第二章　解析函数

第一讲 解析函数的概念及其判定

数学与统计学院
吴慧卓

主要内容

1. 复变函数的导数及其微分
2. 导数举例及求导法则
3. 解析函数的概念
4. 判定函数在一点可导的方法
5. 判定函数在区域内解析的方法

主要内容

1. 复变函数的导数及其微分
2. 导数举例及求导法则
3. 解析函数的概念
4. 判定函数在一点可导的方法
5. 判定函数在区域内解析的方法

回顾　　实变函数的导数与微分的概念

一元函数

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\rho(\Delta x)\Delta x$$

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\text{极限存在}} \Leftarrow \boxed{\text{连续}} \Leftarrow \boxed{\text{可导}} \Leftrightarrow \boxed{\text{可微}}$$

1 复变函数的导数及其微分

复变函数的导数 设函数 $w = f(z)$ 定义于区域 $D \subseteq C$,

若极限 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

存在，则称 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 点可导， 并把这个极限值称为

$f(z)$ 在 $z = z_0$ 点的导数，记做

$$f'(z_0) = \left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

若 $f(z)$ 在区域 D内每一点都可导，则称 $f(z)$ 在区域 D内可导.

可导与连续 $$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$0<|\Delta z|<\delta$时，恒有

$$\left|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-f'(z_0)\right|<\varepsilon$$

令$\rho(\Delta z)=\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-f'(z_0)$

则$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$,

由此得，$f(z_0+\Delta z)\text{-}f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z$

例1 考察 $f(z)=\bar{z}$ 的连续性与可导性.

解 $$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$\Delta y=k\Delta x$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x-ik\Delta x}{\Delta x+ik\Delta x}=\frac{1-ik}{1+ik}$$

极限不存在，虽处处连续，但处处不可导.

复变函数的微分 设函数 $w = f(z)$ 在 $z_0 \in D$ 可导，

令 $$\rho(\Delta z) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0)$$

则 $$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \rho(\Delta z)\Delta z$$

其中，$\lim\limits_{\Delta z \to 0} \rho(\Delta z) = 0.$ 且 $\Delta z \to 0, |\rho(\Delta z)\Delta z|$ 是关于 $|\Delta z|$

的高阶无穷小，则称 $f'(z_0)\Delta z$ 为函数 $w = f(z)$ 在 z_0 处的微分，

记作 $$\boxed{\mathrm{d}w = f'(z_0)\Delta z = f'(z_0)\mathrm{d}z}$$

若函数 $w = f(z)$ 在 z_0 的微分存在，则称函数在 z_0 可微.

若 $f(z)$ 在区域 D 内每一点都可微，则称 $f(z)$ 在**区域 D 内可微.**

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{极限存在}} \arrow[r, dashed, shift left] & \boxed{\text{连续}} \arrow[l, Rightarrow, shift left] \arrow[r, dashed, shift left] & \boxed{\text{可导}} \arrow[l, Rightarrow, shift left] \arrow[r, shift left] & \boxed{\text{可微}} \arrow[l, Rightarrow, shift left] \end{tikzcd}$$

主要内容

1. 复变函数的导数及其微分
2. 导数举例及求导法则
3. 解析函数的概念
4. 判定函数在一点可导的方法
5. 判定函数在区域内解析的方法

2 导数举例及求导法则

例2 求 $f(z)=z^2$ 的导数.

解 $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{2z\Delta z}{\Delta z}=2z$$

一般的, $(z^n)'=nz^{n-1}, n\in Z^+$

例3 讨论 $f(z)=2x-yi$ 可微性.

解

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{2\Delta x\text{-}i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}\frac{2\Delta x-ik\Delta x}{\Delta x+ik\Delta x}=\frac{2-ik}{1+ik}$$

故 $f(z)=2x-yi$ 处处不可导, 从而处处不可微.

对于一个复变函数，即使实部和虚部都可微，但也可能处处不可微.

求导公式与法则

(1) $(c)' = 0$，其中c为复常数.

(2) $(z^n)' = nz^{n-1}$，其中n为正整数.

(3) $[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z)$.

(4) $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.

(5) $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]' = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, (g(z) \neq 0)$.

(6) $\{f[g(z)]\}' = f'(w)g'(z)$, 其中 $w = g(z)$.

(7) $f'(z) = \dfrac{1}{\varphi'(w)}$，其中 $w = f(z)$ 与 $z = \varphi(w)$ 互为反函数且都是单值函数.

主要内容

1. 复变函数的导数及其微分
2. 导数举例及求导法则
3. 解析函数的概念
4. 判定函数在一点可导的方法
5. 判定函数在区域内解析的方法

3 解析函数的概念

函数在一点解析的定义

设 $z_0 \in D$, 若存在 z_0 的一个邻域，使得 $f(z)$ 在此邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 处解析. 也称 z_0 是 $f(z)$ 的解析点.

若 $f(z)$ 在 z_0 不解析，则称为 $f(z)$ 的奇点.

如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析，则称 $f(z)$ 在D内解析.

定理1 若 $f(z)$ 在区域D内可导，则 $f(z)$ 在区域D内解析.

结论： 函数在一点解析与在一点可导**不等价，解析要求高.**

函数区域内解析与区域内可导是等价的.

思考题

（1）有没有这样一个函数，只在一点解析，而在这点的邻域内不解析？

（2）闭区域解析与闭区域可导是否等价？

（3）如果函数 $f(z)$ 在曲线C上可导，是否在该曲线上解析？

结论： 设函数 $f(z), g(z)$在区域D内解析，则

$$f(z)\pm g(z),\ f(z)g(z), \frac{f(z)}{g(z)}$$ （除去分母为0的点）

在区域D内解析.

特别地，

（1）多项式 $p(z)$ 在全平面内解析.

（2）有理分式在复平面内除分母为零的点之外解析.

例4 研究下列函数的解析性.

$$(1)\ f(z)=z^2;\quad (2)\ g(z)=2x-yi;$$

$$(3)\ \varphi(z)=\frac{1}{z};\quad (4)\ h(z)=|z|^2.$$

解 $(1)\ f'(z)=2z,\quad f(z)$处处可导，处处解析；

$(2)\ g(z)=2x-yi$由例3知，处处不可导，处处不解析；

$$(3)\ \varphi(z)=\frac{1}{z},\ \varphi'(z)=-\frac{1}{z^2}\quad (z\neq 0)$$

除去 $z=0$ 的复平面内处处解析.

$$(4)\ h(z)=|z|^2$$

$$\frac{h(z+\Delta z)-h(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)\overline{z+\Delta z}-z\overline{z}}{\Delta z}=\overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

当 $z=0$时，上述极限存在且为0.

当 $z\neq 0$ 时，

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}\frac{\Delta x-ik\Delta x}{\Delta x+ik\Delta x}=\frac{1-ik}{1+ik}$$

$h(z)$ 仅在 $z=0$ 处可导，故处处不解析.

主要内容

1 复变函数的导数及其微分

2 导数举例及求导法则

3 解析函数的概念

4 判定函数在一点可导的方法

5 判定函数在区域内解析的方法

回顾　　二元实变函数微分的概念

可微的定义 设 $z = f(x, y)$ 在 $U(x_0, y_0)$ 内有定义，且

$$\forall \Delta x, \Delta y,\ (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U(x_0, y_0)$$

若 $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

$$= a_1 \Delta x + a_2 \Delta y + o(\rho)$$

则称 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微.

可微的充分条件　当 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ 连续时，$z = f(x, y)$ 可微.

假设 $w = f(z)$ 在点 $z = x + iy$ 可微，有

$$\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + \rho(\Delta z)\Delta z, \quad \lim_{\Delta z \to 0} \rho(\Delta z) = 0,$$

令 $f(z+\Delta z) - f(z) = \Delta u + i\Delta v$，$f'(z) = a + ib$,

$$\rho(\Delta z) = \rho_1 + i\rho_2 \ ,$$

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v = (a+ib)\cdot(\Delta x + i\Delta y)$$

$$+(\rho_1 + i\rho_2)\cdot(\Delta x + i\Delta y)$$

$$= (a\Delta x - b\Delta y + \rho_1\Delta x - \rho_2\Delta y)$$

$$+i(b\Delta x + a\Delta y + \rho_2\Delta x + \rho_1\Delta y)$$

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v = (a + ib)\cdot(\Delta x + i\Delta y)$$

$$+(\rho_1 + i\rho_2)\cdot(\Delta x + i\Delta y)$$

$$= (a\Delta x - b\Delta y + \rho_1\Delta x - \rho_2\Delta y)$$

$$+i(b\Delta x + a\Delta y + \rho_2\Delta x + \rho_1\Delta y)$$

于是 $\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \rho_1\Delta x - \rho_2\Delta y,$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \rho_2\Delta x + \rho_1\Delta y.$$

$\because \lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z) = 0, \quad \rho(\Delta z) = \rho_1 + i\rho_2$,

$\therefore \rho_1 \to 0, \rho_2 \to 0\left(\Delta x \to 0, \Delta y \to 0\right)$

于是 $\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \rho_1\Delta x - \rho_2\Delta y,$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \rho_2\Delta x + \rho_1\Delta y.$$

$\because \lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z) = 0, \quad \rho(\Delta z) = \rho_1 + i\rho_2$,

$\therefore \rho_1 \to 0, \rho_2 \to 0\left(\Delta x \to 0, \Delta y \to 0\right)$

$\because 0 < \left|\dfrac{\rho_1\Delta x - \rho_2\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\right| < |\rho_1| + |\rho_2| \to 0$

$$\boxed{f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}}$$

$\therefore \rho_1\Delta x - \rho_2\Delta y = o\left(\rho\right)$

$$\Uparrow$$

故 $u(x, y)$是可微的，且 $\boxed{a = \dfrac{\partial u}{\partial x}, b = -\dfrac{\partial u}{\partial y}.}$ $\quad f'(z) = a + ib$

同理 $v(x,y)$是可微的，且 $b=\frac{\partial v}{\partial x}, a=\frac{\partial v}{\partial y}$. $\boxed{a=\frac{\partial u}{\partial x}, b=-\frac{\partial u}{\partial y}.}$

于是得到，$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

复变函数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

在任意一点 $z=x+iy$ 可微(即可导)的必要条件是

$u(x,y)$,$v(x,y)$在(x,y)处都可微，且满足Cauchy-Reiman

方程，

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.}$$

定理1 复变函数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

在**任意一点** $z=x+iy$ 处**可微(即可导)**的**充分必要条件**是

$u(x,y),v(x,y)$在(x,y)处都可微，且满足Cauchy-Reiman

方程，$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

推论1

$$\boxed{f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}}$$

$$=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

注意定理的条件

例5 证明函数 $f(z)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $z=0$ 满足C-R方程，但在点 $z=0$ 不可导.

解 $u=\sqrt{|xy|}$

$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0.$$

同理，$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial y}=0.$$

$$\because v(x,y)=0,\quad \therefore \frac{\partial v(0,0)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v(0,0)}{\partial y}=0.$$

$$u=\sqrt{|xy|}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{u(x,y)-u_x(0,0)x-u_y(0,0)y}{\rho}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{\sqrt{|x\cdot kx|}}{\sqrt{x^2+k^2x^2}}=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{1+k^2}}.$$

故 $u(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微，从而 $f(z)$ 在 $z=0$ 不可导.

主要内容

1 复变函数的导数及其微分

2 导数举例及求导法则

3 解析函数的概念

4 判定函数在一点可导的方法

5 判定函数在区域内解析的方法

5 判定函数在区域内解析的方法

定理1 复变函数 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

在任意一点 $z = x + iy$ 处可微(即可导)的充分必要条件是

$u(x, y), v(x, y)$在(x, y)处都可微，且满足Cauchy-Reiman

方程，
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

5 判定函数在区域内解析的方法

定理2 复变函数 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

在区域 D 内可微(即可导)的充分必要条件是

$u(x, y), v(x, y)$在 D内可微，且在 D 内满足Cauchy-Reiman

方程，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

推论2 如果 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在区域 D 内各个一阶偏导数连续（从而可微），并且满足 C-R 方程，则函数 $f(z)$ 在区域 D 解析.

注意：

在讨论函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的极限与连续问题时，等价于讨论两个二元实变函数的极限与连续问题，对 U 和 V 之间的关系没有任何要求. 但在讨论可导与解析性时，即使 U 和 V 均可导，$f(z)$ 也未必可导当然更未必解析。需要考虑 C-R.

总结　解析函数的判定方法

(1) 如果能够用定义、求导公式或求导法则验证复变函 $f(z)$ 的导数在区域D内处处存在，则可直接断定 $f(z)$ 在区域 D 内解析.

(2) 验证 u 和 v 是否满足 C-R 方程，以及 u 和 v 是否可微.

(3) 如果 $f(z)$ 解析，$g(z)$ 不解析，则 $f(z)g(z)$ 在 $f(z)\neq 0$ 时不解析.

例6 判断下列函数的可导性与解析性.

$$(1)\ f(z)=z\,\mathrm{Re}(z);\quad (2)\,g(z)=\bar{z}z^2;\quad (3)\,h(z)=\frac{2z^2+z-1}{\left(z^2+1\right)^2}.$$

解 设 $z=x+iy$

$$(1)\ f(z)=x^2+ixy;\quad u=x^2, v=xy.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=y,\frac{\partial v}{\partial y}=x.$$

根据 C-R 方程，仅当 $x=y=0$ 时，$f(z)$可导, 故处处不解析.

$$(2)g(z)=(x^2+y^2)(x+iy).$$

$$u=x^3+xy^2,\ v=x^2y+y^3.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+y^2,\frac{\partial u}{\partial y}=2xy.\quad \frac{\partial v}{\partial x}=2xy,\frac{\partial v}{\partial y}=x^2+3y^2.$$

根据 C-R 方程，仅当 $x=y=0$ 时，$g(z)$可导，故处处不解析.

$$(3)h(z)=\frac{2z^2+z-1}{\left(z^2+1\right)^2}$$

当 $z\neq\pm i$ 时，$h(z)$ 处处可导，

故在除去i 和 $-i$ 的复平面上，$h(z)$ 处处解析.

例7 证明函数 $f(z)=e^{x}(\cos y+i\sin y)$

是复平面 C 上的解析函数，且 $f'(z)=f(z)$.

证明 $u=e^{x}\cos y, v=e^{x}\sin y$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x}\cos y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^{x}\sin y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^{x}\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^{x}\cos y,$$

一阶偏导连续，且满足 C-R 方程，所以 $f(z)$ 处处解析.

$$\therefore f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^{x}\left(\cos y+i\sin y\right)=f(z).$$

例8 如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零,

则 $f(z)$ 在区域 D 内为常数.

证明

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\equiv 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

从而 $u=$ 常数, $v=$ 常数.

故 $f(z)$ 在 D 内为常数.