第八章 Fourier 变换

§8.1 Fourier 变换的概念

§8.2 单位冲激函数

§8.3 Fourier 变换的性质

§ 8.1 Fourier 变换的概念

- Fourier 变换是积分变换中最常见的一种变换，它既能够简化运算(如求解微分方程、化卷积运算为乘积运算等)，又具有非常特殊的物理意义。

- 因此，**Fourier** 变换不仅在数学的许多分支中具有重要的地位，而且在各种工程技术中都有着广泛的应用。

- 由于 **Fourier** 变换是在周期函数的 Fourier 级数的基础上发展起来的，因此本小节将首先简单地回顾一下 **Fourier** 级数展开。

§8.1 Fourier 变换的概念

一、周期函数的 Fourier 级数

二、非周期函数的 Fourier 变换

一、周期函数的 Fourier 级数

（背景知识与问题来源）

1. Fourier 级数的三角形式

P184 定理 8.1

定理 （Dirichlet 定理）设 $f_T(t)$ 是以 T 为周期的实值函数，且在 $[-T/2, T/2]$ 上满足条件（即 Dirichlet 条件）：

(1) 连续或只有有限个第一类间断点；

(2) 只有有限个极值点。

令 $\omega_0 = 2\pi/T$（称为基频），则在 $f_T(t)$ 的连续点处，有

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t), \qquad (A)$$

在间断点处，上式左端为 $\frac{1}{2}[f_T(t+0) + f_T(t-0)]$.

一、周期函数的 Fourier 级数

1. Fourier 级数的三角形式

定理 （Dirichlet 定理）

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t), \qquad (A)$$

其中，$a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\cos n\omega_0 t\,\mathrm{d}t, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\sin n\omega_0 t\,\mathrm{d}t, \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

（利用函数的正交性，易得上述系数）

定义 称 (*A*) 式为 Fourier 级数的三角形式。

一、周期函数的 Fourier 级数

2. Fourier 级数的指数形式

推导 (1) 已知 $f_T(t)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)$, **(A)**

P 184

由 Euler 公式，有 $\cos n\omega_0 t=\dfrac{e^{jn\omega_0 t}+e^{-jn\omega_0 t}}{2}$, $(j=\sqrt{-1})$

$$\sin n\omega_0 t=\frac{-je^{jn\omega_0 t}+je^{-jn\omega_0 t}}{2}.$$

将它们代入 (A) 式并整理，即得：

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n-jb_n}{2}e^{jn\omega_0 t}+\frac{a_n+jb_n}{2}e^{-jn\omega_0 t}\right).$$

一、周期函数的 Fourier 级数

2. Fourier 级数的指数形式

推导 (2) 令 $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$，$c_n = \dfrac{a_n - jb_n}{2}$，$c_{-n} = \dfrac{a_n + jb_n}{2}$，则有

$$\boxed{f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t},} \qquad (B)$$

其中，$c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} \mathrm{d}t$，$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

定义 称 **(*B*)** 式为 Fourier 级数的指数形式;

称系数 c_n 为(离散)频谱，记为 $F(n\omega_0) = c_n$.

(参见物理含义)

一、周期函数的 Fourier 级数

2. Fourier 级数的指数形式

- 几点说明

(1) 对于给定的函数，其 Fourier 级数展开式是唯一的。

(2) 在计算展开系数 c_n 时，可在任意一个长度为 T 的区间上计算其中的积分。

(3) 采用周期延拓技术，可以将结论应用到仅仅定义在某个有限区间上的函数。换句话说，对于定义在有限区间上的函数，同样可以展开为 Fourier 级数。

一、周期函数的 Fourier 级数

3. Fourier 级数的物理含义

- 针对 Fourier 级数的三角形式:

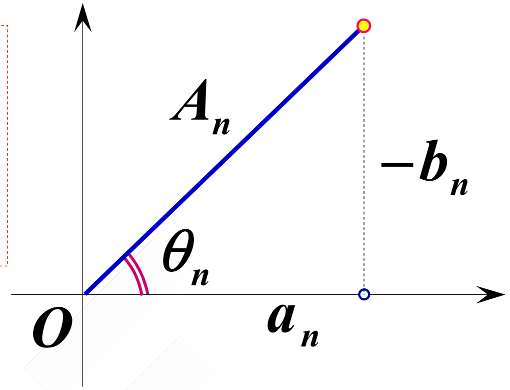
$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t).$$

改写 令 $A_0 = \dfrac{a_0}{2}$, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$,

P 185

$$\cos\theta_n = \frac{a_n}{A_n}, \quad \sin\theta_n = \frac{-b_n}{A_n},$$

关系图



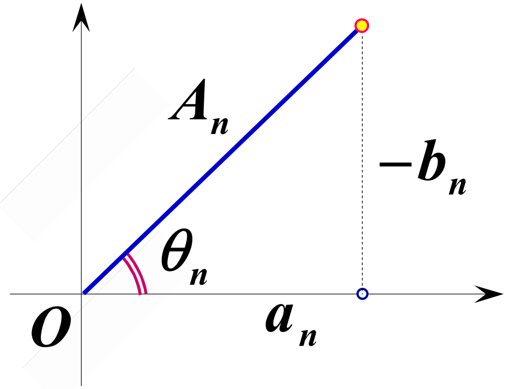
则 Fourier 级数的三角形式变为:

$$f_T(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n).$$

一、周期函数的 Fourier 级数

3. Fourier 级数的物理含义

- 针对 Fourier 级数的三角形式:



改写
$$f_T(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n).$$

P 185

意义 (1) 周期信号可以分解为一系列固定频率的简谐波之和，这些简谐波的角频率分别为一个基频 ω_0 的倍数。

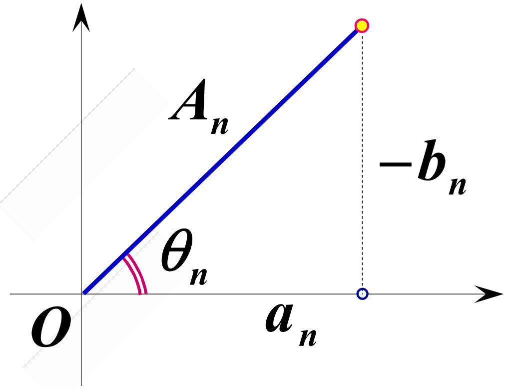
(2) 任何一个周期为 T 的周期信号 $f_T(t)$ 并不包含所有的频率成份，其频率是以基频 ω_0 为间隔离散取值的。

- 这是周期信号的一个非常重要的特点。

一、周期函数的 Fourier 级数

3. Fourier 级数的物理含义

- 针对 Fourier 级数的三角形式:



改写 $$f_T(t)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\cos(n\omega_0 t+\theta_n).$$

P 185

意义 振幅 A_n 反映了在信号 $f_T(t)$ 中频率为 $n\omega_0$ 的简谐波所占有的份额;

相位 θ_n 反映了在信号 $f_T(t)$ 中频率为 $n\omega_0$ 的简谐波沿时间轴移动的大小。

- 这两个指标完全定量地刻画了信号的频率特性。

一、周期函数的 Fourier 级数

3. Fourier 级数的物理含义

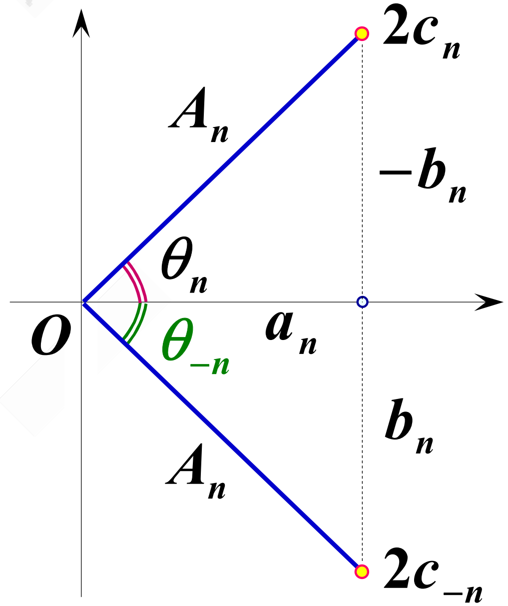
- 针对 Fourier 级数的指数形式: $f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{jn\omega_0 t}$.

分析 已知 $c_0=\dfrac{a_0}{2}$, $c_n=\dfrac{a_n-jb_n}{2}$, $c_{-n}=\dfrac{a_n+jb_n}{2}$, $(n>0)$,

P 186

即得 $c_0=A_0$, $\arg c_n=-\arg c_{-n}=\theta_n$,

$$|c_n|=|c_{-n}|=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}=\frac{A_n}{2},$$



结论 复系数 c_n 的模 $|c_n|$ 恰好反映了振幅, 而它的辐角 $\arg c_n$ 就是相位。

一、周期函数的 Fourier 级数

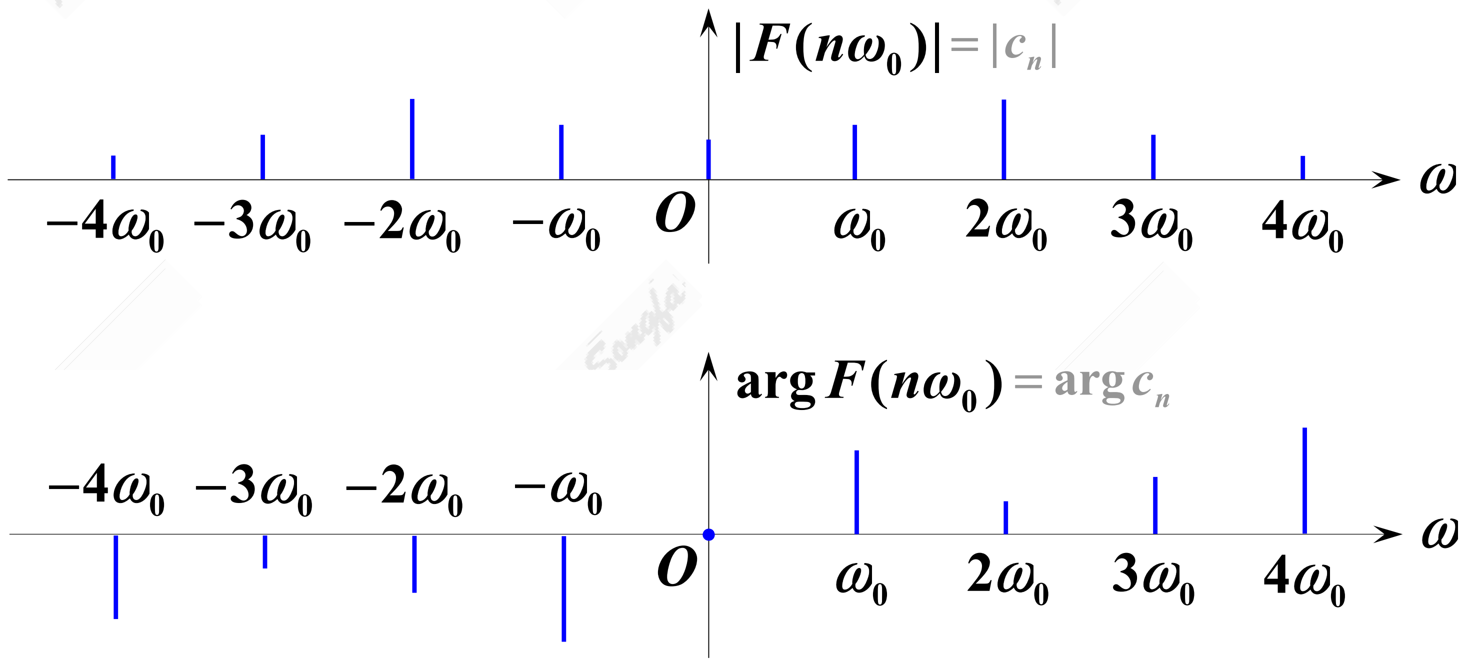
3. Fourier 级数的物理含义

● 离散频谱与频谱图：

（本课件 P7）

定义 称 $|c_n|$ 为振幅谱，$\arg c_n$ 为相位谱；称 c_n 为（离散）频谱.

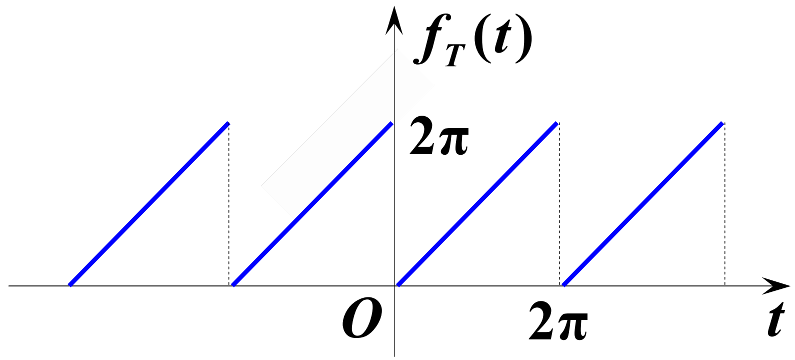
频谱图 将 $|c_n|$、$\arg c_n$ 与频率 $n\omega_0$ 的关系画成图形。



思考

负频率？

例 设函数 $f_T(t)$ 以 $T=2\pi$ 为周期，且在 $[0,2\pi]$ 上 $f_T(t)=t$，求它的离散频谱及其 Fourier 级数的指数形式。（跳过?）



解 基频 $\omega_0 = 2\pi/T = 1$，

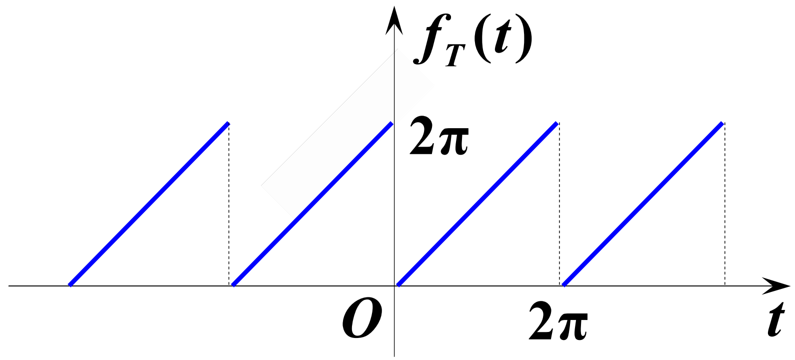
频谱 $c_n = F(n\omega_0) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\,\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T f_T(t)\,\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\,\mathrm{e}^{-jnt}\,\mathrm{d}t.$$

(1) 当 $n=0$ 时，

$$c_0 = F(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\,\mathrm{d}t = \pi.$$

例 设函数 $f_T(t)$ 以 $T=2\pi$ 为周期，且在 $[0,2\pi]$ 上 $f_T(t)=t$，求它的离散频谱及其 Fourier 级数的指数形式。



解 (2) 当 $n\neq 0$ 时，

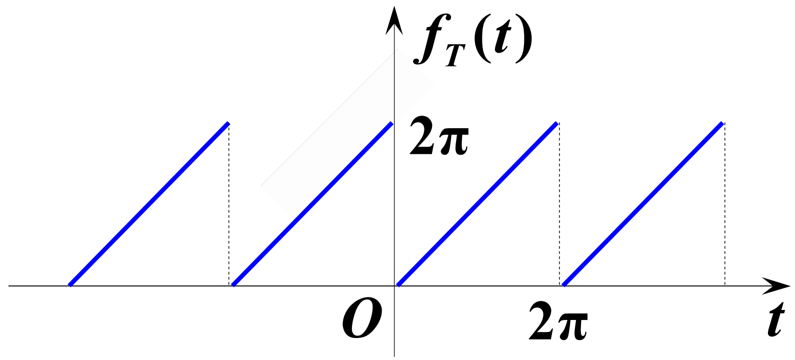
$$c_n=F(n\omega_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}t\,\mathrm{e}^{-jnt}\,\mathrm{d}t$$

$$c_0=\pi.$$

$$=\frac{1}{-2n\pi j}\int_0^{2\pi}t\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-jnt}$$

$$=\frac{1}{-2n\pi j}t\,\mathrm{e}^{-jnt}\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2n\pi j}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-jnt}\,\mathrm{d}t=\frac{j}{n}.$$

例 设函数 $f_T(t)$ 以 $T=2\pi$ 为周期，且在 $[0,2\pi]$ 上 $f_T(t)=t$，求它的离散频谱及其 Fourier 级数的指数形式。



解 (3) $f_T(t)$ 的 Fourier 级数为：

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}=\pi+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{j}{n}e^{jnt}.$$

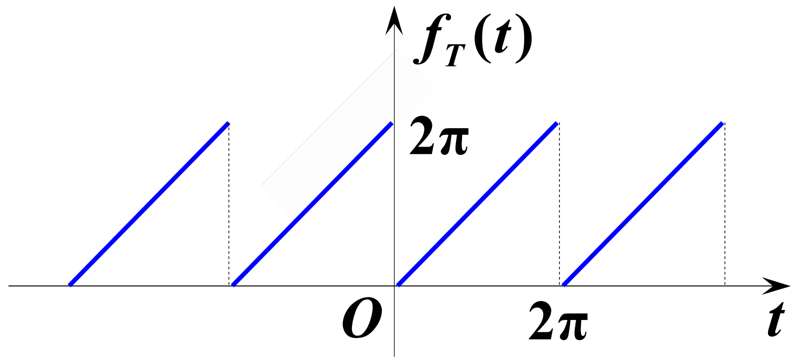
$\boxed{c_0=\pi.}$

$\boxed{c_n=\frac{j}{n}.}$

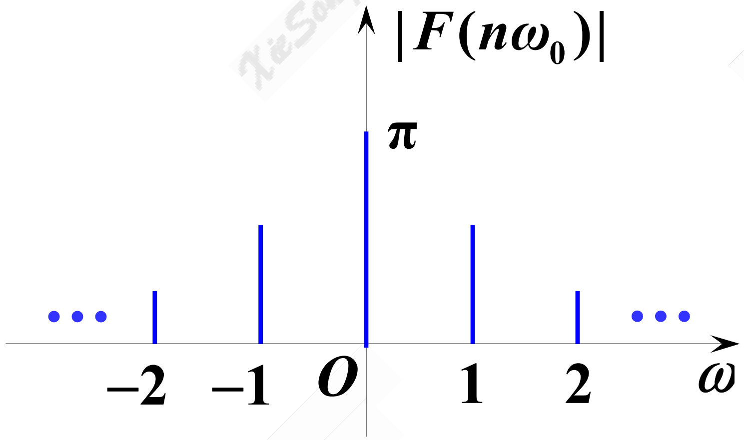
(4) 振幅谱为 $|c_n|=|F(n\omega_0)|=\begin{cases}\pi, & n=0,\\ 1/|n|, & n\neq 0.\end{cases}$

相位谱为 $\arg c_n=\arg F(n\omega_0)=\begin{cases}0, & n=0,\\ \pi/2, & n>0,\\ -\pi/2, & n<0.\end{cases}$

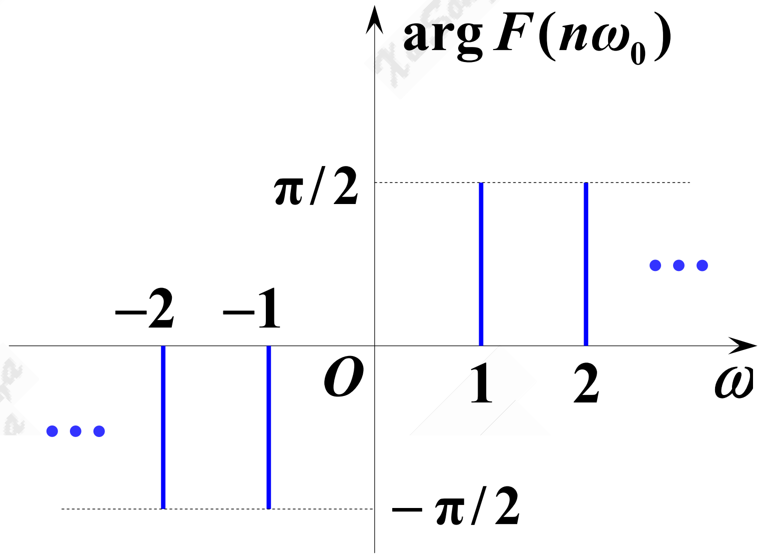
例 设函数 $f_T(t)$ 以 $T=2\pi$ 为周期，且在 $[0,2\pi]$ 上 $f_T(t)=t$，求它的离散频谱及其 Fourier 级数的指数形式。



解 (5) 频谱图如下图所示。



振幅谱



相位谱

二、非周期函数的傅立叶变换

- 借助 **Fourier** 级数的展开，使得人们能够完全了解信号的频率特性，从而认清了信号的本质。

  这种对信号的分析手段称为频谱分析(或谐波分析)。

- 但是，**Fourier** 级数要求被展开的函数必须是周期函数，而在实际问题中，大量遇到的是非周期函数。

  那么，对一个非周期函数是否也能进行频谱分析呢?

附：从周期函数向非周期函数的演变。

(演变过程)

二、非周期函数的傅立叶变换

1. Fourier 积分公式

定理（Fourier 积分定理）设函数 $f(t)$ 满足:

P188 定理 8.2

(1) 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的任一有限区间内满足 Dirichlet 条件,

(2) 绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt<+\infty$.

则在 $f(t)$ 的连续点处，有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt\Big]e^{j\omega t}d\omega \qquad (D)$$

在间断点处，公式的左端应为 $\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]$.

定义 称 (D) 式为 Fourier 积分公式或 Fourier 积分表达式。

二、非周期函数的傅立叶变换

2. Fourier 变换的定义

定义 (1) Fourier 正变换(简称傅氏正变换):

P189 定义 8.1

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \overset{\text{记为}}{=\!=\!=} \mathscr{F}[f(t)].$$

(2) Fourier 逆变换(简称傅氏逆变换)

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \overset{\text{记为}}{=\!=\!=} \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)].$$

(3) 称 $F(\omega)$ 为象函数,称 $f(t)$ 为象原函数;

称 $f(t)$ 与 $F(\omega)$ 为傅氏变换对,记为 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$.

注 上述变换中的广义积分取为柯西主值。

二、非周期函数的傅立叶变换

3. Fourier 变换的物理意义

- 与周期函数的 Fourier 级数的物理意义一样，Fourier 变换同样刻画了非周期函数的频谱特性。

- 所不同的是，非周期函数的频谱是连续取值的。

- 像函数 $F(\omega)$ 反映的是函数 $f(t)$ 中各频率分量的分布密度，它为复值函数，故可表示为： $\boxed{F(\omega)=|F(\omega)|\,\mathrm{e}^{j\arg F(\omega)}.}$

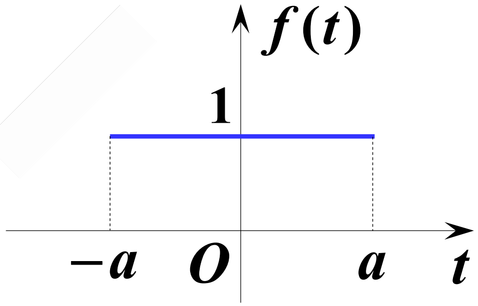
定义 称 $F(\omega)$ 为频谱密度函数(简称为连续频谱或者频谱)；

P 189

称 $|F(\omega)|$ 为振幅谱；称 $\arg F(\omega)$ 为相位谱。

例 求矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le a\\ 0, & |t|>a\end{cases}$ $(a>0)$ 的傅氏变换及其 Fourier 积分表达式。

P189 例 8.2



解 (1) $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$

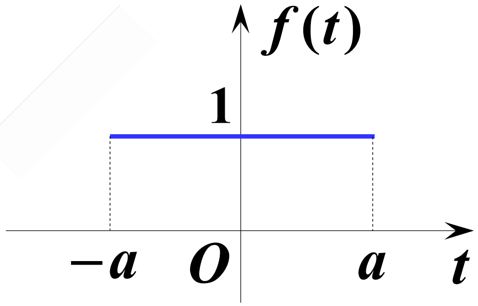
$$=\int_{-a}^{a}\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{-j\omega}\mathrm{e}^{-j\omega t}\Big|_{-a}^{a}$$

$$=\frac{1}{-j\omega}(\mathrm{e}^{-ja\omega}-\mathrm{e}^{ja\omega})=\frac{2}{\omega}\cdot\frac{\mathrm{e}^{ja\omega}-\mathrm{e}^{-ja\omega}}{2j}$$

$$=\frac{2}{\omega}\sin a\omega=2a\frac{\sin a\omega}{a\omega}.$$

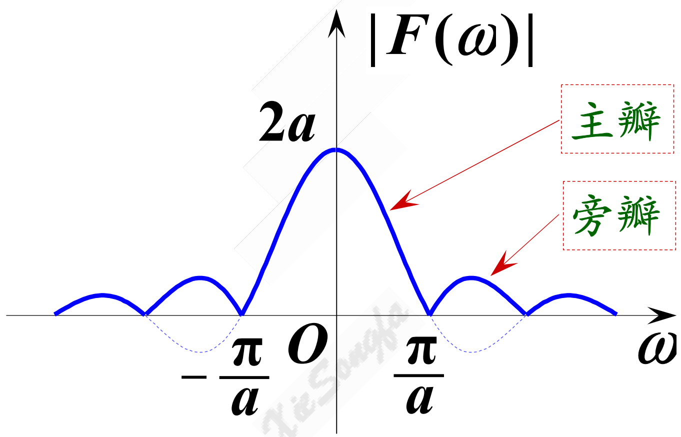
P189 例 8.2

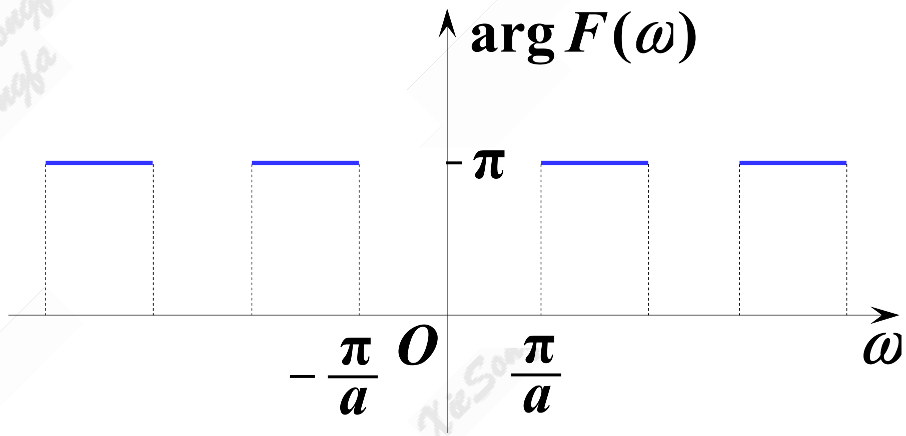
例 求矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le a\\ 0, & |t|>a\end{cases}$ $(a>0)$ 的傅氏变换及其 Fourier 积分表达式。



解 (2) 振幅谱 $|F(\omega)|=2a\left|\dfrac{\sin a\omega}{a\omega}\right|.$

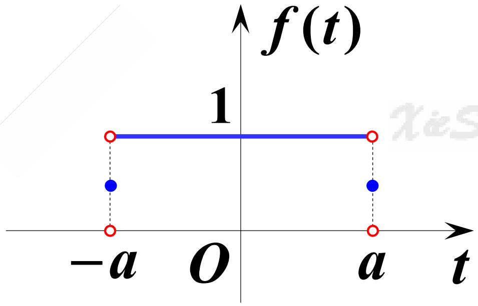
相位谱 $\arg F(\omega)=\begin{cases}0, & \dfrac{2n\pi}{a}\le|\omega|\le\dfrac{(2n+1)\pi}{a},\\ \pi, & \text{其它。}\end{cases}$





例 求矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le a\\ 0, & |t|>a\end{cases}$ $(a>0)$ 的傅氏变换及其 Fourier 积分表达式。

P189 例 8.2



解 (3) $f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$

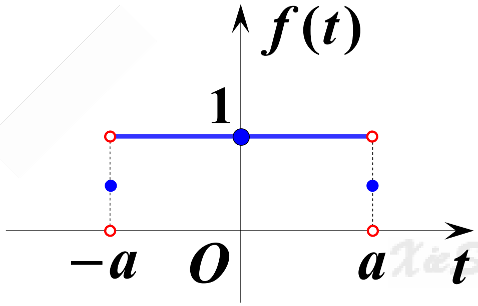
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin a\omega}{\omega}\mathrm{e}^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin a\omega}{\omega}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega+\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin a\omega}{\omega}\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin a\omega}{\omega}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega}_{\text{Fourier 积分表达式}}\overset{\text{实际上}}{=\!=}\begin{cases}1, & |t|<a,\\ 1/2, & |t|=a,\\ 0, & |t|>a.\end{cases}$$

P189 例 8.2

例 求矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le a\\ 0, & |t|>a\end{cases}$ $(a>0)$ 的傅氏变换及其 Fourier 积分表达式。



注 ● 在上式中令 $t=0$，可得重要公式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x=\pi,\ (a>0).$$

● 一般地，有 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\pi, & a>0,\\ 0, & a=0,\\ -\pi, & a<0.\end{cases}$

● 特别地，有 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$

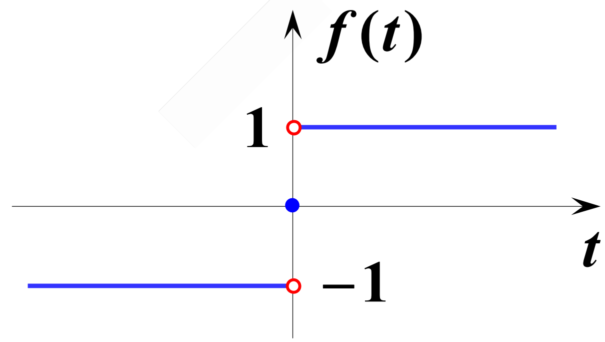
【第八章 傅裏葉變換】

例 补 已知函数 $f(t)$ 的频谱为 $F(\omega)=\dfrac{2}{j\omega}$，求 $f(t)$.

解
$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{j\omega}\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\,\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{j\omega}\mathrm{d}\,\omega+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{j\sin\omega t}{j\omega}\mathrm{d}\,\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\mathrm{d}\,\omega=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t=0\\ -1, & t<0\end{cases}\overset{\text{记为}}{=\!=\!=}\operatorname{sgn} t.$$

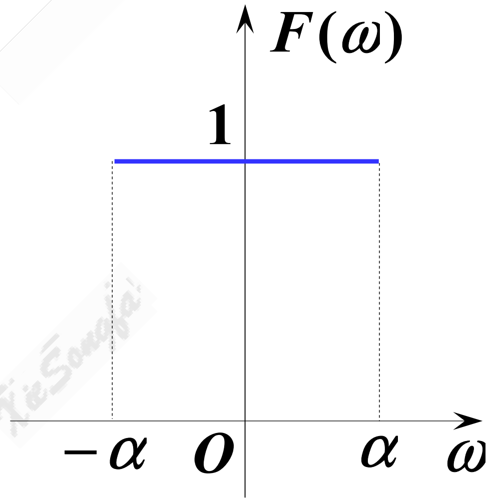


- 傅氏变换对： $\operatorname{sgn} t\longleftrightarrow\dfrac{2}{j\omega}.$

例　已知 $f(t)$ 的频谱为 $F(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le\alpha\\ 0, & |\omega|>\alpha\end{cases}$ $(\alpha>0)$，求 $f(t)$.

P190 例 8.3

解　$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$



$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi jt}\mathrm{e}^{j\omega t}\Big|_{-\alpha}^{\alpha}$$

$$=\frac{1}{\pi t}\cdot\frac{\mathrm{e}^{j\alpha t}-\mathrm{e}^{-j\alpha t}}{2j}=\frac{\sin\alpha t}{\pi t}$$

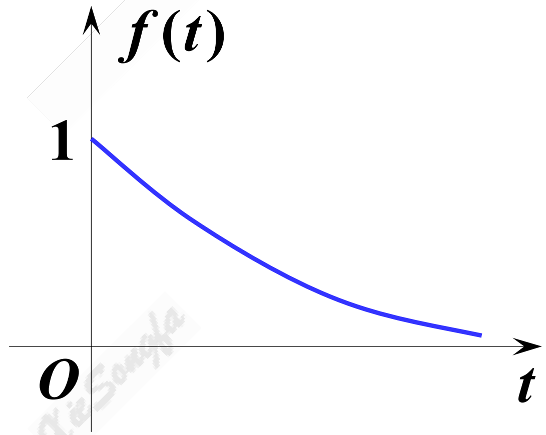
$$=\frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{\sin\alpha t}{\alpha t}\right)\overset{\text{记为}}{=\!=}\frac{\alpha}{\pi}\underline{\underline{Sa(\alpha t)}}.$$

(?)

（抽样信号）

例 求单边衰减指数函数 $f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$ $(\alpha>0)$ 的 Fourier 变换，并画出频谱图。

P191 例 8.4



解 (1) $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} \mathrm{d}t$

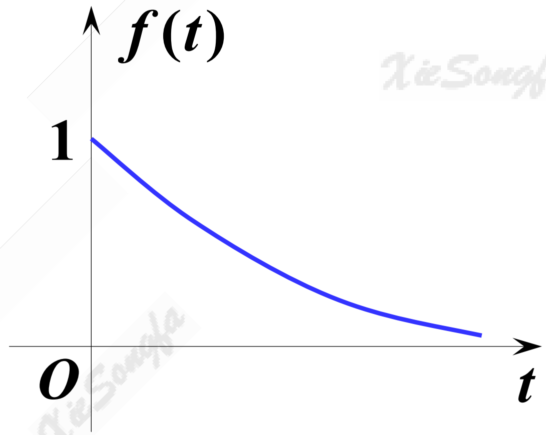
$$=\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t} \mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{-(\alpha+j\omega)} e^{-(\alpha+j\omega)t}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\alpha+j\omega}=\frac{\alpha-j\omega}{\alpha^2+\omega^2}.$$

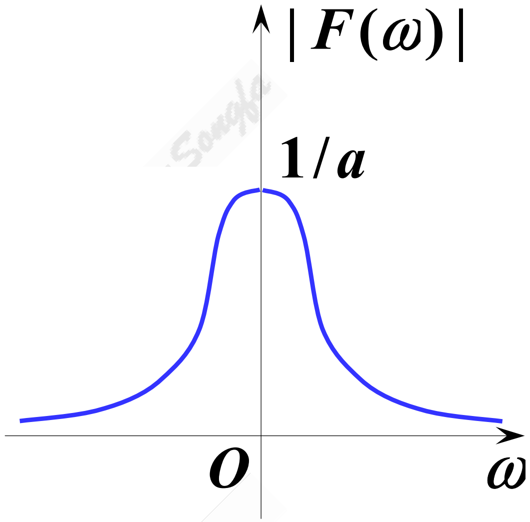
例 求单边衰减指数函数 $f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$ $(\alpha>0)$ 的 Fourier 变换，并画出频谱图。

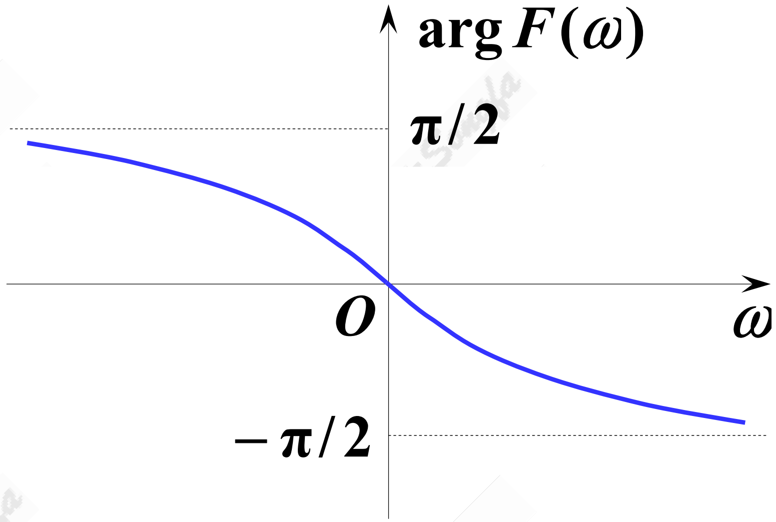
P191 例 8.4



解 (2) 振幅谱 $|F(\omega)|=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$;

相位谱 $\arg F(\omega)=-\arctan\dfrac{\omega}{\alpha}$.



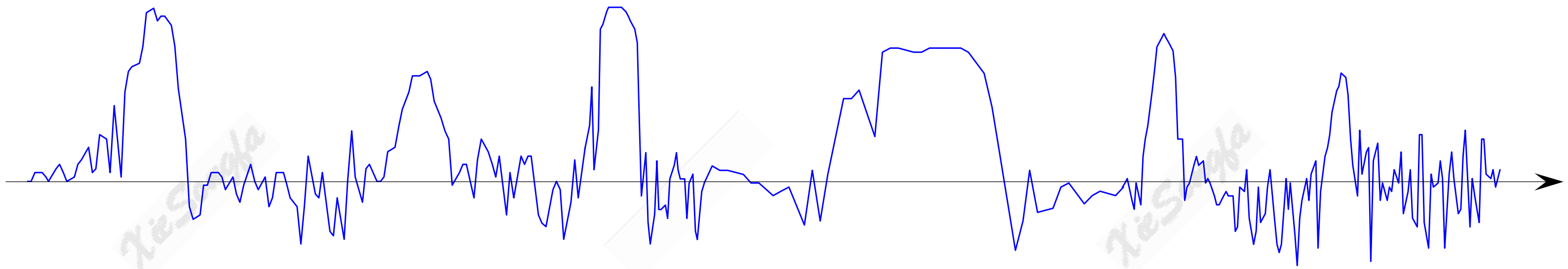


放松一下吧！······

附：背景知识与问题来源

漫谈信号的频率

今有：某信号如下，试问其频率几何？



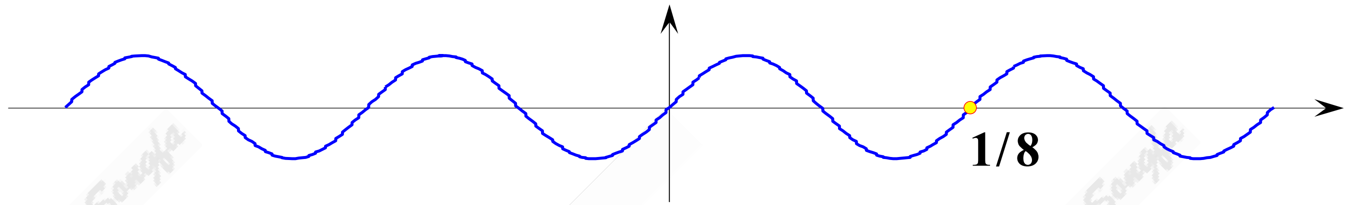
或曰：频率者，变化快慢也。细观之，该信号时而快，时而慢，快而慢，慢而快，频率何其杂也？

予曰：欲论频率，必先究谐波也。

附：背景知识与问题来源

漫谈信号的频率

引例　设有正弦信号为 $f(t)=3\sin(2\pi 8t)$，其中 t 的单位为秒。



则其基本周期为 $T=1/8$（秒），相应地，其频率为：

$$F=\frac{1}{T}=\frac{1}{1/8}=8\ (1/\text{秒})=8\ \text{赫兹}\ (\text{Hz}).$$

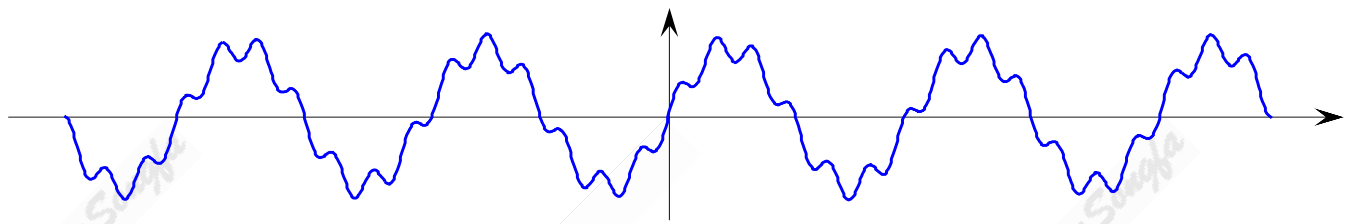
同理　信号 $f(t)=20\sin(2\pi 15t)$ 的频率为 15 Hz.

信号 $f(t)=19\cos(2\pi 64t+10)$ 的频率为 64 Hz.

附：背景知识与问题来源

● 漫谈信号的频率

试问 信号 $f(t)=10\sin(2\pi 5t)+2\sin(2\pi 32t)$ 的频率是多少？



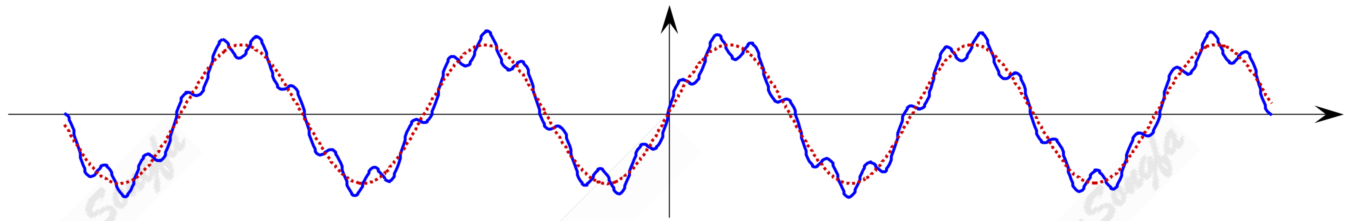
回答 该信号不是单一频率，它含有 **5Hz** 和 **32Hz** 的频率。

启示 (1) 在实际工程问题中，如果一个复杂信号由多个具有单一频率的信号混合叠加而成，自然地，就可以说该信号含有这些频率(成份)。

附：背景知识与问题来源

● 漫谈信号的频率

试问 信号 $f(t) = 10\sin(2\pi 5t) + 2\sin(2\pi 32t)$ 的频率是多少？



回答 该信号不是单一频率，它含有 **5Hz** 和 **32Hz** 的频率。

启示 (2) 在含有多个频率的复杂信号中，各个频率(成份)的权重(即组合系数)是不一样的。

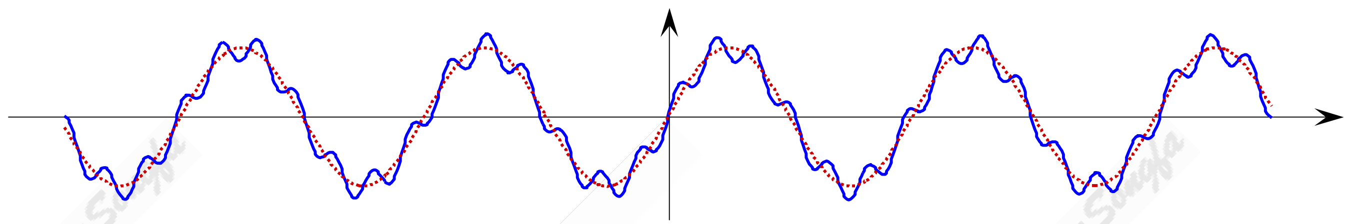
● 系数较大的频率(成份)通常表现了信号的轮廓。

系数较小的频率(成份)通常表现了信号的细节。

附：背景知识与问题来源

漫谈信号的频率

试问　信号 $f(t)=10\sin(2\pi 5t)+2\sin(2\pi 32t)$ 的频率是多少？



回答　该信号不是单一频率，它含有 **5Hz** 和 **32Hz** 的频率。

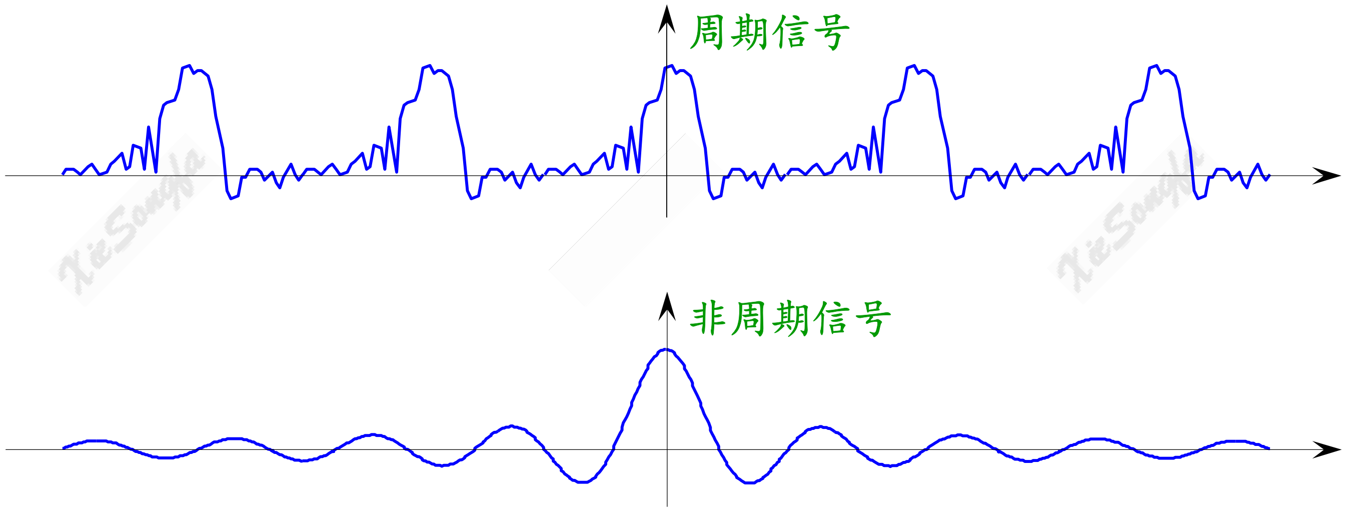
启示　(3) 因此，信号中所含有的频率以及这些频率（成份）的组合系数构成描述该信号的两类重要指标。

- 比如　在上述信号中，**5 Hz** 和 **32 Hz** 及系数 **10** 和 **2** 反映了该信号的本质特征。

附：背景知识与问题来源

- 漫谈信号的频率

追问　下列信号的频率又是多少?



想法　显然，如果能将上述信号分解为一些具有单一频率的正弦(或余弦)信号的组合，则问题就解决了。

- 这正是本节所要达到的目标!

附：背景知识与问题来源

1. 简谐波的基本概念

简谐波 $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) = a \cdot \cos\omega_0 t + b \cdot \sin\omega_0 t\,.$

其中，A 称为振幅，

ω_0 称为角频率，

θ 称为相位，（$\theta = 0$ 称为零相位）；

$T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 为基本周期，（单位：秒）

$F = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ 为频率。（单位：赫兹 Hz）

附：背景知识与问题来源

2. 由简谐波构成的函数系

函数系　考虑如下的函数系：

$$\{1,\ \cos\omega_0 t,\ \sin\omega_0 t,\ \cos 2\omega_0 t,\ \sin 2\omega_0 t,\ \cdots\ \cdots\}.$$

将这些函数分别记为：

$$\begin{cases} \varphi_0(t) = 1 \\ \varphi_1(t) = \cos\omega_0 t \\ \varphi_2(t) = \cos 2\omega_0 t \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \varphi_n(t) = \cos n\omega_0 t \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \end{cases} \qquad \begin{cases} \psi_1(t) = \sin\omega_0 t \\ \psi_2(t) = \sin 2\omega_0 t \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \psi_n(t) = \sin n\omega_0 t \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \end{cases}$$

附：背景知识与问题来源

2. 由简谐波构成的函数系

特点 (1) 正交性 令 $T=2\pi/\omega_0$，则有

$$\int_{-T/2}^{T/2}\varphi_m(t)\cdot\psi_n(t)\,\mathrm{d}t=0,\quad(\forall m,n);$$

$$\int_{-T/2}^{T/2}\varphi_k(t)\cdot\varphi_l(t)\,\mathrm{d}t=0,\quad(k\neq l),$$

$$\int_{-T/2}^{T/2}\psi_k(t)\cdot\psi_l(t)\,\mathrm{d}t=0,\quad(k\neq l).$$

(2) 周期性

$$\begin{cases}\varphi_k(t+T)=\varphi_k(t), & k=0,1,2,\cdots\cdots\\ \psi_k(t+T)=\psi_k(t), & k=1,2,\cdots\cdots\end{cases}$$

$$\{1,\ \cos\omega_0 t,\ \sin\omega_0 t,\ \cos 2\omega_0 t,\ \sin 2\omega_0 t,\ \cdots\ \cdots\}.$$

附：背景知识与问题来源

3. 问题的提出

- 显然，由 $\{\varphi_k(t)\}$, $\{\psi_k(t)\}$ 叠加可生成周期为 T 的复杂波。

问题　对于任何一个周期为 T 的（复杂）函数 $f_T(t)$，能否：

$$f_T(t) \overset{?}{=} A_0\varphi_0(t) + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\varphi_n(t) + b_n\psi_n(t)]$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n).$$

（返回）

- 历史回顾与人物介绍。

附：历史回顾 —— Fourier 级数

- 1807 年 12 月 12 日，在法国科学院举行的一次会议上，Fourier 宣读了他的一篇关于热传导的论文，宣称：

> 在有限区间上由任意图形定义的任何函数都可以表示为单纯的正弦与余弦函数之和。

- 经拉格朗日、拉普拉斯和勒让德三人(号称 3L)审阅后，认为其推导极不严密，被拒(锯)收。

附：历史回顾 —— Fourier 级数

- **1811** 年，**Fourier** 经过四年的努力，将修改好的论文：

  《关于热传导问题的研究》

  提交给法国科学院。

- 经过评审小组(**3L**)审阅后，认为其新颖、实用，从而在 **1812** 年获得科学院颁发的大奖，但仍以其不严密性被《论文汇编》拒(锯)收。

附：历史回顾 —— Fourier 级数

- **1822** 年，**Fourier** 经过十年的磨砺，终于出版了专著：

《热的解析理论》

- 这部著作将欧拉、伯努利等人在一些特殊情形下使用的三角级数方法，发展成为内容丰富的一般理论，特别是在工程应用方面显示出巨大的价值。

附：历史回顾 —— Fourier 级数

- **1829** 年，德国数学家 **Dirichlet** 终于对一类条件较宽的函数给出了严格的证明，时年 **24** 岁。

- **1830**年 **5** 月 **16** 日，**Fourier** 在巴黎去世。

启示

- 有价值的东西一定是真的；真的东西一定是美的。
- 坚持不懈的努力就一定会有收获。

附：人物介绍 —— 狄利克雷

狄利克雷

Dirichlet，Peter Gustav Lejeune

(1805～1859)

德国数学家

- 解析数论的创始人之一。
- 对数论、数学分析和数学物理有突出贡献。
- 对德国数学发展产生巨大影响。

附：人物介绍 —— 狄利克雷

- 1805 年 2 月13日，生于迪伦。

  中学时曾受教于物理学家 G. S. 欧姆。

- 1822 ～ 1826 年，在巴黎求学。

  回国后先后在布雷斯劳大学和柏林军事学院任教。

- 1839 年，任柏林大学教授。
- 1855 年，接任 C. F. 高斯在哥廷根大学的教授职位。
- 1859 年 5 月 5 日，于格丁根去世。

附：人物介绍 —— 傅立叶

傅立叶

Fourier，Jean Baptiste Joseph

(1768～1830)

法国数学家、物理学家

- 傅立叶级数、傅立叶分析等理论的始创人。
- **1822** 年，出版经典著作《热的解析理论》。

深入研究自然是数学发现最丰富的源泉。

—— **J. Fourier**

附：人物介绍 —— 傅立叶

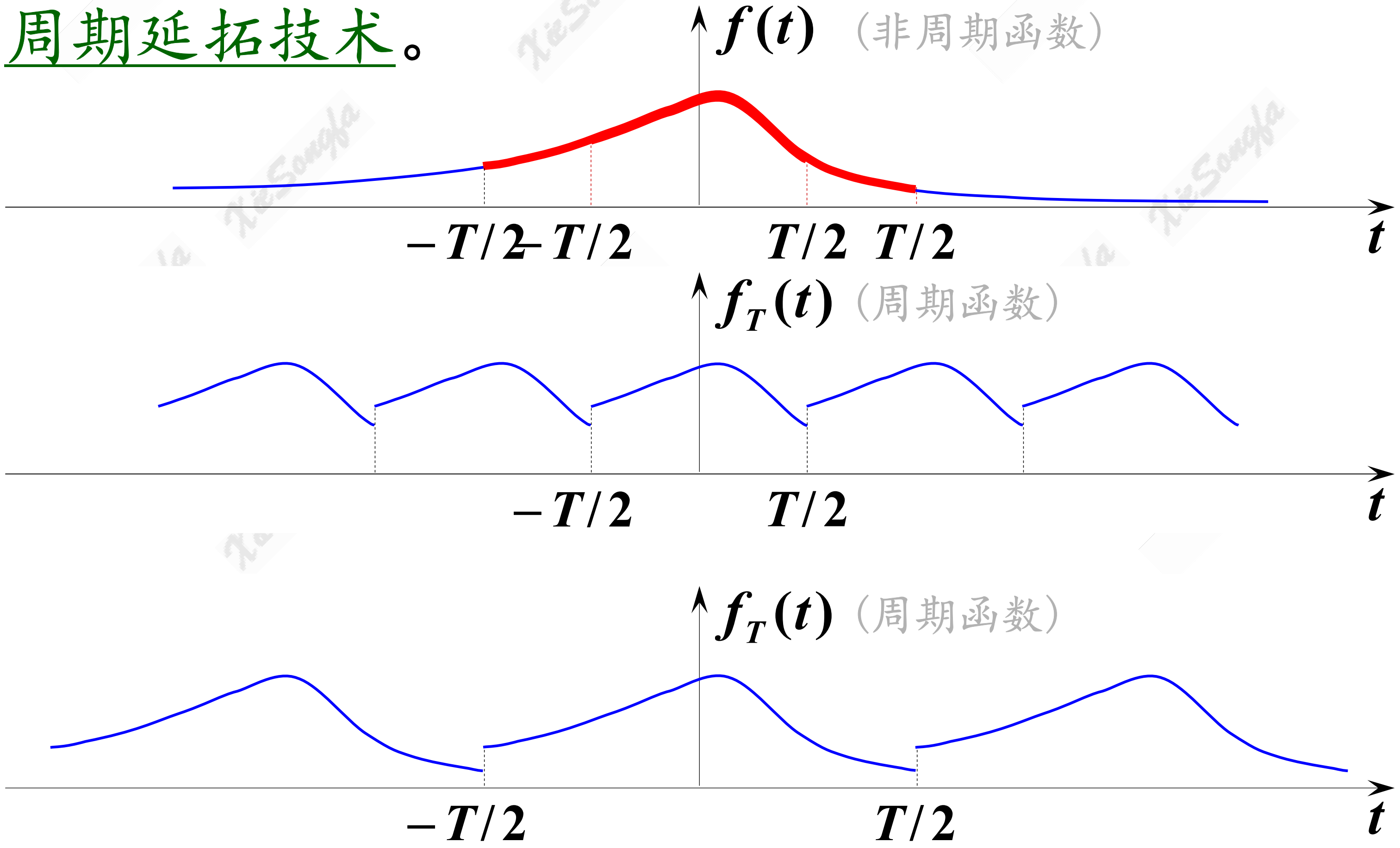
- 1768 年 3 月 21 日，生于法国欧塞尔一个裁缝家庭。
  九岁时父母双亡，十二岁由一主教送入军事学校读书。
- 1785 年，回乡教数学。
- 1795 年，任巴黎综合工科大学助教。
- 1798 年，随拿破仑军队远征埃及。
- 1801 年，回国后被任命为格伦诺布尔省省长。
- 1817 年，当选为法国科学院院士。
- 1822 年，任法国科学院终身秘书。
- 1830 年 5 月 16 日，于巴黎去世。

(返回)

附：从周期函数向非周期函数的演变

1. 非周期函数可以看作是周期为无穷大的“周期函数”。

手段　采用周期延拓技术。



结果　$f(t)=\lim\limits_{T\to+\infty} f_T(t).$

附：从周期函数向非周期函数的演变

2. 当周期 $T \to +\infty$ 时，频率特性发生了什么变化?

分析

- **Fourier** 级数表明，周期函数仅包含离散的频率成份，其频谱是以 $\omega_0 = 2\pi / T$ 为间隔离散取值的。

> 当 T 越来越大时，取值间隔越来越小；
>
> 当 T 趋于无穷时，取值间隔趋向于零，
>
> 即频谱将连续取值。

- 因此，一个非周期函数将包含所有的频率成份。

结论　离散频谱变成了连续频谱。

附：从周期函数向非周期函数的演变

3. 当周期 $T\to+\infty$ 时，级数求和发生了什么变化？

分析 (1) $f(t)=\lim\limits_{T\to+\infty}f_T(t)=\lim\limits_{T\to+\infty}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}$

P188

$$=\lim_{T\to+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f_T(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}.$$

将取值间隔 ω_0 记为 $\Delta\omega$，节点 $n\omega_0$ 记为 ω_n，

并由 $T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}=\dfrac{2\pi}{\Delta\omega}$，可得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\omega\to0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\underline{\left[\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega}f_T(t)\mathrm{e}^{-j\omega_n t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{j\omega_n t}}\,\Delta\omega \qquad (C)$$

附：从周期函数向非周期函数的演变

3. 当周期 $T \to +\infty$ 时，级数求和发生了什么变化？

分析 (2) 记 $g_T(\omega) = [\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f_T(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t] e^{j\omega t}$，则有

P 188

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega \to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_T(\omega_n) \Delta\omega.$$

按照积分定义，在一定条件下，(*C*) 式可写为：

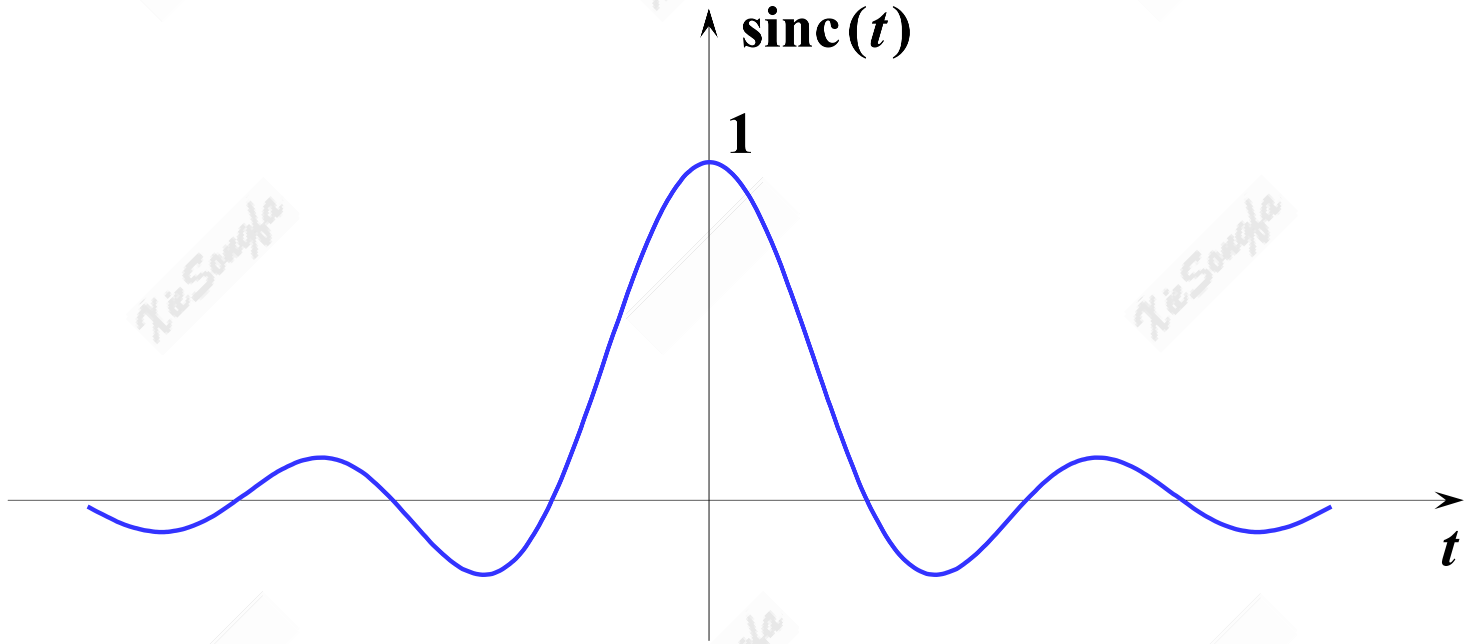
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t] e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega.$$

结论 级数求和变成了函数积分。

(返回)

附：抽样信号

- 通常将函数 $\dfrac{\sin t}{t}$ 称为抽样信号，记为 $S_a(t)$ 或 $\operatorname{sinc}(t)$.

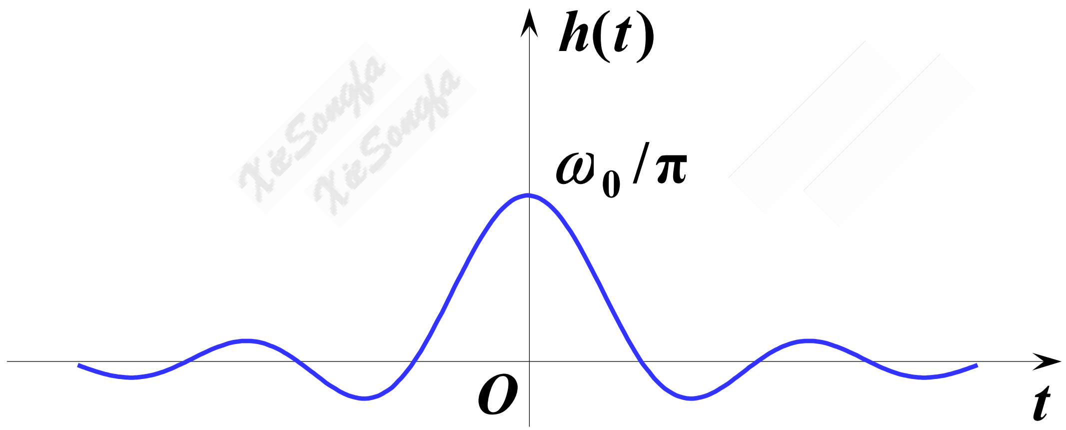


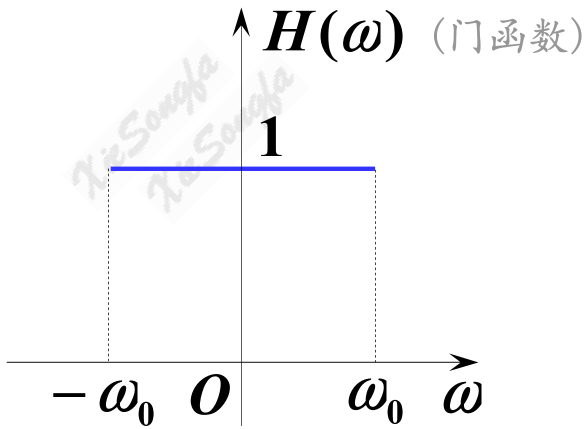
- 抽样信号在连续(时间)信号的离散化、离散(时间)信号的精确恢复以及信号的滤波中发挥着重要的作用。

附：低通滤波

- 函数 $h(t)=\dfrac{\omega_0}{\pi}S_a(\omega_0 t)$ 称为理想低通滤波因子；

它所对应的频谱函数 $H(\omega)$ 称为理想低通滤波器。





- 用理想低通滤波器 $H(\omega)$ 与其它信号的频谱函数相乘时，

能使信号的低频成份完全保留，高频成份完全压制。

（返回）

放松一下吧！……