概率论与数理统计 A

浙江理工大学期末试题汇编

（答案册 上）

学校：________________________

专业：________________________

班级：________________________

姓名：________________________

学号：________________________

（此试卷为 2022 年第二版 第 1 次发行）

目录

2022 年所有试卷版本见**试卷版**的尾页。如需资料获取请添加下方的 QQ 群获取。

更多信息

试卷整理人：张创琦　　　　　　　微信公众号：创琦杂谈
试卷版次：2022 年 5 月 13 日 第二版 第 1 次发行
本人联系 QQ 号：1020238657（勘误请联系本人）
创琦杂谈学习交流群（QQ 群）群号：749060380
cq 数学物理学习群（QQ 群）群号：967276102
cq 计算机编程学习群（QQ 群）群号：653231806

送给大家一段文摘：

当欢笑淡成沉默，当信心变成失落，我走近梦想的脚步，是否依旧坚定执着；当笑颜流失在心的沙漠，当霜雪冰封了亲情承诺，我无奈的心中，是否依然碧绿鲜活。

有谁不渴望收获，有谁没有过苦涩，有谁不希望生命的枝头挂满丰硕，有谁愿意让希望变成梦中的花朵。现实和理想之间，不变的是跋涉，暗淡与辉煌之间，不变的是开拓。

甩掉世俗的羁绊，没谁愿意，让一生在碌碌无为中度过。整理你的行装，不同的起点，可以达到同样辉煌的终点。人生没有对错，成功永远属于奋斗者。

——汪曾祺《生活》

1　2021—2022 学年第 1 学期《概率论与数理统计 A》期末 A 卷

一、填空题（共 24 分，每题 4 分）

1. 0.8　2. 0.875　3. 0.5　4. 0.9　5. 7/16　6. $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$

二、单项选择题（共 20 分，每题 4 分）

1. B　2.A　3. C　4. A　5.D

三、解答题（共 56 分）

1. 解　设 A_1, A_2, A_3 分别表示 “甲不及格”、“乙不及格”、“丙不及格”三事件由题意知

A_1, A_2, A_3 相互独立，令 A 表示“恰有 2 位不及格”，则

$$A = A_1A_2\overline{A}_3 \cup A_1\overline{A}_2A_3 \cup \overline{A}_1A_2A_3 \qquad \text{............ 2 分}$$

（1）
$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1A_2\overline{A}_3) + P(A_1\overline{A}_2A_3) + P(\overline{A}_1A_2A_3) \\ &= 0.4\times0.3\times0.5 + 0.4\times0.7\times0.5 + 0.6\times0.3\times0.5 \qquad \text{............ 3 分} \\ &= 0.29 \end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned} P(A_1A_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1A_2A_3 \mid A) &= \frac{P(A_1A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1A_2A_3)}{P(A)} \\ &= \frac{0.4\times0.3\times0.5 + 0.6\times0.3\times0.5}{0.29} \qquad \text{............ 3 分} \\ &= \frac{15}{29} \end{aligned}$$

2. 解：（1）

X \ Y	0	1	2
-1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{6}$	0	0
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	0

.... 4 分

（2）

X	-1	0	2
p	5/12	1/6	5/12

...... 2 分

Y	0	1	2
p	5/12	1/4	1/3

...... 2 分

（3）由 $E(X) = 5/12, E(Y) = 11/12, E(XY) = -5/12$　　............ 2 分

知 $Cov(X,Y)=\frac{-5}{12}-\frac{5}{12}\times\frac{11}{12}=\frac{115}{144}$ ………… 2分

3. (1) 由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^x Ay(1-x)dxdy$ …… 3分

得 $A=24$ …… 1分

(2) 由 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$ …… 2分 得 $f_x(x)=\begin{cases}12x^2(1-x), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ …… 1分

由 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$ 得 $f_y(y)=\begin{cases}12y(1-y)^2, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ …… 2分

(3) 由 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立 …… 3分

4. 解：由题意 $P(X\le 1095)=1-e^{-0.0365}\approx 0.04$ …… 1分

记 $\begin{cases}N=\text{"1000件产品中寿命小于1095的产品件数"}\\ Y=\text{"保险公司的利润"}\end{cases}$

则 $N\sim B(1000,0.04)$，$Y=1000\times P_0-2000N$ ………… 1分

由中心极限定理知，$N\overset{\text{近似}}{\sim}N(40,6.2^2)$ ………… 2分

于是

(1) 若保费 $P_0=100$ 元/件，则"保险公司亏本"$=\{Y\le 0\}=\{N\ge 50\}$

$P\{\text{保险公司亏本}\}=P\{Y\le 0\}=P\{N\ge 50\}=P\{\frac{N-40}{6.2}\ge\frac{10}{6.2}\}\approx 1-\Phi(1.61)=0.054$

…… 2分

(2) 若保费为 P_0，则"保险公司亏本"$=\{Y\le 0\}=\{N\ge 0.5P_0\}$

$P\{\text{保险公司亏本}\}=P\{N\ge 0.5P_0\}=P\{\frac{N-40}{6.2}\ge\frac{0.5P_0-40}{6.2}\}\approx 1-\Phi(\frac{0.5P_0-40}{6.2})\le 0.01$

…… 2分

故 $\Phi(\frac{0.5P_0-40}{6.2})\ge 0.99\Rightarrow\frac{0.5P_0-40}{6.2}\ge 2.33$ …… 1分

$\Rightarrow P_0\ge 2\times(40+6.2\times 2.33)=108.89$(元)

5. 解 由于 $\overline{X}\sim N(72,\frac{100}{n})$ …… 2分

故若 $P(\overline{X}>70)=P(\frac{\overline{X}-72}{10/\sqrt{n}}>\frac{70-72}{10/\sqrt{n}})=1-P(\frac{\overline{X}-72}{10/\sqrt{n}}\le\frac{70-72}{10/\sqrt{n}})$

$=1-\Phi(-\frac{\sqrt{n}}{5})=\Phi(\frac{\sqrt{n}}{5})\ge 0.9$ …… 4分

则 $\frac{\sqrt{n}}{5} \geq 1.28$ ，得 $n \geq 40.96$ ，取 $n = 41$ …… 1 分

6.解 由题意 $E(X) = 1 \times \theta^2 + 2 \times 2\theta(1-\theta) + 3 \times (1-\theta)^2 = 3 - 2\theta$ …… 1 分

由矩估计法令 $3 - 2\theta = \frac{10}{6}$ ， …… 2 分

得 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta} = \frac{2}{3}$ …… 1 分

作似然函数

$$L(\theta) = [P(X=1)]^3 [P(X=2)]^2 P(X=3) = \theta^6 \times [2\theta(1-\theta)]^2 \times (1-\theta)^2 = 4\theta^8 (1-\theta)^4$$

…… 2 分

取对数 $\ln L(\theta) = \ln 4 + 8\ln\theta + 4\ln(1-\theta)$

令 $$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{8}{\theta} - \frac{4}{1-\theta} = 0$$

得得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \frac{2}{3}$ …… 2 分

2 2020—2021 学年第 2 学期《概率论与数理统计 A》期末 A 卷

一 单项选择题（每题 3 分，共 18 分）

1. B 2. C 3. B 4. A 5. C 6. D

评分标准说明： 每题 3 分，错则扣全分

二 填空题（每空 3 分，共 24 分）

1. $\frac{3}{5}$. 2. $\frac{20}{27}$. 3. $\frac{7}{9}$. 4. $N(15,44)$.

5. $e^{-1} - e^{-4}$. 6. 0. 7. $t(4)$， $F(5,4)$.

评分标准说明： 每空 3 分，错则扣全分。

三 计算题（**本大题共 6 小题，满分 58 分**）

1 解：令 A, B, C 分别表示已售出 2 件产品为 2 件正品、一正一次，2 件次品。

D 表示从剩下的 10 件产品中任取一件为正品。 ------------ 2 分

1. $P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C)$

$$=\frac{C_8^2}{C_{12}^2}\times\frac{6}{10}+\frac{C_8^1C_4^1}{C_{12}^2}\times\frac{7}{10}+\frac{C_4^2}{C_{12}^2}\times\frac{8}{10}=\frac{2}{3}$$ ------------ 4 分

2. $P(A|D)=\frac{P(A)P(D|A)}{P(D)}=\frac{21}{55}$ ------------ 4 分

评分标准说明： 全概率公式，贝叶斯公式写正确給 4 分。

2 解：（1） $\int_{=\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-1}^{0}(a+x)dx+\int_{0}^{1}(b-x)dx=1$ ，

$$E(X)=\int_{-1}^{0}x(a+x)dx+\int_{0}^{1}x(b-x)dx=0$$

得： $a=1$，$b=1$ ------------ 4 分

（2） $P(|X|\le\frac{1}{3})=\int_{-1/3}^{0}(1+x)dx+\int_{0}^{1/3}(1-x)dx=\frac{5}{9}$ ------------ 3 分

（3） $E(X^2)=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)dx+\int_{0}^{1}x^2(1-x)dx=\frac{1}{6}$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{6}$ ------------ 3 分

评分标准说明：公式写正确，计算错误給一半分。

3 解：（1） $a+0.2+0.1+b+0.1+0.2+c=1$

得：$a+b+c=0.4$

由： $P(XY\neq 0)=a+0.2+c=0.4$ 得：$b=0.2$

$$P(Y\le 0|X\le 0)=\frac{P(X\le 0,Y\le 0)}{P(X\le 0)}=\frac{a+b+0.1}{a+b+0.3}=\frac{2}{3}$$

得：$a+b=0.3$ 推得：$a=0.1$，进而有：$c=0.1$ ---------- 4 分

（2）

X	-1	0	1
p	0.2	0.4	0.4

Y	-1	0	1
p	0.3	0.4	0.3

------------ 4 分

（3）

$X+Y$	-2	-1	0	1	2
p	0.1	0.1	0.4	0.3	0.1

------------ 2 分

评分标准说明： a，b，c 数值解错，后面的解题方法正确，给一半分。

4 解： $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

当 $x\le 0$，或 $x\ge 1$ 时， $f_X(x)=0$

当 $0<x<1$ 时， $f_X(x)=\int_{-x}^{+x}1dy=2x$

故： $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$ --------------- 3 分

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

当 $y\le -1$，或 $y\ge 1$ 时， $f_Y(y)=0$

当 $-1<y<0$ 时， $f_Y(y)=\int_{-y}^{1}1dx=1+y$

当 $0\le y<1$ 时， $f_Y(y)=\int_{y}^{1}1dx=1-y$

故： $f_Y(y)=\begin{cases}1+y, & -1<y<0\\ 1-y, & 0\le y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$ --------------- 3 分

当 $0<x<1,-x<y<x$ 时， $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$

所以，X 与 Y 不独立。 --------------- 1 分

因为：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_{-1}^{1}2x^2dx=\frac{2}{3}$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_X(y)dy=\int_{-1}^{0}y(1+y)dy+\int_{0}^{1}y(1-y)dy=0$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_{0}^{1}xdx\int_{-x}^{+x}ydy=0$

所以，$E(XY)=E(X)E(Y)$，故 X 与 Y 不相关。--------------- 3 分

（或者，$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_{0}^{1}xdx\int_{-x}^{+x}1dy=\frac{2}{3}$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\int_{0}^{1}dx\int_{-x}^{+x}ydy=0$ ）

评分标准说明：公式写正确，计算错误给一半分。

5 解： 设至少在阅览室设座位数为 N；设某段时间内去阅览室自修的同学人数为 X，则 $X\sim B(1000,0.05)$； ------------ 2 分

$E(X)=1000\times 0.05=50$， $D(X)=1000\times 0.05\times 0.95=47.5$

依题意有：$P(X \le N) \ge 0.95$，

由中心极限定理知：X 近似服从 $N(50,47.5)$ ------------ 2 分

$$P(X \le N) \approx \Phi(\frac{N-50}{\sqrt{47.5}}) \ge 0.95 = \Phi(1.65)，\frac{N-50}{\sqrt{47.5}} \ge 1.65$$

$N \ge 50 + 1.65 \times \sqrt{47.5} \approx 61.37$，取 $N = 62$ ------------ 4 分

评分标准说明： 最后的整数 N 进位错扣 1 分；也可用独立同"0–1"分布方法做。

6 解：（1） $L(\theta) = \frac{x_1}{\theta^2} e^{-\frac{x_1}{\theta}} \times \cdots \times \frac{x_n}{\theta^2} e^{-\frac{x_n}{\theta}} = \frac{x_1 \cdots x_n}{\theta^{2n}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta}}$

$$\ln L = \sum_{i=1}^n x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta} - 2n\ln\theta$$

$$\frac{d\ln L}{d\theta} = 0 + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta^2} - 2n\frac{1}{\theta} = 0$$

得： $\hat{\theta} = \frac{\overline{X}}{2}$ --------------- 5 分

（2）$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x;\theta)dx = \int_0^{+\infty} x\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}dx = 2\theta$

$$E(\hat{\theta}) = E(\frac{\overline{X}}{2}) = \frac{1}{2}E(\overline{X}) = \frac{1}{2}E(X) = \frac{1}{2} \times 2\theta = \theta$$

所以，$\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计。 --------------- 2 分

（3）$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x;\theta)dx = \int_0^{+\infty} x^2\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}dx = 6\theta^2$

$$D(X) = 6\theta^2 - (2\theta)^2 = 2\theta^2$$

$D(\hat{\theta}) = D(\frac{\overline{X}}{2}) = \frac{1}{4}D(\overline{X}) = \frac{1}{2n}D(X) = \frac{1}{2n} \times 6\theta^2 = \frac{\theta^2}{2n}$ --------------- 3 分

评分标准说明：解题方法和计算公式正确，运算错误給一半分。

3　2020—2021 学年第 1 学期《概率论与数理统计 A》期末 A 卷

一、填空题（每小题 4 分，满分 20 分）

1. $1-(1-p)^{1/n}$　　2. 1/6, 5/6　3. 217　　4. $N(0,1)$　　5. （$-0.2535,\ 1.2535$）

二、选择题（每小题 4 分，满分 20 分）

1. B　　2. B　　3. C　　4.A　　5. D

三、**解答题(满分 60 分)**

1.（共 8 分）设 $A=$ ‘任取两件，两件都为合格品’，$B=$ ‘任取两件，有一件为不合格品’ $C=$ ‘任取两件，两件都为不合格品’

则（1）　$P(A)=1\text{-}\dfrac{C_6^2}{C_{10}^2}=\dfrac{2}{3}$　　…………　（3 分）

（2）　$P(\mathrm{C}\,|\,\mathrm{B})=\dfrac{P(BC)}{P(\mathrm{B})}=\dfrac{C_4^2/C_{10}^2}{C_4^1C_6^1/C_{10}^2+C_4^2/C_{10}^2}=\dfrac{1}{5}$　　…….（8 分）

2、（共 10 分）(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1 axdx+\int_1^2(2-x)dx=1$，　a = 1　　……（2 分）

（2）　当 $x<0$ 时，$F(x)=0$，　当 $x>2$ 时，$F(x)=1$　　……（3 分）

当 $0\le x<1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_0^x tdt=\dfrac{x^2}{2}$　　……（5 分）

当 $1\le x<2$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_0^1 tdt+\int_1^x(2-t)dt=-\dfrac{x^2}{2}+2x-1$　　……（7 分）

综上 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^2}{2}, & 0\le x<1\\ -\dfrac{x^2}{2}+2x-1, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$　　……（8 分）

（3）　$P(1/2\le x\le 2)=F(2)-F(1/2)=1-1/8=7/8$　　……（10 分）

3.(共 12 分)

（1）

Z_1	-2	-1	0	1	2	3
P	4/20	3/20	4/20	6/20	2/20	1/20

……（3 分）

(2)

Z_2	-2	-1	0	1	2
P	6/20	4/20	3/20	6/20	1/20

……（6 分）

(3)

Z_3	-1	0	1	2
P	4/20	3/20	6/20	7/20

……（9 分）

(4)

Z_4	-1	0	1
P	17/20	0	3/20

……（12 分）

4. (共 8 分)

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

当 $0<x<1$ 时， $f_X(x)=\int_x^1 12x^2 dy=12x^2(1-x)$

当 $x\ge 1$ 或 $x\le 0$ 时， $f_X(x)=0$

综上 $f_X(x)=\begin{cases}12x^2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ ……（3 分）

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

当 $0<y<1$ 时， $f_Y(y)=\int_0^y 12x^2 dx=4y^3$

当 $y\ge 1$ 或 $y\le 0$ 时， $f_Y(y)=0$

综上 $f_Y(y)=\begin{cases}4y^3, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ ……（6 分）

由于当 $0<x<1,\ 0<y<1$ 时， $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，则 X 与 Y 不独立 … （8 分）

5、(共 12 分)

$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy=2\int_0^1 x[\int_0^{1-x} dy]dx=2\int_0^1 x(1-x)dx=\frac{1}{3}$ … （3 分）

$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy=2\int_0^1 [\int_0^{1-x} ydy]dx=2\int_0^1 (1-x)^2/2dx=\frac{1}{3}$ … （6 分）

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy=2\int_0^1 x[\int_0^{1-x} ydy]dx=2\int_0^1 (x^3/2-x^2+x/2)dx=\frac{1}{12}$

…（9 分）

由于 $E(XY)\ne E(X)E(Y)$，所以 X 与 Y 相关 … （12 分）

6、(共 10 分)

X 的密度函数为:f(x，β)= $\begin{cases}\frac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$,…………………………….(2 分)

由于E（X）$=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,\beta)dx=\frac{\beta}{\beta-1}$

令　E（X）$=\frac{\beta}{\beta-1}$，得 β 的矩估计量为 $\hat{\beta}=\frac{\bar{x}}{\bar{x}-1}$ ……………………………(6 分)

似然函数为 L（β）$=\begin{cases}\frac{\beta^n}{x_1x_2...x_n}, x_i>1 \\ 0,其他\end{cases}$ ……………………….(7 分)

取对数求导后求解得 $\hat{\beta}=\frac{n}{\sum_{i-1}^{n}\ln x_i}$。……………………….(10 分)

4　2019—2020 学年第 2 学期《概率论与数理统计 A》期末 A 卷

一．单项选择题

1. D　　2. B　3. A　　4. B　　5. C

评分标准说明：　每题 4 分，错则扣全分

二、填空题

1. $\frac{2}{15},\frac{4}{15}$.　　　　2. $-\frac{6}{5},\frac{8}{5}$.　　　　3. $0.8, 4.8$.

4. $1,\frac{1}{2}$.　　　　5. $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n}),\ \chi^2(n-1)$.　　　　6. $\hat{\mu}_1$和$\hat{\mu}_2$, $\hat{\mu}_1$.

评分标准说明：　每空 2 分，每小题 4 分，错则扣全分。

三 、计算题（本大题共 6 小题，满分 56 分）

1 解：设 $A=$‘任取一产品，经检验认为是合格品’

$B=$‘任取一产品确是合格品’　　　　------------　2 分

则（1）　$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})$

$=0.9\times0.95+0.1\times0.02=0.857.$　　　------------　4 分

（2）　$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.9\times0.95}{0.857}=0.9977$　　　------------　4 分

评分标准说明：　全概率公式，贝叶斯公式写正确給 4 分。

2 解：（1） 当$y \le 0$时，$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(e^X \le y) = 0$，

$f(y) = 0$ ------------ 1 分

当$y > 0$时，则 Y 的分布函数为：

$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(0 < e^X \le y)$

$= P(X \le \ln y) = \Phi(\ln y)$；------------ 2 分

则 $f(y) = \dfrac{d}{dy}F(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\ln^2 y}\dfrac{1}{y}$ ------------ 2 分

（2）当$y \le 1$时，$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(2X^2 + 1 \le y) = 0$，

$f(y) = 0$ ------------ 1 分

当$y > 1$时，则 Y 的分布函数为：

$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(2X^2 + 1 \le y)$

$= P(-\sqrt{\dfrac{y-1}{2}} \le X \le \sqrt{\dfrac{y-1}{2}})$

$= \Phi(\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}) - \Phi(-\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}) = 2\Phi(\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}) - 1$ ------- 2 分

则 $f(y) = \dfrac{d}{dy}\left[2\Phi(\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}) - 1\right] = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-(y-1)/4}$ -------2 分

评分标准说明：以上密度函数计算时，第（1）小题，如果 y=0 对应函数值不正确则扣 1 分；第（2）小题，如果 y=1 对应函数值不正确也扣 1 分。

3 解：(1) $0.1 + a + 0.12 + 0.15 + 0.25 + b = 1$

$P(X = 1) = 0.1 + a + 0.12 = 0.35$

解方程组得：$a = 0.13$，$b = 0.25$ ------------ 4 分

（2）

X	1	2
p	0.35	0.65

Y	0	1	2
p	0.25	0.38	0.37

------------ 4 分

（3） $F(2,1)=P(X\le 2,Y\le 1)=0.63$ ------------ 2 分

评分标准说明： a，b 数值解错，后面的解题方法正确，给一半分。

4 解： 设食堂应设的座位数为 N，设每餐去该食堂就餐的学生人数为 X

则 $X \sim B(20000, 0.8)$； ------------ 2 分

$E(X)=20000\times 0.8=16000$， $D(X)=20000\times 0.8\times 0.2=3200$

依题意有： $P(X\le N)=0.99$，

由中心极限定理知： X 近似服从 $N(16000,3200)$ ------------ 2 分

$$P(X\le N)\approx\Phi(\frac{N-16000}{\sqrt{3200}})=0.99=\Phi(2.33)$$

计算得： $N=16132$ ------------ 4 分

评分标准说明： 最后的整数 N 进位错扣 1 分；也可用独立同“0-1”分布方法做。

5 解：选取统计量： $U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ --------------- 2 分

通过计算得： $\bar{x}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}x_i=75$ --------------- 2 分

所求置信区间为：

$$(\bar{x}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=(69.773,\ 80.227)$$ --------------- 4 分

评分标准说明：$\bar{x}$ 计算错，置信区间公式写对給一半分。

6 解：（1） $D(Y_i)=D[(1-\frac{1}{n})X_i-\frac{1}{n}\sum_{k\ne i}X_k]=(1-\frac{1}{n})^2D(X_i)+\frac{1}{n^2}\sum_{k\ne i}D(X_k)$

$=(1-\frac{1}{n})^2+\frac{n-1}{n^2}=\frac{n-1}{n}\qquad i=1,2,\cdots,n$ --------------- 4 分

（2） $\because E(Y_1)=E(Y_n)=E(\overline{X})=0$， $E(X_1{}^2)=E(X_n{}^2)=1$， $E(\overline{X}^2)=\frac{1}{n}$，

$E(X_iX_j)=E(X_i)E(X_j)=0$， $i\ne j$， $i,j=1,2,\cdots,n$ 。

$\therefore\ Cov(Y_1,Y_n)=E(Y_1Y_n)-E(Y_1)E(Y_n)=E[(X_1-\overline{X})(X_n-\overline{X})]$

$$=E(X_1X_n)+E(\overline{X}^2)-E(X_1\overline{X})-E(X_n\overline{X})$$

$$=-\frac{1}{n} \qquad \text{---------------} \quad 4\text{分}$$

（3） $Y_1+Y_n=\frac{n-2}{n}X_1-\frac{2}{n}\sum_{i=2}^{n-1}X_i+\frac{n-2}{n}X_n$，为相互独立的正态随机变量的线性组合，故 Y_1+Y_n 服从正态分布，又 $E(Y_1+Y_n)=0$，得 $P(Y_1+Y_n\le 0)=\frac{1}{2}$。

--------------- 2 分

评分标准说明：解题方法和计算公式正确，运算错误給一半分。

5 2018—2019 学年第 2 学期《概率论与数理统计 A》期末 A 卷

一 填空题

1. 0.6； 2. 0.9，0.25；； 3.0.5，1.1； 4. $\frac{3}{2},\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0\le x\le 2\\ 0, & others\end{cases}$； 5. 0.15； 6. $\frac{n-m}{n}$；

7 $(161.08,168.92)$。

二 选择题

1 D； 2 A； 3. B； 4. C； 5.D； 6.B。

三 解： 设 $A_i=\{\text{第i次考试及格}\}(i=1,2)$，$B=\{\text{取得某种资格}\}$。

1. $B=A_1\cup A_2=A_1\cup(\overline{A}_1A_2)$， 且 $A_1\cap(\overline{A}_1A_2)=\phi$ （2 分）

$$P(B)=P(A_1)+A(\overline{A}_1A_2)=p+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)$$

$$=p+(1-p)\times 0.5p=1.5p-0.5p^2 \qquad （6\text{ 分}）$$

2. $P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{p\times p}{p\times p+(1-p)\times 0.5p}=\frac{2p}{1+p}$ （10 分）

四 解：令 X 表示某天来到该商场的顾客人数，则 $X\sim\pi(1)$

$$P(X=n)=\frac{1^n}{n!}e^{-1}=\frac{1}{n!}e^{-1}，\quad (n=1,2,\cdots,) \qquad （2\text{ 分}）$$

设Y表示这一天在该商场消费的人数，则：

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$$

而： $$P(Y = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) P(Y = 0 | X = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{-1} \times C_n^0 p^0 (1-p)^n = e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-p)^n}{n!} = e^{-1} \times e^{1-p} = e^{-p}$$ （6 分）

故： $$P(Y \geq 1) = 1 - e^{-p}$$ （8 分）

五 解：1. $\int_{=\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (a+x)dx + \int_{0}^{1} (b-x)dx = 1$ ，

$$E(X) = \int_{-1}^{0} x(a+x)dx + \int_{0}^{1} x(b-x)dx = 0$$

得： $a = 1$， $b = 1$ （3 分）

2. $P(|X| \leq \frac{1}{3}) = \int_{-1/3}^{0} (1+x)dx + \int_{0}^{1/3} (1-x)dx = \frac{5}{9}$ （5 分）

3. $E(X^2) = \int_{-1}^{0} x^2(1+x)dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)dx = \frac{1}{6}$

$$E(X^2 + 1) = E(X^2) + 1 = \frac{7}{6}$$ （8 分）

六、解：1. $0.2 + 0.1 + a + 0.1 + b + 0.1 = 1$

$E(XY) = 1 \times 3 \times 0.2 + 1 \times 4 \times 0.1 + 1 \times 5 \times a + 2 \times 3 \times 0.1 + 2 \times 4 \times b + 2 \times 5 \times 0.1 = 6$

解方程组得：a=0.2，$b = 0.3$ （3 分）

2.

X	1	2
p	0.5	0.5

Y	3	4	5
p	0.3	0.4	0.3

（5 分）

3. $E(X) = 1 \times 0.5 + 2 \times 0.5 = 1.5$， $E(Y) = 3 \times 0.3 + 4 \times 0.4 + 5 \times 0.3 = 4$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 6 - 1.5 \times 4 = 0$$ （8 分）

七．解：设X表示不合格的电子元件数，则 $X \sim B(10000, 0.1)$

$E(X) = 1000$，$D(X) = 900$ （2 分）

由中心极限定理知：X 近似服从 $N(1000, 900)$ （5 分）

则 :

$$P(X < 970) = \Phi(\frac{970 - 1000}{\sqrt{900}}) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$ （8 分）

八.解： 建立原假设H_0： $\mu = 8$ 和备择假设H_1：$\mu \neq 8$ （1 分）

检验统计量 $T = \dfrac{\overline{X} - 8}{S / \sqrt{n}}$

$n = 16$，在H_0成立下，$T = \dfrac{\overline{X} - 8}{S / \sqrt{n}} \sim t(15)$ （3 分）

由显著性水平$\alpha = 0.05$知，H_0的拒绝域为

$$R = \{|T| > t_{\alpha/2}(n-1)\} = \{|T| > t_{0.025}(15)\} = \{|T| > 2.1314\}$$ （5 分）

计算统计量T 的观测值为 $t = \dfrac{\overline{x} - 8}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{8.2 - 8}{0.4 / \sqrt{16}} = 2 \notin R$ （7 分）

所以，接受原假设，即可以认为该玻璃厚度符合规定。（8 分）

九． 解：1. $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{\theta} \frac{6x^2}{\theta^3}(\theta - x) dx = \frac{\theta}{2}$， 令 $\overline{X} = E(X) = \frac{\theta}{2}$，

得：θ的矩估计量为 $\hat{\theta} = 2\overline{X}$ （4 分）

2．是无偏估计。因为：$E(\hat{\theta}) = E(2\overline{X}) = 2E(\overline{X}) = 2E(X) = 2 \times \dfrac{\theta}{2} = \theta$ （8 分）

3． $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\theta} \frac{6x^3}{\theta^3}(\theta - x) dx = \frac{3}{10}\theta^2$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3}{10}\theta^2 - \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{\theta^2}{20}$$

所以： $D(\hat{\theta}) = D(2\overline{X}) = 4D(\overline{X}) = \dfrac{4}{n} D(X) = \dfrac{4}{n} \times \dfrac{\theta^2}{20} = \dfrac{\theta^2}{5n}$ （12 分）

6　2017—2018 学年第 2 学期《概率论与数理统计 A》期末 A 卷

一 填空题

1.0.6，0.6；　2. 0.3，$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0.4, & 1\le x<2\\ 0.7, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$；　3. 2, $\frac{1}{2}$；　4. $\frac{1}{4}$, 3；　5. $2-\sqrt{2}$，0.6。

二 选择题

1. C；　2. D；　3. A；　4. B；　5.B。

三、解：1. $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.05\times 0.8=0.04$,

$$P(AB)=P(B)-P(\overline{A}B)=0.97-0.04=0.93$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.95+0.97-0.93=0.99$$ ······· 5 分

2. $P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{0.95-0.93}{0.03}=\dfrac{2}{3}$ ······· 10 分

四、解：(1). $F(0-0)=F(0+0),\Rightarrow\ a+b=0$

$F(+\infty)=1$，$\Rightarrow a+b\times 0=1$，　得：$a=1,b=-1$ ········ 4 分

(2) $f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}=\begin{cases}xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ ······· 7 分

(3) $E(\frac{1}{x})=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ······ 10 分

五、(1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dydx=\int_0^1 dx\int_0^x Ay(1-x)dy=\dfrac{A}{24}$，$A=24$ ··· 4 分

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}12x^2(1-x), & 0\le x\le 1\\ 0, & others\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}12y(1-y)^2, & 0\le y\le 1\\ 0, & others\end{cases}$ ······ 8 分

（3） $E(x)=\int_0^1 x\times 12x^2(1-x)dx=\frac{3}{5}$， $E(Y)=\int_0^1 y\times 12y(1-y)^2dy=\frac{2}{5}$

$$E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^x xy\times 24y(1-x)dy=\frac{4}{15}$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{2}{75}$$ ……· 12 分

六、解：

1. $0.1+0.1+a+0.1+b+0.2=1$

$E(X)=1\times(0.2+a)+2\times(0.3+b)$， $E(Y)=0\times 0.2+1\times(0.1+b)+2\times(a+0.2)$

由 $E(X)=E(Y)$， 解方程组得：$a=0.4$，$b=0.1$ ……· 4 分

2.

X	1	2
p	0.6	0.4

Y	0	1	2
p	0.2	0.2	0.6

……· 8 分

3. $P(X=Y)=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=2\}=0.1+0.2=0.3$ ····· 10 分

七．解：设X表示n次点数之和，X_i表示第i次点数$(i=1,2,\cdots,n)$，则

$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$，且$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，X_i的分布律：

$P(X_i=k)=\frac{1}{6}$，$(k=1,2,3,4,5,6)$ ……· 2 分

故 ： $E(X_i)=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}$ ，

$$E(X_i{}^2)=\frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)=\frac{91}{6}$$

$$D(X_i)=\frac{91}{6}-(\frac{7}{2})^2=\frac{35}{12}$$ ……· 4 分

所以：

$$D(X)=D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=DX_1+DX_2+\cdots+DX_n=\frac{35n}{12}$$ ····· 5 分

八.解： 1. $X\sim B(100，0.2)$ ……· 2 分

2. $n=100$， $p=0.2$；所以，$E(X)=np=20$，$D(X)=npq=16$。

故所求概率为：

$$P(14 \le X \le 30) = P\left\{\frac{14-20}{4} \le \frac{X-20}{4} \le \frac{30-20}{4}\right\}$$

$$= \Phi（2.5）-\Phi（-1.5）= 0.9270$$ ······· 8 分

九． 解：（1） $E(X)=1, D(X)=9$，$E(Y)=0, D(Y)=16$ ······· 2 分

$$Cov(X,Y)=\sqrt{DX}\sqrt{DY}\rho_{XY}=3\times4\times(-\frac{1}{2})=-6$$

$$E(Z)=E(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3},$$

$$D(Z)=D(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}DY+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times Cov(X,Y)=3$$ ···· 5 分

（2） $$Cov(X,Z)=Cov(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=Cov(X,\frac{X}{3})+Cov(X,\frac{Y}{2})$$

$$=\frac{1}{3}DX+\frac{1}{2}Cov(X,Y)=0$$

$\rho_{XZ}=0$ ······· 8 分

（3） 相互独立，因为 X，Z 均服从正态分布且 $\rho_{XZ}=0$ ···· 10 分

7　2017—2018 学年第 1 学期《概率论与数理统计 A》期末 A 卷

一 填空题

1　0.6，0.25；　2. $(1-p)^2 p$，$(1-p)^3$；　3. $N(-18,13)$，$N(0,1)$；　4. $5/\lambda, -5/\lambda^2$；

5. $\hat{\mu}_1$和$\hat{\mu}_3$，$\hat{\mu}_1$。

二 选择题

1　D；　2　B；　3. A；　4. D；　5.B。

三 解：

1、设 B 表示“第一次取到的是新球”，A 表示第二次取到两个新球

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=\frac{4}{6}\frac{C_3^2}{C_6^2}+\frac{2}{6}\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{4}{15}$$

······· 6 分

$$P(B|A)=\frac{\frac{4}{6}\frac{C_3^2}{C_6^2}}{\frac{4}{15}}=0.5$$

$\cdots\cdots\cdots$ 10 分

四 解：（1）$\int_{=\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^2(ax^2)dx=1$ ，得 $a=3/8$ $\cdots\cdots\cdots$ 3 分

（2）由 $P(A\cup B)=\dfrac{3}{4}$ 得到：

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=2P(A)-(P(A))^2=3/4$

得：$P(A)$=1/2，即 $\int_b^2(ax^2)dx=1/2$，则 $b=4^{\frac{1}{3}}$ $\cdots\cdots\cdots$ 7 分

（3）$P(|Y|<\dfrac{2}{3})=\int_0^{2/3}\dfrac{3}{8}x^2dx=1/27$ $\cdots\cdots\cdots$ 10 分

五 (1) $P(X+Y\le 1)$=0.5 $\cdots\cdots\cdots$ 2 分

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 2dy, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 2dx, & 0\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}2(1-y), & 0\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$ $\cdots\cdots\cdots$ 6 分

2. $E(X)=\int_0^1 2x^2dx=\dfrac{2}{3}$，$E(Y)=\int_0^1 2y(1-y)dy=\dfrac{1}{3}$

$E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^x 2xydy=\dfrac{1}{4}$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\dfrac{1}{36}$ $\cdots\cdots\cdots$ 10 分

3. $E(X^2)=\int_0^1 2x^3dx=\dfrac{1}{2}$，$E(Y^2)=\int_0^1 2y^2(1-y)dy=\dfrac{1}{6}$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{1}{18}$，$D(Y)=\dfrac{1}{18}$

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{1}{2}$$ ······· 12 分

六 解：(1) $0.3+a+0.1+0.1+0.2+b=1$

$P(\mathrm{X}<2,\mathrm{Y}\le 1)=0.7=0.3+a+0.1+0.2=0.7$

解方程组得：$a=0.1$，$b=0.2$ ······· 2 分

(2)

X	0	1	2
p	0.2	0.3	0.5

Y	0	1
p	0.5	0.5

······· 4 分

(3) $E(X)=0+0.3+1=1.3, E(X^2)=0+0.3+2=2.3, \mathrm{D}(X)=2.3-1.3^2=0.61$ ····7 分

(4) 不独立。 ······· 9 分

因为 $P\{X=0,Y=1\}\ne P\{X=0\}P\{Y=1\}$ ······· 10 分

七 解：设至少要生产 m 件产品。并以 X 表示这 m 件产品中合格品的件数，则 $X\sim B(m,0.8)$，$E(X)=0.8m$，$D(X)=0.16m$，依题意，要求：

$$P(0.78<\frac{X}{m}<0.82)\ge 0.9$$ ······· 2 分

用切比雪夫不等式估计，有：$P(0.78<\frac{X}{m}<0.82)=P(|X-0.8m|<0.02m)$

$$\ge 1-\frac{D(X)}{(0.02m)^2}=1-\frac{400}{m}$$

由 $1-\frac{400}{m}\ge 0.9$ ，得：$m\ge 4000$，故至少要生产 4000 件产品。 ······· 5 分

八.解：（1） $P(\mathrm{X}>3)=0.6$, 所以 $Y\sim \mathrm{B}(3,0.6)$ ······· 2 分

（2）

$Z\sim \mathrm{B}(150,0.6)$.

$$P(Z\ge 102)=1-\Phi(\frac{102-150\times 0.6}{\sqrt{150\times 0.6\times 0.4}})=1-\Phi(2)=1-0.9772=0.0228$$ ···· 8 分

九． 解：（1） $E(\mathrm{X})=\int_0^1 x\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$ ······· 3 分

由 $E(X)=\overline{X}$ 可得 $\hat{\theta}=\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$ 为矩估计量。 ······· 5 分

（2）似然函数为 $L(\theta)=f(x_1,\theta)f(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta)$

$$=\begin{cases}\theta^{\frac{n}{2}}(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta^{\frac{1}{2}}-1}, 0<x_i<1 \\ 0, 其他\end{cases}$$ ······· 7 分

对数似然： $\ln(L)=\dfrac{n}{2}\ln\theta+(\theta^{\frac{1}{2}}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$，$(0<x_i<1, i=1,2,\cdots,n)$ ···· 8 分

求导，令： $\dfrac{d\ln(L)}{d\theta}=\dfrac{n}{2\theta}+\dfrac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)=0$ ······· 9 分

解得： $\hat{\theta}_L=\left(\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}\right)^2$，

则 θ 的极大似然估计量为： $\hat{\theta}_L=\left(\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}\right)^2$ ······· 10 分

8 2013—2014 学年第 2 学期《概率论与数理统计 A》期末 A 卷

一、 选择题 (每空 3分，共 21 分)

1. B 2. C 3. C 4. D 5. A 6. B 7. B

二、 填空题 (每空 3分，共 21 分)

1. 1/3 2. 2 3. $\mu=-1, \sigma=2$ 4. 3 5. 1 6. $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2/n), t(n-1)$

7. $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$.

三、 计算题 (共 68 分)

1. (1) $P(X=k)=\dfrac{\binom{9}{k}\binom{3}{3-k}}{\binom{12}{3}}, \quad k=0,1,2,3$

(2) Bayes 公式 $=0.23$

2. 设随机变量表示一只昆虫所生的虫卵数，随机变量Y 一只昆虫所生的幼虫数.

(1) $X\sim \mathrm{Pois}(1)$，

$$P(X=n)=\frac{1}{n!}e^{-1},\quad n=0,1,2,\cdots;$$

且

$$P(Y=m|X=n)=C_n^m p^n(1-p)^{m-n},\quad m=0,1,2,\quad n;$$

注意到当 $n<m$ 时， $P(Y=m|X=m)=0$, 则有

$$P(Y=m)=\frac{p^k}{k!}e^{-p},\quad k=0,1,\cdots.$$

3. (1) 12

   (2) $(1-e^{-3})(1-e^{-8})$

4. (1) 由 $E(X)=0$ 及 $\mathrm{Var}(X)=1/3$， 可知 $E(X^2)=1/3$; 由 $E(Y)=2$ 及 $\mathrm{Var}(Y)=4$, 可知$E(Y^2)=8$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Z,X) &= E[(X+1)YX]-E[(X+1)Y]E(X)\\ &= 2/3\\ \mathrm{Var}(Z) &= E\left[(X+1)Y\right]^2-\left[E(X+1)Y\right]^2\\ &= 20/3\end{aligned}$$

$$\rho_{X,Z}=\frac{\mathrm{Cov}(Z,X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Z)\mathrm{Var}(X)}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

   (2)

$$P(Z>1|X=0)=P\left((X+1)Y>1|X=0\right)=P(Y>1)=e^{-1/2}.$$

5. (1) $\overline{x}=58.4$, $s=23.2484$, $(s/\sqrt{n})t_{\alpha/2}=16.615$, 所以95%的置信上限为75.105.

   (2) $\hat{\mu}=58.4$, $\hat{\sigma}=22.055$, 因此

$$\hat{p}=\int_{-\infty}^{35}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}}}\exp\{-\frac{(x-\hat{\mu})^2}{\hat{\sigma}^2}dx\doteq 0.1446$$

9　2013—2014 学年第 1 学期《概率论与数理统计 A》期末 A 卷

一 填空题（满分 24 分）

1　$\frac{1}{2}$　2. $\frac{80}{243}$=0.3292($\frac{32}{243}$或$\frac{16}{81}$一半分)　3. 7.4　4. $\frac{1}{12}$（$\frac{1}{36}$一半分）

5. $\frac{1}{6}$　6. $\frac{1}{8}$($\frac{1}{4}$一半分)

二、选择题（满分 20 分）

1. B　　2. A　　3. C　　4. D　　5. A

三、设 $A=$‘任取一产品，经检验认为是合格品’

$B=$‘任取一产品确是合格品’

则（1） $P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$

$=0.9\times0.95+0.1\times0.02=0.857.$ …………………（4 分）

（2） $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.9\times0.95}{0.857}=0.9977$ ……………………（8 分）

四、(1) k = 2……2 分

（2） $E(X)=\int_0^1 dx\int_0^x 2xdy=\dfrac{2}{3}$ 　　$E(Y)=\int_0^1 dx\int_0^x 2ydy=\dfrac{1}{3}$ …….(5 分)

（3） $E(X^2)=\int_0^1 dx\int_0^x 2x^2dy=\dfrac{1}{2}$ ， $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{1}{18}$

$E(Y^2)=\int_0^1 dx\int_0^x 2y^2dy=\dfrac{1}{6}$ 　　$D(Y)=\dfrac{1}{18}$ ……….(8 分)

（4） $E(XY)=\dfrac{1}{4}$， $\rho_{XY}=\dfrac{1}{2}$ ………………11 分

五、（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ ……………………………….(2 分)

A＝1/2……………………………………………(4 分)

.

（2）由 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$，可得 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^x, & x<0\\ 1-\dfrac{1}{2}e^x, & x\geq 0\end{cases}$ ………………(8 分)

六、令 X 表示 100 台中某一时刻工作的台数，则 $X\sim B(100,0.8)$，…..........(2 分)

由中心极限定理知

$$\frac{X-100\times0.8}{\sqrt{100\times0.8\times0.2}}\overset{\text{近似}}{\sim}N(0,1)，$$ ………………………………（4 分）

（1） $P(70\leq X\leq 86)\approx\Phi\left(\dfrac{86-80}{\sqrt{16}}\right)-\Phi\left(\dfrac{70-80}{\sqrt{16}}\right)=\Phi(1.5)-\Phi(-2.5)$

$=\Phi(1.5)+\Phi(2.5)-1$

＝0.9332＋0.9938－1＝0.9270 ……………………………（7 分）

（2）$P(80 \le X \le 100) \approx \Phi\left(\frac{100-80}{\sqrt{16}}\right) - \Phi\left(\frac{80-80}{\sqrt{16}}\right) = \Phi(5) - \Phi(0) \approx 0.5$ …（10 分）

七、设 X_i 为第 i 次出现的点数（$i=1,2$），显然 X_1 和 X_2 独立同分布，且 X_1 的分布列为

$P(X_1 = k) = \frac{1}{6}, k = 1,2,\cdots,6$， ……………………………(2 分)

从而 $E(X_i) = \frac{7}{2}, D(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = \frac{35}{12}$ ………………….(3 分)

（1）因为 $X = X_1 + X_2, Y = X_1 - X_2$,所以

$D(X) = D(X_1) + D(X_2) = \frac{35}{6}, D(Y) = D(X_1) + D(X_2) = \frac{35}{6}$ ……….(6 分)

(2)因为

$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(X_1 + X_2, X_1 - X_2) = \mathrm{cov}(X_1, X_1) - \mathrm{cov}(X_1, X_2) + \mathrm{cov}(X_2, X_1) - \mathrm{cov}(X_2, X_2)$

$= D(X_1) - D(X_2) = 0$，于是

$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = 0$ …………………………………….(9 分)

(2)不独立. ……………………… ………(11 分)

八、 X 的密度函数为:f(x，β)= $\begin{cases} \frac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x > 1 \\ 0, & x \le 1 \end{cases}$,…………………………….(2 分)

由于 E（X）$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,\beta) dx = \frac{\beta}{\beta - 1}$

令 E（X）$= \frac{\beta}{\beta - 1}$，得 β 的矩估计量为 $\hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{\bar{x} - 1}$ …………………………….(6 分)

似然函数为 L（β）$= \begin{cases} \frac{\beta^n}{x_1 x_2 \ldots x_n}, x_i > 1 \\ 0, 其他 \end{cases}$ ……………………….(7 分)

取对数求导后求解得 $\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i-1}^{n} \ln x_i}$。……………………….(10 分)