t)$ 是 $[0,+\infty)$ 内<u>以 T 为周期</u>的函数，且逐段光滑，

则有 $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{1-e^{-sT}}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-st}\,dt$.

证明 $\mathscr{L}[f(t)]=\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-st}\,dt+\underline{\int_T^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt}\overset{\text{记为}}{=\!=}I_1+I_2$,

其中，$I_2\overset{\text{令 } x=t-T}{=\!=\!=\!=}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x+T)e^{-s(x+T)}\,dx$

$$=e^{-sT}\int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}\,dx=e^{-sT}\mathscr{L}[f(t)],$$

即得 $\mathscr{L}[f(t)]=\dfrac{1}{1-e^{-sT}}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-st}\,dt$.

【第九章 拉普拉斯變換】

例　求全波整流后的正弦波 $f(t)=|\sin\omega t|$ 的象函数。 P225 例 9.14

解　已知函数 $f(t)$ 的周期为 $T=\dfrac{\pi}{\omega}$,

根据周期函数的象函数的性质，有

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\int_0^T \mathrm{e}^{-st}\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-st}(-s\sin\omega t-\omega\cos\omega t)}{s^2+\omega^2}\Bigg|_0^T$$

$$=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{1+\mathrm{e}^{-sT}}{1-\mathrm{e}^{-sT}}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\coth\frac{s\pi}{2\omega}.$$

六、卷积与卷积定理 P 225

1. 卷积 P 225

分析

- 根据 § 8.3 节中卷积的定义，两个函数的卷积为：

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau .$$

- 如果函数满足：当 $t<0$ 时，$f_1(t)=f_2(t)=0$，则有

$$f_1(t)*f_2(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, & t\ge 0. \end{cases}$$

即 $f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\cdot u(t).$

六、卷积与卷积定理 P 225

1. 卷积 P 225

分析

- 按照 § 9.1 节中函数的约定，对于 Laplace 变换而言，任何函数 $h(t)$ 通常可以等同于函数 $h(t)\cdot u(t)$.

- 因此，在本章中两个函数的卷积直接定义为:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau .$$

注 由上式给出的卷积的仍然满足交换律、结合律及分配律。

例 求函数 $f_1(t)=t$ 与 $f_2(t)=\sin t$ 的卷积。 P225 例 9.15

解 $$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t \tau\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_0^t \tau\,\mathrm{d}\cos(t-\tau)$$

$$=\tau\cos(t-\tau)\Big|_0^t-\int_0^t\cos(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=t+\sin(t-\tau)\Big|_0^t$$

$$=t-\sin t.$$

六、卷积与卷积定理

2. 卷积定理 P 225

定理 $\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)\cdot F_2(s)$.

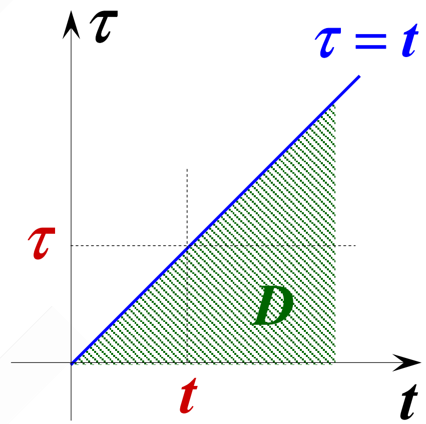
证明 左边 $=\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_0^{+\infty}[f_1(t)*f_2(t)]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$

(跳过?)

$$=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\iint_D f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}f_1(\tau)\left[\int_\tau^{+\infty}f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau;$$



六、卷积与卷积定理

2. 卷积定理 P 225

定理 $\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)\cdot F_2(s).$

证明 左边 $=\int_0^{+\infty}f_1(\tau)[\underline{\int_\tau^{+\infty}f_2(t-\tau)e^{-st}\,dt}]d\tau;$

其中，$\int_\tau^{+\infty}f_2(t-\tau)e^{-st}\,dt$

$$\xlongequal{令\ x=t-\tau}e^{-s\tau}\int_0^{+\infty}f_2(x)e^{-sx}\,dx=e^{-s\tau}F_2(s),$$

左边 $=\int_0^{+\infty}f_1(\tau)e^{-s\tau}d\tau\cdot F_2(s)=F_1(s)\cdot F_2(s)=$ 右边。

例 已知 $F(s)=\dfrac{s^2}{(s^2+1)^2}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

P226 例 9.16

解 由于 $F(s)=\dfrac{s}{s^2+1}\cdot\dfrac{s}{s^2+1}$，$\mathscr{L}[\dfrac{s}{s^2+1}]=\cos t$,

故有 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\cos t*\cos t$

$$=\int_0^t \cos\tau\cos(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t[\cos t+\cos(2\tau-t)]\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2}(t\cos t+\sin t).$$

放松一下吧！……

附：利用 Laplace 变换计算广义积分

P222［注］

思想 在 Laplace 变换及其性质中，如果取 s 为某些特定的值，就可以用来求一些函数的广义积分。

例如

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt, \qquad F(0)=\int_0^{+\infty} f(t)dt;$$

$$F'(s)=-\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-st}dt, \qquad F'(0)=-\int_0^{+\infty} tf(t)dt;$$

$$\int_s^{\infty} F(s)ds=\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}e^{-st}dt, \qquad \int_0^{\infty} F(s)ds=\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt.$$

注意 在使用这些公式时必须谨慎，必要时需要事先考察一下广义积分的存在性以及 s 的取值范围。

附：利用 Laplace 变换计算广义积分

例 计算积分 $\int_0^{+\infty} e^{-3t}\cos 2t\,dt$. P222 例 9.11 (1)

解 已知 $\mathscr{L}[\cos 2t] = \int_0^{+\infty} e^{-st}\cos 2t\,dt = \dfrac{s}{s^2+4}$,

在上式中，取 $s=3$，即得

$$\int_0^{+\infty} e^{-3t}\cos 2t\,dt = \left.\frac{s}{s^2+4}\right|_{s=3} = \frac{3}{13}.$$

附：利用 Laplace 变换计算广义积分

例 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$ P222 例 9.11 (2)

解 (1) 已知 $\mathscr{L}[1-\cos t]=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}=\frac{1}{s(s^2+1)}$，

根据积分性质，有

$$\mathscr{L}\left[\frac{1-\cos t}{t}\right]=\int_s^{\infty}\frac{1}{s(s^2+1)}\,\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{s^2}{s^2+1}\bigg|_s^{\infty}=\frac{1}{2}\ln\frac{s^2+1}{s^2}.$$

附：利用 Laplace 变换计算广义积分

例 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$ P222 例 9.11 (2)

解 (1) $\displaystyle\mathscr{L}\left[\frac{1-\cos t}{t}\right]=\frac{1}{2}\ln\frac{s^2+1}{s^2},$

即 $$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\frac{s^2+1}{s^2}.$$

(2) 在上式中，取 $s=1$，即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\frac{s^2+1}{s^2}\bigg|_{s=1}=\frac{1}{2}\ln 2.$$

(返回)

放松一下吧！……